# Prosjektoppgave i FYS2130

Kandidatnummer: 15344

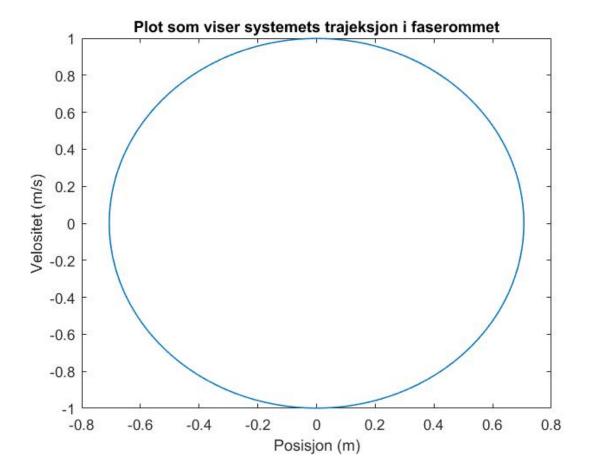
VÅR 2018

Fra harmoni til kaos

## Oppgave 1:

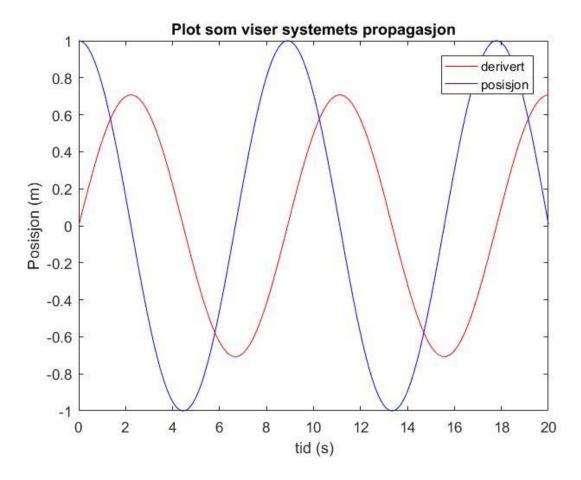
I denne første oppgaven skulle vi skrive en kode i MATLAB for Runge-Kutta metoden fjerde orden. Måten dette ble gjort kommer i Appendikset. Resten av oppgaven omhandler svar på forskjellige spørsmål formulert i oppgaveteksten.

Første figur viser hvordan trajeksjonen til systemet er i faserommet:



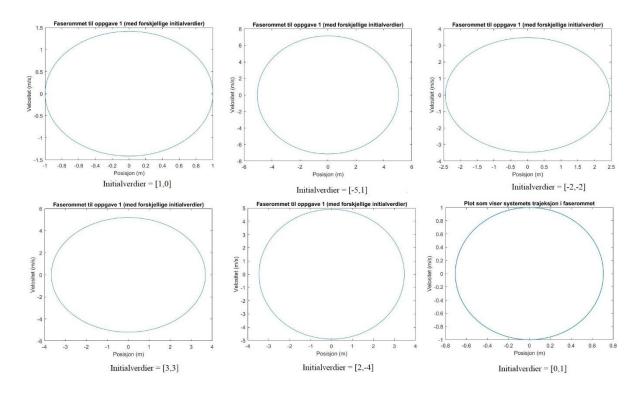
Figur 1: viser trajeksjonen til systemet i faserommet

Neste del av oppgaven var å løse differensiallikningen numerisk. Svarene vises i plot-form:



Figur 2: viser løsningen av differensiallikningen i plot-form. På grafen representerer rødt den deriverte, mens blått representerer posisjon, eller x(t) og x(t)' om man vil.

Så skulle vi variere initialverdiene for å se om vi fikk en bane i faserommet som ikke er en ellipse. Vi har altså fra koden i appendiksen at initialverdiene er oppgitt som [x', x]. Det er disse parametere vi skal forandre på.



Figur 3: viser hvordan forandring av initialverdiene påvirker formen på plottet. Fra øverst til venstre og bortover er initialverdiene som følgende: [1,0], [-5,1], [-2,-2], [3,3], [2,-4] og [0,1]. Siste plot har vi fra figur 1.

I figur 3 har jeg gjennomført forandringene i initialverdi. Hvordan plotten forandrer seg og hvordan initialverdiene påvirker trajeksjonen kan sees der. På alle grafene i figur 3 vises det behørlig at ellipse-formen er bevart til tross for forandringer i initialverdiene.

Når vi skal begrunne hvorfor formen til grafen er opprettholdt, så ser vi på den totale energien til et system. Da har vi at:

$$Total\ energi = Kinetisk\ energi + Potensiell\ energi$$
 (1)

Samtidig har vi at mengden total energi er konservert. Når vi da i tillegg har at total energi har samme verdi for de tre tilstandene; initial, tilstanden hvor posisjon og velositet er ulik null og likevektstilstanden, så kan vi dedusere at formen ikke forandrer seg for noen av tilstandene (med andre initialverdier for eksempel).[1] Altså at den er lik for alle tilstander.

X- og y-aksene i koordinatsystemet representerer posisjonen og dens deriverte, velositeten. Da har vi også at den deriverte måler stigningstallet (eller slope på engelsk) til tangentlinjen. Tangentlinjen er en rett linje som berører kurven i derivasjonspunktet. Det gir da at banen i faserommet alltid står vinkelrett på x- og y-aksen.

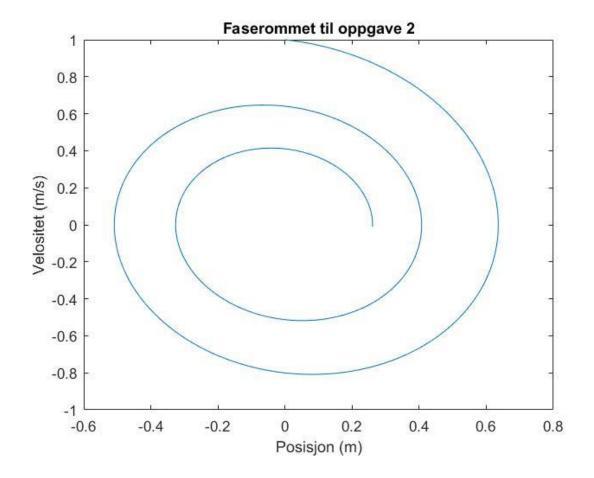
Det går med klokken. Ved å forandre på initialverdier, så er det mulig å skape bevegelse i faserommet som går mot klokken. Hvis hastigheten er negativ, så er det naturlig å tenke seg at den da går i motsatt retning sammenlignet med hvis hastigheten er positiv (slik den er i koden for oppgave 1).

## Oppgave 2:

Vi skal inkludere en demping i koden fra oppgave 1. Av oppgaveteksten og min forståelse av emnet tolker jeg det slik at relasjonen blir:

$$mx(t)'' + bx(t)' + kx(t) = 0$$
 (2)

Med b = 0.1 kg/s. Før vi diskuterer banen, ser vi på banen for å forstå hvordan den ser ut:



Figur 4: viser banen til systemet med et dempingsledd lagt til

Banen er nå forskjellig i oppgave 2 sammenlignet med oppgave1 fordi det ikke er en ellipse lenger. Istedenfor blir fasoren på figur 3 forkortet mest når velositeten er høyest. Dette kommer direkte dempingen av velositeten vi innførte i modellen i (2).

Man kan ikke lenger si at banen er loddrett på aksene. Dette er fordi dempingen gjør at utviklingen i banen ikke lenger er lineær.

En attraktor i dynamiske systemer er en mengde som et system nærmer seg etter hvert. Ved konvergens er løsningen av en iterasjon en attraktor. Det gir da at punktet x = 0 og x' = 0 blir en attraktor som en følge av at systemet konvergerer mot det. Dimensjonen til attraktoren er 2. Kurven fra oppgave 1 kan ikke betegnes som en attraktor ettersom periodisk bevegelse ikke har attraktorer.[2]

### **Oppgave 3:**

Vi har andre ordens ikke-homogen differensiallikning vi skal løse analytisk:

$$mx(t)'' + kx(t) = F(t)$$
 (3)

Med initial verdiene x (0) = 2 og x (0)' = 0. I tillegg er  $F(t) = F_D \cos(w_D t)$ .

Bruker metoden med ubestemte koeffisienter, men finner først den homogene løsningen på venstre side. Dette gjøres ved hjelp av abc-formelen for løsning av andregradsligninger.

$$\frac{\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a} = \frac{\left(0 \pm \sqrt{0 - 4mk}\right)}{2m} = \frac{\left(\pm \sqrt{-4mk}\right)}{2m}$$

Dette gir etter litt mellomregning svaret:

$$x = \sqrt{\frac{k}{m}} i$$

Som gir den homogene likningen for:

$$x_h = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$
 (4)

Vi bruker formen

$$x = A\cos(w_D t) + B\sin(w_D t)$$

Som gir ved derivasjon:

$$x' = -Aw_D \sin(w_D t) + Bw_D \cos(w_D t)$$

$$x'' = -Aw_D^2 \cos(w_D t) - Bw_D^2 \sin(w_D t)$$

Dette setter vi inn i venstre side i (3) og det gir da:

$$-mAw_D^2\cos(w_Dt) - mBw_D^2\sin(w_Dt) + kA\cos(w_Dt) + kB\sin(w_Dt) = \cos(w_Dt)$$

Fra dette får vi grunnlag til å se på koeffisientene.

$$-mAw_D^2 + kA = 1$$
 =>  $A(k - mw_D^2) = 1$   
 $-mBw_D^2 + kB = 0$ 

Dette gir oss da:

$$B = 0 \ og \ A = \frac{1}{k - mw_D^2}$$

Som igjen blir til:

$$x_c = \frac{F_D}{k - mw_D^2} \cos(w_D t)$$

Her har vi hentet  $F_D$  fra (3).

Ettersom løsningen på differensialligninger er gitt av:

$$x = x_c + x_h$$

Så gir det oss:

$$x = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + \frac{F_D}{k - mw_D^2} \cos(w_D t)$$
 (5)

Hvor da selvsagt  $w_D = \sqrt{\frac{k_D}{m_D}}$ .[3]

Vi må bruke de oppgitte initialverdier for å få fullstendig løsning.

$$2 = C_1 + \frac{F_D}{k - mw_D^2} \implies C_1 = 2 - \frac{F_D}{k - mw_D^2}$$

Så gjør vi det samme for den deriverte.

$$0 = \left(2 - \frac{F_D}{k - mw_D}\right) * -\sqrt{\frac{k}{m}} * \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + C_2 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$* \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) - \frac{F_D}{k - mw_D^2} * w_D * \sin(w_D t) \implies 0 = C_2 w_D \implies C_2 = 0$$

Det gir da den analytiske løsningen:

$$x(t) = 2\cos(wt) - 2\frac{F_D}{k - mw_D^2}\sin(\left(\frac{w + w_D}{2}\right)t) * \sin(\left(\frac{w - w_D}{2}\right)t)$$
 (6)

Hvor jeg da har satt  $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Løsningen viser at bevegelsen til oscillatoren er påvirket av den eksterne kraften. Ut i fra ligning (6) har vi fått det som i akustikken omtales som «beat». En dobbel sinus-funksjon som vi det ser kalles for en beat. En beat er et interferensmønster mellom to lyder av to litt forskjellige frekvenser. Det er et fenomen viden kjent fra musikken.[4]

#### Oppgave 4:

Så skal vi løse differensiallikningen i oppgave 3 symbolsk. Her legges det vekt på at det skal bare løses numerisk og symbolsk og ikke nødvendigvis med Runga-Kutta metoden fra forrige oppgaver. Det symbolske svaret blir:

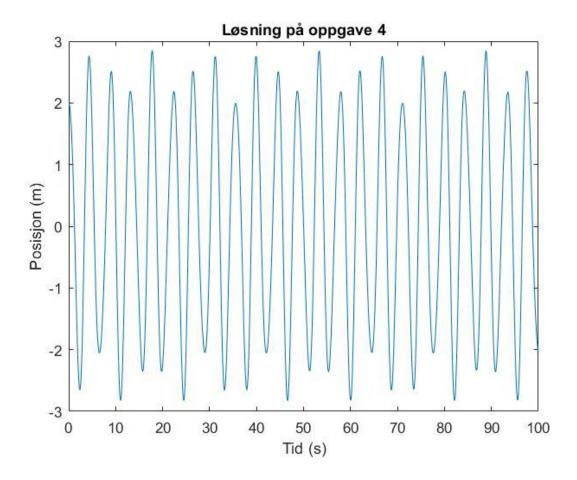
$$x(t) = \frac{214}{75}\cos(wt) - \frac{64}{75w}\cos\left(\frac{13}{8}wt\right) \tag{7}$$

Når vi setter inn tallverdier i den analytiske ligningen fra (6), får vi:

$$x(t) = 2\cos(wt) - \frac{1.4}{1 - \frac{13}{16}w} * \sin\left(\frac{21}{16}wt\right) * \sin\left(-\frac{5}{16}wt\right)$$
 (8)

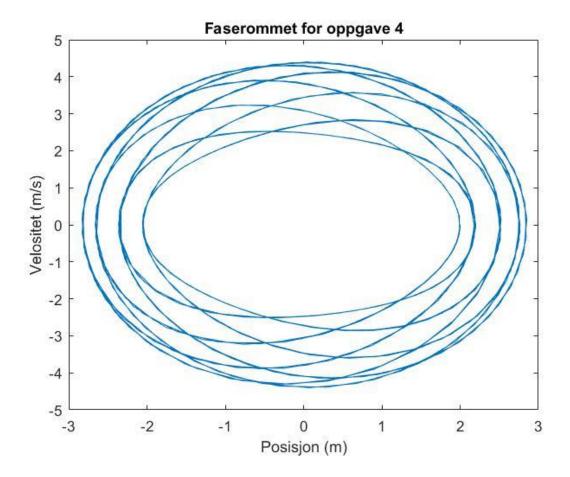
(7) og (8) minner en del om hverandre i form, sett bort fra at vi ble bedt om finne svaret som produkt av sinusfunksjoner i den analytiske delen.

En numerisk løsning på differensiallikning i plotform er da:



Figur 5: viser en numerisk løsning på oppgave 4

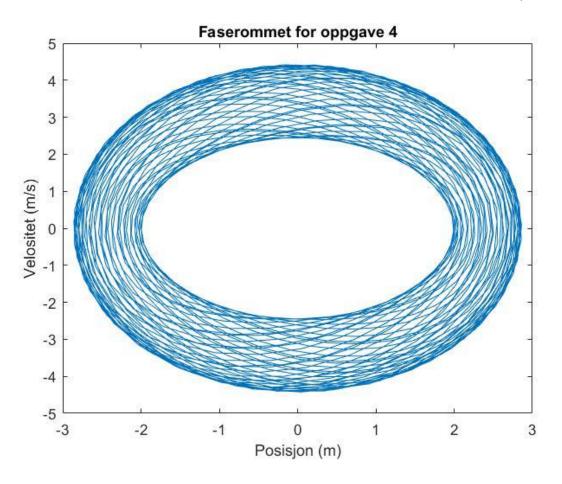
Andre del av oppgaven var å studere faserommet for likningen i (3). Dette blir gjort i figur 6.



Figur 6: viser faserommet for likning (3) i 200 sekunder

Jeg vil beskrive bevegelsen som periodisk. Og baserer dette på figur 4. For sikkerhets skyld bør det nevnes at figur 6 ble laget med den innebygde MATLAB-funksjonen ode45 siden det ikke ble stilt krav om å lage en egen kode utover dette (som det ble i oppgave 1).

I siste del av oppgaven skulle vi forandre på drivefrekvensen slik at den ble:  $w_D = \frac{2}{\sqrt{5}-1} w_0$ .



Figur 7: viser faserommet med den nye drivfrekvensen som oppgitt i oppgaveteksten

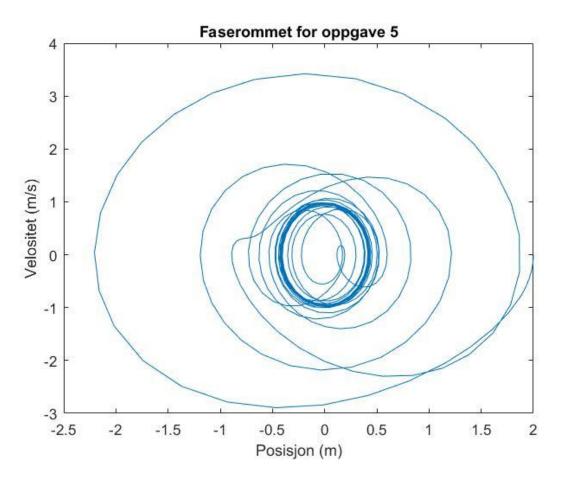
Jeg vil si at bevegelsen ikke er periodisk. Basert på figurene så overlapper ikke figur 7, mens figur 6 gjør det. Sistnevnte er et krav for periodisitet.

## Oppgave 5:

I oppgave 5 skal vi inkludere demping slik at den korrekte ligningen da blir:

$$mx(t)'' + bx(t)' + kx(t) = F(t)$$
 (9)

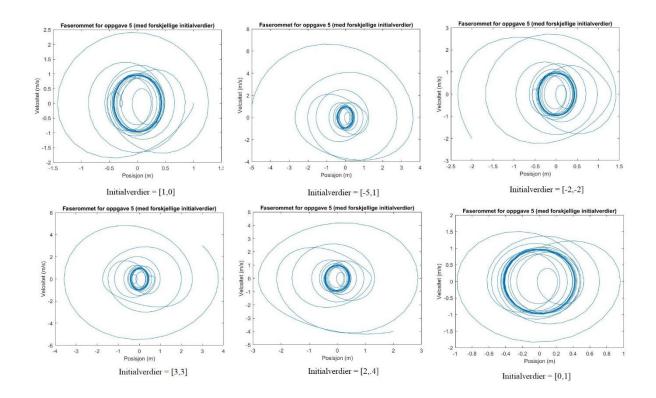
Den første figuren for dette blir gjort med de samme initialverdier som oppgitt i oppgave 4. Deretter forsøkes det med flere andre initialverdier i en form for fotomontasje.



Figur 8: viser faserommet med demping inkludert og de opprinnelige initialverdier

Så følger som tidligere nevnt fotomontasjen med de forskjellige initialverdiene. Her blir da verdiene redegjort for i selve figuren og figurteksten. Men kan påpeke før plottet at jeg har brukt de samme initialverdier som brukt i oppgave 2. Dette blir gjort for å skape en form for sammenligningsgrunnlag.

Når vi sammenligner figur 9 med figurene fra oppgave 2 og oppgave 4, så ser vi at formen på trajeksjonen blir lik når man inkluderer et dempingsledd. Periodisiteten blir brutt.



Figur 9: viser hvordan forandring av initialverdiene påvirker formen på plottet. Fra øverst til venstre og bortover er initialverdiene som følgende: [1,0], [-5,1], [-2,-2], [3,3], [2,-4] og [0,1].

## Oppgave 6:

Differensialligningen som blir referert til i oppgaveteksten har ikke blitt skrevet ned frem til nå. Den er som følgende:

$$mx(t)'' + kx(t) = 0$$
 (10)

For at den skal illustrere en vanndråpe i en kran, blir den modifisert til:

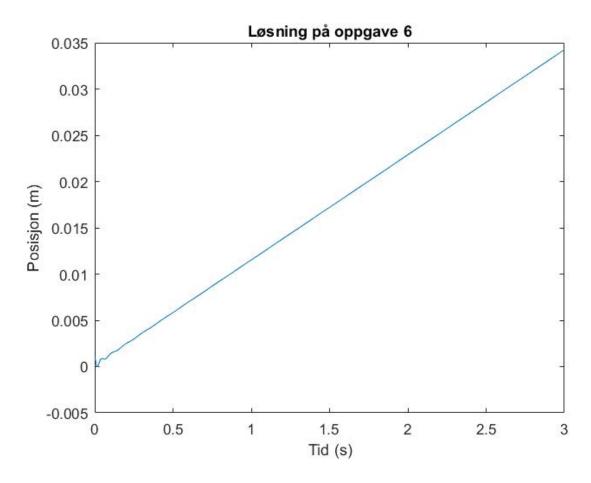
$$mx(t)'' + bx(t)' + kx(t) = mg$$
 (11)

Det antyder da at massen holder seg konstant og ikke vokser med tiden slik det senere differensialligning-systemet i oppgaveteksten for eksempel antyder.

Andre del av oppgaven er å beskrive bevegelsen i de tre første sekundene. Jeg velger her å løse m(t) ettersom m(t)' = 0.00055 kg/s. Dette medfører da at

$$m(t) = 0.00055 * t + 0.00001$$
 (12),

med bruk av oppgitt initialverdi. Dette settes så inn i (11). For øvrig refereres det til koden i appendiksen for dette.

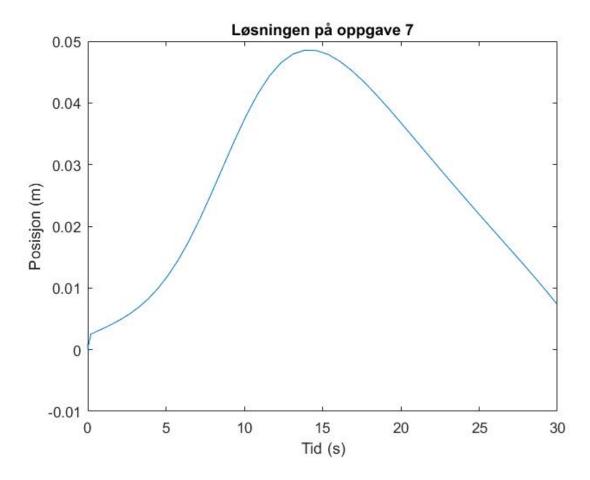


Figur 10: viser hvordan differensiallikning systemet oppgitt i oppgave 6 ser ut i løpet av tre sekunder

Bevegelsen virker realistisk for meg. Vi ser at massen øker rettlinjet og at dette også stemmer med bevegelsen. Her blir altså vanndråpen større proporsjonalt med hvordan massen blir større.

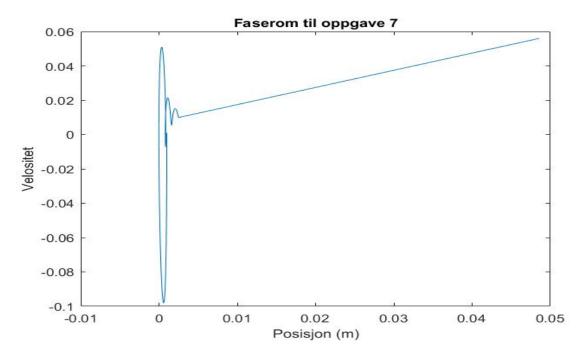
## Oppgave 7:

Vi skal i denne oppgaven vise bevegelsen og faserommet de første 20 sekunder. For det første aspektet valgte jeg å benytte meg av en tidsperiode på 30 sekunder fremfor de oppgitte 20 sekunder ettersom det ga et bedre bilde av hvordan grafen ble ut ifra koden jeg skrev inn.



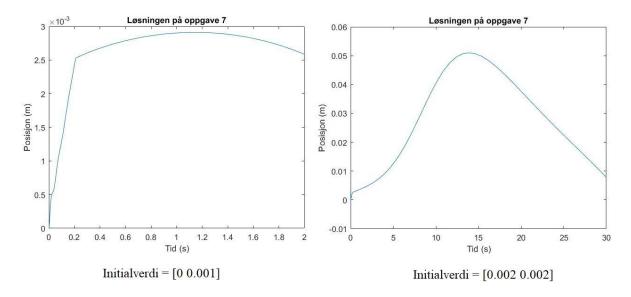
Figur 11: viser hvordan de kaotiske vanndråpene beveger seg ut i fra tid

For tiden mellom to dråper leser jeg av rundt 20 sekunder. Dette stemmer bra fordi det er en treg prosess.



Figur 12: viser faserommet til den drippende kranen

Så skulle vi variere initialbetingelsene innenfor fornuftige rammer. Jeg setter disse verdiene som initialverdier: [0 0.001] og [0.002 0.002].

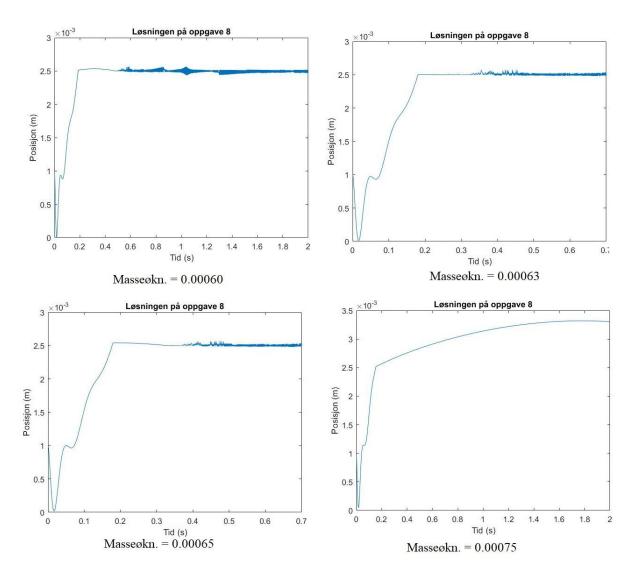


Figur 13: viser plottende med andre initialverdier som oppgitt i teksten

Tiden mellom to dråper er konstant når vi har verdier som ikke er null for begge initialverdier. Når det derimot er en verdi som er null, så er ikke tiden konstant. Faserommet virker å være mer lik faserommene til ligningene med demping. Altså de som ikke er konstante. Noe som virker fornuftig ettersom dråpene skal symbolisere kaos.

## Oppgave 8:

I oppgave 8 skal vi variere masseøkningsraten. Dette gjør jeg manuelt. Vi måtte variere tiden det tar for iterasjonen også for å få et resultat.



Jeg gjorde ikke andre del av oppgave 8, men vet at ut i fra måten oppsettet er beskrevet på, så har man en bifurkasjonsplott. Det er ganske vanlig innen dynamiske systemer.

## Oppgave 9:

I hele arbeidet med denne prosjektoppgaven har jeg benyttet meg flittig av vitenskapelige artikler og rapporter fra eksperimentelle studier for å sammenligne deres resultater med det jeg har gjort. Her kan jeg for eksempel peke på Gilchrist og hans resultater med differensiallikninger med demping.[5] Ved å sammenligne den fasoren han fikk og den jeg fikk, så kunne jeg akseptere mitt resultat med tilfredshet.

Et spesielt viktig aspekt ved prosjektoppgaven var å forstå den kaotiske oppførselen til ikkelineære systemer, som representert av drypping av vanndråper. Her fremstår artikkelen: «A simple mathematical model of a dripping tap", av Marhl og Schmidt som et godt valg.[6] Artikkelen tar for seg det eksperimentelle aspektet, den matematiske modellen og samt numeriske biten. Selv om jeg må legge til at min kode kun tok for seg vanndråpe, så fremstår akkurat den ene dråpen og faserommet som korrekt. I tillegg er en matematisk modell gitt i teksten. Denne minner en del om (nesten identisk faktisk, med unntak for notasjon) det vi gjorde. Det må sies at artikkelen representerer en simpel modell av dryppende vann fra en kran, kanskje til og med mer simpel enn vår (det har gått nesten 20 år siden den artikkelen).

Som en følge av at jeg ikke mottok veiledning på oppgave 7 og utover, så var jeg bekymret over kvaliteten på kodingen min. Av den grunn søkte jeg ytterligere basis for å få bekreftelse. Her kan det da pekes på artikkelen fra Suetani et al. I følge den, så min er koding i nærheten av å være realistisk for både posisjon og faserom.[7]

Som avslutning kan man da konkludere at muligheten til å sammenligne med etablert forskning gir uante muligheter for en student til å forstå kompleks vitenskap. Det gir også studenten muligheten til å se ting fra andre perspektiver. Men det må være vilje fra studentens side.

## **REFERANSER:**

- [1] Energy and the simple harmonic Oscillator, <a href="http://web.mit.edu/8.01t/www/materials/modules/chapter23.pdf">http://web.mit.edu/8.01t/www/materials/modules/chapter23.pdf</a>, hentet 02.05.2018.
- [2] Attractor. http://mathworld.wolfram.com/Attractor.html, hentet 03.05.2018
- [3] Simple Harmonic Motion Frequency. <a href="http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/shm2.html">http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/shm2.html</a>, hentet 03. 05.2018.
- [4] Beat (acoustics). <a href="https://en.wikipedia.org/wiki/Beat\_(acoustics">https://en.wikipedia.org/wiki/Beat\_(acoustics)</a>, hentet 04.05.2018.
- [5] Alexei Gilchrist, Dynamical system maps, http://www.entropy.energy/scholar/node/dynamical-systems-maps, hentet 05.05.2018
- [6] Thomas Schmidt og Marko Marhl, A simple mathematical model of a dripping tap, http://fy.chalmers.se/~f7xiz/TIF081C/drippingfaucet.pdf, hentet 05.05.2018
- [7] Hiromichi Suetani et al. Manifold learning approach for chaos in the dripping faucet. <a href="https://www.semanticscholar.org/paper/Manifold-learning-approach-for-chaos-in-the-faucet.-">https://www.semanticscholar.org/paper/Manifold-learning-approach-for-chaos-in-the-faucet.-</a> Suetani-Soejima/ad6c9e7f58bb6415a7a7b2bdf2090b4dc32dc1dd, hentet 06.05.2018

## **APPENDIKS:**

Intensjonen med appendikset er at vi skal legge til MATLAB-kodene som er brukt i prosjektoppgaven. Jeg vil gjøre dette i kronologisk orden etter som de blir beskrevet i selve besvarelsen på prosjektoppgaven.

### Oppgave 1:

Først kode i denne delen er et skript som viser hvordan Runge-Kutta metoden i fjerde orden ble implementert i MATLAB.

```
%Dette skriptet gir Runge-Kutta fjerde orden
q = 100;
h = 1./q;
t = linspace(0, 20, 1000);
x = [0;1];
for ii = 1: (length(t) -1)
    k1(:,ii) = diffe(t(ii), x(:,ii));
    k2(:,ii) = diffe(t(ii) + 0.5*h, x(:,ii) +
k1(:,ii)*0.5*h);
    k3(:,ii) = diffe(t(ii) + 0.5*h, x(:,ii) +
k2(:,ii)*0.5*h);
    k4(:,ii) = diffe(t(ii) + h, x(:,ii) + k3(:,ii)*h);
    x(2,ii+1) = x(2,ii) + ((1./6)*(k1(2,ii) + 2*k2(2,ii) +
2*k3(2,ii) + k4(2,ii))*h);
    x(1,ii+1) = x(1,ii) + ((1./6)*(k1(1,ii) + 2*k2(1,ii) +
2*k3(1,ii) + k4(1,ii))*h);
end
plot(x(1,:),x(2,:));
xlabel('Posisjon (m)');
ylabel('Velositet (m/s)');
title('Plot som viser systemets trajeksjon i faserommet');
```

Så følger koden over selve differensiallikningen.

```
function [xpunk] = diffe(t,x)
%Denne funksjonen gir differensiallikningen som brukes i
RK4
% Oppgave 1 i prosjektoppgaven i FYS2130
m = 0.5;
k = 1;
```

```
xpunk(1) = x(2);
xpunk(2) = -(k./m) *x(1);
xpunk = xpunk'
```

#### Oppgave 2:

Her legger jeg ved forandringen i koden for differensiallikningen ettersom et dempende ledd er lagt til.

```
function [xpunk] = diffe(t,x)
% Denne funksjonen gir differensiallikningen som brukes i
RK4
%    Oppgave 2 i prosjektoppgaven i FYS2130
m = 0.5;
k = 1;
b = 0.1;

xpunk(1) = x(2);
xpunk(2) = -(k./m) *x(1) - (b./m)*x(2);
xpunk = xpunk'
```

#### Oppgave 4:

Vi skulle i oppgaven skrive et program som ga en løsning på differensiallikning i oppgaveteksten. Dette blir gjort nedenfor:

```
%Viser hvordan en differensiallikning løses på MATLAB syms x(t) Dx = diff(x); ode = diff(x,t,2) == 1.4*cos(1.625*t) - x; cond1 = x(0) == 2; cond2 = Dx(0) == 0; conds = [cond1 cond2]; xSol (t) = dsolve(ode,conds); xSol = simplify(xSol)
```

I andre del av oppgaven skulle vi studere faserommet for 200 sekunder. For dette brukte jeg MATLABs innebygde kode for å løse Runge-Kutta, ode45. Funksjonen kommer først:

```
function [xpunk2] = funkmast(t,x)
% Viser faserommet for den numeriske løsningen av oppgave 4
%    Oppgave 4 i FYS2130
w = sqrt(2);
xpunk2(1) = x(2);
xpunk2(2) = 1.4*cos((13./8)*w*t) - 2*x(1);

xpunk2 = xpunk2'
end

Så legger jeg ved scriptet for ode45.
[t,x] = ode45('funkmast',[0 100],[2 0]);
plot(x(:,1),x(:,2));
xlabel('Posisjon (m)');
ylabel('Velositet (m/s)');
title('Faserommet for oppgave 4');
```

Til slutt legger jeg ved scriptet for løsning av oppgave 4. Det er en minimal forskjell i plot, men legger det ved for sikkerhets skyld.

```
[t,x] = ode45('funkmast',[0 100],[2 0]);
%plot(x(:,1),x(:,2));
plot(t,x(:,1));
xlabel('Tid (s)');
ylabel('Posisjon (m)');
title('Løsning på oppgave 4');
```

#### Oppgave 5:

Koden i denne oppgaven minner en del om i forrige oppgave, men med et dempingsledd inkludert. Først kommer da koden for funksjonen.

```
function [xpunk3] = funkmast(t,x)
%Viser faserommet for den numeriske løsningen av oppgave 4
%    Oppgave 5 i FYS2130
w = sqrt(2);
xpunk3(1) = x(2);
xpunk3(2) = 1.4*cos((13./8)*t*w) - 2*x(1) - 0.2*x(2);
xpunk3 = xpunk3'
```

#### end

Deretter følger koden for ode45.

```
[t,x] = ode45('funkmast',[0 100],[2 0]);
plot(x(:,1),x(:,2));
xlabel('Posisjon (m)');
ylabel('Velositet (m/s)');
title('Faserommet for oppgave 5');
```

#### Oppgave 6:

Den første koden er for differensiallikningen. Her fant jeg altså, som tidligere nevnt, m(t) analytisk med initialverdiene.

Etter dette var et script nødvendig og det ser slikt ut:

```
[t,x] = ode45('Oppgave6',[0 3],[0.001 0.001]);
plot(t,x(:,1));
xlabel('Tid (s)');
ylabel('Posisjon (m)');
title('Løsning på oppgave 6');
```

#### Oppgave 7:

Først viser jeg til differensiallikningen, som så ofte gjort før i denne prosjektoppgaven.

```
function [xpunk4] = Oppgave7(t,x)
%Viser hvordan systemet for differensiallikning forløper
seg i løpet av 3 s
% Oppgave 7 i FYS2130
q = 9.81;
k = 0.475;
b = 0.001;
a = 0.00055;
m = 0.00055*t + 0.00001;
xc = 0.0025;
be = 50;
p = 1000;
xpunk4(1) = x(2);
xpunk4(2) = ((m*g) - (b+a)*x(2) - k*x(1))./m;
dm = be*m*x(2);
dx = ((3*(dm.^4))./(4*pi*p*m.^3)).^(1./3);
for ii = 1:length(t)
    if x(ii) < xc
        continue
    else
         m = m(ii) - dm(ii);
         xpunk4 = x(ii) - dx(ii);
    end
end
xpunk4 = xpunk4'
Så viser jeg til scriptet som ble brukt.
[t,x] = ode45('Oppgave7',[0 30],[0.001 0.001]);
plot(t, x(:, 1));
%plot(x(:,1),x(:,2));
xlabel('Tid (s)');
ylabel('Posisjon (m)');
title ('Løsningen på oppgave 7');
```