Problem sett 10 i FYS3120

av Furkan Kaya

Problem 1 Først noe preliminært om problemsettet. Det er slik at det er oppgitt at en tynn, rett og ledende kabel orientert ved hvile langs z-aksen i en inertial ramme S og bærer en konstant strøm I. Kabelen (eller ledningen) er ladningsnøytral.

a) Først viser vi at strømmen produserer et magnetisk felt oppgitt som $\vec{B} = B(r)\,\hat{e}_\phi$. Integralformen av Amperes lov er:

$$\oint_C B \cdot dS = \mu_0 I + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_S E \cdot dS$$

Her har vi at kabelen er ved hvile slik at vi kan se bort fra leddet etter $\mu_0 I$. Av det får vi

$$\oint_C B \cdot dS = \mu_0 I$$

Her har vi da $B = \dfrac{\mu_0 I}{dS}$

Hvor dS er geometrien til kabelen, og gitt av r som variabel. Hvordan setter vi da inn ϕ? Her har vi rett og slett retnings faktor $\dfrac{r}{|r|}$. Denne blir da gitt som enhetsvektoren $\hat{e}_\phi$.

$$t' = \gamma \cdot \left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

Når man analyserer B, så må man også vurdere dS, ved siden av retningen eller banen til integralet. Hvis det er snakk om kontinuerlig j-eks., så er $dS = 2\pi r$.

b) Så skal vi se på samme situasjon i referanseramme S' som beveger seg med velositet v langs x-aksen.

Vi bruker da standard transformasjon formel for 4-vektorer til å finne ladnings og strømtettheter i S': Strøm lages da av både elektroner og ioner med ladning. Dette gir oss da at ladningstettheten er ρ_e og $\rho_i = -\rho_e$, og strømtettheten er $j_e = v_e \rho_e$ og $j_i = 0$.

Så får vi da:

$$\rho_e' = \gamma\left(\rho_e - \frac{v_e j_e}{c^2}\right) = \gamma\left(\rho_e - \frac{v_e^2 \rho_e}{c^2}\right)$$

$$\rho_e' = \gamma\left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right)\rho_e = \underline{\frac{1}{\gamma}\rho_e}$$

$$j_e' = \gamma(j_e - v_e \rho_e) = \underline{0}$$

$$\rho_i' = \gamma\left(\rho_i - \frac{v_e}{c^2} j_i\right) = \underline{-\gamma \rho_e}$$

$$j_i' = \gamma(0 - v_i \rho_i) = \underline{\gamma v_e \rho_e}$$

Dette fører da til at vi til slutt får følgende

$$\rho' = \rho_e' + \rho_i' = \frac{1}{\gamma}(\rho_e - \gamma \rho_e = \underline{\underline{\rho_e\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right)}}$$

$$j' = j_e' + j_i' = 0 + \gamma v_e \rho_e = \underline{\underline{\gamma v_e \rho_e}}$$

Dette viser da at vi har fått forandring fra S til S' og derav ønsket resultat i henhold til oppgaveteksten.

Så ønskes det at vi skal finne ladning per enhetslengde λ' og strømmen I'.

Ladningen er $\rho_e\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right)$ over hele kabelen.

$$\rho' = -\gamma \beta^2 \rho_e \quad \text{som gir} \quad \lambda' = \underline{\underline{-\frac{\gamma\beta}{c} I}}$$

$$I' = \underline{\underline{\gamma I}}$$

c) Oppgaven krever at vi skal bruke henholdsvis Gauss lov og Amperes lov til å finne E' og B'.

Gauss lov: $\oint_S E \cdot dS = Q/\varepsilon_0$

Som gir E-feltet på neste side →

$$E' = -\frac{B\gamma I}{2\pi\varepsilon_0 r' c} e_r$$

Amperes lov gir på tilsvarende vis

$$B = \frac{\mu_0 I \gamma}{2\pi r'} e_\phi$$

d) Her skal vi komme frem til det i c), men ved å derivere feltene i S' fra de i S ved å bruke relativistiske transformasjonsformler for $\vec{E}$ og $\vec{B}$.

Da vet vi fra før at i S er $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} e_\phi$

Da har vi formelen

$$B_\perp' = \gamma \left(B_\perp - \frac{1}{c^2} v \times E \right)$$, ser igjen bort

fra leddet etter $B_\perp$ av samme grunn som i oppgave a). Og det gir oss

$$B' = \frac{\gamma \mu_0 I}{2\pi r} e_\phi$$

Så det samme for E-feltet.

$$E'_\perp = \gamma(E_\perp + v \times B) \quad \text{som blir}$$

$$E'_\perp = \gamma\left(\frac{Q}{2\pi r \varepsilon_0} e_r + v \times \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} e_\phi\right)\right)$$

hvor da $v = \frac{\beta}{c}$. Altså får vi

$$E' = -\frac{\beta \gamma I}{2\pi \varepsilon_0 r' c} e_r$$

(Gjort numerisk på Wolfram Alpha)

Problem 2 Dette er da en eksamensoppgave fra 2013.

a) Vi gjør det først for x_A og x'_A. Disse må da være like. Og som hintet omtaler, så kvadrerer vi koordinatene.

$$c^2(t^2 + c^2/a^2) = c^2(t'^2 + c^2/a^2)$$

$$t^2 = t'^2 \quad \text{som innsatt i } x_A, x'_A,$$

x'_B og x_B gir at de også er like. Slik at vi får samme form.

b) Vi setter inn $t = 0$ og får

$$x_A = c\sqrt{c^2/a^2} \quad \text{og} \quad x_B = c\sqrt{c^2/b^2}$$

Distansen er da $x_B - x_A$.

$$x = c\sqrt{c^2/b^2 - c^2/a^2} = \underline{\underline{c^2\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}}}$$

Jeg kan bekrefte at vi får samme resultat i S' ja.

Ved å variere velociteten til S', så kan t ta enhver verdi og det betyr at $t' = 0$ korresponderer til ethvert punkt på banen til A. Dette gir oss da konklusjonen ettersom S' kan være den instante rest-rammen til A for ethvert punkt på banen.

c) Vi skal vise at „proper" akselerasjonen til A og B er konstante. Her har vi da at ved $t' = 0$ at

$$a'_A = \frac{dv'_A}{dt'} = \frac{c}{\sqrt{t'^2 + \frac{c^2}{a^2}}} - \frac{ct'^2}{\left(\sqrt{t'^2 + \frac{c^2}{a^2}}\right)^3}$$

som gir $a(0) = \underline{a}$

d) Vi skal da her finne velositeten til B (målt i S) når signalet er mottatt. Det går fra A til B altså, så vi finner distansen og deriverer denne. Dette gir oss:

$$(x_B - x_A)^2 = c^2\left(t_B^2 + c^2/a^2\right) - c^2\left(c^2/a^2\right)$$

$$(x_B - x_A)^2 = \underline{c^2\left(t_B^2\right)}$$

$$\left(x_B - \frac{c^2}{a^2}\right) = c^2(t_B)^2 \Rightarrow x_B = c^2 t_B^2 + \frac{c^2}{a^2}$$

velositeten til B er gitt av:

$$v_B = \frac{c t_B}{\sqrt{t_B^2 + \frac{c^2}{b^2}}} \Rightarrow v_B = \underline{c \frac{c t_B}{x_B}}$$

som gir $$v_B = \frac{c t_B}{c^2 t_B^2 + \frac{c^2}{a^2}} = \underline{\underline{\frac{t_B}{t_B^2 + \frac{c^2}{a^2}}}}$$

$v_B =$