

引力波散射理论探究

摘要

基本场在黑洞的弯曲时空下的散射具有非常基础的研究意义。自上世纪中期以来，人们对于不含时的散射进行了详细的研究，但我们对于不同类型的波的研究有限，而一个关键障碍就是计算散射振幅时分波求和缺少收敛性Dolan (2007); Stratton et al. (2020)。我们的工作是要构建一个框架来解决上述的发散问题——抛弃传统分波法中的平面波入射假设，考虑波源与散射源的长程力的共同影响，分析从波源到散射源再到无穷远的传播过程，来达到解决散射振幅缺乏收敛性问题，且在缺乏微分方程解析解的情况下提取我们需要的关于散射的信息，并通过数值方法验证我们的方法的敛散性。同时，也能够将方法拓展到电磁波和引力波的情况下去应用。

关键词: 散射—引力波—黑洞—椭圆方程

1. 引言

散射是物质相互作用的一个基本表现形式，不论是高能物理的对撞机探究新物理，还是湛蓝色的天空的形成，都离不开散射的作用。而对于宇宙，充斥在宇宙中的电磁波和引力波每时每刻都有与大质量天体发生着散射作用，包括引力透镜在内的许多现象都是散射的体现。如果我们希望进一步了解宇宙中内涵的信息，研究电磁波和引力波等的散射的意义重大。

研究散射问题的基本方法是量子力学中介绍的分波法 (Partial Wave Method)，其主要思想是将散射过程分离成两部分，其中一部分是从无穷远处传播到散射源的平面波，另外一部分在散射源处产生的散射波，我们将上述两部分在考虑一些短程势时在散射源处以为基底进行分解，得到一个无穷级数的求和，而每一项被称之为分波。但是，我们使用分波法处理长程势情况时会出现分波求和收敛性难题，究其根本在于平面波假设在长程势情况下并不成立，因此，寻找新的物理情景和对应的理论解释是必要的。

我们的理论框架则抛弃了分波法中的平面波假设，考虑波源与散射特殊函数源共同作用的势场分布，考虑波源-散射源-无穷远的传播过程；为了简化问题，我们将整个系统分为局域区（受黑洞的短程势影响，相对论效应明显）和近似区（势能近似使用经典牛顿势能）；对于近似区，我们考虑一般的牛顿势情况，根据薛定谔方程，最终可以得到决定波函数行为的椭圆函数，且该微分方程构成一个本征值问题。但是，我们对于椭圆方程本身的研究并不充分，包括边界条件难以确定，导致我们无法直接得到方程的解析形式，因此在不求解方程的前提下，得到散射波的信息是我们主要关注的问题。

而对于局域区，我们考虑最一般的散射源是克尔黑洞（旋转的黑洞）的情况。在散射源处，单个克尔黑洞的引力影响占主导，计算波函数在克尔黑洞附近的行为已经有了非常成熟的方法，尤其是以 Teukolsky 方程为代表的理论Teukolsky (1972, 1973); Teukolsky & Press (1974)，完整的描述了在克尔黑洞附近的行为，而我们对于其中最为关注的是从波在黑洞附近散射后产生的相移 (Phase Change)，为了简化问题，我们可以直接将散射前后的行为用相移表示，且与在近似区决定波函数行为的表达式构造对应关系。但是在计算相移时，仍面临理论上

的一些难题，这里我们选择使用参考使用 WKB 方法近似计算相移Zhang et al. (2023); Iyer & Will (1987); Iyer (1987); Kokkotas & Schutz (1988)。

总的来说，我们的理论框架对于散射的发散问题是一个很好的解决方案，并且理论足够基础，可以以此拓展到更多的应用场景，包括电磁波与大质量天体的相互作用如引力透镜等，引力波与致密天体的相互作用等，都可以套用我们的理论框架去计算，并且能够给观测天文学提供基础性的理论支持。

2. 理论部分

由于引力相互作用的长距离效应，人们不能简单地使用平面波作为入射波。相反，需要同时考虑源和散射中心的引力势。我们首先假设 A 与 B 两个天体距离足够远，因此可以对于不同距离的区域做不同的处理。在长虚线圈外，我们只需要考虑波源散射源的长程势部分，即牛顿势能部分，我们命名为长程区；而对于长虚线圈之内短虚线之外，由于两天体距离足够远，因此在该区域内只有单个天体的长程势起主导作用，我们命名为近似区；而对于短虚线之内的区域，由于离中心天体足够近，我们需要考虑广义相对论带来的短程势影响，我们命名为局域区。

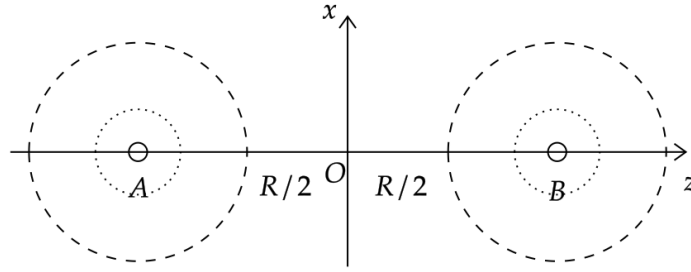


图 1. 近似区与局域区示意图

2.1. 长程区方程

我们首先考虑在近似区的方程。考虑下面图 1 波源-散射源的体系，其中点 A 是波源，而点 B 是散射中心。为了简单起见，我们首先考虑平坦时空中由薛定谔方程决定的标量波散射。其势能为强度为 N_A 和 N_B 的库伦电势

$$\left(-\frac{1}{2M} \nabla^2 - \frac{N_A}{r} - \frac{N_B}{r} \right) \psi = \epsilon \psi \quad (1)$$

其中， ϵ 是散射态的能量，我们在椭球坐标中对上述方程进行变换，则椭球坐标有如下定义

$$\mu = \frac{r_A + r_B}{R}, \quad \lambda = \frac{r_A - r_B}{R}, \quad \phi \quad (2)$$

其中达朗贝尔算符作用在标量场上的结果

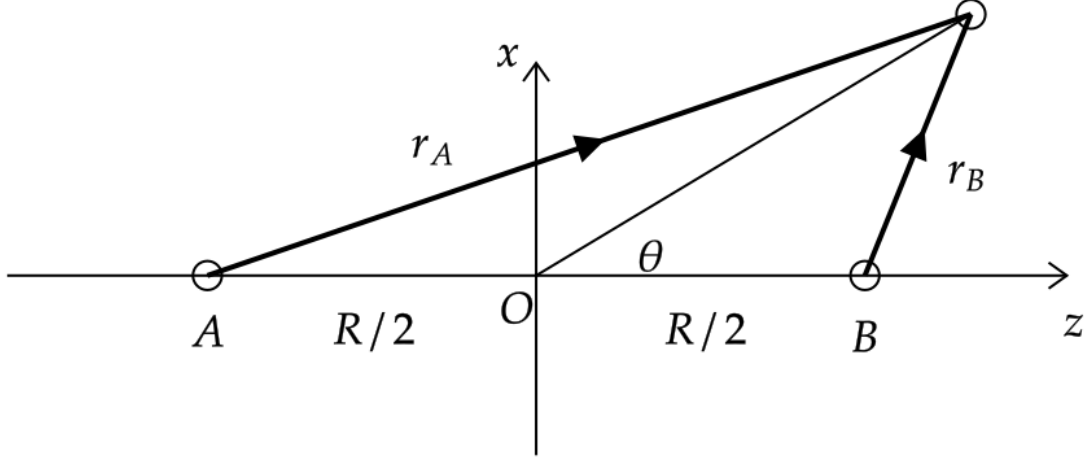


图 2. 波源与散射源构造的体系

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\sigma^2 (\mu^2 - \lambda^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(\mu^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right] + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[(1 - \lambda^2) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right] \right\} \quad (3)$$

$$+ \frac{1}{\sigma^2 (\mu^2 - 1) (1 - \lambda^2)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \quad (4)$$

其中 $\sigma = \frac{R}{2}$ 。那么我们可以对其进行分离变量

$$\psi = \sum_m a_m F_m(\mu) G_m(\lambda) e^{im\varphi} \quad (5)$$

则可以分别得到对应的微分方程，这组方程也称之为椭球方程

$$\left[\frac{d}{d\mu} (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} + \frac{m^2}{1 - \mu^2} - \rho_m + 2M\sigma (N_A + N_B) \mu + 2M\sigma^2 \epsilon \mu^2 \right] F_m(\mu) = 0 \quad (6)$$

$$\left[\frac{d}{d\lambda} (1 - \lambda^2) \frac{d}{d\lambda} - \frac{m^2}{1 - \lambda^2} - \rho_m - 2M\sigma (N_A - N_B) \lambda - 2M\sigma^2 \epsilon \lambda^2 \right] G_m(\lambda) = 0 \quad (7)$$

其中， ρ 是该微分方程的本征值，很明显我们考虑的问题是散射态，因此本征值是连续的，那么波函数的解应该被写为积分形式

$$\psi = \sum_m \int d\rho a_m(\rho) F_m(\rho, \mu) G_m(\rho, \lambda) e^{im\phi} \quad (8)$$

2.2. 椭球方程分析

对于椭球方程，我们对其解的行为了解有限，包括对于整个系统在椭球坐标下的边界条件也难以确定，因此我们尽可能的在不求解方程本身的情况下，得到我们想要的散射的信息。首先考虑在波源 A 的近似区波的行为，其决定的方程为

$$\frac{d^2}{dx^2} H_l^{A\pm}(x) + \left[1 - \frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{2\lambda_A}{x} \right] H_l^{A\pm}(x) = 0 \quad (9)$$

其中, $H_l^{A\pm}(x)$ 代表了合流超几何函数, 和方程1相比, 可以确定参数的关系: $x = \omega r_A / \sigma$, $\lambda_A = -\sqrt{\frac{M}{2\epsilon}} N_A$ 。而对于合流超几何函数, 可以在 $x \rightarrow \infty$ 有渐进形式

$$H_l^{A\pm}(x) \rightarrow e^{\pm i[x - \lambda_A \log(2x) - \frac{1}{2}\pi + \sigma_l(\lambda_A)]} \quad (10)$$

通过这个渐进形式, 我们可以发现对于实际的散射问题, 我们根本无法得到平面波的解, 取而代之的是其渐进形式的传播。同时, 我们也可以得到长程区在 A 附近的近似区的联系: 当靠近 A 时, B 的效应应该被忽略, 取而代之的是波函数在 A 附近以 A 的库伦波形式传播, 则有关系

$$\frac{1}{\sigma(\mu + \lambda)} \mathcal{F}_0^A(\omega(\mu + \lambda)) = \int d\rho a_{l0}(\rho) F_0^{(\lambda_A + \lambda_B)}(\rho, 1) G_0^{(\lambda_A - \lambda_B)}(\rho, \lambda) \quad (11)$$

其中,

$$\mathcal{F}_0^A(x) = \frac{e^{-\pi\lambda_A/2} |\Gamma(l+1+i\lambda_A)|}{2(2l+1)!} (-i)^{l+1} M_{i\lambda_A, l+\frac{1}{2}}(2ix) = \frac{1}{2i} [H_l^{A+}(x) - H_l^{A-}(x)] \quad (12)$$

对于方程11, 我们已经通过上标写明 F_m 和 G_m 对于 λ_A 和 λ_B 的依赖关系, 这个关系很容易通过方程7得到。在 A 点附近波从近似区传播到长程区时, 当满足 $\lambda \sim -1$ 和 $1 \ll \omega(\mu - 1) \ll 2\omega$ 时, 应当有对应关系

$$\frac{1}{\sigma(\mu + \lambda)} [2\omega(\mu + \lambda)]^{-i\lambda_A} e^{i[\omega(\mu + \lambda) + \sigma_0(\lambda_A)]} = \int d\rho a_{l0}(\rho) F_0^{(\lambda_A + \lambda_B)}(\rho, 1) G_0^{(\lambda_A - \lambda_B)}(\rho, \lambda) \quad (13)$$

对于上述方程, 我们无法直接得到其解析解, 但我们根据 Leaver 的级数解法Leaver (1986), 可以得到级数在 A 点附近展开的级数解, 对于 $m = 0$, 我们有

$$G_0(\rho, \lambda) = e^{i\omega(\lambda+1)} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^\lambda(\rho) (\lambda+1)^n \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \alpha_0^\theta c_1^\theta + \beta_0^\theta c_0^\theta + &= 0, \\ \alpha_n^\theta c_{n+1}^\theta + \beta_n^\theta c_n^\theta + \gamma_n^\theta c_{n-1}^\theta &= 0, n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

其中, 系数为

$$\begin{aligned} \alpha_n^\lambda &= -2n^2 - (B_2 + 2)n - B_2, \\ \beta_n^\lambda &= n^2 + (B_2 - 4i\omega - 1)n - a - i\omega B_2 + \rho + m(m+1), \\ \gamma_n^\lambda &= 2i\omega n + i\omega(B_2 - 2) + a, \end{aligned} \quad (16)$$

以及常数为

$$\begin{aligned} a &= 2M\sigma(N_A - N_B) = -2\omega(\lambda_A - \lambda_B), \\ B_2 &= 2(m+1). \end{aligned} \quad (17)$$

我们可以得到各级级数, 假设 0 级为 $c_0^\lambda = 1$,

$$\begin{aligned} c_1^\lambda &= \frac{\rho}{2} - \frac{1}{2}(a + 2i\omega) \\ c_2^\lambda &= \frac{1}{16}\rho^2 + \frac{1}{8}(1 - a - 4i\omega)\rho + \frac{1}{16}(a^2 + 8ia\omega - 12\omega^2) \\ c_3^\lambda &= \frac{1}{288}\rho^3 + \frac{1}{288}(8 - 3a - 18i\omega)\rho^2 + \frac{1}{288}(3a^2 + 36ia\omega - 6a - 92\omega^2 - 36i\omega + 12)\rho \\ &\quad - \frac{1}{288}(a^3 + 18ia^2\omega + 2a^2 - 92a\omega^2 - 120i\omega^3 + 8\omega^2) \\ &\quad \dots \end{aligned} \quad (18)$$

则有表达式

$$G_0^{\lambda_A - \lambda_B}(\rho, \lambda) = e^{i\omega(\lambda+1)} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^\lambda(\rho)(1+\lambda)^n \quad (19)$$

虽然级数系数已经被归一化, 但为了避免符号上出现混乱, 我们以 $G_0(\rho, -1)$ 作为归一化系数

$$G_0^{\lambda_A - \lambda_B}(\rho, \lambda) = G_0^{\lambda_A - \lambda_B}(\rho, -1) e^{i\omega(\lambda+1)} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^\lambda(\rho)(1+\lambda)^n \quad (20)$$

观察各级系数, 我们很容易发现 ρ 都以幂级数线性叠加的形式存在, 因此为了简化问题, 我们定义“ n 阶矩” Z_n^A 为

$$Z_n^A \equiv \int d\rho a_0(\rho) F_0^{\lambda_A + \lambda_B}(\rho, \mu) G_0^{\lambda_A - \lambda_B}(\rho, -1) \rho^n \quad (21)$$

则公式11的右边可以改写为

$$\begin{aligned} e^{i\omega(\lambda+1)} &\left\{ Z_0^A + \frac{1}{2}(\lambda+1) [-(a + 2i\omega)Z_0^A + Z_1^A] \right. \\ &\quad + \frac{1}{16}(\lambda+1)^2 [(a^2 + 8ia\omega - 12\omega^2)Z_0^A + 2(1 - a - 4i\omega)Z_1^A + Z_2^A] \\ &\quad + \frac{1}{288}(\lambda+1)^3 [-(a^3 + 18ia^2\omega + 2a^2 - 92a\omega^2 - 120i\omega^3 + 8\omega^2)Z_0^A \\ &\quad + (3a^2 + 36ia\omega - 6a - 92\omega^2 - 36i\omega + 12)Z_1^A + (8 - 3a - 18i\omega)Z_2^A + Z_3^A] \\ &\quad \left. + \mathcal{O}((\lambda+1)^4) \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

实际上, 我们其实是以“ n 阶矩” Z_n^A 为基, 将波函数在 A 附近展开, 如果我们希望求解 Z_n^A 是不难得到的, 首先上述展开时应该等于库伦波在 A 点的解, 应该与式子13对应, 且上述表达式是关于 $(1 + \lambda)$ 的幂级数求和, 那么我们可以对表达式13做 $(1 + \lambda)$ 的泰勒展开, 则可以得到各阶矩的表达式, 我们写出

$$Z_0^A = \int d\rho a_0(\rho) F_0^{\lambda_A + \lambda_B}(\rho, \mu) G_0^{\lambda_A - \lambda_B}(\rho, -1) = \frac{[2\omega(\mu - 1)^{-i\lambda_A}]}{\sigma(\mu - 1)} e^{i[\omega(\mu - 1) + \sigma_0(\lambda_A)]} \quad (23)$$

$$Z_1^A = \int d\rho a_0(\rho) F_0^{\lambda_A + \lambda_B}(\rho, \mu) G_0^{\lambda_A - \lambda_B}(\rho, -1) \rho \quad (24)$$

$$= \frac{[2\omega(\mu - 1)^{-i\lambda_A}]}{\sigma(\mu - 1)^2} e^{i[\omega(\mu - 1) + \sigma_0(\lambda_A)]} [a(\mu - 1) - 2i\lambda_A + 2i\omega(\mu - 1) - 2] \quad (25)$$

很明显, 如果我们将这个类似的方法应用到 B 点附近是类似的情况, 但是 A 与 B 的情况并不具有对应关系, 因为 A 点作为波源只包含了出射波的信息, 而对于 B 点的散射源, 应当包含入射波和反射波的信息, 因此 A 点的表达式应当是 B 点表达式的退化形式, 于是, 我们需要找到在 A 点出射波与 B 点的波函数关系, 首先对 B 点附近 ($\lambda \sim 1$) 的波进行同样的展开

$$G_0(\rho, \lambda) = G_0(\rho, 1) e^{i\omega(1 - \lambda)} \sum_{n=0}^{+\infty} d_n^\lambda(\rho) (1 - \lambda)^n \quad (26)$$

也有同样形式的“ n 阶矩” Z_n^B

$$Z_n^B \equiv \int d\rho a_0(\rho) F_0^{\lambda_A + \lambda_B}(\rho, \mu) G_0^{\lambda_A - \lambda_B}(\rho, 1) \rho^n \quad (27)$$

因此也有同样的以 Z_n^B 为基的展开式, 但明显 Z_n^B 和 Z_n^A 的关系并不是平凡的, 尤其是积分非常复杂, 但注意到 $G_0^{\lambda_A - \lambda_B}(\rho, -1)$ 是关于 ρ 和 $\lambda_A - \lambda_B$ 的函数, 我们不妨假设 $G_0^{\lambda_A - \lambda_B}(\rho, -1)$ 与 $G_0^{\lambda_A - \lambda_B}(\rho, 1)$ 有关系

$$G_0^{\lambda_A - \lambda_B}(\rho, 1) = \xi(\rho) G_0^{\lambda_A - \lambda_B}(\rho, -1) \quad (28)$$

其中, $\xi(\rho)$ 是没有确定的函数, 但值得肯定的是, 由于 $\xi(\rho)$ 是非平凡的, 其将提供在 B 点出射波和入射波同时存在的信息, 其计算方法我们还未得到, 但我们所预期的是在长程区以 Z_n^B 为基的展开式需要与 B 点近似区的表达式匹配, 也就是

$$\sum_l \frac{1}{\sigma(\mu - \lambda)} \{ u_l [2\omega(\mu - \lambda)]^{-i\lambda_B} e^{i[\omega(\mu - \lambda) + \sigma_l(\lambda_B)]} + v_l [2\omega(\mu - \lambda)]^{i\lambda_B} e^{-i[\omega(\mu - \lambda) + \sigma_l(\lambda_B)]} \} P_l^0 \left(\frac{\lambda\mu - 1}{\mu - \lambda} \right) \quad (29)$$

在 $\lambda \sim 1$ 附近展开也就是

$$\frac{u_0}{\sigma(\mu - 1)} [2\omega(\mu - 1)]^{-i\lambda_B} e^{i[\omega(\mu - 1) + \sigma_0(\lambda_B)]} + \frac{v_0}{\sigma(\mu - 1)} [2\omega(\mu - 1)]^{i\lambda_B} e^{-i[\omega(\mu - 1) + \sigma_0(\lambda_B)]} \quad (30)$$

2.3. 局域区场方程

对于局域场的分析，我们已经有了相对完整的理论去解释，在对于 B 点的局域区，我们首先假设其是克尔黑洞（旋转黑洞），我们先考虑最简单的标量场，根据Teukolsky (1973) 的工作，我们使用纽曼彭罗斯形式（简称 N-P 形式）Newman & Penrose (1962) 来解决我们的问题，首先我们写出克尔度规

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(\Delta + \frac{2Mr(r^2 + a^2)}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (31)$$

其中，

$$\begin{aligned} \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta \\ \Delta &= r^2 - 2Mr + a^2 \end{aligned} \quad (32)$$

我们构造一组满足正交关系的四标架，其满足

$$l \cdot n = 1 \quad (33)$$

$$m \cdot m^* = -1 \quad (34)$$

则我们有 N-P 形式矢量表达式

$$\begin{aligned} l^\mu &= [(r^2 + a^2)/\Delta, 1, 0, a/\Delta] \\ n^\mu &= [r^2 + a^2, -\Delta, 0, a] \\ m^\mu &= [ia \sin \theta, 0, 1, i/\sin \theta]/[2^{1/2}(r + ia \cos \theta)] \end{aligned} \quad (35)$$

我们又定义了如下 N-P 形式旋量系数

$$\begin{aligned} \rho &= -1/(r - ia \cos \theta) \\ \beta &= -\rho^* \cot \theta / (2\sqrt{2}) \\ \pi &= ia\rho^2 \sin \theta / \sqrt{2} \\ \tau &= -ia\rho\rho^* \sin \theta / \sqrt{2} \\ \mu &= \rho^2 \rho^* \Delta / 2 \\ \gamma &= \mu + \rho\rho^*(r - M)/2 \\ \alpha &= \pi - \beta^* \end{aligned} \quad (36)$$

还有对应的 N-P 形式微分算子

$$\begin{aligned} D &= l^\mu \partial / \partial x^\mu \\ \Delta &= n^\mu \partial / \partial x^\mu \\ \delta &= m^\mu \partial / \partial x^\mu \end{aligned} \quad (37)$$

带入经过变量代换后的爱因斯坦场方程，将会得到一偏微分方程，且由于有旋转对称性，我们可以对其进行分离变量

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Delta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \varphi} + \left[\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \\ & - \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta^{s+1} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - 2s \left[\frac{a(r-M)}{\Delta} + \frac{i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \\ & - 2s \left[\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia \cos \theta \right] \frac{\partial \psi}{\partial t} + (s^2 \cot^2 \theta - s) \psi = 4\pi \Sigma T. \end{aligned} \quad (38)$$

$$\psi = e^{i\omega t} e^{im\phi} S(\theta) R(r) \quad (39)$$

我们将得到径向和角向的微分方程

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left(\Delta^{s+1} \frac{dR}{dr} \right) + \left(\frac{K^2 - 2is(r-M)K}{\Delta} + 4is\omega r - \lambda \right) R = 0 \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) + \\ & \left(a^2 \omega^2 \cos^2 \theta - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - 2a\omega s \cos \theta - \frac{2ms \cos \theta}{\sin^2 \theta} - s^2 \cot^2 \theta + s + A \right) S = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

其中 $K \equiv (r^2 + a^2)\omega - am$, $\lambda \equiv A + a^2\omega^2 - 2am\omega$, $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$; 对于角向的解我们称之为自旋权重椭圆函数 (Spin-weighted Spheroidal Function)，我们已经很多工作对其做了详细的研究；而径向的方程，被称之为 Teukolsky 方程，目前还没有完整的解析形式，但是我们对其一些特殊形式进行研究得到了一些解析形式，比如合流修恩函数 [Li et al. \(2019\)](#)。且有在黑洞事件视界附近的边界条件 [Dolan \(2007\)](#)

$$\lim_{r \rightarrow r_+} R_{lm}(r) \sim (r - r_+)^{-i\sigma} \quad (42)$$

其中 $\sigma = \frac{2r_+(\omega - \omega_c)}{r_+ - r_-}$, $\omega_c = \frac{am}{2Mr_+}$, $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ (取 $G = 1, c = 1$ 单位制)。由于 Teukolsky 方程没有完整的解析形式，因此我们往往采用数值积分的形式来了解波函数在局域区的行为，我们使用 Mathematica 代码进行计算。

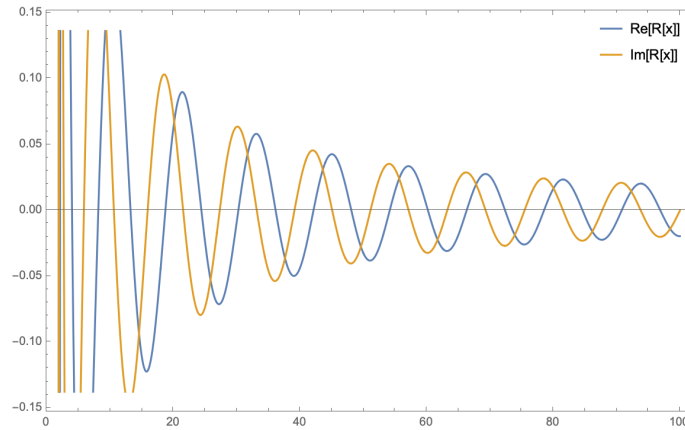


图 3. $a = 0.5, \omega = 0.5, l = 0, m = 0$ 径向函数分布

2.4. 局域场散射相移

对于散射过程，尤其是对于引力波等天体方面的散射问题，我们往往更关心散射过程的相移以及波形信息，而不是散射截面，因为引力势或者库伦势这种长程势的原因，散射截面必然趋于无穷大，则丧失其讨论价值；我们仍考虑最简单的情况，标量场散射问题。

在上一小节我们已经得到了在克尔黑洞附近的波函数的分布，注意到当 $r \rightarrow \infty$ 时，黑洞的广义相对论效应（包括黑洞旋转的拖拽效应）必然会趋近于零，只剩下牛顿势能的部分，也就是从局域区过渡到近似区的过程，那么我们很容易从物理上得到一个结论—Teukolsky 方程在 $r \rightarrow \infty$ 的渐进形式必然是合流超几何函数对应的方程，实际上我们在经过计算后，得到 Teukolsky 方程的渐进形式如下

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR) + \left[\omega^2 + \frac{4M\omega^2}{r} - \frac{\Lambda}{r^2} \right] rR = 0 \quad (43)$$

其中 Λ 是该方程的本征值，表达式是符合我们的结论的。

我们再考虑相移我们可以考虑无穷远入射到局域区然后散射到无穷远的过程，在这个过程中，入射与散射将会产生一个相位偏移，且由于黑洞会吸收一部分波，因此相移是复数的且模长恒小于 1。同时，在无穷远处的波的解析形式是合流超几何函数表示的，或者其渐进的形式，我们可以表示出关于入射和散射波的表达式，假设产生的相移为

$$\delta_l = \sigma_l^{LR} + \delta_l^{SR} \quad (44)$$

其中， σ_l^{LR} 代表只由于库伦波散射产生的相移，这个值我们是知道的，出现在合流超几何函数的渐进形式中，即表达式10中，计算式是

$$\sigma_l^{LR}(\lambda) \equiv \text{Arg}(\Gamma(l+1+\lambda)) \quad (45)$$

而由于黑洞部分影响的短程势部分是未知的，我们需要将其提取出来。考虑一般形式

$$u_L(x) \sim A e^{2i\delta_L^{SR}} e^{i(x-\lambda \log(2x)+\sigma_L-\frac{1}{2}L\pi)} + B e^{-i(x-\lambda \log(2x)+\sigma_L-\frac{1}{2}L\pi)} \quad (46)$$

$$u_L(x) \sim B \left[\frac{A}{B} e^{2i\delta_L^{SR}} e^{i(x-\lambda \log(2x)+\sigma_L-\frac{1}{2}L\pi)} + e^{-i(x-\lambda \log(2x)+\sigma_L-\frac{1}{2}L\pi)} \right] \quad (47)$$

$$u'_L(x) \sim B \left[\frac{A}{B} e^{2i\delta_L^{SR}} e^{i(x-\lambda \log(2x)+\sigma_L-\frac{1}{2}L\pi)} i \left(1 - \frac{\lambda}{x}\right) + e^{-i(x-\lambda \log(2x)+\sigma_L-\frac{1}{2}L\pi)} \left(1 - \frac{\lambda}{x}\right) (-i) \right] \quad (48)$$

则我们可以得到

$$u_L - \frac{i u'_L}{1 - \frac{\lambda}{x}} = 2\hat{B} \frac{A}{B} e^{2i\delta^{SR}} e^{i(x-\lambda \log(2x)+\sigma_L-\frac{1}{2}L\pi)} \quad (49)$$

$$u_L + \frac{i u'_L}{1 - \frac{\lambda}{x}} = 2\hat{B} e^{-i(x-\lambda \log(2x)+\sigma_L-\frac{1}{2}L\pi)} \quad (50)$$

消去振幅信息，我们可以得到相移信息，

$$\frac{A}{B} e^{2i\delta^{SR}} = \frac{u_L - \frac{i u'_L}{1 - \frac{\lambda}{x}}}{u_L + \frac{i u'_L}{1 - \frac{\lambda}{x}}} e^{-2i(x-\lambda \log(2x)+\sigma_L-\frac{1}{2}L\pi)} \quad (51)$$

于是，我们便可以通过径向的波函数在区域无穷远时，上述相移将会稳定在一个特定的值，也就是波函数与标准库伦波函数匹配了。

但是，我们在实际计算过程发现，标准的库伦波和径向波函数在选取特定的 ω 和 l 时并不容易匹配，往往会出现匹配速度缓慢的问题，尤其是在 $\omega \gg l$ 和 $\omega \ll 1$ 时会出现这样的问题。

经过我们的分析发现，在黑洞附近的引力势会产生一个类似“山峰”的势垒，且随 l 的增大而增大，这一点我们可以通过 Teukolsky 方程分析得到。对于大 l 时候，事件视界附近的引力势会远大于标量波的能量，会产生类似弹性散射的现象，散射波和入射波的相移计算匹配速度缓慢；而对于，高 ω 的情况，标量波能量远大于引力势，则标量波对于势垒的响应不够明显，也会出现匹配速度慢的情况。

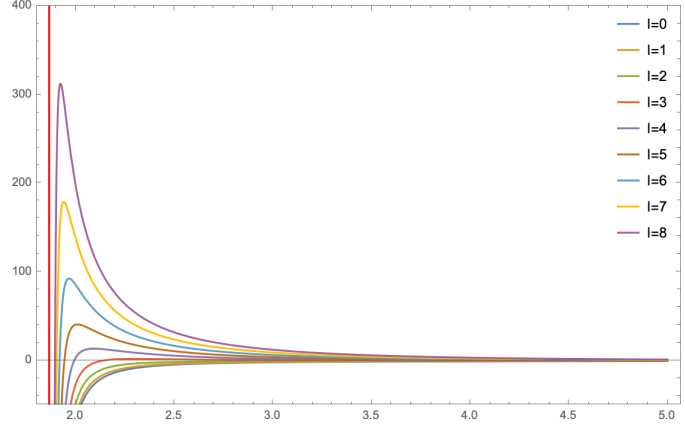


图 4. 对于不同 l ，黑洞势垒的示意图，其中左边红线为事件视界半径

针对这种情况，我们参考了张宏老师Zhang et al. (2023) 处理虫洞势垒散射的问题的方法，也包括处理类似问题的一系列工作Iyer & Will (1987); Iyer (1987); Kokkotas & Schutz (1988)，我们将使用 WKB 近似方法，会极大的提高收敛速度，且得到的相移误差在误差允许范围内，因此，这是我们接下来需要完成的工作。

3. 结论

在这个工作中，我们为了研究长程势（如引力势和库伦波）下的波的散射问题，但由于传统的分波法在长程势情况下存在分波求和发散难题，因此我们提出了一种新的方法框架，不再假设入射波为无穷远传播到散射源的平面波，而是考虑更符合物理图像的波源与散射源的长程力的共同作用的系统，并分析整个波传播过程。并且，为了简化问题，我们将系统分为长程区、近似区（经典牛顿势占主导）和局域区（广义相对论效应明显）在不同区域做不同的近似处理来简化问题，同时也能帮助更好的理解在每个区域的物理信息。对于近似区使用椭球坐标，导出椭球方程描述波函数。由于方程难以解析求解，我们通过级数表达波函数，来提取关于散射的信息。对于局域区考虑克尔黑洞产生的广义相对论效应，并使用纽曼彭罗斯形式，导出了决定角向的自旋权重椭球函数和决定径向的 Teukolsky 方程描述波在克尔黑洞附近的传播行为。之后，为了考虑波在局域区的散射行为，我们近似的计算了其在局域区散射产生的相移信息。但是在实际计算过程中遇到了匹配速度过慢的问题，经过分析发现黑洞附近存在的势垒对于不同能量的波的响应程度不同，因此会在一些特定的范围产生匹配速度过慢的问题。于是，我们参考了Zhang et al. (2023); Iyer & Will (1987); Iyer (1987); Kokkotas & Schutz (1988) 的工作，采用 WKB 方法近似计算相移，并且会有理想的计算速度和计算精度。同时我们从标量波出发建立理论框架，其也可拓展至电磁波和引力波的散射计算，为天文观测提供基础性的理论支持。

总体而言，文章旨在提出一个解决波散射理论中长期难题的新思路和计算框架，具有重要的理论意义和应用前景。

REFERENCES

- Dolan, S. R. 2007, *Physical Review D*, 76, 084001, doi: [10.1103/PhysRevD.76.084001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.084001)
- Iyer, S. 1987, *Physical Review D*, 35, 3632, doi: [10.1103/PhysRevD.35.3632](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.35.3632)
- Iyer, S., & Will, C. M. 1987, *Physical Review D*, 35, 3621, doi: [10.1103/PhysRevD.35.3621](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.35.3621)
- Kokkotas, K. D., & Schutz, B. F. 1988, *Physical Review D*, 37, 3378, doi: [10.1103/PhysRevD.37.3378](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.37.3378)
- Leaver, E. W. 1986, *Journal of Mathematical Physics*, 27, 1238, doi: [10.1063/1.527130](https://doi.org/10.1063/1.527130)
- Li, W.-D., Chen, Y.-Z., & Dai, W.-S. 2019, *Annals of Physics*, 409, 167919, doi: [10.1016/j.aop.2019.167919](https://doi.org/10.1016/j.aop.2019.167919)
- Newman, E., & Penrose, R. 1962, *J. Math. Phys.*, 3, 566, doi: [10.1063/1.1724257](https://doi.org/10.1063/1.1724257)
- Stratton, T., Leite, L. C., Dolan, S. R., & Crispino, L. C. 2020, *Physical Review D*, 102, 044025, doi: [10.1103/PhysRevD.102.044025](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.044025)
- Teukolsky, S. A. 1972, *Physical Review Letters*, 29, 1114, doi: [10.1103/PhysRevLett.29.1114](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.29.1114)
- . 1973, *The Astrophysical Journal*, 185, 635, doi: [10.1086/152444](https://doi.org/10.1086/152444)
- Teukolsky, S. A., & Press, W. H. 1974, *The Astrophysical Journal*, 193, 443, doi: [10.1086/153180](https://doi.org/10.1086/153180)
- Zhang, H., Hou, S., & Bao, S.-s. 2023, *The European Physical Journal C*, 83, 127, doi: [10.1140/epjc/s10052-023-11281-9](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11281-9)