



Espectro de energía del pión mediante cromodinámica cuántica de redes

Darío Román Gómez Martín¹

Asesor: Dr. Martha Constantinou²

¹*dario.gomez9544@alumnos.udg.mx*

Departamento de Física, CUCEI, Universidad de Guadalajara

Blvd. Marcelino García Barragán 1421, Col. Olímpica, Guadalajara Jal., C. P. 44430, México

²*SERC, Room 414 en Temple University. 1801 N Broad St, Philadelphia, PA 19122, Estados Unidos*

Resumen

La cromodinámica cuántica de redes -Lattice Quantum Chromodynamics- (LQCD) es una técnica no perturbativa que permite el estudio detallado de la dinámica de quarks y gluones. LQCD emplea una discretización del espacio-tiempo en una red o malla finita de tamaño a . Esta aproximación convierte el problema continuo en uno discreto, facilitando así el cálculo numérico.

Este enfoque es particularmente útil para calcular el espectro de partículas mediadoras de la interacción fuerte y comparar estos resultados con las predicciones teóricas de la cromodinámica cuántica. En este trabajo modular se busca corroborar el espectro de energía de la teoría QCD para el pión con datos simulados en la malla. Mientras que se busca establecer un primer contacto con la teoría cuántica de campos que describe dichas interacciones.

Introducción

Fuerza Fuerte y Cromodinámica Cuántica

Entre las fuerzas fundamentales en el modelo estándar, la fuerza fuerte es responsable de mantener unidos a los quarks para formar hadrones, tales como protones, neutrones, piones, kaones, etc. Esta fuerza es mediada por partículas llamadas gluones, las cuales actúan como partículas mediadoras de los quarks. La fuerza fuerte se comporta de manera única, pues se vuelve más fuerte mientras más distancia se ponga entre los quarks. Esto lleva al *confinamiento*, fenómeno que impide que los quarks existan como partículas libres.

La cromodinámica cuántica (QCD) es la teoría que describe la interacción de la fuerza fuerte dentro del marco del modelo estándar. QCD es un tipo de teoría gauge, específicamente una teoría de gauge no-abeliana con simetría de grupo SU(3). Los quarks interactúan unos con otros al intercambiar gluones, los cuales llevan la carga de color asociada a la fuerza fuerte. A diferencia de la fuerza electromagnética, QCD involucra a tres tipos de cargas de color [1].

QCD de redes

De forma diferente a otras teorías cuánticas de campo, como Electrodinámica Cuántica (QED), la teoría QCD perturbativa falla a bajas energías. Esto sucede porque las constantes de acoplamiento incrementan a bajas energías. Por lo tanto esto garantiza el uso de teorías no perturbativas para estudiar QCD de manera efectiva.

Una teoría para aproximarse es la Cromodinámica Cuántica de redes (LQCD). Esta teoría utiliza una discretización del espacio-tiempo en una malla, permitiendo simulaciones numéricas y cálculos de observables físicos. Este método facilita una manera de estudiar las propiedades de los quarks y gluones de manera controlada, rompiendo las barreras y limitaciones de técnicas perturbativas [2].



A continuación se detalla el formalismo de LQCD, el proceso de discretización del espacio-tiempo en teoría cuántica de campos y su descripción en campos de gauge.

Formalismo del Lattice (red)

La discretización del espacio-tiempo euclidiano conlleva a la descripción de redes de la teoría cuántica de campos. Las redes forman un hipercubo donde a es la constante de red y es considerada de la siguiente forma,

$$\Gamma = aZ^4\{x|x_\mu/a \in Z\}$$

Las sumatorias reemplazan a las integrales (en continuos),

$$\int \rightarrow a \sum_n$$

El producto de funciones en valores continuos puede ser descrito en la red de la siguiente forma,

$$(f, g) = \int d^4x (f \times g) = a^4 \sum_n f(x_n)g(x_n)$$

Las derivadas se definen como,

$$\Delta_\mu^f = \frac{f(x + a\hat{u}) - f(x)}{a}$$

Esto se conoce como la derivada de la red hacia adelante. Donde \hat{u} es el vector unitario en la dirección "u". En la siguiente sección, se describen los campos de gauge en la red [3].

Campos de Gauge en la red

Proponemos $\phi^i(x)$ para ser un campo escalar. La acción para un campo real escalar en el medio continuo está dado por [4],

$$S = \int d^4x (\phi(x)(\square + m^2)\phi(x))$$

Resalta que la acción es invariante bajo transformaciones del siguiente tipo.

$$\phi' \rightarrow \Lambda^{-1} \phi$$

Al imponer unas cuantas condiciones en Λ , se obtiene una clase especial de transformaciones.

$$\begin{aligned} \Lambda \Lambda^{-1} &= \mathbb{1} \rightarrow \text{Unitario } (\Lambda \in U(N)) \\ \det(\Lambda) &= 1 \rightarrow \text{Especial Unitario } (\Lambda \in SU(N)) \end{aligned}$$

Estas transformaciones se conocen como transformaciones globales de Gauge [5]. Si Λ fuera espacio-tiempo dependiente, entonces,

$$\phi' \rightarrow \Lambda^{-1}(x)\phi,$$

Estas transformaciones se conocen como transformaciones locales de Gauge. La definición de derivada local toma la forma de

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= (\mathbb{1} + A_\mu(x)dx^\mu)\phi(x+dx) - \phi(x) \\ &= \phi(x+dx) - \phi(x) + A_\mu(x)dx^\mu\phi(x+dx) \\ &= \left(\frac{\phi(x+dx) - \phi(x)}{dx^\mu} + A_\mu(x)\phi(x+dx) \right) dx^\mu \\ &= (\partial_\mu + A_\mu)\phi(x)dx^\mu \\ \Rightarrow D_\mu &= \partial_\mu + A_\mu \end{aligned}$$

Esta se conoce como derivada covariante, la cual transforma de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
 D'_\mu \phi'(x) &= (\partial'_\mu + A'_\mu) \phi'(x) \\
 &= \partial(\Lambda^{-1} \phi(x)) + A'_\mu \Lambda^{-1} \phi \\
 &= \Lambda^{-1} \partial_\mu \phi + \phi \partial_\mu \Lambda^{-1} + A'_\mu \Lambda^{-1} \phi \\
 &= \Lambda^{-1} (\partial_\mu \phi + \Lambda (\partial_\mu \Lambda^{-1}) \phi + \Lambda A'_\mu \Lambda^{-1} \phi) \\
 &= \Lambda^{-1} (\partial_\mu + (\Lambda \partial_\mu + \Lambda A'_\mu) \Lambda^{-1}) \phi
 \end{aligned}$$

Comparando D'_μ y D_μ , obtenemos,

$$\begin{aligned}
 A_\mu &= (\Lambda \partial_\mu + \Lambda A'_\mu) \Lambda^{-1} \\
 \Lambda A'_\mu \Lambda^{-1} &= A_\mu - \Lambda (\partial_\mu \Lambda^{-1}) \\
 A'_\mu &= \Lambda^{-1} A_\mu \Lambda - (\partial_\mu \Lambda^{-1}) \Lambda
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos,

$$\begin{aligned}
 D'_\mu \phi' &= \Lambda^{-1} (\partial_\mu + A_\mu) \phi \\
 D'_\mu \phi' &= \Lambda^{-1} D_\mu \phi
 \end{aligned}$$

Acción de Wilson

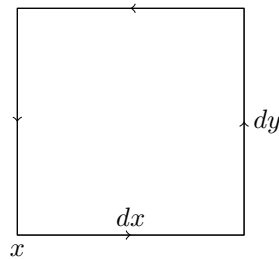
Con las derivadas covariantes, uno puede definir una cantidad conocida como la fuerza del campo de la siguiente forma,

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] \approx \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

Consideramos un objeto matemático conocido como transporte paralelo, que mapeará la transformación de un campo vectorial a otro, con ello podemos entender cómo $F_{\mu\nu}$ transforma. Consideramos un transporte paralelo alrededor de un rectángulo (Figura 1).

Figura 1

Un circuito infinitesimal que empieza y termina en x .



Decimos que,

$$U_{xx} = 1 - F_{\mu\nu} dx^\mu dy^\nu$$

Esto implica que,

$$\begin{aligned}
 U_{xx} \phi(x) &= \phi(x) \\
 (1 - F_{\mu\nu} dx^\mu dy^\nu) \phi(x) &= \phi(x)
 \end{aligned}$$

Considerando a,

$$\begin{aligned}
 U'_{xx} \phi'(x) &= \phi'(x) \\
 (1 - F'_{\mu\nu} dx^\mu dy^\nu) \phi'(x) &= \phi'(x) \\
 (\Lambda \Lambda^{-1} - \Lambda F'_{\mu\nu} \Lambda^{-1} dx^\mu dy^\nu) \phi &= \phi
 \end{aligned}$$

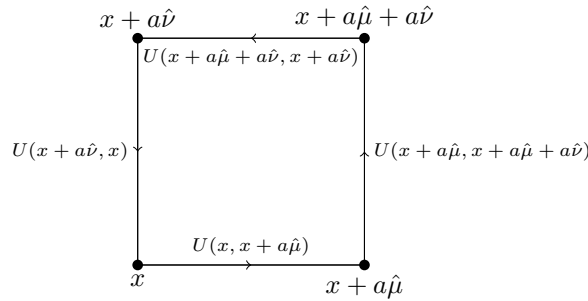
$$\Rightarrow \boxed{F_{\mu\nu} = \Lambda(x) F'_{\mu\nu} \Lambda^{-1}(x)}$$

Ahora, construimos una acción invariante de Gauge (Figura 2). Esta es la forma más simple de construir este tipo de acción invariante en la red (para un campo de Gauge). Esta acción toma el nombre de «Acción de Wilson» [6]

$$\begin{aligned} S_{Wilson} &= \sum_p S[U_p] \\ &= \sum_p \beta \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re } \text{Tr}(U_p) \right) \end{aligned}$$

Figura 2

Un diagrama ilustra el campo siendo transportado en paralelo a través del circuito.



Nótese que la acción de Wilson desaparece cuando $\text{Tr}(U) = 1$. En el caso del medio continuo, la acción más simple para una teoría Gauge está dada por,

$$S_{YM} = \frac{-1}{2g^2} \int \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) d^4x$$

Esta se conoce como la acción de Yang-Mills [7]. Se espera que la acción de Wilson coincida con la acción de Yang-Mills en el límite continuo. Por tanto,

$$U_p = U(x, x + a\hat{\mu})U(x + a\hat{\mu}, x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu})U(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}, x + a\hat{\nu})U(x + a\hat{\nu}, x)$$

donde,

$$\begin{aligned} U(x, x + a\hat{\mu}) &= \exp(-aA_\mu(x)) \\ U(x + a\hat{\mu}, x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) &= \exp(-aA_\nu(x + a\hat{\mu})) = \exp(-aA_\nu(x))\exp(-a^2\Delta_\mu^f A_\nu(x)) \\ U(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}, x + a\hat{\nu}) &= \exp(-aA_\mu(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu})) = \exp(-aA_\mu(x + a\hat{\nu}))\exp(a^2\Delta_\nu^f A_\mu(x + a\hat{\nu})) \\ U(x + a\hat{\nu}, x) &= \exp(-aA_\nu(x + a\hat{\nu})) \end{aligned}$$

Acoplando las expresiones anteriores en U_p , obtenemos,

$$\begin{aligned} U_p &= \exp(-aA_\mu(x))\exp(-aA_\nu(x))\exp(-a^2\Delta_\mu^f A_\nu(x))\exp(-aA_\mu(x + a\hat{\nu})) \\ &\quad \exp(a^2\Delta_\nu^f A_\mu(x + a\hat{\nu}))\exp(-aA_\nu(x + a\hat{\nu})) \end{aligned}$$

Usando la regla Baker-Campbell-Hausdorff [8], la expresión anterior puede reescribirse como,

$$U_p = \exp(-a^2(\Delta_\mu^f A_\nu - \Delta_\nu^f A_\mu + [A_\mu, A_\nu]) + \mathcal{O}(a))$$



Nótese que el término dentro del exponencial tiene semejanza con la fuerza del campo. Por lo tanto,

$$F_{\mu\nu} = \Delta_\mu^f A_\nu - \Delta_\nu^f A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

Ahora hacemos que,

$$G_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a)$$

Advierta que $Tr(F_{\mu\nu})$ es cero. Por ello, $Tr(G_{\mu\nu})$ también es cero. Escribimos U_p en términos de G como,

$$U_p = \exp(-a^2 G_{\mu\nu})$$

Sustituimos este resultado en la acción de Wilson para una placa,

$$\begin{aligned} S_{Wilson} &= \beta \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re } Tr(U_p) \right) \\ &= \beta - \frac{\beta}{N} \text{Re } Tr(\exp(-a^2 G_{\mu\nu})) \end{aligned}$$

En el límite $a \rightarrow 0$, la expresión anterior reduce a,

$$\begin{aligned} S_{Wilson} &= \beta - \frac{\beta}{N} \left(Tr(\mathbb{1}) - a^2 Tr(G_{\mu\nu}) + \frac{a^4}{2} (Tr(G_{\mu\nu})^2 + \mathcal{O}(a^6)) \right) \\ &= \beta - \beta + \frac{\beta}{2N} a^4 Tr(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \\ &= \frac{\beta a^4}{2N} Tr(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Para múltiples placas,

$$S_{Wilson} = - \sum_x \frac{\beta a^4}{2N} Tr(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$$

Para que esto sea igual a la acción de Yang-Mills,

$$\beta = \frac{N}{g^2}$$

Esto expone el hecho de que, en el límite continuo, la acción de Wilson se aproxima a la acción de Yang-Mills. Sustituyendo el valor de β ,

$$S_{Wilson} = \sum_p \frac{N}{g^2} \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re } Tr(U_p) \right)$$

Una expresión más complicada de la acción en QCD puede obtenerse al incorporar fermiones. La acción usada para simular la función de correlación para este análisis es la **Acción de fermión de masa torcida** [7], siendo esta una modificación a la acción fermiónica de Wilson. Esta modificación impone un mejor control sobre los errores de discretización y propone una mejora automática de $\mathcal{O}(a)$, aunque continua introduciendo un rompimiento de simetría quiral explícito. Sin embargo, la formulación de masa torcida permite un mejor manejo de las propiedades quirales comparadas a la acción de Wilson regular, contribuyendo a resultados más precisos.

Con la acción de redes disponible, puede computarse todo lo que sea posible en el continuo bajo una descripción de red. Las funciones de correlación son de interés particular ya que proveen una manera de extraer cantidades físicas significativas, como la energía. La función de correlación puede escribirse en la representación espectral de la siguiente manera (nótese que se realizó una rotación de Wick a lo largo del eje del tiempo),

$$C(t) = \langle \hat{O}(t) \hat{O}^\dagger(0) \rangle = \sum_n A_n \exp(-E_n t)$$



donde A_n es el elemento de matriz. $\left(A_n = \left|\langle n|\hat{O}|0\rangle\right|^2\right)$. Para extraer la energía considerese la función de correlación al tiempo t y $t + 1$,

$$\frac{C(t)}{C(t+1)} = \frac{\sum_n A_n \exp(-E_n t)}{\sum_n A_n \exp(-E_n (t+1))}$$

Suponiendo que el tiempo es grande y que $E_0 < E_1 < \dots < E_n$ implica que sólo los términos dominantes en la serie de potencias contribuirán a la expresión y el resto de términos se despreciarán. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{C(t)}{C(t+1)} &\approx \frac{A_0 \exp(-E_0 t)}{A_0 \exp(-E_0 (t+1))} = \exp(E_0) \\ \Rightarrow \log \left(\frac{C(t)}{C(t+1)} \right) &\approx E_0 \end{aligned}$$

En el caso general,

$$E_{eff}(t) = \log \left(\frac{C(t)}{C(t+1)} \right) \approx E_0 + (E_1 - E_0) \frac{A_1}{A_0} \exp(-(E_1 - E_0)t) + \dots$$

Para tiempos más grandes, la energía efectiva se aproxima al estado más bajo de energía. Por otro lado, la energía efectiva será igual al estado de energía más bajo para tiempos más pequeños hasta las correcciones de exponentes de orden más alto. La convergencia al estado de energía más bajo será más rápida si el elemento de la matriz A_0 es significativamente más grande que los elementos A_i tales que la tasa de los elementos en la suma se desprecia.

Revisión de base de datos

Tabla 1: Estadísticas para la matriz de elementos Pion para diferentes boosts de momento.

P_3 [GeV]	0	± 0.41	± 0.83	± 1.24	± 1.66	± 2.07
N_{confs}	1,198	1,198	1,198	1,198	1,198	1,198
N_{pfc}	1	8	8	8	24	200
N_{tot}	1,198	9,584	9,584	9,584	28,752	239,600

Nota: N_{confs} , N_{pfc} , y N_{tot} representan el número de configuraciones, posiciones fuente por configuración, y estadísticas totales, respectivamente.

Usando simulaciones Monte Carlo, las funciones de correlación de dos puntos fueron calculadas en una red para extraer datos cruciales para el análisis. Estas simulaciones fueron llevadas a cabo en el **NESRC Perlmutter supercomputer**, lo cual aportó el poder computacional necesario para manejar los grandes sets de datos involucrados. El formato de los data sets utilizados para el análisis se muestran en la Tabla 1.

La Tabla 1 proporciona también una vista detallada de la estructura del conjunto de datos, incluyendo el número de configuraciones, la cantidad de posiciones de fuente por configuración y las estadísticas totales acumuladas para cada valor de momento.



Metodología

Preparación de Datos

Los conjuntos de datos utilizados en este trabajo de investigación consisten en funciones de correlación a dos puntos en cortes de tiempo euclídeo discretos, las configuraciones son esencialmente capturas instantáneas del vacío caliente de QCD. Redefinir el tiempo como tiempo euclídeo nos permite utilizar métodos estadísticos para calcular los valores esperados de los operadores. Cada configuración captura los estados del sistema con boost, específicamente para este análisis tomaremos $P_z = 0$, $P_z = \pm 1$, $P_z = \pm 2$, $P_z = \pm 3$, $P_z = \pm 4$, $P_z = \pm 5$ y combinaciones de sus componentes P_x , P_y . Estas capturas instantáneas permiten observar la evolución de las cantidades físicas a lo largo del tiempo.

Al examinar estas configuraciones en distintos cortes de tiempo, se puede extraer información crucial sobre la dinámica del sistema, como la energía efectiva.

Cada configuración contiene funciones de correlación con valores complejos, con partes real e imaginaria. Para el propósito de este análisis, solo se utiliza la parte real de estas funciones de correlación. La parte imaginaria a menudo representa ruido o contribuciones que no son relevantes para el observable físico que se estudia. La función de correlación a dos puntos es esencial para extraer propiedades de los hadrones estables. Se utiliza un número significativo de configuraciones para reducir los errores estadísticos debido al ruido de Gauge.

Remuestreo Jackknife

El remuestreo Jackknife es una técnica estadística utilizada para estimar la incertidumbre de una muestra al recalcularla omitiendo cada observación de la muestra una a una [9]. Este método es particularmente útil en escenarios donde los datos exhiben correlaciones, ya que proporciona estimaciones precisas de los errores estadísticos.

El método Jackknife funciona generando múltiples subconjuntos de los datos originales «bins», donde cada subconjunto se crea omitiendo un punto de datos (en este caso, una configuración) a la vez. Este proceso se ejecuta para cada corte de tiempo euclídeo, que varía de 0 a 63. Para cada uno de estos subconjuntos, se calcula la energía efectiva. Este procedimiento produce una serie de estimaciones, que luego se utilizan para determinar la media y la varianza. El error en Jackknife es especialmente valioso porque proporciona una estimación no sesgada del error estadístico.

Extracción de la Energía Efectiva

La energía efectiva se determina analizando las funciones de correlación a dos puntos remuestreadas con Jackknife (bins) utilizando la razón logarítmica de los correladores en cortes de tiempo consecutivos:

$$E_{eff}^b(t) = \ln \left(\frac{C_b^{2pt}(t)}{C_b^{2pt}(t+1)} \right)$$

donde $C_b^{2pt}(t)$ representa la función de correlación a dos puntos en el tiempo (t) para el bin (b)-ésimo del Jackknife.

Este método se aplica de manera consistente a estados con boost en múltiples direcciones para proporcionar una comprensión completa del comportamiento del pión. Después de calcular las energías efectivas para cada corte temporal, estos valores se grafican como función del tiempo euclídeo para cada estado de momento. Las gráficas ayudan a comparar los niveles de energía entre diferentes estados de momento. Para extraer las energías del estado fundamental, los resultados de estas gráficas de energía efectiva se analizan más a fondo utilizando técnicas de ajuste de plateau (meseta).

Ajuste del Plateau

Una vez que se han obtenido los valores centrales de la energía y se han graficado contra el tiempo, se puede observar que, a medida que el tiempo aumenta, los valores de energía se estabilizan, alcanzando un “plateau”. A partir de este plateau, se debe extraer la energía del estado fundamental.



La energía se extrae utilizando un ajuste de modelo con mínimos cuadrados. La energía se modela como una constante, es decir, las variaciones en los valores de energía se consideran fluctuaciones aleatorias alrededor de un valor medio constante en la región donde se observa el plateau. Si el valor de la energía en el tiempo t es $E(t)$ y los errores en los valores de energía son $\sigma_E(t)$, el valor medio en la región del plateau está dado por:

$$E_{dis} = \frac{\sum_{t=t_1}^{t=t_2} E(t) / \sigma_E(t)^2}{\sum_{t=t_1}^{t=t_2} 1 / \sigma_E(t)^2}$$

donde el plateau se ajusta en la región $t \in [t_1, t_2]$.

Este proceso se lleva a cabo para cada bin individualmente, antes del cálculo de los valores centrales de la energía. Así, se obtiene un E_{dis} para cada bin, sobre los cuales se realiza nuevamente el análisis Jackknife antes de obtener un único valor central.

Relación de Dispersión

Usando la teoría especial de la relatividad, sabemos que la energía de una partícula con masa se encuentra mediante la siguiente relación:

$$E = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$$

donde m es la masa en reposo de la partícula y \mathbf{p} es el boost de la partícula (la velocidad de la luz se fija a 1 aquí por empleo de unidades naturales). Cabe destacar que \mathbf{p} es un vector con componentes p_x , p_y y p_z .

En el análisis de datos en redes, el tiempo t se discretiza, lo que resulta en una gráfica discreta para la función a dos puntos. Por lo tanto, los valores de energía también están discretizados. Para determinar la energía del estado fundamental, se grafica la masa efectiva frente al tiempo para todos los valores discretos disponibles. Luego se identifica una región de plateau en la gráfica, que indica la energía del estado fundamental. Para obtener la energía del estado fundamental a partir de este plateau, se ajustan los datos en un rango de tiempo específico.

Dado que la energía extraída de las funciones de correlación es aE , donde a es el espaciado de la red, igual a $2\pi/L$ (L es el tamaño de la red), multiplicamos ambos lados de la relación de energía por a :

$$aE = \sqrt{(am)^2 + a^2 \mathbf{p}^2}$$

Para el caso en que $\mathbf{p} = (0, 0, p_z)$, esta extracción debería seguir la relación de dispersión:

$$aE = \sqrt{(am)^2 + \left(\frac{2\pi p_z}{L}\right)^2}$$

Después de obtener los valores ajustados del plateau para la energía E_{dis} , estos se grafican y comparan con los valores teóricos obtenidos a partir de la relación de dispersión.

Resultados

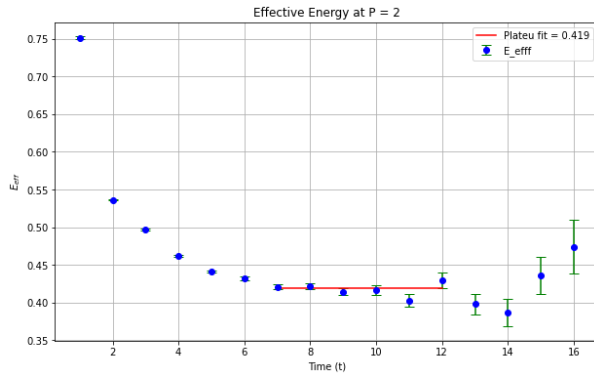
Ajuste del Plateau para $P_x^2 + P_y^2 = 0$

Estas son las gráficas de valores centrales y sus respectivos ajustes de plateau. La primera sección incluye los estados donde el momento es cero en las direcciones x e y . Cabe destacar que los valores bajo las gráficas corresponden a los resultados de la energía efectiva obtenida después del ajuste del plateau y sus respectivos errores Jackknife.



Figura 3

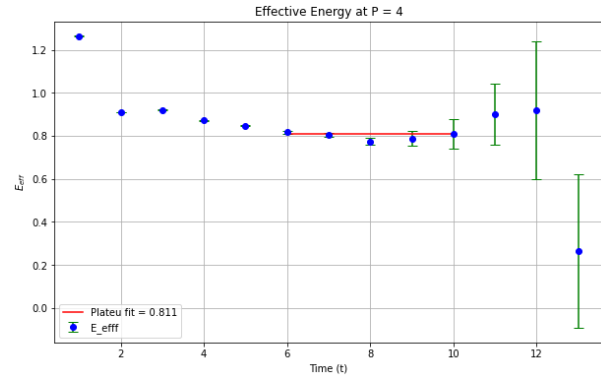
$$P_x^2 = 0 + P_y^2 = 0, P_z = \pm 2$$



$$aE = 0.419 \pm 0.00035$$

Figura 4

$$P_x^2 = 0 + P_y^2 = 0, P_z = \pm 4$$



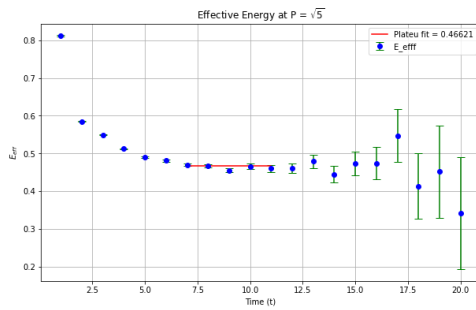
$$aE = 0.811 \pm 0.00321$$

Ajuste de Plateau para Estados con Momento Boost

Estos son algunos ejemplos de las gráficas de valor central y sus respectivos valores de plateau para diferentes estados con momento boost. Se utiliza una combinación de los resultados mencionados en la sección anterior y los resultados con boost para la relación de dispersión.

Figura 5

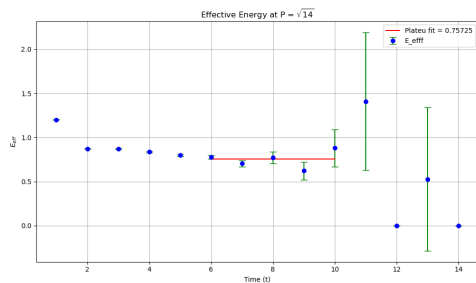
$$P_x^2 = 1 + P_y^2 = 0, P_z = \pm 2$$



$$(a) aE = 0.46621 \pm 0.012$$

Figura 7

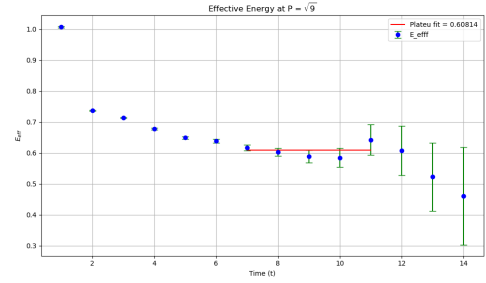
$$P_x^2 = 1 + P_y^2 = 9, P_z = \pm 2$$



$$(c) aE = 0.75725 \pm 0.154$$

Figura 6

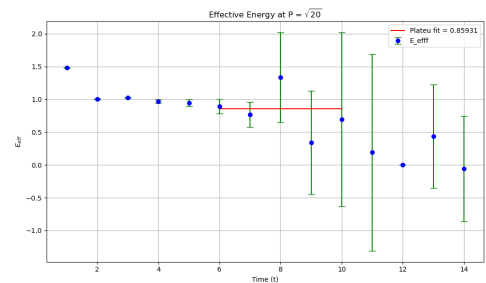
$$P_x^2 = 1 + P_y^2 = 4, P_z = \pm 2$$



$$(b) aE = 0.60814 \pm 0.026$$

Figura 8

$$P_x^2 = 16 + P_y^2 = 0, P_z = \pm 2$$



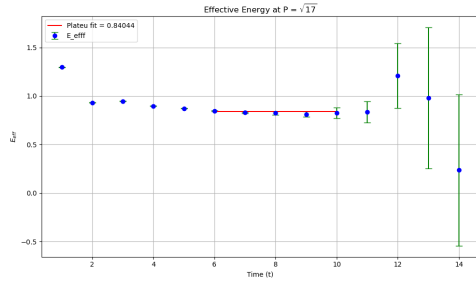
$$(d) aE = 0.85931 \pm 0.228$$

Comparaciones de energías efectivas para diferentes configuraciones de momento $P_z = \pm 2$



Figura 9

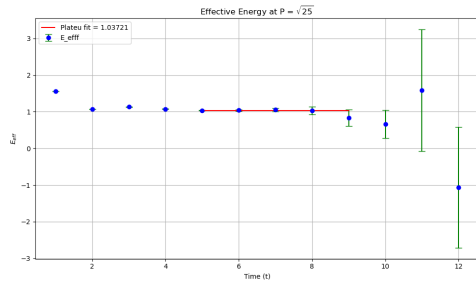
$$P_x^2 = 1 + P_y^2 = 0, P_z = \pm 4$$



(a) $aE = 0.84044 \pm 0.0113$

Figura 11

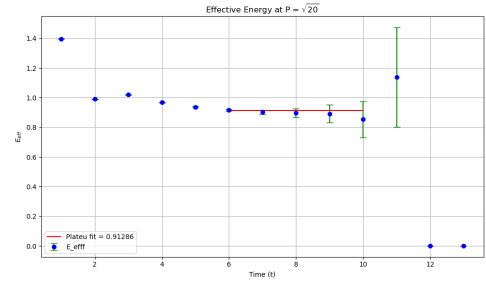
$$P_x^2 = 9 + P_y^2 = 0, P_z = \pm 4$$



(c) $aE = 1.03721 \pm 0.0195$

Figura 10

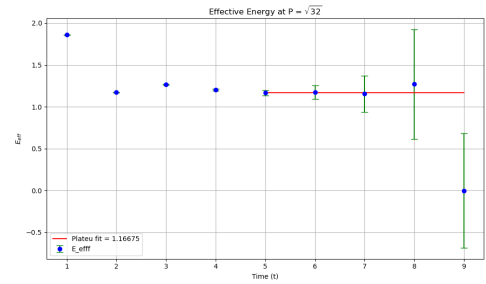
$$P_x^2 = 0 + P_y^2 = 4, P_z = \pm 4$$



(b) $aE = 0.91286 \pm 0.1325$

Figura 12

$$P_x^2 = 0 + P_y^2 = 16, P_z = \pm 4$$



(d) $aE = 1.16675 \pm 0.02041$

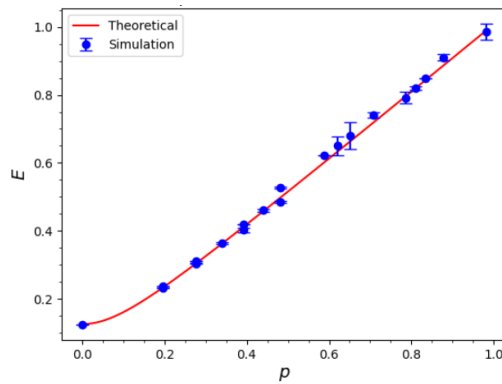
Comparaciones de energías efectivas para diferentes configuraciones de momento $P_z = \pm 4$

Gráfica Final de Dispersión

Estos son los resultados finales para el espectro de energía del pión. Nótese que, después de cierto estado de momento (específicamente, después de $P_x^2 + P_y^2 = 16$), los resultados obtenidos se tornan ruidosos e inestables. Por lo tanto, se incluyen solo los resultados más precisos en la gráfica de la relación de dispersión.

Figura 13

Relación de Dispersión para el Pión





Con la colaboración del equipo «Pioneer» perteneciente al proyecto REYES 2024 se pudo obtener la comparación de más momentos en P_z y para más $P_x^2 + P_y^2$, con los que fue posible construir la Tabla 2.

Tabla 2: Estado base de energías y errores Jackknife

$P_x^2 + P_y^2 \backslash P_z$	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
0	0.124 ± 0.00033	0.231 ± 0.00035	0.419 ± 0.00321	0.623 ± 0.007	0.811 ± 0.1827	0.986 ± 0.0234
1	0.2367 ± 0.00072	0.304 ± 0.012	0.4662 ± 0.00458	0.6498 ± 0.0062	0.8404 ± 0.0113	1.051 ± 0.0169
2	0.31102 ± 0.00074	0.363 ± 0.00206	0.49606 ± 0.00175	0.6798 ± 0.007574	0.8487 ± 0.00082	1.071 ± 0.0154
4	0.40224 ± 0.00734	0.458 ± 0.01359	0.5769 ± 0.00187	0.7418 ± 0.00769	0.9128 ± 0.1325	1.0109 ± 0.1739
5	0.45345 ± 0.00501	0.4935 ± 0.026	0.6081 ± 0.00927	0.7556 ± 0.01422	0.93201 ± 0.01245	1.132 ± 0.0147
8	0.77521 ± 0.18047	0.6295 ± 0.02126	0.6497 ± 0.0298	0.8445 ± 0.01926	0.9909 ± 0.00653	1.257 ± 0.0416
9	0.62879 ± 0.01157	0.626 ± 0.02481	0.7295 ± 0.03961	0.8769 ± 0.0123	1.03721 ± 0.0195	1.202 ± 0.0124
10	0.54138 ± 0.02963	0.672 ± 0.154	0.75725 ± 0.04243	0.9094 ± 0.01248	1.0461 ± 0.0146	1.221 ± 0.0132
16	0.73326 ± 0.04411	0.7816 ± 0.08764	0.92147 ± 0.00386	0.9887 ± 0.1249	1.16675 ± 0.02041	1.34207 ± 0.0398

Como se observa en la Figura 13, la gráfica es muy similar a lo esperado: casi todos los puntos están sobre la curva teórica o dentro de los valores de error. Sin embargo, algunos puntos tienen errores pequeños y aun así no caen cerca de la curva teórica. Esto se justifica por los problemas mencionados anteriormente respecto a los estados de mayor momento, donde las estadísticas se vuelven poco fiables, y, en consecuencia, también lo hacen sus errores.

Los Plateaus

Energías del Estado Fundamental

Las gráficas muestran la caída de los valores de energía hacia el estado fundamental, lo cual es esperado, ya que los términos exponenciales de los estados excitados y estados multihadrones se vuelven muy pequeños, indicando que las contribuciones de estos estados disminuyen y el estado fundamental se vuelve predominante. Otra tendencia observada es que, a medida que el tiempo aumenta, la relación señal-ruido incrementa; sin embargo, el plateau es únicamente la parte vital de este análisis, este incremento es irrelevante. Los ajustes de plateau también muestran el aumento esperado de la energía del estado fundamental con el incremento del momento. Estos resultados indican claramente el aumento del error en valores de momento más altos, lo que hace necesaria una mayor cantidad de estadísticas, como se indica en la Tabla 1.



Duración de los Plateaus

Tabla 3: Duración y tiempo de inicio de Plateaus

P_z	t_1	t_2	$t_2 - t_1$
0	11	16	5
± 1	9	14	5
± 2	5	10	5
± 3	6	10	4
± 4	6	10	4
± 5	6	9	3

En la Tabla 3 podemos apreciar el rango de tiempo donde ocurren los plateau. Esta tendencia en la que el plateau se ubique en valores de tiempo más bajos se justifica por el hecho de que los estados excitados decaen más rápido. Otro aspecto a notar es la disminución en la longitud de la región de plateau aceptable, lo que indica la dificultad creciente de analizar momentos más altos. Si el estado fundamental dura cada vez menos, surge la incertidumbre de si realmente estamos viendo el estado fundamental. Esta es una de las principales fuentes de error en el análisis de valores de momento más elevados.

Para valores de tiempo grandes, la gráfica muestra que el estado fundamental impera. Esto se debe a que, como ya se mencionó anteriormente, los términos exponenciales de los estados excitados y los estados multi-hadrónicos se vuelven muy pequeños, lo que disminuye sus contribuciones y hace predominar al estado fundamental.

Relación de Dispersión y Decaimiento Exponencial

La pendiente de la Figura 13 sugiere que la relación entre las variables sigue un patrón lineal. A medida que el tiempo t aumenta, los factores exponenciales en la gráfica decaen más rápido para los estados excitados en comparación con los estados fundamentales. Esto da lugar a valores de energía efectiva más altos al inicio, los cuales luego se estabilizan conforme t aumenta, alcanzando un plateau que representa el estado fundamental. Más allá de este plateau, mayores incrementos en t conducen a una mayor relación señal-ruido, haciendo que los datos sean menos confiables.

Conclusión

Existen algunas limitaciones y consideraciones que destacan sobre los métodos utilizados para obtener los datos de simulación. El remuestreo Jackknife es una técnica robusta y fácil de implementar, pero tiene un alto costo computacional. Esto requiere optimizar el algoritmo y aumenta el tiempo de ejecución si hay demasiadas configuraciones. Por lo tanto, es posible optimizar el código y elegir una cantidad adecuada de configuraciones según la precisión de los resultados y el tiempo de ejecución.

Aunado a esto, el ajuste de plateau puede ser ligeramente subjetivo debido a la elección de los tiempos de inicio y fin de la región de plateau, lo que puede llevar a variaciones en la relación de dispersión obtenida. En este caso, se eligieron las regiones con base en consideraciones específicas y se compararon los resultados antes de consultar las expectativas teóricas. Sin embargo, hubo valores que no se ajustaron de manera adecuada, lo que puede deberse al ruido en los datos y a los efectos del momento impulsado.

En definitiva, se ha demostrado cómo los resultados de simulación para el pión coinciden estrechamente con la relación de dispersión teórica mediante el análisis de las funciones de 2 puntos usando remuestreo Jackknife y ajustes de plateau. Esto destaca la importancia de los enfoques no perturbativos de QCD en el lattice para explicar los efectos de la interacción fuerte y diferenciar entre señal y ruido. Para trabajos futuros, se planea explorar estados de mayor momento para observar cómo se comporta el pión en estos casos, aunque la estadística se vuelva más ruidosa; incorporar el kaon y realizar un doble estudio sobre otro hadrón siguiendo los mismo lineamientos. También



es posible analizar diferentes volúmenes de la red y comparar cómo escalan los resultados, o repetir los cálculos con espaciados de red más pequeños para acercar la investigación a la realidad en el continuo.

Referencias

- [1] M. E. Peskin y D. V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [2] F. Gross, E. Klempt, S. J. Brodsky et al., «50 Years of quantum chromodynamics: Introduction and Review,» *The European Physical Journal C*, vol. 83, n.º 12, dic. de 2023, ISSN: 1434-6052. DOI: 10.1140/epjc/s10052-023-11949-2. dirección: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11949-2>.
- [3] C. Gattringer y C. B. Lang, *Quantum chromodynamics on the lattice: an introductory presentation*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [4] I. Montvay y G. Münster, *Quantum fields on a lattice*. Cambridge university press, 1997.
- [5] H. J. Rothe, *Lattice Gauge Theories: An Introduction*, 4th. Singapore: World Scientific, 2012.
- [6] M. Creutz, *Quantum Fields on the Computer*, 1st. Singapore: World Scientific, 1992.
- [7] T. A. DeGrand y C. E. DeTar, *Lattice methods for quantum chromodynamics*. World Scientific, 2006.
- [8] B. C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*, 2nd. Cham, Switzerland: Springer, 2015.
- [9] E. L. Robinson, *Data Analysis for Scientists and Engineers*, 1st. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2016.

Martha Constantinou (Research Advisor)

Nombre y Firma del Asesor¹

March 22, 2025