



山东大学
SHANDONG UNIVERSITY

毕业论文

论文题目： 引力波散射中库伦发散问题的理论研究
Theoretical research on the Coulomb divergence problem
in gravitational wave scattering

姓 名	夏凌羽
学 号	202122171280
学 院	泰山学堂
专 业	物理学
年 级	2021 级
指导教师	张宏教授

2025 年 5 月 28 日

摘要

引力波与其他天体的散射过程具有非常重要的研究意义。自上世纪中期以来，人们对于不含时的散射进行了详细的研究，最经典的研究方法是分波法，其在短程势情况下的计算非常成功。因此，基本场在黑洞的弯曲时空下的散射具有非常基础且广泛的研究意义。但是，我们对于在引力势能为代表的长程势能的情况下散射过程研究有限，一个关键障碍就是计算散射振幅时分波求和缺少收敛性^[1-2]。我们的主要工作是要构建一个基本场的散射行为的理论框架来解决上述的发散问题：即抛弃传统分波法中的平面波入射假设，考虑波源与散射源的长程势能的共同影响，分析从波源到散射源再到观察者的传播过程，从而解决散射振幅的发散性难题。同时，我们也会使用我们的理论框架与目前处理长程势的分波法进行比较，来验证结果的收敛性；也会与目前数值模拟的引力波散射结果进行比较，来验证我们的理论框架的有效性。

关键词：引力波；散射；黑洞；两电荷库伦波方程

ABSTRACT

The scattering process between gravitational waves and other celestial bodies is very important to study^[3]. Since the middle of last century, the time-independent scattering has been studied in detail. The most classical method is the partial wave method, which is very successful in calculating the short-range potential. Therefore, the scattering of the fundamental field in the curved space-time of the black hole has a very basic and extensive research significance. However, we have limited research on the scattering process in the case of gravitational potential energy represented by long-range potential energy, and a key obstacle is the lack of convergence in calculating the scattering amplitude TDR summation^[1-2]. Our main work is to construct a theoretical framework of the scattering behavior of the basic field to solve the above divergence problem: that is, abandoning the plane wave incident hypothesis in the traditional wave splitting method, considering the common influence of the long-range potential energy of the wave source and the scattering source, analyzing the propagation process from the wave source to the scattering source and then to the observer, so as to solve the divergence problem of the scattering amplitude. At the same time, we will also use our theoretical framework to compare with the current partial wave method dealing with long range potential to verify the convergence of the results. The results of the current numerical simulation of gravitational wave scattering are also compared to verify the validity of our theoretical framework.

Key Words: Gravitational Wave, Scattering, Black Hole, Two-Center Continuum Coulomb Wavefunctions

目 录

第一章 绪论	1
1.1 引力波简介	1
1.2 散射理论	3
1.3 论文的组织结构	4
第二章 系统与模型	5
2.1 基础散射理论介绍	5
2.2 两点连续库伦波方程	7
2.2.1 两点连续库伦波方程的导出	8
2.2.2 角向函数	9
2.2.3 径向方程	11
2.3 椭球坐标下单电荷散射	13
2.3.1 角向方程与径向方程	13
2.3.2 单电荷的散射振幅	14
2.4 局域区场方程分析	15
2.4.1 黑洞近场场方程	15
2.4.2 局域场散射相移	17
2.5 边界条件匹配方法	20
2.5.1 基本思路	20
2.5.2 一种可能的匹配方法	21
第三章 数值计算	25
3.1 径向方程的数值计算	25
3.2 径向方程的数值计算	26
第四章 总结与展望	27
4.1 总结	27
4.2 展望	28

附录 A 两点连续库伦波函数的补充	30
A.1 函数的完整解	30
A.2 求和系数的定义	31
A.3 分离常量与本征值的计算方法	31
参考文献	34
致 谢	37

第一章 绪论

在 2016 年, 激光干涉引力波天文台 (Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory, LIGO) 与 Virgo 科学合作组织共同报告了所观测到的引力波事件 GW150914^[3], 这是人类第一次观测到引力波事件, 其开启了一个全新的窥探宇宙奥秘的方式: 通过引力波来了解宇宙的信息。这推动了多信使天文学的发展, 许多大科学装置如天琴计划^[4-5]、太极计划^[6]等正在有序推进中。

本文章所研究的引力波散射理论是为了提供一个引力波在发生散射过程的波函数计算方法, 可以为引力波数值模拟和引力透镜现象观测提供一个更精确更方便的计算方法。我们在绪论部分将首先介绍引力波的研究历史, 然后我们会介绍引力波散射理论的研究进展。

1.1 引力波简介

我们简要介绍一下引力波发现的历史。1916 年, 爱因斯坦在其《引力场方程的近似积分》论文中^[7], 根据广义相对论的框架首次推导出引力波的存在。他认为, 在质量以加速度运动时, 会在弯曲的时空中产生“涟漪”, 并以光速向外传播。这一波动现象与电磁波相似, 他并且给出三种类型不同的引力波¹, 但由于引力效应非常微弱, 远低于当时实验设备的探测极限。在爱因斯坦之前, 亨利·庞加莱等学者就曾提出“类似电磁波”的思想^[8], 即认为在加速度运动时, 质量也可能会产生辐射效应。

随后, 爱因斯坦的结论受到了质疑。他在 1936 年与纳森·罗森在《物理评论》中发表的《引力波存在吗?》一文中表示, 引力波在广义相对论中不存在。但随后文章经过同行的评议并修改为了相反的结论, 以新的标题《论引力波》转而发表在了《富兰克林会社期刊》。为了实证引力波的存在, 需要选择合适的坐标系来计算实验可测的物理量, 皮拉尼于 1956 年在文章《论黎曼张量的物理意义》中解决了这一问题^[9]。最后, 皮拉尼等人在广义相对论的框架下表明了引力波的存在并提供了引力波精确解的明确例子^[10]。

引力波的探测的过程十分曲折。20 世纪 60 年代, 美国物理学家约瑟夫·韦伯设计了最早的重力波探测器——“韦伯棒”^[11]。这种共振质量探测器利用铝制圆柱体在特定共

¹它们也为“纵纵波”、“纵横波”与“横横波”。

振频率下因引力波而发生微小振动，进而通过附着的传感器转换为电信号。然而，韦伯声称在 1969 年首次探测到信号，后续其他实验室多次尝试复现均未成功，因而韦伯棒实验最终未被学界接受为确凿证据^[8]。1974 年，拉塞尔·赫尔斯与约瑟夫·泰勒发现了脉冲双星系统 PSR B1913+16（赫尔斯－泰勒脉冲双星）^[12]。该系统中，两颗中子星围绕共同质心运转，并因持续散发重力波而损失能量，导致它们的轨道逐渐收缩。长期对该系统的精密计时结果与广义相对论中关于能量损失的计算吻合得极为出色，为引力波存在提供了最有力的间接证据，并因此两人于 1993 年获得诺贝尔物理学奖。在 1970 年代末到 1980 年代初，科学家们开始探索利用激光干涉仪进行引力波探测。



图 1.1：此为 LIGO 汉德福天文台照片，可以看到两个延伸几公里的激光干涉臂^[13]

1984 年，美国加州理工学院、麻省理工学院与其他机构联合发起了激光干涉引力波天文台（LIGO）项目^[13]。该项目旨在建造两个相距数千公里的独立探测器，以便通过互相关比较来排除局部干扰噪声，我们可以看到图 1.1 中所拍摄的位于华盛顿州汉德福天文台的激光干涉仪。经过十多年艰苦工作与技术研发，初始 LIGO 于 1999 年建成，虽然在 2002–2010 年期间未捕捉到信号，但为后续工程积累了宝贵经验。2010 年以后，LIGO 进入了升级阶段——先进 LIGO（Advanced LIGO）。经过多项技术改进（如更长的干涉臂、多重光学腔体、低噪声悬挂系统以及更高激光功率等），先进 LIGO 的灵敏度较初始版本有大幅提升，探测距离提升近十倍，使得实际探测的宇宙体积增加了约 1000 倍。2015 年 9 月 14 日，先进 LIGO 在美国路易斯安那州和华盛顿州的两台探测器几乎同时捕获到一段来自约 13 亿光年之外双黑洞合并事件（后来被命名为 GW150914）的引力波信号^[3]。信号特点符合广义相对论预测的“啁啾”型（chirp）波形，即频率随着时

间增加而上升。此后, LIGO 及其欧洲伙伴处女座干涉仪 (VIRGO) 又陆续探测到其他多起引力波事件, 包括双黑洞合并和双中子星合并 (GW170817) 等^[14-15], 从而正式拉开了引力波天文学时代的序幕。

1.2 散射理论

散射是物质相互作用的一个基本表现形式, 不论是高能物理的对撞机探究新物理, 还是湛蓝色的天空的形成, 都离不开散射的作用。而对于宇宙, 充斥在宇宙中的电磁波和引力波每时每刻都有与大质量天体发生着散射作用, 包括引力透镜在内的许多现象都是散射的体现。如果我们希望进一步了解宇宙中内涵的信息, 研究电磁波和引力波等的散射的意义重大。尤其是研究黑洞的强弯曲时空对基本场的散射具有非常基础研究意义。

研究散射问题的基本方法是量子力学中介绍的分波法 (Partial Wave Method)。其主要思想是将散射过程分离成两部分, 其中一部分是从无穷远处传播到散射源的平面波, 另外一部分在散射源处产生的散射波, 我们将散射源处在极坐标下用球谐函数为基底进行级数展开, 会得到一个特殊函数为基底的无穷级数, 而求和的每一项被称之为分波, 也就是意味着我们把散射波展开成了无数“分波”的叠加。我们会在第二张详细介绍分波法的理论框架。

我们再回到希望解决的问题, 也就是处理标量波、矢量波 (电磁波) 或者张量波 (引力波) 在黑洞背景下的弯曲时空散射问题¹, 其处理思路也是以分波法为基础。自 20 世纪 60 年代以来, 人们对不含时的散射情况进行了详细的研究^[16-18]。但是, 我们使用分波法处理长程势情况时, 尤其是在计算以任意入射角撞击旋转黑洞的电磁波或引力波的散射振幅, 目前还没有精确的计算方法。其主要原因在于我们计算散射分波的振幅时, 会出现级数求和发散。这个问题在量子场论中也会讨论, 被称为红外发散^[19]。这个问题在近十年仍然有很多学者尝试解决, 但是都是基于解决分波级数的发散性为出发点^[2,20-23]。比如, Sam Dolan 提出给分波级数加上一个退化因子用来消除分波级数的发散性, 尤其是在小角度散射时的发散问题^[2]; Wendu Li 则认为分波发散源于平面波的分波分解会导致发散, 因此希望设置一个带有限边界的“平面波”入射条件, 再使用分波法处理散射^[20]。这些方法都解决部分的发散性的问题, 但是都有局限性, 仍然没有很好的精确求解分波级数的发散问题。

而对于靠近黑洞的区域, 我们已经了非常成熟的理论分析方法。我们考虑最一般的

¹这里也对应着场的自旋 $s = 0$ 、 $s = 1$ 和 $s = 2$ 的情况。

散射源是克尔黑洞（旋转的黑洞）的情况。在散射源处，单个克尔黑洞的引力影响占主导，计算波函数在克尔黑洞附近的行为已经有了非常成熟的方法，尤其是以 Teukolsky 方程为代表的理论^[24-26]，使用 Newman- Penrose 形式完整的描述了在克尔黑洞附近的行为^[27]，而我们对于其中最为关注的是从波在黑洞附近散射后产生的相移（Phase Shift），也就是入射波进入黑洞之后并与黑洞发生相互作用后散射出来携带的信息，这是一种对于散射问题的简化。

目前，我们对于目前处理引力波散射问题时，往往采用数值模拟的方法，因此需要消耗巨大的计算资源^[28]。所以，提出一个能够克服当前分波法的局限的新方法是十分必要的。

1.3 论文的组织结构

本论文主要分为三个部分，首先是对于散射理论的介绍，我们会先简要介绍散射的基本方法分波法，然后再介绍我们提出新的理论框架，并给出我们期望能解决的问题。其次是数值验证部分，我们会使用我们的理论框架得到的理论结果通过数值计算来验证我们是否解决了分波法的发散问题。最后是对前两部分的总结与分析部分，并且给出未来需要改进的地方与我们理论的应用。

在全文中所有解析求解的部分，我们均采用自然单位制，设 $G = \hbar = c = 1$ 。

第二章 系统与模型

2.1 基础散射理论介绍

研究散射问题的基本方法是量子力学中介绍的分波法 (Partial Wave Method)^[29]。

我们考虑一个入射粒子被一个中心势场散射，考虑到波函数的对称性，我们可以对其进行分离变量：

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (2.1)$$

其中 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ 是球谐函数，而 $u(r) = rR(r)$ 满足径向方程

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} u = 0, \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

对于这个方程，我们可以在不同的尺度，按照方程不同项的收敛速度来分成不同的处理

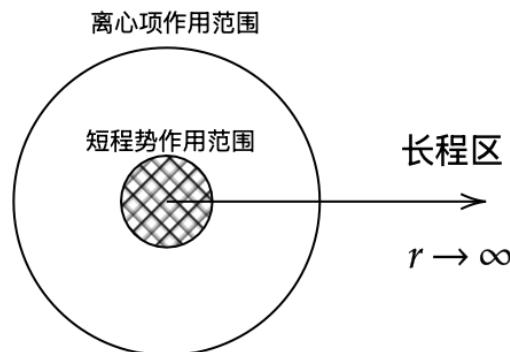


图 2.1: 势能作用范围示意图，我们将空间按照方程不同项的收敛速度分成三个区域：长程区、离心势能区和短程势能区

区域。在通常的问题中，处理的势能是短程势能，如 Yukawa 势 $V(r) \sim e^{-\mu r}/r$ ，因此其收敛速度是最快的，我们将短程势占主导的区域称为短程势能区，随着距离的增加，势能项衰减，而离心势占主导，我们称为离心势能区；当距离更远的时候 $r \rightarrow \infty$ ，我们忽略了所有衰减项的作用，这里我们称为长程区，在光学里也称为辐射区。

我们首先考虑长程区，在 $r \rightarrow \infty$ 时，原方程退化到波动方程

$$\frac{d^2u}{dr^2} + k^2u = 0 \quad (2.3)$$

其中 $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ ，其通解为 $Ae^{ikr} + Be^{-ikr}$ ，那么径向波函数的通解就是两个传播方向的球面波的叠加

$$R(r) = A \frac{e^{ikr}}{r} + B \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (2.4)$$

其中 k 的正负方向代表了发散和汇聚的传播方向，我们需要研究散射波，那么取 $B = 0$ ，则径向波函数的形式为

$$R(r) = A \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2.5)$$

我们再考虑离心势能区的波函数形式，此时方程的形式为

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = 0 \quad (2.6)$$

其通解由第一类汉克尔函数和第二类汉克尔函数描述，因为其在无穷远处的渐进行为是 $e^{\pm ikr}$ 的行波形式，由于只考虑散射波，我们只取渐进行为是发散波的特殊函数，因此

$$h_l^{(1)}(x) \sim (-i)^{l+1} \frac{e^{ix}}{x} \quad (2.7)$$

我们得到在离心势能区的径向波函数的解为

$$R(r) \sim h_l^{(1)}(kr) \quad (2.8)$$

则波函数的完整形式可写为

$$\psi(r, \theta, \phi) = A \left[e^{ikz} + \sum_{l,m} C_{lm} h_l^{(1)}(kr) Y_{lm}(\theta, \phi) \right] \quad (2.9)$$

其中 e^{ikz} 部分是入射的平面波，求和部分代表了散射波，考虑到沿入射方向为轴的旋转对称性，球谐函数会退化为勒让德函数

$$Y_{l0} \sim \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \quad (2.10)$$

因此，求和部分可以重新写为

$$\psi(r, \theta, \phi) = A \left[e^{ikz} + k \sum_l a_l i^{l+1} (2l+1) h_l^{(1)}(kr) P_l(\cos \theta) \right] \quad (2.11)$$

这里我们可以理解分波法的含义，也就是散射波被分解为了 l 个振幅分别为 a_l 的“分波”，且在 $r \rightarrow \infty$ 时候，求和会退化为

$$\psi \sim A \left[e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right] \quad (2.12)$$

其中

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l P_l(\cos \theta) \quad (2.13)$$

如果将平面波也分解到以勒让德函数为基底的求和中，我们可以写为

$$\psi(r, \theta) = A \sum_l i^{l+1} (2l+1) \left[j_l(kr) + i k a_l h_l^{(1)}(kr) \right] P_l(\cos \theta) \quad (2.14)$$

其中 $j_l(kr)$ 是球贝塞尔函数。因此，我们只需要计算分波的振幅就可以获得散射波的所有信息。

2.2 两点连续库伦波方程

由于引力相互作用的长距离效应，我们不能简单地使用平面波作为入射波来处理引力势散射问题。相反，需要同时考虑源和散射中心的引力势共同作用，因此我们考虑一个波源-散射源的系统也类似于双原子分子的问题。我们首先假设有波源天体 A 与散射天体 B 两个天体，且相互距离足够远，因此可以对于不同距离的区域做不同的近似处理，如图2.2所示意的系统。

我们参考上一节分波法的介绍来进行类似的分区。在 A 、 B 两点的虚线圈外的区域，我们只需要考虑波源散射源的库伦势能部分也就是 $V(r) = -Z_A/r_A - Z_B/r_B$ ，即牛顿势能部分，我们命名为长程区；而对于两点虚线圈之内的区域我们仍需要区分两个区域，在离中心天体足够近的时候，我们需要考虑强引力带来的广义相对论效应，我们命名为局域区；而在距离离中心天体足够远但是相对于 A 、 B 两点之间的距离足够近的区域，我们可以将长程区的场方程与局域区的场方程在这个区域进行匹配，进而得到一一的对应关系。那么，我们接下来先分别对两个区域的场方程进行分析，为了简化问题，我们首先考虑标量波的方程。

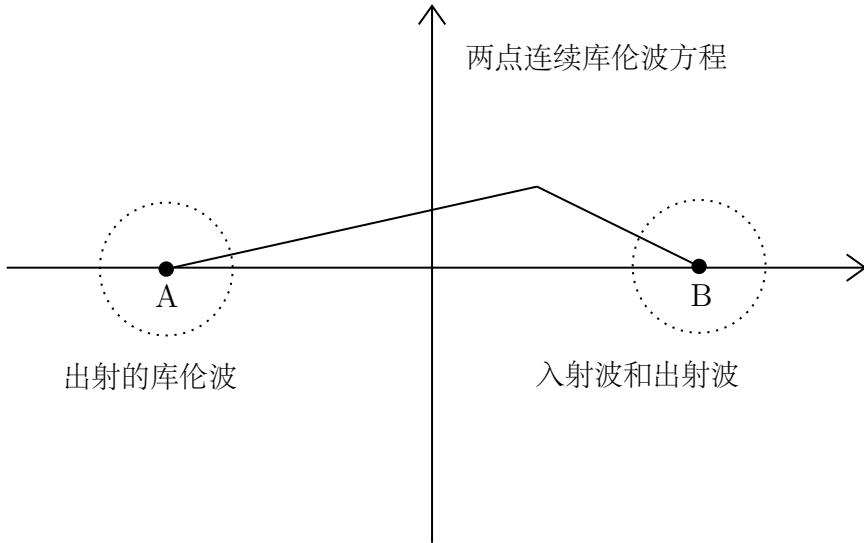


图 2.2: 我们构建了如上的波源-散射源的系统, A 为波源, B 为散射源

2.2.1 两点连续库伦波方程的导出

我们首先考虑在长程区的方程。考虑图2.2波源-散射源的体系, 其中点 A 是波源, 而点 B 是散射中心, 两个点的距离设为 R 。为了简单起见, 我们首先考虑平坦时空中由薛定谔方程决定的标量波散射。其势能为强度为 N_A 和 N_B 的库伦电势

$$\left(-\frac{1}{2} \nabla^2 - \frac{Z_A}{r} - \frac{Z_B}{r} \right) \psi = E\psi \quad (2.15)$$

其中, E 是散射态的能量, 我们在椭球坐标中对上述方程进行变换, 则椭球坐标有如下定义

$$\xi = \frac{r_A + r_B}{R}, \quad \eta = \frac{r_A - r_B}{R}, \quad \phi \quad (2.16)$$

我们列出下面的推导中会使用到的常量

$$c^2 = \frac{1}{2} E R^2 \quad (2.17a)$$

$$p = (Z_A - Z_B)R \quad (2.17b)$$

$$q = (Z_A + Z_B)R \quad (2.17c)$$

$$\lambda = -q/2c \quad (2.17d)$$

$$k = \sqrt{2E} = 2c/R \quad (2.17e)$$

其中达朗贝尔算符作用在标量场上的结果

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{(\xi^2 - \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] \right\} + \frac{1}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \quad (2.18)$$

那么我们可以对其进行分离变量

$$\psi = \sum_{lm} a_m X_m(\xi) S_m(\eta) e^{im\varphi} \quad (2.19)$$

则可以分别得到对应的微分方程，这组方程也称之为两点连续库伦波方程 (Two-Center Continuum Coulomb Wave Equation)^[30]

$$\frac{d}{d\eta} (1 - \eta^2) \frac{dS}{d\eta} + \frac{m^2 S}{1 - \eta^2} + [p\eta + A - c^2 \eta^2] S = 0 \quad (2.20a)$$

$$\frac{d}{d\xi} (1 - \xi^2) \frac{dX}{d\xi} + \frac{m^2 X}{1 - \xi^2} + [q\xi - A + c^2 \xi^2] X = 0 \quad (2.20b)$$

其中， A 是该微分方程的分离常量，我们称方程 2.20a 为角向方程，2.20b 为径向方程。那么波函数的解可以被写为

$$\psi = \sum_m \sum_A a_m(A) X_m(A, \xi) S_m(A, \eta) e^{im\phi} \quad (2.21)$$

观测上述两个方程的形式，我们知道方程 2.20b 和方程 2.20a 形式是类似的，只是其中的参数的差异，以及对于 η 和 ξ 的解析性的要求不同，因此会导出不同形式的解。实际上这组方程拥有七个具有不同行为和解析性的解^[30]，具体形式我们放在了附录 A 中，我们需要从中做出选择。这里，我们参考 Ref.^[31] 的工作，讨论角向方程和径向方程的性质。

2.2.2 角向函数

我们首先考虑角向函数，由于选择椭球坐标 η 的值被限制在 $[-1, 1]$ 的闭区间，我也要要求其在区间端点上解析，因此我们给出角向方程的表达式

$$S(\eta; k, R) = e^{-ic(1-\eta)} \sum_{s=0} d_s(k, R) P_{s+m}^m(\eta) \quad (2.22)$$

其中系数 d_s 满足递推式

$$\begin{aligned} d_1 &= 0, d_0 = 1 \\ \rho_s d_{s+1} - \kappa_s d_s + \delta_s d_{s-1} &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

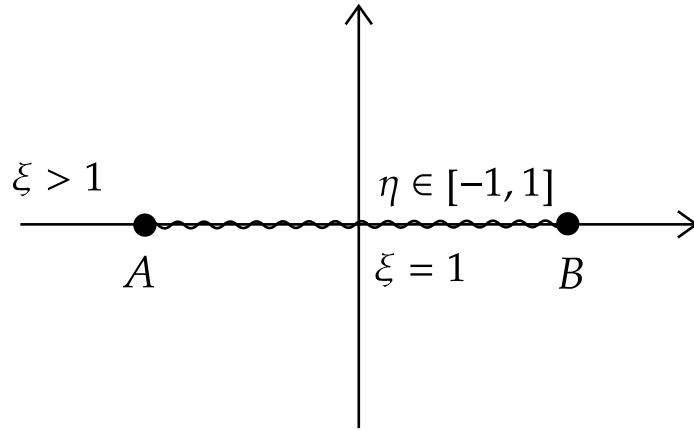


图 2.3: 我们分析在椭球坐标中 ξ 与 η 的行为, 可以看出从 A 点到 B 的连线上 η 由 -1 到 1 变化, ξ 保持 1 , 而在连线之外 ξ 都是大于 1 。我们可以根据这个性质来分别分析角向函数和径向函数的行为

其中,

$$\rho_s = (s + 2m + 1)[b - 2ic(s + m + 1)]/[2(s + m) + 3] \quad (2.24)$$

$$\kappa_s = -\lambda + (s + m)(s + m + 1) \quad (2.25)$$

$$\delta_s = s[b + 2ic(s + m)]/[2(s + m) - 1] \quad (2.26)$$

本征值 λ 可通过以下方程算出

$$y(\lambda) = \kappa_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_n \delta_{n+1}}{\kappa_{n+1}} = 0 \quad (2.27)$$

为了计算更有效率, 我们可以选择在 $\eta = \pm 1$ 附近的展开式作为角向方程的表达式

$$S(\eta; k, R) = (1 - \eta^2)^{m/2} \sum_{s=0}^{s_{max}} \tilde{d}_s (1 + \eta)^s \quad (2.28)$$

其中系数 \tilde{d}_s 满足递推式

$$p_s \tilde{d}_{s+1} + q_s \tilde{d}_s + r_s \tilde{d}_{s-1} + t_s \tilde{d}_{s-2} = 0 \quad (2.29)$$

这里我们取 $\tilde{d}_{-2} = \tilde{d}_{-1} = 0, \tilde{d}_0 = 1$, 而递推系数为

$$\begin{aligned} p_s &= 2(s+1)(s+m+1) \\ q_s &= -[-\lambda + b + m(m+1) + s(s+2m+1)] \\ r_s &= 2c^2 + b \\ t_s &= -c^2 \end{aligned} \tag{2.30}$$

函数的归一化系数可以定义为

$$\int_{-1}^1 S_{m'l'}(\eta; k, R) S_{ml}(\eta; k, R) d\eta = \delta_{ll'} \tag{2.31}$$

2.2.3 径向方程

径向方程要更加复杂一些, 它拥有两个线性独立的解, 我们写出来

$$X_{ml}^{reg}(\xi; k, R) = (\xi^2 - 1)^{m/2} F(t) \tag{2.32a}$$

$$X_{ml}^{irreg}(\xi; k, R) = (\xi^2 - 1)^{m/2} G(t) \tag{2.32b}$$

其中 $t = \xi - 1, F(t) \equiv F(t, 0)$ 。函数 $F(t, m)$ 满足方程

$$t(t+2)F'' + 2(m+1)(t+1)F' + [c^2t^2 + (2c^2 + a)t + a + m(m+1) - \lambda]F = 0 \tag{2.33}$$

对于 $t < 1$, F 函数定义为

$$F(t, \nu) = \sum_{s=0}^{s_{max}} g_s(\nu) t^{s+\nu} \tag{2.34}$$

其中系数满足四阶递推式

$$\tilde{p}_s g_{s+1} + \tilde{q}_s g_s + \tilde{r}_s g_{s-1} + \tilde{t}_s g_{s-2} = 0 \tag{2.35a}$$

$$g_{-2} = g_{-1} = 0, g_0 = 1 \tag{2.35b}$$

$$\tilde{p}_s = 2(\nu + s + 1)(\nu + s + m + 1) \tag{2.35c}$$

$$\tilde{q}_s = (\nu + s)(\nu + s + 2m + 1) - \lambda + a + m(m+1) \tag{2.35d}$$

$$\tilde{r}_s = 2c^2 + a \tag{2.35e}$$

$$\tilde{t}_s = c^2 \tag{2.35f}$$

而对于另外一个解是在 $F(t, \nu)$ 的基础上定义的：对于 $m \neq 0$,

$$G(t) = \frac{\partial}{\partial \nu} [(\nu + m) F(t, \nu)]|_{\nu=-m} \quad (2.36)$$

对于 $m = 0$ 的情况,

$$G(t) = F(t) \ln t + \frac{\partial}{\partial \nu} F(t, \nu)|_{\nu=0} \quad (2.37)$$

为了得到其归一化系数，我们可以通过其渐进形式来得到

$$X(\xi; k, R) = A \cdot \frac{1}{\xi^2 - 1} \operatorname{Re} \left\{ \left[1 + \sum_{s=1}^{s_{max}} g_s (c\xi)^{-s} \right] \cdot \exp \left[-i \left(c\xi + \frac{a}{2c} \ln 2c\xi - \frac{l+1}{2} \pi + \Delta_{ml} \right) \right] \right\} \quad (2.38)$$

其中 $\Delta = \Delta(k, R)$ 是两点连续库伦波函数的相移 (Phase Shift)，其与单电荷的库伦波函数的相移类似 $\sigma_l = \arg \Gamma(l+1-i\gamma)$, $\gamma = Z/k$, 两者有如下关系

$$\Delta_{ml}(k, 0) = \sigma_l = \arg \Gamma(l+1-i\gamma), \gamma = q/2c \quad (2.39)$$

而 g_s 系数满足以下六阶递推方程

$$\begin{aligned} & i2(s+1) + [s(s+1) - \lambda - \gamma^2 + i(2s+1)\gamma]g_s \\ & + 2c^2[\gamma - i2(s-1)]g_{s-1} \\ & + c^2[-2(s-1)(s-2) + \lambda + 1 - m^2 + 2\gamma^2 - i2(2s-3)\gamma]g_{s-2} \\ & + 2c^4[-\gamma + i(s-3)]g_{s-3} \\ & c^4[(s-3)(s-4) - \gamma^2 + i(2s-7)\gamma]g_{s-4} = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

而径向函数的归一化系数由其渐进形式决定，也就是在 $\xi \rightarrow \infty$ 的情况下，两点连续库伦波函数会退化为单点的库伦波函数，那么径向函数有

$$F_l(\gamma, kr) \sim \sin[kr + \gamma \ln 2kr - (l\pi/2) + \sigma_l] \quad (2.41)$$

那么我们可以取 $A = 1$ 作为归一化系数。当然考虑到波函数的完整解的归一化，我们可以取

$$N_{ml} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (2.42)$$

有了以上的径向方程和角向方程的解的形式，我们便可以完整的表示出两点库伦波函数的形式

$$\psi(\eta, \xi, \phi) = \sum_{lm} a_{ml} S_{lm}(\eta; k, R) X(\xi; k, R) e^{im\phi} \quad (2.43)$$

2.3 椭球坐标下单电荷散射

2.3.1 角向方程与径向方程

由于对于两点电荷的情况的处理比较复杂，因此我们希望参考如何处理在椭球坐标下的单电荷库伦波的散射行为，我们参考了 Ref.^[32]的工作，希望能够首先研究单电荷的散射行为继而拓展到双电荷的情况，因为其场方程是类似的，只是在参数上出现了差别，我们考虑只有一个电荷在 B 点分布的情况，有单电荷在椭球坐标下的方程

$$\frac{d}{d\eta} (1 - \eta^2) \frac{dS}{d\eta} + \frac{m^2 S}{1 - \eta^2} + [-q\eta + A - c^2\eta^2]S = 0 \quad (2.44a)$$

$$\frac{d}{d\xi} (1 - \xi^2) \frac{dX}{d\xi} + \frac{m^2 X}{1 - \xi^2} + [q\xi - A + c^2\xi^2]X = 0 \quad (2.44b)$$

这里的角向方程我们使用附录里的用连带勒让德函数展开的形式，参考附录A中，

$$S_{ml} = N_s P s_{ml}(\eta) = N_s \sum_{ml} a_{ml} P_{ml}(\eta) \quad (2.45)$$

根据微分方程的积分表示方法，我们可以知道方程2.44b的解可以表示为

$$\int_a^b K_m(\xi, \eta) S_{ml}(\eta) d\eta \quad (2.46)$$

其中 $K_m(\xi, \eta)$ 称为方程2.44a和2.44b的内核 (Kernel)，我们通过选取合适的积分上下限来使得此积分的双线性伴随项 (bilinear concomitant)

$$(1 - \eta^2) \left(\frac{\partial K_m(\xi, \eta)}{\partial \eta} S_{ml}(\eta) - K_m(\xi, \eta) \frac{\partial S_{ml}(\eta)}{\partial \eta} \right) \quad (2.47)$$

为 0，那么将表达式2.46带入方程2.44b得到内核 $K_m(\xi, \eta)$ 满足的方程为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial \eta} (1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \\ & - m^2 \left(\frac{1}{1 - \eta^2} + \frac{1}{\xi^2 - 1} \right) + C^2 (\xi^2 - \eta^2) \\ & - q(\xi + \eta) K_m(\xi, \eta) = 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

通过观察我们很容易看出这是一个单电荷库伦波方程，且有一个电荷分布在原点，因此为了对应上述电荷分布情况，我们可以做一个平移变换，

$$\eta_0 = \frac{1}{2}R(\xi + 1)(1 - \eta), \quad \xi_0 = \frac{1}{2}R(\xi - 1)(1 + \eta) \quad (2.49)$$

那么内核的表达式可以选择一个库伦波函数的形式

$$\left(\frac{1}{2}R\right)^m e^{ic(\xi\eta-1)} (\xi^2 - 1)^{m/2} (1 - \eta^2)^{m/2} {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}\frac{q}{c}i, m+1; ic(\xi+1)(1-\eta)\right) \quad (2.50)$$

并且取积分上下限 $a = -1, b = 1$ 来满足双线性伴随项的消失, 那么径向函数则由内核与角向函数决定

$$X_{ml}^{(1)}(\xi) = \int_{-1}^1 K_m^{(1)}(\xi, \eta) S_{ml}(\eta) d\eta \quad (2.51)$$

这里 $X^{(1)}$ 表示由我们选取的其中一个内核 $K^{(1)}$ 计算得到的解。那么这里的径向函数可以写为

$$\begin{aligned} X_{ml}^{(1)}(\xi) &= 2 \left(\frac{d}{2}\right)^m (\xi^2 - 1)^{m/2} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}Ai\right) \Gamma(m+1)}{\Gamma\left(m+1 + \frac{1}{2}Ai\right)} \\ &\times \sum_{r=0}^{\infty} a_{ml} \frac{i^r (2m+r)!}{r!} K_m(\xi), \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} K_m(\xi) &\equiv -\frac{1}{2\pi i} \oint_{c'} dt \{C[\xi(1-t) - t]\} - m \\ &\times j_{m+r} \{c[\xi(1-t) - t]\} (-t)^{-(Ai/2)-1} (1-t)^{m+Ai/2} \\ &\times e^{ic[t(\xi+1)-1]}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

其中系数 a_{ml} 是角向函数在连带勒让德函数为基底展开下的系数, 我们在附录A给出。

2.3.2 单电荷的散射振幅

我们已经知道单电荷在原点时的散射形式就是库伦波函数^[32],

$$U_c = v^{-1/2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}iq/c\right) e^{-\frac{q\pi}{c^4}} e^{ikr_0 \cos \Theta} {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}\frac{q}{c}i; 1; 2ikr_0 \sin^2 \frac{1}{2}\Theta\right) \quad (2.54)$$

我们需要进行坐标变换到我们需要的椭球函数, 则有变换规则

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1}{2}R(\xi - \eta) \\ z_0 &= \frac{1}{2}R(\xi - \eta) \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\cos \Theta = \cos \theta_0 \cos \theta' + \sin \theta_0 \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$$

因此, 完整的单电荷散射库伦波函数的形式为

$$U_c = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} B_{ml}(c, \theta') R_{ml}^{(1)}(\xi) S_{ml}(\eta) \cos[m(\phi - \phi')] \quad (2.56)$$

其中系数 B_{ml} 定义为

$$\begin{aligned} B_{mn}(c, \theta') = & \frac{(ik)^m \Gamma(m + 1 + \frac{1}{2}iA)}{\Gamma(m + 1)} \exp\left(ic - \frac{A\pi}{4}\right) \frac{(2 - \delta_{0m})}{N_{mn}(A, C)} \\ & \times v^{-1/2} \left(\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(2m + r)!}{r!} D_r^{mn}(A, C) \right)^{-1} \\ & \times S_{mn}(A, C; -\cos \theta') . \end{aligned} \quad (2.57)$$

于是，我们获得了完整的单电荷的库伦波函数的散射振幅，我们可以使用数值方法对其进行验证。以上的结论可以为我们拓展到两点电荷的库伦波方程提供参考，尤其是用积分表示得到内核的方法和计算出散射振幅能够拓展到两点电荷的散射振幅的求解上；同时，反过来也可以在获得两点电荷库伦波方程的散射振幅后，验证其中一个电荷 $Z_1 = 0$ 的退化形式是否与单电荷的结论一致。

2.4 局域区场方程分析

2.4.1 黑洞近场场方程

对于局域场的分析，我们已经有了相对完整的理论去解释，在对于 B 点的局域区，我们首先假设其是克尔黑洞（旋转黑洞），我们先考虑最简单的标量场，根据^[25]的工作，我们使用纽曼彭罗斯形式（简称 N-P 形式）^[27]来解决我们的问题，首先我们写出克尔度规

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 \\ & + \Sigma d\theta^2 + \left(\Delta + \frac{2Mr(r^2 + a^2)}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\phi^2 \end{aligned} \quad (2.58)$$

其中，

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (2.59a)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \quad (2.59b)$$

我们构造一组满足正交关系的四标架，其满足

$$l \cdot n = 1 \quad (2.60a)$$

$$m \cdot m^* = -1 \quad (2.60b)$$

则我们有 N-P 形式矢量表达式

$$l^\mu = [(r^2 + a^2)/\Delta, 1, 0, a/\Delta] \quad (2.61a)$$

$$n^\mu = [r^2 + a^2, -\Delta, 0, a] \quad (2.61b)$$

$$m^\mu = [ia \sin \theta, 0, 1, i/\sin \theta]/[2^{1/2}(r + ia \cos \theta)] \quad (2.61c)$$

我们又定义了如下 N-P 形式旋量系数

$$\rho = -1/(r - ia \cos \theta) \quad (2.62a)$$

$$\beta = -\rho^* \cot \theta / (2\sqrt{2}) \quad (2.62b)$$

$$\pi = ia\rho^2 \sin \theta / \sqrt{2} \quad (2.62c)$$

$$\tau = -ia\rho\rho^* \sin \theta / \sqrt{2} \quad (2.62d)$$

$$\mu = \rho^2 \rho^* \Delta / 2 \quad (2.62e)$$

$$\gamma = \mu + \rho\rho^* (r - M) / 2 \quad (2.62f)$$

$$\alpha = \pi - \beta^* \quad (2.62g)$$

还有对应的 N-P 形式微分算子

$$D = l^\mu \partial / \partial x^\mu \quad (2.63a)$$

$$\Delta = n^\mu \partial / \partial x^\mu \quad (2.63b)$$

$$\delta = m^\mu \partial / \partial x^\mu \quad (2.63c)$$

带入经过变量代换后的爱因斯坦场方程，将会得到一偏微分方程，且由于有旋转对称性，我们可以对其进行分离变量

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Delta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \varphi} + \left[\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \\ & - \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta^{s+1} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - 2s \left[\frac{a(r - M)}{\Delta} + \frac{i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \\ & - 2s \left[\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia \cos \theta \right] \frac{\partial \psi}{\partial t} + (s^2 \cot^2 \theta - s) \psi = 4\pi \Sigma T. \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\psi = e^{i\omega t} e^{im\phi} S(\theta) R(r) \quad (2.65)$$

我们将得到径向和角向的微分方程

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left(\Delta^{s+1} \frac{dR}{dr} \right) + \left(\frac{K^2 - 2is(r-M)K}{\Delta} + 4is\omega r - \lambda \right) R = 0 \quad (2.66)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) + \left(a^2 \omega^2 \cos^2 \theta - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - 2a\omega s \cos \theta - \frac{2ms \cos \theta}{\sin^2 \theta} - s^2 \cot^2 \theta + s + A \right) S = 0, \quad (2.67)$$

其中 $K \equiv (r^2 + a^2)\omega - am$, $\lambda \equiv A + a^2\omega^2 - 2am\omega$, $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$; 对于角向的解我们称之为自旋加权椭球函数 (Spin-weighted Spheroidal Function), 我们已经很多工作对其做了详细的研究; 而径向的方程, 被称之为图科斯基方程 (Teukolsky Equation), 目前还没有完整的解析形式, 但是我们对其一些特殊形式进行研究得到了一些解析形式, 比如合流修恩函数^[20]。且有在黑洞事件视界附近的边界条件^[1]

$$\lim_{r \rightarrow r_+} R_{lm}(r) \sim (r - r_+)^{-i\sigma} \quad (2.68)$$

其中 $\sigma = \frac{2r_+(\omega - \omega_c)}{r_+ - r_-}$, $\omega_c = \frac{am}{2Mr_+}$, $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ (取 $G = 1, c = 1$ 单位制)。由于 Teukolsky 方程没有完整的解析形式, 因此我们往往采用数值积分的形式来了解波函数在局域区的行为, 我们使用 Mathematica 代码进行计算。

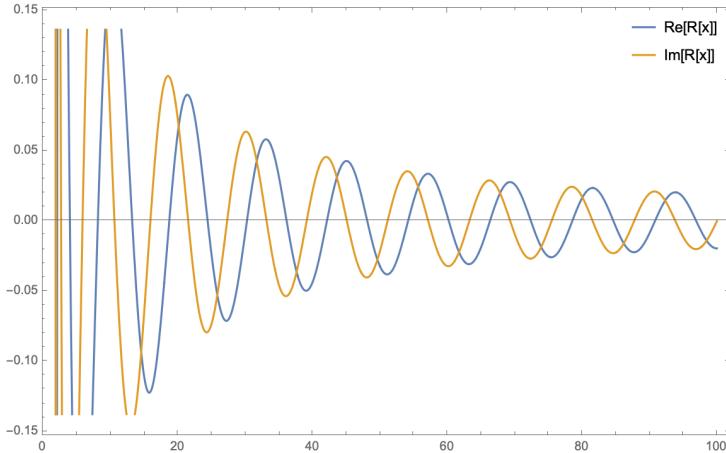


图 2.4: 利用 Mathematica 计算的黑洞径向方程在参数 $a = 0.5, \omega = 0.5, l = 0, m = 0$ 的分布

2.4.2 局域场散射相移

对于散射过程, 尤其是对于引力波等天体方面的散射问题, 我们往往更关心散射过程的相移以及波形信息, 而不是散射截面, 因为引力势或者库伦势这种长程势的原因,

散射截面必然趋于无穷大，则丧失其讨论价值；我们仍考虑最简单的情况，标量场散射问题。

在上一小节我们已经得到了在克尔黑洞附近的波函数的分布，注意到当 $r \rightarrow \infty$ 时，黑洞的广义相对论效应（包括黑洞旋转的拖拽效应）必然会趋近于零，只剩下牛顿势能的部分，也就是从局域区过渡到近似区的过程，那么我们很容易从物理上得到一个结论—Teukolsky 方程在 $r \rightarrow \infty$ 的渐进形式必然是合流超几何函数对应的方程，实际上我们在经过计算后，得到 Teukolsky 方程的渐进形式如下

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR) + \left[\omega^2 + \frac{4M\omega^2}{r} - \frac{\Lambda}{r^2} \right] rR = 0 \quad (2.69)$$

其中 Λ 是该方程的本征值，表达式是符合我们的结论的。

我们再考虑相移我们可以考虑无穷远入射到局域区然后散射到无穷远的过程，在这个过程中，入射与散射将会产生一个相位偏移，且由于黑洞会吸收一部分波，因此相移是复数的且模长恒小于 1。同时，在无穷远处的波的解析形式是合流超几何函数表示的，或者其渐进的形式，我们可以表示出关于入射和散射波的表达式，假设产生的相移为

$$\delta_l = \sigma_l^{LR} + \delta_l^{SR} \quad (2.70)$$

其中， σ_l^{LR} 代表只由于库伦波散射产生的相移，这个值我们是知道的，出现在合流超几何函数的渐进形式中，计算式是

$$\sigma_l^{LR}(\lambda) \equiv \text{Arg}(\Gamma(l+1+\lambda)) \quad (2.71)$$

而由于黑洞部分影响的短程势部分是未知的，我们需要将其提取出来。考虑一般形式

$$u_L(x) \sim Ae^{2i\delta_L^{SR}} e^{i(x-\lambda \log(2x)+\sigma_L-\frac{1}{2}L\pi)} + Be^{-i(x-\lambda \log(2x)+\sigma_L-\frac{1}{2}L\pi)} \quad (2.72a)$$

$$u_L(x) \sim B \left[\frac{A}{B} e^{2i\delta_L^{SR}} e^{i(x-\lambda \log(2x)+\sigma_L-\frac{1}{2}L\pi)} + e^{-i(x-\lambda \log(2x)+\sigma_L-\frac{1}{2}L\pi)} \right] \quad (2.72b)$$

$$u'_L(x) \sim B \left[\frac{A}{B} e^{2i\delta_L^{SR}} e^{i(x-\lambda \log(2x)+\sigma_L-\frac{1}{2}L\pi)} i(1 - \frac{\lambda}{x}) \right. \quad (2.72c)$$

$$\left. + e^{-i(x-\lambda \log(2x)+\sigma_L-\frac{1}{2}L\pi)} (1 - \frac{\lambda}{x})(-i) \right] \quad (2.72d)$$

则我们可以得到

$$u_L - \frac{iu'_L}{1 - \frac{\lambda}{x}} = 2\hat{B} \frac{A}{B} e^{2i\delta_L^{SR}} e^{i(x-\lambda \log(2x)+\sigma_L-\frac{1}{2}L\pi)} \quad (2.73)$$

$$u_L + \frac{iu'_L}{1 - \frac{\lambda}{x}} = 2\hat{B} e^{-i(x-\lambda \log(2x)+\sigma_L-\frac{1}{2}L\pi)} \quad (2.74)$$

消去振幅信息，我们可以得到相移信息，

$$\frac{A}{B} e^{2i\delta^{SR}} = \frac{u_L - \frac{iu'_L}{1-\frac{\lambda}{x}}}{u_L + \frac{iu'_L}{1-\frac{\lambda}{x}}} e^{-2i(x-\lambda \log(2x)+\sigma_L - \frac{1}{2}L\pi)} \quad (2.75)$$

于是，我们便可以通过径向的波函数在区域无穷远时，上述相移将会稳定在一个特定的值，也就是波函数与标准库伦波函数匹配了。

但是，我们在实际计算过程发现，标准的库伦波和径向波函数在选取特定的 ω 和 l 时并不容易匹配，往往会出现匹配速度缓慢的问题，尤其是在 $\omega \gg l$ 和 $\omega \ll 1$ 时会出现这样的问题。

经过我们的分析发现，在黑洞附近的引力势能会产生一个类似“山峰”的势垒，且随 l 的增大而增大，这一点我们可以通过 Teukolsky 方程分析得到。对于大 l 时候，事件视界附近的引力势会远大于标量波的能量，会产生类似弹性散射的现象，散射波和入射波的相移计算匹配速度缓慢；而对于，高 ω 的情况，标量波能量远大于引力势，则标量波对于势垒的响应不够明显，也会出现匹配速度慢的情况。

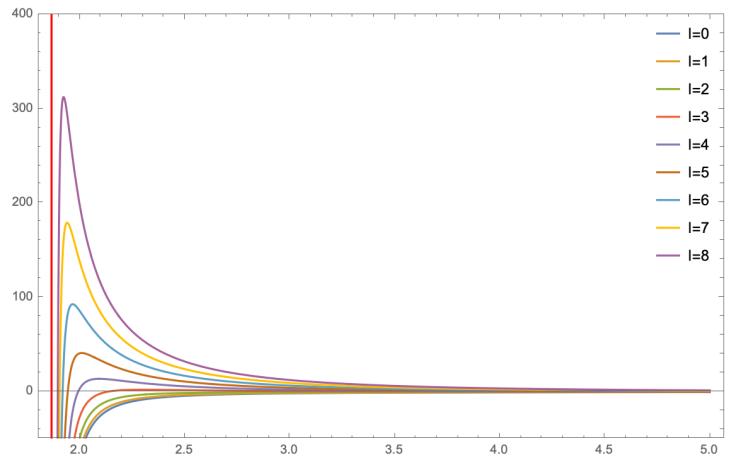


图 2.5: 对于不同 l ，克尔黑洞势垒的示意图，其中左边红线为事件视界半径

针对这种情况，我们参考了张宏老师^[33]处理虫洞势垒散射的问题的方法，也包括处理类似问题的一系列工作^[34-36]，我们将使用 WKB 近似方法，会极大的提高收敛速度，且得到的相移误差在误差允许范围内，因此，这是我们接下来需要完成的工作。

2.5 边界条件匹配方法

2.5.1 基本思路

我们在上述三节分别分析了在长程区、局域区的场方程和相移问题。在这一节我们尝试如何将两个区域的场方程匹配起来。我们的理论框架的基本思路是，根据散射的物理图像，我们知道 A 点附近的波函数的渐进形式应为库伦波的形式

$$\psi_A \sim \frac{e^{ikr_A - i\lambda \log(2kr_A)}}{r_A} \quad (2.76)$$

而 B 点的波函数形式应该为出射波和入射波的叠加，

$$\psi_B \sim B \frac{e^{ikr_B - i\lambda \log(2kr_B)}}{r_B} + C \frac{e^{-ikr_B + i\lambda \log(2kr_B) + \Theta}}{r_B} \quad (2.77)$$

有了两个点附近的波函数的形式，我们就需要得到两点连续库伦波方程的解并对其进行分析，来发挥一个用于连接波源和散射源的波的信息的桥梁作用。而具体思路是，我们将两点连续库伦波方程的解在 A、B 两个点附近进行展开，并和 A 点给出已知的出射波函数对应来确定级数解的各项系数，然后再用这个解在 B 点附近展开，来获得对应的出射波和入射波的振幅、相位等信息。然后就可以将所有散射的信息对应到任意位置的观察者上。

我们写出长程区的场方程，其由两点连续库伦波方程控制

$$\psi(\eta, \xi, \phi) = \sum_{lm} a_{lm} S_{lm}(\eta; k, R) X_{lm}(\xi; k, R) e^{im\phi} \quad (2.78)$$

在 A 附近处，A 作为波源应当只有出射波的部分，也就是

$$\psi_A \sim \frac{e^{ikr_A - i\lambda \log(2kr_A)}}{r_A} \quad (2.79)$$

其可以变换到椭球坐标下

$$\psi_A \sim \frac{2e^{ikR \frac{\xi+\eta}{2} - i\lambda \log(2kR \frac{\xi+\eta}{2})}}{R(\xi + \eta)} \quad (2.80)$$

我们可以使用泰勒展开在 $\eta \sim -1, \xi \sim 1$ 附近进行展开，得到展开系数并与长程区方程对应的展开系数进行匹配，从而得到全空间的散射波的分布。这样，我们就能得到 B 点附近的波函数的形式，我们期望其在 B 点附近的渐进形式应当为出射波和入射波的线性组合。我们也可以参考第2.3节的工作，将处理单电荷的方法拓展到这里。其最后的散射振幅的形式也应当是类似的。换句话说，两点连续库伦波主要的作用是提供给 A、B

两个点的波函数的一一对应的关系，因此这里存在着可以简化的空间，我们只需要找到 A、B 两点之间的函数关系就可以不再考虑对于复杂的长程区方程的求解。

这里，我们给出一个在不完整求解两点库伦波方程的前提下给出大致的对称关系的一个理论思路，但仍需要完善。

2.5.2 一种可能的匹配方法

首先考虑在波源 A 的近似区波的行为，其决定的方程为

$$\frac{d^2}{dx^2} H_l^{A\pm}(x) + \left[1 - \frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{2\eta_A}{x} \right] H_l^{A\pm}(x) = 0 \quad (2.81)$$

其中， $H_l^{A\pm}(x)$ 代表了合流超几何函数，和方程 2.15 相比，可以确定参数的关系： $x = \omega r_A / \sigma$ ， $\eta_A = -\frac{1}{2}kZ_A$ 。而对于合流超几何函数，可以在 $x \rightarrow \infty$ 有渐进形式

$$H_l^{A\pm}(x) \rightarrow e^{\pm i[x - \eta_A \log(2x) - \frac{l}{2}\pi + \sigma_l(\eta_A)]} \quad (2.82)$$

通过这个渐进形式，我们可以发现对于实际的散射问题，我们根本无法得到平面波的解，取而代之的是其渐进形式的传播。同时，我们也可以得到长程区在 A 附近的近似区的联系：当靠近 A 时，B 的效应应该被忽略，取而代之的是波函数在 A 附近以 A 的库伦波形式传播，则有关系

$$\frac{1}{\sigma(\xi + \eta)} \mathcal{F}_0^A(\omega(\xi + \eta)) = \int d\rho a_{l0}(\rho) X_0^{(\eta_A + \eta_B)}(\rho, 1) S_0^{(\eta_A - \eta_B)}(\rho, \eta) \quad (2.83)$$

其中 ρ 为分离常量， $\mathcal{F}_0^A(x)$ 为合流超几何函数

$$\mathcal{F}_0^A(x) = \frac{e^{-\pi\eta_A/2} |\Gamma(l+1+i\eta_A)|}{2(2l+1)!} (-i)^{l+1} M_{i\eta_A, l+\frac{1}{2}}(2ix) = \frac{1}{2i} [H_l^{A+}(x) - H_l^{A-}(x)] \quad (2.84)$$

对于方程 2.83，我们已经通过上标写明 X_m 和 S_m 对于 η_A 和 η_B 的依赖关系。在 A 点附近波从近似区传播到长程区时，当满足 $\eta \sim -1$ 和 $1 \ll \omega(\xi - 1) \ll 2\omega$ 时，应当有对应关系

$$\frac{1}{\sigma(\xi + \eta)} [2\omega(\xi + \eta)]^{-i\eta_A} e^{i[\omega(\xi + \eta) + \sigma_0(\eta_A)]} = \int d\rho a_{l0}(\rho) X_0^{(\eta_A + \eta_B)}(\rho, 1) S_0^{(\eta_A - \eta_B)}(\rho, \eta) \quad (2.85)$$

对于上述方程，我们根据 Leaver 的级数解法^[37]，可以得到级数在 A 点附近展开的级数解，对于 $m = 0$ ，我们有

$$S_0(\rho, \eta) = e^{i\omega(\eta+1)} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^\eta(\rho) (\eta+1)^n \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} \alpha_0^\theta c_1^\theta + \beta_0^\theta c_0^\theta + &= 0, \\ \alpha_n^\theta c_{n+1}^\theta + \beta_n^\theta c_n^\theta + \gamma_n^\theta c_{n-1}^\theta &= 0, n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.87)$$

其中，系数为

$$\begin{aligned} \alpha_n^\eta &= -2n^2 - (B_2 + 2)n - B_2, \\ \beta_n^\eta &= n^2 + (B_2 - 4i\omega - 1)n - a - i\omega B_2 + \rho + m(m+1), \\ \gamma_n^\eta &= 2i\omega n + i\omega(B_2 - 2) + a, \end{aligned} \quad (2.88)$$

以及常数为

$$\begin{aligned} a &= 2M\sigma(N_A - N_B) = -2\omega(\eta_A - \eta_B), \\ B_2 &= 2(m+1). \end{aligned} \quad (2.89)$$

我们可以得到各级级数，假设 0 级为 $c_0^\eta = 1$ ，

$$\begin{aligned} c_1^\eta &= \frac{\rho}{2} - \frac{1}{2}(a + 2i\omega) \\ c_2^\eta &= \frac{1}{16}\rho^2 + \frac{1}{8}(1 - a - 4i\omega)\rho + \frac{1}{16}(a^2 + 8ia\omega - 12\omega^2) \\ c_3^\eta &= \frac{1}{288}\rho^3 + \frac{1}{288}(8 - 3a - 18i\omega)\rho^2 + \frac{1}{288}(3a^2 + 36ia\omega - 6a - 92\omega^2 - 36i\omega + 12)\rho \\ &\quad - \frac{1}{288}(a^3 + 18ia^2\omega + 2a^2 - 92a\omega^2 - 120i\omega^3 + 8\omega^2) \\ &\quad \dots \end{aligned} \quad (2.90)$$

则有表达式

$$S_0^{\eta_A - \eta_B}(\rho, \eta) = e^{i\omega(\eta+1)} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^\eta(\rho) (1+\eta)^n \quad (2.91)$$

虽然级数系数已经被归一化，但为了避免符号上出现混乱，我们以 $S_0(\rho, -1)$ 作为归一化系数

$$S_0^{\eta_A - \eta_B}(\rho, \eta) = S_0^{\eta_A - \eta_B}(\rho, -1) e^{i\omega(\eta+1)} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^\eta(\rho) (1+\eta)^n \quad (2.92)$$

观察各级系数，我们很容易发现 ρ 都以幂级数线性叠加的形式存在，因此为了简化问题，我们定义“ n 阶矩” Z_n^A 为

$$Z_n^A \equiv \int d\rho a_0(\rho) X_0^{\eta_A + \eta_B}(\rho, \xi) S_0^{\eta_A - \eta_B}(\rho, -1) \rho^n \quad (2.93)$$

则公式2.83的右边可以改写为

$$\begin{aligned} & e^{i\omega(\eta+1)} \left\{ Z_0^A + \frac{1}{2}(\eta+1) [-(a+2i\omega)Z_0^A + Z_1^A] \right. \\ & + \frac{1}{16}(\eta+1)^2 [(a^2 + 8i\omega - 12\omega^2) Z_0^A + 2(1-a-4i\omega)Z_1^A + Z_2^A] \\ & + \frac{1}{288}(\eta+1)^3 [-(a^3 + 18ia^2\omega + 2a^2 - 92a\omega^2 - 120i\omega^3 + 8\omega^2) Z_0^A \\ & + (3a^2 + 36ia\omega - 6a - 92\omega^2 - 36i\omega + 12) Z_1^A + (8 - 3a - 18i\omega)Z_2^A + Z_3^A] \\ & \left. + \mathcal{O}((\eta+1)^4) \right\} \end{aligned} \quad (2.94)$$

实际上，我们其实是以“ n 阶矩” Z_n^A 为基，将波函数在 A 附近展开，如果我们希望求解 Z_n^A 是不难得到的，首先上述展开时应该等于库伦波在 A 点的解，应该与式子2.85对应，且上述表达式是关于 $(1+\eta)$ 的幂级数求和，那么我们可以对表达式2.85做 $(1+\eta)$ 的泰勒展开，则可以得到各阶矩的表达式，我们写出

$$Z_0^A = \int d\rho a_0(\rho) X_0^{\eta_A + \eta_B}(\rho, \xi) S_0^{\eta_A - \eta_B}(\rho, -1) = \frac{[2\omega(\xi-1)^{-i\eta_A}]}{\sigma(\xi-1)} e^{i[\omega(\xi-1) + \sigma_0(\eta_A)]} \quad (2.95)$$

$$Z_1^A = \int d\rho a_0(\rho) X_0^{\eta_A + \eta_B}(\rho, \xi) S_0^{\eta_A - \eta_B}(\rho, -1) \rho \quad (2.96)$$

$$= \frac{[2\omega(\xi-1)^{-i\eta_A}]}{\sigma(\xi-1)^2} e^{i[\omega(\xi-1) + \sigma_0(\eta_A)]} [a(\xi-1) - 2i\eta_A + 2i\omega(\xi-1) - 2] \quad (2.97)$$

很明显，如果我们将这个类似的方法应用到 B 点附近是类似的情况，但是 A 与 B 的情况并不具有对应关系，因为 A 点作为波源只包含了出射波的信息，而对于 B 点的散射源，应当包含入射波和反射波的信息，因此 A 点的表达式应当是 B 点表达式的退

化形式, 于是, 我们需要找到在 A 点出射波与 B 点的波函数关系, 首先对 B 点附近 ($\lambda \sim 1$) 的波进行同样的展开

$$S_0(\rho, \lambda) = S_0(\rho, 1)e^{i\omega(1-\lambda)} \sum_{n=0}^{+\infty} d_n^\lambda(\rho)(1-\lambda)^n \quad (2.98)$$

也有同样形式的“n 阶矩” Z_n^B

$$Z_n^B \equiv \int d\rho a_0(\rho) F_0^{\lambda_A + \lambda_B}(\rho, \xi) S_0^{\lambda_A - \lambda_B}(\rho, 1) \rho^n \quad (2.99)$$

因此也有同样的以 Z_n^B 为基的展开式, 但明显 Z_n^B 和 Z_n^A 的关系并不是平凡的, 尤其是积分非常复杂, 但注意到 $S_0^{\lambda_A - \lambda_B}(\rho, -1)$ 是关于 ρ 和 $\lambda_A - \lambda_B$ 的函数, 这里我们可以参考我们对于角向方程的分析, 部分求解得到 Z_n^A 和 Z_n^B 的关系。

但值得肯定的是, 由于 $\xi(\rho)$ 是非平凡的, 其将提供在 B 点出射波和入射波同时存在的信息, 但我们所预期的是在长程区以 Z_n^B 为基的展开式需要与 B 点近似区的表达式匹配, 也就是

$$\begin{aligned} & \sum_l \frac{1}{\sigma(\xi - \lambda)} \left\{ u_l [2\omega(\xi - \lambda)]^{-i\lambda_B} e^{i[\omega(\xi - \lambda) + \sigma_l(\lambda_B)]} \right. \\ & \left. + v_l [2\omega(\xi - \lambda)]^{i\lambda_B} e^{-i[\omega(\xi - \lambda) + \sigma_l(\lambda_B)]} \right\} P_l^0 \left(\frac{\lambda \xi - 1}{\xi - \lambda} \right) \end{aligned} \quad (2.100)$$

第三章 数值计算

3.1 径向方程的数值计算

在第二章，我们已经获得了两点库伦波函数的径向方程与角向方程的解析表达式，因此我们可以通过数值方法计算函数的行为，这里我们使用 Mathematica 代码进行数值计算并给出不同参数下函数的行为。

首先，我们计算角向函数 $S_{ml}(\eta)$ 的数值结果，其中涉及到的参数有 k, R, Z_2, Z_1, m, l ，我们可以改变不同的参数来展示函数不同的行为。

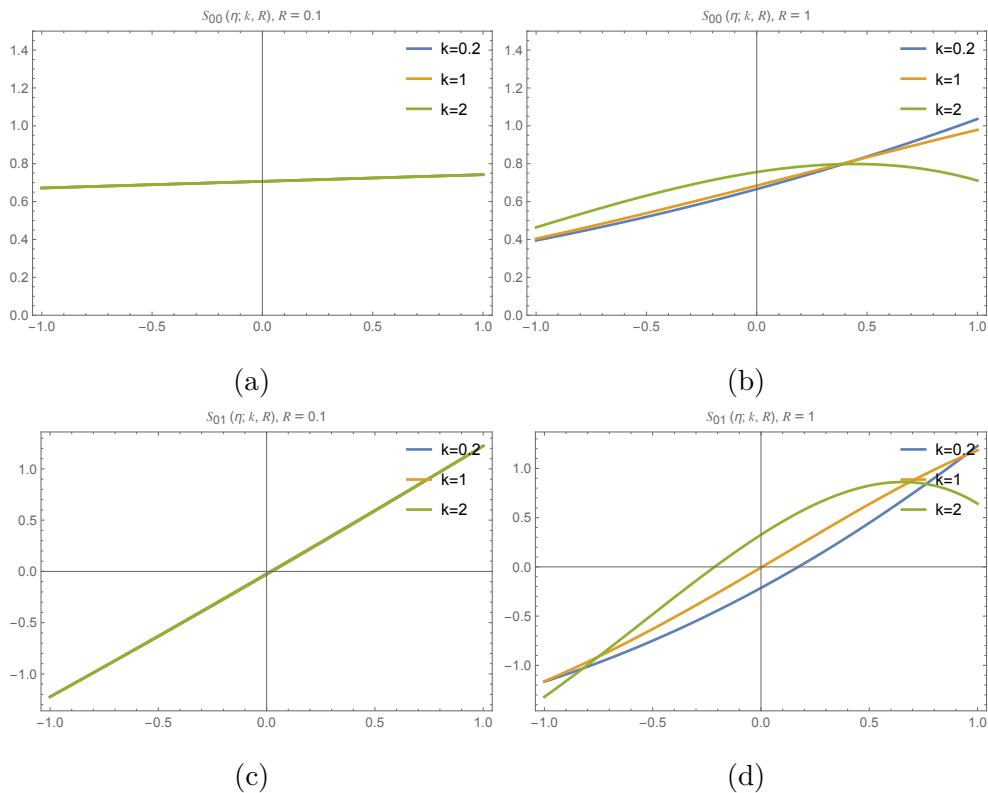


图 3.1: 我们画出经过归一化的的角向函数 $S_{ml}(\eta; k, R)$ ，我们通过改变参数 m, l, k, R 来表现出角向函数的不同的行为

3.2 径向方程的数值计算

接下来，我们根据第二章中给出的径向方程的解析解，绘制出径向函数其中一个线性独立解 $X_{ml}^{reg}(\eta; k, R)$ 的图像，同样我们需要改变不同的参数 m, l, k, R 来观察其不同行为。

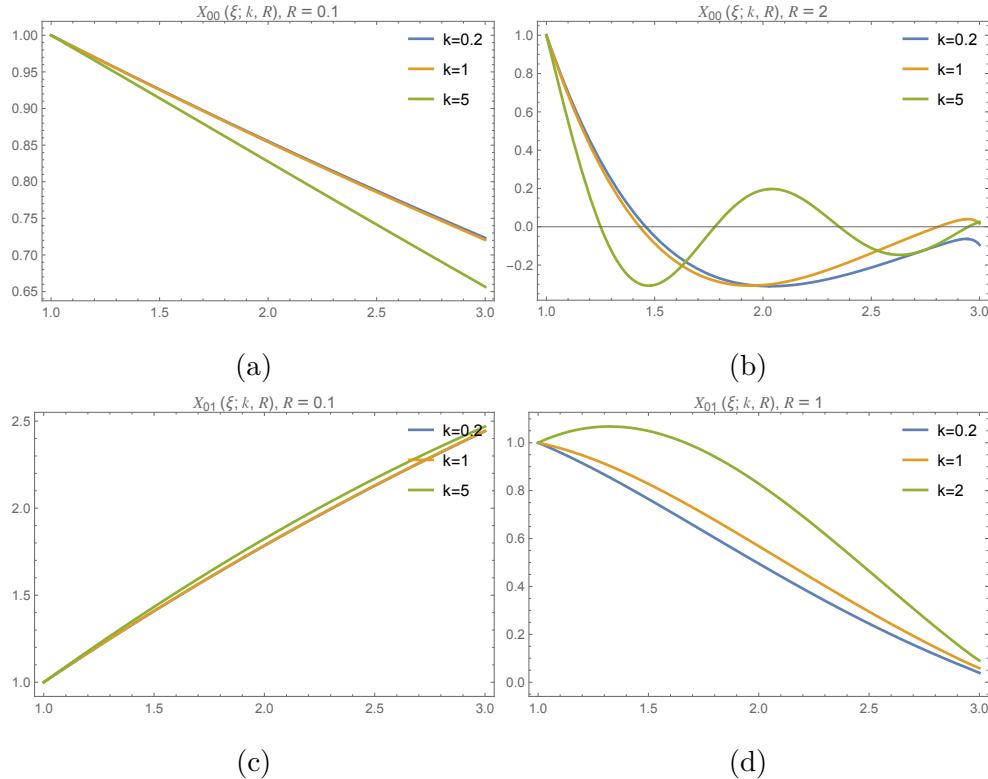


图 3.2: 我们画出径向函数 $X_{ml}(\eta; k, R)$ ，我们通过改变参数 m, l, k, R 来表现出径向函数的不同的行为

第四章 总结与展望

4.1 总结

本论文的核心点在于**两点连续库仑波函数**在长程势散射中的应用，并由此构建了一个从远场牛顿区到强场局域区的耦合计算框架。我们列出以下几个要点

1. 研究动机：克服分波法发散

传统分波法在处理长程势（库仑势或引力势）时，分波级数因小角散射项累积导致发散。为解决红外发散问题，本文提出引入两点连续库仑波函数，替代平面波单源入射的假设，从源-散射双中心体系本质上根除发散根源。

2. 两点连续库仑波方程的导出与解析解

- 椭球坐标变换：在波源 A 与散射源 B 间距 R 的双心体系中，引入椭球坐标

$$\xi = \frac{r_A + r_B}{R}, \quad \eta = \frac{r_A - r_B}{R},$$

完成两点连续库仑方程的分离变量。

- 角向方程（式 (2.22a)）：在 $\eta \in [-1, 1]$ 区间展开，角向函数 $S_{m\ell}(\eta; k, R)$ 采用连带勒让德多项式级数，并由五阶递推关系计算本征值与归一化系数。
- 径向方程（式 (2.22b)）：在 $\xi \geq 1$ 区间构造两组线性独立解，利用级数展开与相移 $\Delta_{m\ell}(k, R)$ （见式 (2.40)）保证与单点库仑相移 σ_ℓ 在 $\xi \rightarrow \infty$ 极限下精确匹配。
- 相移提取：通过级数系数的六阶递推式求解 $\Delta_{m\ell}$ ，有效捕捉双源耦合导致的相位修正，彻底避免单源平面波分解的发散。

3. 两点方法的验证与推广

- 单电荷退化检验：在双心系统退化为单点电荷时，内核积分与级数展开重现经典库仑散射振幅，验证两点连续库仑波函数的正确性与一致性。

- 局域区耦合：将两点库仑波解在牛顿近似区与 Teukolsky 方程的强场局域区耦合，确保整个传播链路从源头到黑洞近区再到观察者的波函数连续一致。

4. 数值实现与性能

- 级数收敛测试：利用 Mathematica 对角向和径向级数在多组 (k, R, m, ℓ) 参数下进行了收敛性检验，结果表明两点级数对长程区散射振幅与相移均能快速稳定收敛。
- WKB 加速：在 Teukolsky 方程的势垒匹配缓慢场景，引入 WKB 近似方案，大幅提升相移计算效率，并保持误差在可控范围。

5. 意义与前景

- 根本性突破：两点连续库仑波函数体系从根本上化解了长程散射的红外发散，为电磁波及引力波散射提供了一种解析与数值兼备的统一框架。
- 广泛应用：该方法可推广至自旋 $s = 1, 2$ 的场散射、多体体系与非对称势场，并为引力透镜观测与多信使天文学中的波动信号计算奠定理论基础。

通过对**两点连续库仑波函数**的深入解析与数值验证，本文不仅在散射理论上取得突破，更为后续高自旋场与复杂天体系统的波动研究提供了坚实方法论。

4.2 展望

本工作提出的新的引力波散射理论框架为长程势能下的散射问题提供了一种系统性的解决方案，尤其在克服传统分波法的发散性方面展现出显著优势。未来仍有诸多值得深入探索的方向：首先，在理论构建方面，目前的模型主要针对标量场，尚未充分推广至具有自旋的电磁波 ($s = 1$) 与引力波 ($s = 2$) 场。后续工作可以尝试将本文框架推广至张量场的情形，并分析其在不同自旋下的散射特征与相移行为，以增强模型的普适性和适用性。

其次，在数值方法方面，虽然本文引入了 WKB 近似以提高相移计算的效率与收敛性，但在某些极限参数（如大 l 、小 ω ）下仍存在数值不稳定的情况。后续研究可以结合矩阵方法、谱方法等更高阶的数值技术，以进一步优化计算精度与稳定性。

此外，从观测应用角度出发，随着空间引力波探测器（如 LISA、天琴计划等）的逐步推进，理论模型需要与实际观测数据进行更紧密的对接。因此，有必要发展更高阶的近似解和有效理论，用于解释在复杂天体背景（如多体系统或非对称扰动）下的波传播与散射现象。

最后，本理论框架不仅适用于天文尺度下的波传播问题，也有潜力推广至等离子体物理、原子分子碰撞等其他存在长程相互作用的物理系统中，从而拓展其交叉学科的研究价值。

综上所述，本文工作不仅对传统散射理论作出了有力补充，更为未来从理论、数值与应用三方面的深入研究提供了坚实的基础。

附录 A 两点连续库伦波函数的补充

A.1 函数的完整解

我们参考了 Ref.^[30]的工作, 给出两点连续库伦波函数的完整解的形式, 他们有不同的行为和解析性,

$$Qs_\nu^m(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{\nu+n}^m Q_{\nu+n}^m(\xi) \quad (\text{A.1a})$$

$$Qs_{-1-\nu}^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-1-\nu+n}^m Q_{-1-\nu+n}^m(\xi) \quad (\text{A.1b})$$

$$Fs_\nu^m(\xi) = \frac{1}{\xi} \left[\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \right]^{1/2m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{\nu+n}^m F_{\nu+n}(\lambda, c\xi) \quad (\text{A.1c})$$

$$Fs_{-1-\nu}^m = \frac{1}{\xi} \left[\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \right]^{1/2m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{-1-\nu+n}^m F_{-1-\nu+n}(\lambda, c\xi) \quad (\text{A.1d})$$

$$\tilde{Fs}_\nu^m(\xi) = \left[\frac{\xi + 1}{\xi - 1} \right]^{1/2m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{d}_{\nu+n}^m \tilde{F}_{\nu+n}[\lambda, c(\xi + 1)] \quad (\text{A.1e})$$

$$Ps_\nu^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{\nu+n}^m P_{\nu+n}^m(\xi) \quad (\text{A.1f})$$

其中出现的函数有

$Q_{\nu+n}$: 第二类勒让德函数

$F_{\nu+n}$: 广义库伦波函数

$$F_\nu(\lambda, \rho) = \frac{2^\nu [\Gamma(1 + \nu - i\lambda)\Gamma(1 + \nu + i\lambda)]^{1/2}}{\Gamma(2\nu + 2)} \rho^{\nu+1} e^{-i\rho} {}_1F_1(1 + \nu - i\lambda, 2\nu + 2, 2i\rho)$$

以及上述定义中出现的系数 a_n^m 和 d_n^m 是通过两个五阶递推式定义的, 我们会在下一节中给出具体的表达式。这些解在不同条件下拥有不同的敛散性, 我们需要寻找到其中符合物理情景的解。

A.2 求和系数的定义

^[30]我们给出方程2.20b和2.20a的解中涉及到的系数的定义，他们是由两个五阶递推式得到的，我们有

$$w_{n+2}a_{\nu+n+2}^m + v_{n+1}a_{\nu+n+1}^m + u_n a_{\nu+n}^m + t_{n-1}a_{\nu+n-1}^m + s_{n-2}a_{\nu+n-2}^m = 0 \quad (\text{A.3a})$$

$$w_{n+2} = \frac{(\nu + n + m + 1)(\nu + n + m + 2)}{(2\nu + 2n + 3)(2\nu + 2n + 5)} c^2 \quad (\text{A.3b})$$

$$v_{n+1} = \frac{(\nu + m + n + 1)}{(2\nu + 2n + 4)} q \quad (\text{A.3c})$$

$$u_n = (\nu + n)(\nu + n + 1) - A + \frac{2(\nu + n)(\nu + n + 1) - 2m^2 - 1}{(2\nu + 2n - 1)(2\nu + 2n + 3)} c^2 \quad (\text{A.3d})$$

$$t_{n-1} = \frac{(\nu + n - m)}{(2\nu + 2n - 1)} q \quad (\text{A.3e})$$

$$s_{n-2} = \frac{(\nu + n - m)(\nu + n - m - 1)}{(2\nu + 2n - 1)(2\nu + 2n - 3)} c^2 \quad (\text{A.3f})$$

$$\tilde{w}_{n+2}d_{\nu+n+2}^m + \tilde{v}_{n+1}d_{\nu+n+1}^m + \tilde{u}_m d_n^m + \tilde{t}_{n-1}d_{\nu+n-1}^m + \tilde{s}_{n-2}d_{\nu+n-2}^m = 0 \quad (\text{A.3g})$$

$$\tilde{w}_{n+2} = -\frac{[(\nu + n + 2)^2 + \lambda^2]^{1/2} [(\nu + n + 1)^2 + \lambda^2]^{1/2} (\nu + n - m + 1)(\nu + n - m + 2)}{(\nu + n + 1)(\nu + n + 2)(2\nu + 2n + 3)(2\nu + 2n + 5)} \quad (\text{A.3h})$$

$$\tilde{v}_{n+1} = -\frac{2\lambda m [(\nu + n + 1)^2 + \lambda^2]^{1/2} (\nu + n - m + 1)}{(\nu + n)(\nu + n + 1)(\nu + n + 2)(2\nu + 2n + 3)} c^2 \quad (\text{A.3i})$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n = & (\nu + n)(\nu + n + 1) - A + c^2 \left\{ \frac{2(\nu + n)(\nu + n + 1) - 2m^2 - 1}{(2\nu + 2n - 1)(2\nu + 2n + 3)} + \right. \\ & \left. + \frac{2\lambda^2 [(\nu + n)(\nu + n + 1) - 3m^2]}{(\nu + n)(\nu + n + 1)(2\nu + 2n - 1)(2\nu + 2n + 3)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.3j})$$

$$\tilde{t}_{n-1} = \frac{2\lambda m [(\nu + n)^2 + \lambda^2]^{1/2} (\nu + n + m)}{(\nu + n - 1)(\nu + n)(\nu + n + 1)(2\nu + 2n - 1)} c^2 \quad (\text{A.3k})$$

$$\tilde{s}_{n-2} = -\frac{[(\nu + n - 1)^2 + \lambda^2]^{1/2} [(\nu + n)^2 + \lambda^2]^{1/2} (\nu + n + m - 1)(\nu + n + m)}{(\nu + n - 1)(\nu + n)(2\nu + 2n - 3)(2\nu + 2n - 1)} \quad (\text{A.3l})$$

A.3 分离常量与本征值的计算方法

^[30]我们首先给出分离成常量与本征值的关系，这里定义一个新的函数，其是原方程2.20b做了变量代换 $t = \frac{1}{2}(1 + \xi)$ 后的解，

$$\tilde{F}_\nu^m(\xi) = \left[\frac{\xi + 1}{\xi - 1} \right]^{1/2m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{d}_{\nu+n}^m \tilde{F}_{\nu+n}[\lambda, c(\xi + 1)] \quad (\text{A.4})$$

此解中有连续库伦波函数定义为 $\tilde{F}_\nu(\lambda, \rho) = 1/\rho F_\nu(\lambda, \rho)$, 其中 $\tilde{d}_{\nu+n}^m$ 满足递推式

$$V_{n+1}\tilde{d}_{\nu+n+1}^m + U_n\tilde{d}_{\nu+n}^m + T_{n-1}\tilde{d}_{\nu+n-1}^m = 0 \quad (\text{A.5a})$$

$$V_{n+1} = \frac{-2c[(\nu+n+1)^2 + \lambda^2]^{1/2}(\nu+n+m+1)}{(2\nu+2n+3)} \quad (\text{A.5b})$$

$$U_n = (\nu+n)(\nu+n+1) - A + c^2 \quad (\text{A.5c})$$

$$T_{n-1} = \frac{-2c[(\nu+n)^2 + \lambda^2]^{1/2}(\nu+n-m)}{(2\nu+2n-1)} \quad (\text{A.5d})$$

因此从上述递推式, 我们定义如下关系

$$R_n(\nu) \equiv \frac{\tilde{d}_{\nu+n}^m}{\tilde{d}_{\nu+n-1}^m} = \frac{-T_{n-1}}{U_n + V_{n+1}(\tilde{d}_{\nu+n+1}^m / \tilde{d}_{\nu+n}^m)} \quad (\text{A.6a})$$

$$L_n(\nu) \equiv \frac{\tilde{d}_{\nu+n}^m}{\tilde{d}_{\nu+n+1}^m} = \frac{-V_{n+1}}{U_n + T_{n-1}(\tilde{d}_{\nu+n-1}^m / \tilde{d}_{\nu+n}^m)} \quad (\text{A.6b})$$

上述定义表明, 当 n 很大时, $R_n(\nu) \sim c/n$ 或 n/c , $L_n(\nu)$ 也有类似的行为。对于 $n \gg 1$, 我们要求收敛解 $R_n(\nu) \sim c/n$, 而对于 $n \ll -1$, 我们要求解 $L_n(\nu) \sim c/n$ 。因此, 我们选取某个足够大的正数 $N \gg 1$, 并忽略项 $V_{N+1}[(\tilde{d}\nu + N + 1^m) / (\tilde{d}\nu + N)]$ (其量级为 c^2), 因为它相对于 U_N (其量级为 N^2) 来说可以忽略。这使我们能够计算 $R_N(\nu)$, 并且我们有

$$R_{n-1}(\nu) = \frac{-T_{n-2}}{U_{n-1} + V_n R_n(\nu)} \quad (\text{A.7})$$

我们可以计算所有 $R_n(\nu)$ 对于 $n < N$, 以及 $L_n(\nu)$ 在 $n > N^*$, 其中 N^* 是一个足够大的负数。那么我们有

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{\nu+n}^m &= \tilde{d}_\nu^m \prod_{r=1}^n R_r(\nu) & n > 0 \\ \tilde{d}_{\nu+n}^m &= \tilde{d}_\nu^m \prod_{r=-1}^n L_r(\nu) & n < 0 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

它们都提供收敛的解。显然, 这两个通过上述方式定义的级数能构成微分方程2.20b的一个解的条件是:

$$R_1(\nu)L_0(\nu) = \frac{\tilde{d}_{\nu+1}^m}{\tilde{d}_\nu^m} \cdot \frac{\tilde{d}_\nu^m}{\tilde{d}_{\nu+1}^m} = 1 \quad (\text{A.9})$$

而如果 $\nu = l$, 我们可以通过上述递推式得到条件

$$L_{-m-l} + \frac{U_{-m-l}}{V_{-m-l+1}} = 0 \quad (\text{A.10})$$

因此, 整理上述关系, 我们可以得到本征值 ν 与分离常量 A 之间的关系满足

$$\begin{cases} L_{-m-l} + \frac{U_{-m-l}}{V_{-m-l+1}} = 0 & \nu = \text{整数} \\ R_1(\nu)L_0(\nu) - 1 = 0 & \nu \neq \text{整数} \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

参考文献

- [1] DOLAN S R. Instability of the massive Klein-Gordon field on the Kerr spacetime[J/OL]. Physical Review D, 2007, 76(8): 084001 [2023-09-08]. <http://arxiv.org/abs/0705.2880>.
- [2] STRATTON T, LEITE L C S, DOLAN S R, et al. Series reduction method for scattering of planar waves by Kerr black holes[J/OL]. Physical Review D, 2020, 102(4): 044025 [2023-08-07]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.102.044025>.
- [3] ABBOTT B P, et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger[J]. Phys. Rev. Lett., 2016, 116(6): 061102. arXiv: 1602.03837 [gr-qc].
- [4] LUO J, et al. TianQin: a space-borne gravitational wave detector[J]. Class. Quant. Grav., 2016, 33(3): 035010. arXiv: 1512.02076 [astro-ph.IM].
- [5] MEI J, et al. The TianQin project: current progress on science and technology[J]. PTEP, 2021, 2021(5): 05A107. arXiv: 2008.10332 [gr-qc].
- [6] WU Y L, et al. China's first step towards probing the expanding universe and the nature of gravity using a space borne gravitational wave antenna[J]. Commun. Phys., 2021, 4(1): 34.
- [7] EINSTEIN A. Approximative Integration of the Field Equations of Gravitation[J]. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.), 1916, 1916: 688-696.
- [8] CERVANTES-COTA J L, GALINDO-URIBARRI S, SMOOT G F. A Brief History of Gravitational Waves[J/OL]. Universe, 2016, 2(3). <https://www.mdpi.com/2218-1997/2/3/22>.
- [9] PIRANI F A E. On the Physical significance of the Riemann tensor[J]. Acta Phys. Polon., 1956, 15: 389-405.
- [10] BONDI H, PIRANI F A E, ROBINSON I. Gravitational waves in general relativity. 3. Exact plane waves[J]. Proc. Roy. Soc. Lond. A, 1959, 251: 519-533.
- [11] WEBER J. Detection and Generation of Gravitational Waves[J/OL]. Phys. Rev., 1960, 117: 306-313. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.117.306>.
- [12] HULSE R A, TAYLOR J H. Discovery of a pulsar in a binary system[J]. Astrophys. J. Lett., 1975, 195: L51-L53.
- [13] LIGO LAB. C. Evolution of LIGO's Detectors[R/OL]. 2017. <https://www.ligo.caltech.edu/page/facts>.
- [14] ABBOTT B P, et al. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral[J]. Phys. Rev. Lett., 2017, 119(16): 161101. arXiv: 1710.05832 [gr-qc].
- [15] ABBOTT B P, et al. GW170817: Measurements of neutron star radii and equation of state[J]. Phys. Rev. Lett., 2018, 121(16): 161101. arXiv: 1805.11581 [gr-qc].
- [16] HILDRETH W W. The Interaction of Scalar Gravitational Waves with the Schwarzschild Metric.[D]. Princeton University, New Jersey, 1964.
- [17] MATZNER R A. Scattering of Massless Scalar Waves by a Schwarzschild "Singularity"[J/OL]. Journal of Mathematical Physics, 1968, 9(1): 163-170. eprint: <https://pubs.aip.org/aip/jmp/article-pdf/9/1/163/19172226/163\1\online.pdf>. <https://doi.org/10.1063/1.1664470>.
- [18] VISHVESHWARA C V. Scattering of Gravitational Radiation by a Schwarzschild Black-hole[J/OL]. Nature, 1970, 227(1): 936-938. <https://doi.org/10.1038/227936a0>.
- [19] MIZERA S. Physics of the analytic S-matrix[J/OL]. Physics Reports, 2024, 1047: 1-92. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2023.10.006>.

- [20] LI W D, CHEN Y Z, DAI W S. Scattering state and bound state of scalar field in Schwarzschild spacetime: Exact solution[J/OL]. *Annals of Physics*, 2019, 409: 167919 [2023-10-23]. <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0003491619301745>.
- [21] PIJNENBURG M, CUSIN G, PITROU C, et al. Wave optics lensing of gravitational waves: Theory and phenomenology of triple systems in the LISA band[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2024, 110: 044054. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.110.044054>.
- [22] PIJNENBURG M, CUSIN G, PITROU C, et al. Rutherford scattering of quantum and classical fields[EB/OL]. 2022. <https://arxiv.org/abs/2211.14113>. arXiv: 2211.14113 [math-ph].
- [23] NAMBU Y, NODA S, SAKAI Y. Wave optics in spacetimes with compact gravitating object[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2019, 100: 064037. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.064037>.
- [24] TEUKOLSKY S A. Rotating Black Holes: Separable Wave Equations for Gravitational and Electromagnetic Perturbations[J/OL]. *Physical Review Letters*, 1972, 29(16): 1114-1118 [2023-05-07]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.29.1114>.
- [25] TEUKOLSKY S A. Perturbations of a Rotating Black Hole. I. Fundamental Equations for Gravitational, Electromagnetic, and Neutrino-Field Perturbations[J/OL]. *The Astrophysical Journal*, 1973, 185: 635 [2023-05-31]. <http://adsabs.harvard.edu/doi/10.1086/152444>.
- [26] TEUKOLSKY S A, PRESS W H. Perturbations of a rotating black hole. III - Interaction of the hole with gravitational and electromagnetic radiation[J/OL]. *The Astrophysical Journal*, 1974, 193: 443 [2023-06-02]. <http://adsabs.harvard.edu/doi/10.1086/153180>.
- [27] NEWMAN E, PENROSE R. An Approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients[J]. *J. Math. Phys.*, 1962, 3: 566-578.
- [28] KUBOTA K I, ARAI S, MOTOHASHI H, et al. Spin wave optics for gravitational waves lensed by a Kerr black hole[J/OL]. *Physical Review D*, 2024, 110(12). <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.110.124011>.
- [29] (德) 顾樵. 量子力学 [M]. 科学出版社, 2014.6.
- [30] GREENLAND P T. Two centre continuum Coulomb wavefunctions in the entire complex plane[J/OL]. *Theoretica chimica acta*, 1976, 42. <https://doi.org/10.1007/BF00574449>.
- [31] PONOMAREV L, SOMOV L. The wave functions of continuum for the two-center problem in quantum mechanics[J/OL]. *Journal of Computational Physics*, 1976, 20(2): 183-195. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999176900632>.
- [32] LI M C. Spheroidal analysis of Coulomb scattering[J/OL]. *Journal of Mathematical Physics*, 1974, 15(5): 570-575. eprint: https://pubs.aip.org/aip/jmp/article-pdf/15/5/570/19047560/570__1__online.pdf. <https://doi.org/10.1063/1.1666685>.
- [33] ZHANG H, HOU S, BAO S S. Searching for wormholes with gravitational wave scattering[J/OL]. *The European Physical Journal C*, 2023, 83(2): 127 [2023-05-04]. <https://link.springer.com/10.1140/epjc/s10052-023-11281-9>.
- [34] IYER S, WILL C M. Black-hole normal modes: A WKB approach. I. Foundations and application of a higher-order WKB analysis of potential-barrier scattering[J/OL]. *Physical Review D*, 1987, 35(12): 3621-3631 [2023-10-23]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.35.3621>.
- [35] IYER S. Black-hole normal modes: A WKB approach. II. Schwarzschild black holes[J/OL]. *Physical Review D*, 1987, 35(12): 3632-3636 [2023-10-23]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.35.3632>.
- [36] KOKKOTAS K D, SCHUTZ B F. Black-hole normal modes: A WKB approach. III. The Reissner-Nordström black hole[J/OL]. *Physical Review D*, 1988, 37(12): 3378-3387 [2023-10-23]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.37.3378>.

- [37] LEAVER E W. Solutions to a generalized spheroidal wave equation: Teukolsky's equations in general relativity, and the two-center problem in molecular quantum mechanics[J/OL]. Journal of Mathematical Physics, 1986, 27(5): 1238-1265 [2023-05-04]. <https://pubs.aip.org/aip/jmp/article/27/5/1238-1265/227910>.