Análisis de una partícula libre bajo la formulación de Integral de Caminos

Darío Román Gómez Martín[1] **Asesor 1:** *Carlos Alberto Muñoz Villegas*

[1] *dario.gomez9544@alumnos.udg.mx*
Departamento de Física, CUCEI, Universidad de Guadalajara
Blvd. Marcelino García Barragán 1421, Col. Olímpica, Guadalajara Jal., C. P. 44430, México

Resumen

La integral de caminos reformula la mecánica cuántica sin depender explícitamente de operadores como en la formulación canónica. Representa una teoría que define la transición de una partícula de un punto a otro como una suma sobre todos los posibles caminos que la partícula puede seguir. En lugar de depender directamente de operadores, como el Hamiltoniano, los cálculos se realizan utilizando las amplitudes cuánticas de cada posible camino. El resultado final es un propagador que describe la evolución del sistema y cómo se propaga la función de onda en el tiempo. Este formalismo proporciona una visión intuitiva de fenómenos cuánticos como la interferencia y la probabilidad, siendo fundamental en la electrodinámica cuántica (QED).

En este proyecto se analiza la derivación y obtención del propagador de una partícula libre y se compara con el formalismo de operadores tradicional de Schrödinger.

Introducción

Sabemos que el formalismo tradicional que describe la dinámica de una partícula parte de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo[1]:

$$\hat{H}|\psi(t=0)\rangle = E|\psi(t=0)\rangle, \tag{1}$$

donde $\hat{H}$ es el operador Hamiltoniano, $\psi(t=0)$ es la función de onda estacionaria, y E es el eigenvalor asociado. Esto implica que Ψ es un eigenestado del Hamiltoniano y el eigenvalor E corresponde a un observable, en este caso, la energía del sistema.

El operador de evolución temporal $\hat{U}(t)$ aplicado a un estado inicial $|\psi(t=0)\rangle$, genera la evolución temporal de dicho estado[1][2], resultando en la función de onda dependiente del tiempo. Definiendo el operador evolución como

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}, \tag{2}$$

donde $\hat{H}$ representa el operador hamiltoniano y t el tiempo. En la representación de Dirac se expresa la aplicación del operador evolución al estado estacionario como

$$\langle\psi(t)|e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}|\psi(t=0)\rangle. \tag{3}$$

Definimos entonces al Propagador[2]

$$K(x',x,t) = \langle x'|e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}|x\rangle, \tag{4}$$

el cual depende de x', x y t, que representan posiciones diferentes entre sí y al tiempo, respectivamente. Proyectando el estado sobre la base de posiciones $|x'\rangle$ obtenemos a la función de onda tiempo dependiente

$$\psi(x,t) = \langle x'|e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}|\psi(t=0)\rangle, \tag{5}$$

e introduciendo una relación de completitud de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x\rangle\langle x|dx = \mathbb{1}, \tag{6}$$

nos permite insertar Ec. 5 en Ec. 6. Esta es la función de onda tiempo dependiente en términos de su onda estacionaria por su propagador

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}K(x',x,t)\langle x|\psi(t=0)\rangle dx. \tag{7}$$

Volvamos a nuestra definición del propagador en Ec. 4. Elevamos la potencia del operador evolución por una unidad trivial definida como N/N, donde N divide al tiempo t[3]

$$K(x',x,t) = \langle x'|\left(e^{-\frac{i\hat{H}\frac{t}{N}}{\hbar}}\right)^N|x\rangle; \tag{8}$$

Esto nos permite dividir las contribuciones del propagador infinitesimalmente cuando N tiende a infinito. Entonces podemos expresar K como:

$$K(x',x,t) = \int...\int dx_{N-1}dx_{N-2}...dx_1\langle x'|e^{-\frac{i\hat{H}\frac{t}{N}}{\hbar}}|x_{N-1}\rangle\langle x_{N-1}|e^{-\frac{i\hat{H}\frac{t}{N}}{\hbar}}|x_{N-2}...\langle x_1|e^{-\frac{i\hat{H}\frac{t}{N}}{\hbar}}|x\rangle\rangle; \tag{9}$$

Ahora bien, dado que el Hamiltoniano está expresado en términos de las posiciones y momentos generalizados (en este caso de las posiciones x_i y momentos P_i)[4]. Entonces insertamos de nuevo una relación de completitud en las bases de los momentos entre cada bra y el operador en Ec. 9, resultando en

$$= \int...\int dx_{N-1}dx_{N-2}...dx_1\int dP_{N-1}...dP_0\langle x'|P_{N-1}\rangle\langle P_{N-1}|e^{-\frac{i\hat{H}\frac{t}{N}}{\hbar}}|x_{N-1}\rangle\langle x_{N-1}|P_{N-2}\rangle\cdots \tag{10}$$

Ahora recurrimos al producto de Trotter[6] [7] y a la fórmula Baker-Campbell-Hausdorff (BCH)[6] [7] [8] para los n operadores. BCH es un desarrollo en expansión perturbativa para operadores que no conmutan, como es el caso con $\hat{x}$ y $\hat{P}$. Con BCH podemos aproximar estos exponenciales como

$$e^{\frac{A}{N}+\frac{B}{N}} = \lim_{N\to\infty}\left(e^{A/N}e^{B/N}(1+\frac{[A,B]}{N^2}+\mathcal{O}(\frac{1}{N^3}))\right)^N,$$

donde podemos negar los términos al primer orden, dado que N va a infinito. Ahora bien, el producto de Trotter permite la partición de la evolución temporal en pasos pequeños, como acabamos de utilizar. Entonces

$$e^{A+B} = \lim_{n\to\infty}\left(e^{A/N}e^{B/N}\right)^N,$$

lo cual describe justo nuestro caso, salvo por unos factores $e^{\frac{-iA}{\hbar N}}e^{\frac{-iB}{\hbar N}}$. Entonces, aplicando estos factores como el operador Hamiltoniano en su forma $\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{x})$, reemplazamos en Ec. 10 por estos términos

$$\int ... \int dx_{N-1}...dx_1 \int dP_{N-1}...dP_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}x'P_{N-1}} \langle P_{N-1}| e^{-\frac{i\hat{P}^2}{2m\hbar}(\frac{t}{N})} e^{-\frac{iV(\hat{x})}{\hbar}(\frac{t}{N})} |x_{N-1}\rangle\langle x_{N-1}|P_{N-2}\rangle \cdots \tag{11}$$

En la anterior expresión se utilizó la característica de los operadores $\hat{P}^2$ y $V(\hat{x})$, ya que al ser observables, son hermíticos, y debido a su hermiticidad pueden conmutar con otros operadores[5]. El operador $\hat{P}^2$ actuó sobre $\langle P_{N-1}|$ y $V(\hat{x})$ sobre $|x_{N-1}\rangle$. El factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}x'P_{N-1}}$ surge al proyectar la base de momentos $\langle x'|P_{N-1}\rangle$. Esto se repite para cada paso N, en este desarrollo solo se presenta el primer término como referencia.

Recordemos que un operador $e^{\hat{A}}$ actuando sobre un $|\alpha\rangle$ puede desarrollarse como $(1+\hat{A}+\frac{1}{2}\hat{A}\hat{A}+...)\,|\alpha\rangle$. Si $\hat{A}$ es hermitiano, entonces $e^{\hat{A}} = (1+\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2+...)\,|\alpha\rangle = e^{\alpha}|\alpha\rangle$. Esto nos permite quitar la dependencia de operadores de la definición[2][3].

$$\int ... \int dx_{N-1}...dx_1 \int dP_{N-1}...dP_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}x'P_{N-1}} e^{-\frac{iP_{N-1}^2}{2m\hbar}(\frac{t}{N})} e^{-\frac{iV(x_{N-1})}{\hbar}(\frac{t}{N})} \langle P_{N-1}|x_{N-1}\rangle \cdots \tag{12}$$

El término $\langle P_{N-1}|x_{N-1}\rangle$ subsecuente es otra proyección en la base de momentos, obteniendo otro factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{-i}{\hbar}P_{N-1}x_{N-1}}$, lo que nos presenta con

$$\int ... \int dx_{N-1}...dx_1 \int dP_{N-1}...dP_0 \frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}(x'-x_{N-1})P_{N-1}} e^{-\frac{iP_{N-1}^2}{2m\hbar}(\frac{t}{N})} e^{-\frac{iV(x_{N-1})}{\hbar}(\frac{t}{N})} \ldots \tag{13}$$

Dado que $V(x_{N-1})$ no depende de P, podemos relegarla como constante al integrar por P. Enfocándonos en

$$\int dP_{N-1}\frac{1}{2\pi\hbar}\exp\left(\frac{i}{\hbar}(x'-x_{N-1})P_{N-1}-\frac{iP_{N-1}^2}{2m\hbar}\left(\frac{t}{N}\right)\right). \tag{14}$$

El siguiente paso sería integrar y establecer una relación de recurrencia (de ser necesaria) para los N términos restantes[7]. Sin embargo, el integrando contiene una exponencial con solo imaginarios, lo cual diverge la integral.

Nuestra aproximación a este problema consiste en realizar una rotación de Wick[9] en el tiempo para integrar en el plano euclideo y forzar a la integral a converger. Realizar esta rotación en el tiempo no afecta al resultado final, ya que al final se deshace el cambio. Para esto, definimos a

$$t\equiv -i\tau, \Delta\tau\equiv\frac{\tau}{N}, \Delta t\equiv\frac{t}{N}. \tag{15}$$

Por lo tanto, Ec. 14 se expresa como

$$\int dP_{N-1}\frac{1}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{-\Delta\tau}{2m\hbar}\left(P_{N-1}^2-\frac{i2m}{\Delta\tau}P_{N-1}(x'-x_{N-1})\right)\right]; \tag{16}$$

Después de cierta manipulación algebraica (completar cuadrado) obtenemos:

$$\int dP_{N-1}\frac{1}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{-\Delta\tau}{2m\hbar}\left(P_{N-1}-\frac{im}{\Delta\tau}(x'-x_{N-1})\right)^2-\frac{m}{2\hbar\Delta\tau}(x'-x_{N-1})^2\right]. \tag{17}$$

Con esto podemos reducir a Ec. 17 a una integral gaussiana de la forma $e^{-u^2}du$[7]. El resultado de este término entonces será:

$$\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\Delta\tau}}\exp\left[-\frac{m}{2\hbar}\frac{(x'-x_{N-1})^2}{\Delta\tau}\right]. \tag{18}$$

Realizando las N integrales de momentos, simplificamos la Ec. 13 e incluimos el término del potencial $V(x_{N-1})$.

$$\int ... \int dx_{N-1}...dx_1\left(\frac{m}{2\pi\hbar\Delta\tau}\right)^{\frac{N}{2}}\exp\left[-\frac{m}{2\hbar}\frac{(x'-x_{N-1})^2}{\Delta\tau}-\frac{\Delta\tau}{\hbar}V(x_{N-1})\right]\cdots \tag{19}$$

Multiplicando por un uno trivial de la forma $\frac{\Delta\tau}{\Delta\tau}$ al primer término dentro del exponente, obtenemos una expresión familiar que podemos factorizar

$$\int ... \int dx_{N-1}...dx_1\left(\frac{m}{2\pi\hbar\Delta\tau}\right)^{\frac{N}{2}}\exp\left[\frac{\Delta\tau}{\hbar}\left(-\frac{m}{2}\frac{(x'-x_{N-1})^2}{\Delta\tau^2}-V(x_{N-1})\right)\right]\cdots \tag{20}$$

Podríamos permanecer en espacio euclidiano con la rotación de Wick que realizamos previamente. Sin embargo, volveremos a la variable original para preservar la demostración[7][9]. Analizando la Ec. 15 podemos llegar a la conclusión de que $\Delta\tau=\frac{\tau}{N}=\frac{it}{N}=i\Delta t$. Con esto

$$\int ... \int dx_{N-1}...dx_1 \left(\frac{m}{2\pi\hbar\Delta\tau}\right)^{\frac{N}{2}} \exp\left[\frac{i\Delta t}{\hbar}\left(\frac{m}{2}\frac{(x'-x_{N-1})^2}{\Delta t^2} - V(x_{N-1})\right)\right]\cdots \tag{21}$$

Por lo tanto, podemos definir al propagador como[2]

$$\begin{aligned} K(x',x,t) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi\hbar\Delta\tau}\right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{i=1}^{N-1} dx_i \exp\left[\frac{i\Delta t}{\hbar}\left(\frac{m}{2}\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{\Delta t^2} - V(x_i)\right)\right], \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi\hbar\Delta\tau}\right)^{\frac{N}{2}} \int \mathcal{D}(x) \exp\left[\frac{i\Delta t}{\hbar}\left(\sum_{i}^{N-1}\frac{m}{2}\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{\Delta t^2} - V(x_i)\right)\right], \\ &= \lim_{t\to 0}\mathcal{N}\int \mathcal{D}(x) e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t\left(\frac{m}{2}v^2 - V(x_i)\right)dt}, \\ &= \lim_{t\to 0}\mathcal{N}\int \mathcal{D}(x) e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathcal{L}dt}, \\ &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}(x) e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}}. \end{aligned} \tag{22}$$

Definiendo a $\mathcal{D}(x)$ como $\prod_{i=1}^{N-1} dx_i$ e identificando a $\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{\Delta t^2}$ como la velocidad i-ésima cuando t tiende a cero, a $\left(\frac{m}{2}v^2 - V(x_i)\right)$ como el Lagrangiano ($\mathcal{L}$), y finalmente a $\int_0^t \mathcal{L}dt$ como la acción ($\mathcal{S}$).

Con esto obtenemos en la última expresión de Ec. 22 , la cual asociamos comúnmente con la integral de caminos de Feynman. Esta nos dice que, conociendo el lagrangiano de un sistema dinámico, podemos tratar al propagador de la función de onda como una suma de contribuciones de todos los caminos posibles que una partícula pueda tomar en cada instante de tiempo[2]. Donde aquellos caminos que se alejan de la extremal de la acción contribuyen cada vez menos al propagador (debido a que la interferencia entre ellos cancelan sus contribuciones).

Esta formulación de la mecánica cuántica nos permite describir la dinámica de partículas utilizando variables clásicas, evitando los operadores de la formulación matricial convencional.

Metodología

Conociendo el funcionamiento de la integral de caminos, nos disponemos a describir el movimiento de una partícula libre con esta formulación.

Para ello, sabemos que el potencial es $V(x_i) = 0$. Por lo tanto, utilizando la segunda linea de la Ec. 22, podemos considerar a

$$K(x',x,t) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi\hbar\Delta\tau}\right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{i=1}^{N-1} dx_i \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\sum_{i}^{N-1}\left(\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{\Delta t}\right)\right], \tag{23}$$

como el punto de partida.

A continuación, realizaremos un cambio de variable en el integrando que nos permita deshacernos de los términos $m, i, \hbar$ por el momento con:

$$x_i = q_i \left(\frac{2\hbar\Delta t}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad dx_i = dq_i \left(\frac{2\hbar\Delta t}{m}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sustituyendo en Ec. 23, obtenemos

$$K(x', x, t) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi\hbar\Delta\tau}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{2\hbar\Delta t}{m}\right)^{\frac{N-1}{2}} \int \prod_{i=1}^{N-1} dq_i \exp\left[i\sum_{i}^{N-1}(q_{i+1}-q_i)^2\right], \tag{24}$$

Nuestro objetivo es encontrar una relación de recurrencia que nos permita simplificar el integrando al de una gaussiana de la forma e^{-ax^2}. Para esto, debemos desarrollar los primeros términos de la multiplicatoria de forma que obtengamos

$$\int dq_1 \cdots dq_{N-1} \exp\left[i\left((q_1-q_0)^2 + (q_2-q_1)^2 + (q_3-q_2)^2 + (q_4-q_3)^2 \cdots\right)\right]. \tag{25}$$

Concentrándonos en la primer integral, desarrollamos ambos cuadrados y agrupamos de manera que podamos completar nuevos cuadrados, de tal forma que

$$2\left(q_1^2 + \frac{q_0^2}{2} - (q_0+q_2)q_1 + \frac{q_2^2}{2}\right),$$

se convierta en

$$2\left(\left(q_1 - \frac{q_0+q_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{q_0+q_2}{2}\right)^2 + \frac{q_0^2}{2} + \frac{q_2^2}{2}\right)$$

Entonces, podemos cambiar la variable[4][7] a $u = (q_1 - \frac{q_0+q_2}{2})$ con $du = dq_1$. Recordemos también que $i = -\frac{1}{i}$, entonces podemos asemejar esta parte del integrando a una gaussiana, la cual en general es igual a $\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

$$\int dq_1 \exp\left[-\frac{2}{i}\left(q_1 - \frac{q_0+q_2}{2}\right)^2\right] \int dq_2 \cdots dq_{N-1} \exp\left[2i\left(-\left(\frac{q_0+q_2}{2}\right)^2 + \frac{q_0^2}{2} + \frac{q_2^2}{2}\right) + \cdots\right],$$

$$\int dq_1 \exp\left[-\frac{2}{i}\left(q_1 - \frac{q_0+q_2}{2}\right)^2\right] = \sqrt{\frac{i\pi}{2}};$$

$$\sqrt{\frac{i\pi}{2}} \int dq_2 \cdots dq_{N-1} \exp\left[\frac{i}{2}(q_2-q_0)^2 + \cdots\right] \tag{26}$$

Por lo tanto, el coeficiente a la izquierda de las integrales en Ec. 26 nos muestra el primer término en la relación de recurrencia. Nos resta encontrar sólo otro más para determinar esta relación. Entonces consideramos el resto de términos mostrados en Ec. 25

$$\sqrt{\frac{i\pi}{2}} \int dq_2 \cdots dq_{N-1} \exp\left[\frac{i}{2}(q_2 - q_0)^2 + i\left[(q_3 - q_2)^2 + \cdots\right]\right] \tag{27}$$

Si desarrollamos de la misma forma los términos de la integral dq_2 dependiente, obtenemos

$$\sqrt{\frac{i\pi}{2}} \int dq_2 \exp\left[\frac{3i}{2}\left[\left(q_2 - \frac{2q_3 + q_0}{3}\right)^2 + \frac{q_0^2}{3} - \frac{(2q_3 + q_0)^2}{9} + \frac{2q_3^2}{3}\right]\right] \tag{28}$$

Por lo tanto, después de manipulación algebráica tenemos que

$$\int dq_2 \exp\left[-\frac{3}{2i}\left(q_2 - \frac{2q_3 + q_0}{3}\right)^2\right] = \sqrt{\frac{2i\pi}{3}},$$

$$\sqrt{\frac{i\pi}{2}}\sqrt{\frac{2i\pi}{3}} \int dq_3 \cdots dq_{N-1} \exp\left[\frac{3i}{2}\left(\frac{q_0^2}{3} - \frac{(2q_3 + q_0)^2}{9} + \frac{2y_3^2}{3}\right) + \cdots\right]$$
$$\sqrt{\frac{(i\pi)^2}{3}} \int dq_3 \cdots dq_{N-1} \exp\left[\frac{i}{3}(q_3 - q_0)^2 + \cdots\right] \tag{29}$$

Las Ecs. 27 y 29 nos muestran la relación de recurrencia sobre los resultados de las integrales,

$$\sqrt{\frac{(\pi i)^{N-1}}{N}} e^{\frac{i}{N}(q_N - q_0)^2}. \tag{30}$$

Entonces, sustituyendo la relación de Ec 30 en Ec. 24 y revirtiendo el cambio de variable realizado en $x_i = q_i \left(\frac{2\hbar\Delta t}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$, obtenemos

$$\begin{aligned} K(x', x, t) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi\hbar\Delta t}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{2\hbar\Delta t}{m}\right)^{\frac{N-1}{2}} \sqrt{\frac{(\pi i)^{N-1}}{N}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar N\Delta t}(x_N - x_0)^2\right], \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t N}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar N\Delta t}(x_N - x_0)^2\right], \\ &= \left(\frac{m}{2\pi i\hbar t}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar t}(x_N - x_0)^2\right]. \end{aligned} \tag{31}$$

Esto último porque $\Delta t = \frac{t}{N}$.

Ahora que sabemos cómo se comporta el propagador $K(x', x, t)$ bajo la evolución de una partícula libre, podemos operar en la Ec. 7. Sólo necesitamos el estado estacionario de la partícula libre. Para ello, proponemos un paquete de ondas planas de la forma $\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$, donde k es el número de onda, asociado al momento (p) sobre la constante de planck reducida $(\hbar)$.

Sustituyendo el propagador $K(x', x, t)$ y la función de onda inicial $\psi_k(x, 0)$, obtenemos:

$$\psi_k(x', t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}} \exp\left(\frac{im(x' - x)^2}{2\hbar t}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\, dx.$$

Simplificando

$$\psi_k(x',t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{im(x'-x)^2}{2\hbar t}+ikx\right)dx \tag{32}$$

Resolver la integral a continuación requiere pasos algebráicos sencillos como expandir el cuadrado $(x'-x)^2 = x'^2 - 2x'x + x^2$:

$$\psi_k(x',t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\exp\left(\frac{imx'^2}{2\hbar t}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-i\left(\frac{mx'}{\hbar t}-k\right)x+\frac{imx^2}{2\hbar t}\right)dx \tag{33}$$

Expresando ahora como $\exp(-iAx)$, donde $A = \frac{mx'}{\hbar t} - k$.

Para resolver esta integral, usamos la fórmula general de integrales gaussianas, que dicta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax^2+bx}\,dx = \sqrt{\frac{i\pi}{a}}\exp\left(-\frac{ib^2}{4a}\right), \quad \text{para } a \neq 0$$

En este caso, $a = \frac{m}{2\hbar t}$ y $b = -\left(\frac{mx'}{\hbar t} - k\right)$. Aplicamos esta forma para resolver la integral. Obteniendo

$$\psi_k(x',t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\exp\left(\frac{imx'^2}{2\hbar t}\right)\sqrt{\frac{2\pi i\hbar t}{m}}\exp\left(-\frac{i\left(\frac{mx'}{\hbar t}-k\right)^2\hbar t}{2m}\right) \tag{34}$$

Simplificando factores que se cancelan llegamos al resultado:

$$\psi_k(x',t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(i\left(kx' - \frac{\hbar k^2 t}{2m}\right)\right). \tag{35}$$

Resultados

Se reprodujo exitosamente la función de onda en la base de posiciones y tiempo dependiente de una partícula libre utilizando una formulación que no emplea operadores sobre bases en el espacio de Hilbert[4], sino que utiliza una aproximación clásica para describir a la función de onda.

La Ec. 35 describe la evolución de una onda plana en el espacio, cambiando la fase en función del tiempo y las posiciones[3]. Este resultado muestra que la función de onda $\psi_k(x',t)$ sigue siendo una onda plana, con una fase dependiente del tiempo:

$$\psi_k(x',t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i(kx' - \frac{\hbar k^2 t}{2m})}$$

Esto significa que el estado estacionario de onda plana no cambia su forma en el tiempo, sólo adquiere un factor de fase temporal $e^{-i\frac{\hbar k^2 t}{2m}}$. La densidad de probabilidad $|\psi_k(x',t)|^2$ permanece constante en el tiempo, lo que es característico de los estados estacionarios.

Para mejor visualizar estos resultados, se muestran gráficas de simulaciones de una partícula libre[6].

Para efectos de robustez en el modelado, se consideró un electrón con masa conocida de $9.10938356 \times 10^{-31}$Kg, $\hbar = 1.054571817 \times^{-34}$.

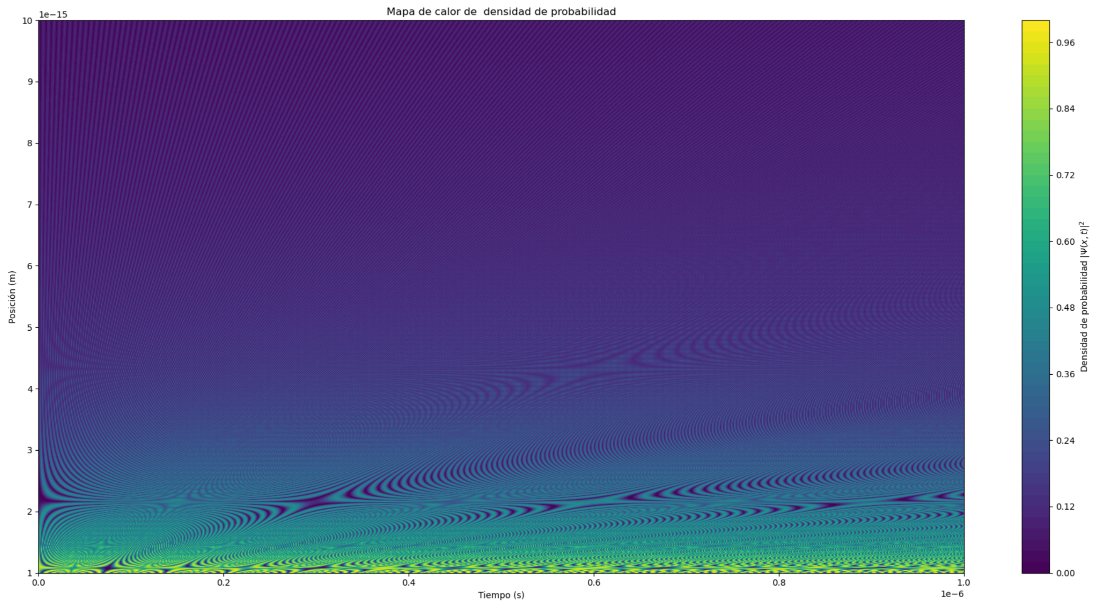

Figura 1: Mapa de calor de Densidad de Probabilidad de un electrón libre

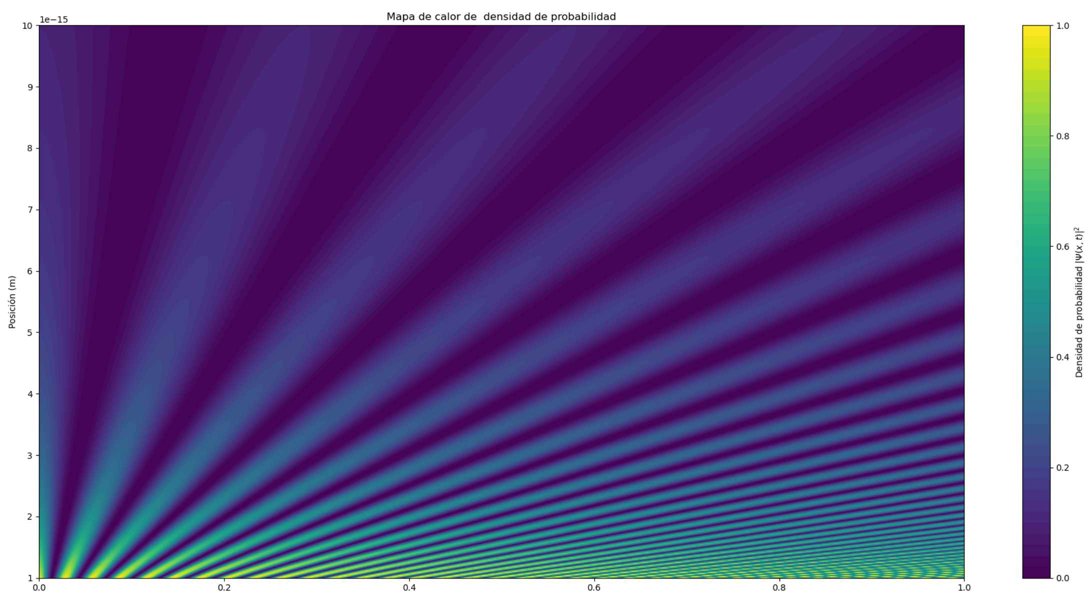

Figura 2: Mapa de calor de Densidad de Probabilidad de un electrón libre. Acercamiento $\times 10^{-7}$

Estos resultados describen la densidad de probabilidad de la función de onda tiempo dependiente de una partícula libre.

Conclusiones

La integral de camino consigue describir la dinámica de una partícula libre, considerando todos los caminos posibles que la partícula podría tomar. Aquellos menos probables son aquellos que se alejan del extremal de la acción, sin embargo no se descartan, sino que aportan en menor medida no nula. Estos patrones de interferencia provocan que la incertidumbre tan natural y característica de la mecánica cuántica se presente.

Cuando aplicamos el propagador de una partícula libre a un estado estacionario como una onda plana, la evolución temporal resulta en una fase adicional dependiente del tiempo, mientras que la forma de la onda plana no cambia. Este es el comportamiento esperado de un estado estacionario, ya que su densidad de probabilidad no varía con el tiempo.

Referencias

[1] D. J. Griffiths, "Introduction to Quantum Mechanics", *Pearson Prentice Hall*, 3rd edition, p. 120-130, 2005.

[2] R. P. Feynman, A. R. Hibbs, "Quantum Mechanics and Path Integrals", *Dover Publications*, p. 95-105, 2010.

[3] L. S. Schulman, "Techniques and Applications of Path Integration", *Dover Publications*, p. 55-65, 2012.

[4] J. J. Sakurai, "Modern Quantum Mechanics", *Addison-Wesley*, Revised edition, p. 200-210, 1994.

[5] R. Shankar, "Principles of Quantum Mechanics", *Plenum Press*, 2nd edition, p. 256-270, 1994.

[6] M. Reed, B. Simon, "Methods of Modern Mathematical Physics, Volume 2: Fourier Analysis, Self-Adjointness", *Academic Press*, 2nd edition, p. 300-315, 1980.

[7] B. Simon, "Functional Integration and Quantum Physics", *Academic Press*, 1st edition, p. 250-265, 1979.

[8] H. Georgi, "Lie Algebras in Particle Physics: From Isospin to Unified Theories", *Westview Press*, 2nd edition, p. 120-130, 1999.

[9] S. Weinberg, "The Quantum Theory of Fields, Vol. 1: Foundations", *Cambridge University Press*, 2nd edition, p. 78-90, 1996.

Nombre y Firma del Asesor