Svar på Problemsett 1

Furkan Kaya

Februar 2020

1 Introduksjon

Som en følge av en ødelagt printer på både mitt hotell og på det lokale folkebibliotek, så måtte jeg overføre alt det jeg hadde gjort til LaTeX format. Så noe av det som er skrevet nedenfor kan bære preg av å være hurtig skrevet.

2 Problem 1

Vi skal i denne første oppgaven spesifisere antallet frigrader (usikker på norsk benevnelse) og velge passende sett av av generaliserte koordinater, som det står beskrevet i oppgaveteksten.

a) Første mekaniske system er en pendel koblet til en blokk som igjen er koblet til en fjær.

Vi bruker da ligningen d = N - M, hvor N er antallet variabler til systemet og M er antallet begrensninger. d er da tilslutt antallet generaliserte koordinater som behøves for å gi den fulle beskrivelsen av systemet.

Vi henviser da først til figur a) i oppgaveteksten. Dette systemet er da 2D og ikke 3D. Med pendelen har vi to kartesiske koordinater og en begrensning. Her kan vi da referere til eksempelet med den planære pendel i pensum. Når det gjelder delen med rigid body på fjær, så har vi et eksempel å forholde oss til der også. Da har vi to translasjonale koordinater og et rotasjonelt. Det gir for begrensninger, så har vi at blokken bare kan bevege seg i en retning, mens pendelen koblet til blokker slik at vi har en fast distanse der. I tillegg er blokken på et bord. Det gir at vi har 3 begrensninger. Av dette får vi følgende:

$$d = 5 - 3 = 2 \tag{1}$$

Altså 2 grader av frihet. Et passende sett av generaliserte koordinater da: en translasjonal koordinat som går langs aksen og en vinkel θ for pendelen (husker da at dette er symbolet for vinkel fra grunnleggende fysikk).

b) Andre mekaniske system er en pendel som koblet til en vertikal ring som roterer med fast frekvens, w.

Først referer vi altså til figur b) i oppgaveteksten. Her har vi igjen et 2-dimensjonalt system å forholde oss til. Og en pendel som beveger + en ring som beveger seg. Vi bruker da d = N - M igjen og har fra forrige oppgave at pendel gir to translasjonale koordinater. Ringen har en fast vinkelfrekvens og vi har da en vinkel. Siden systemet er 2D, så har vi da totalt N = 5.

Antallet begrensninger er gitt av: pendel som har fast distanse til ring, ring fast til origo (den står fast altså selv om den roterer), fast vinkelfrekvens og til slutt at bevegelsen til pendelen har ytterpunkter som det kan bevege seg til. Da får vi M = 4 som gir oss:

$$d = 5 - 4 = 1 \tag{2}$$

Altså en frihetsgrad. Siden vi da bare skal ha en variabel, så kan vi bruke en hvilken som helst vinkel som symboliserer pendelen som beveger seg. Altså som ikke er den for vinkelfrekvensen til ringen. Da med $\theta \neq$ w, hvor w = θt.

c) Systemet er et rett rør som kan tilte uten å gli på toppen av en sylinder, mens sylinderen kan bevege seg på et horisontalt plan.

Og igjen refereres det til korrekt figur, denne gang figur c) i oppgaveteksten. Fra ovenfornevnte figur har vi at sylinderen er en rigid body på et horisontalt plan. Da har vi to translasjonale koordinater å forholde oss til. Vi har også en rotasjonal koordinat. Det gir da N = 3. For røret får vi en fast x-koordinat ettersom det alltid er på sylinderen, og y-aksen som derimot varierer. Også her har vi en rotasjonal (rigid body) koordinat. Da får vi N = 6 til sammen.

Så ser vi antall begrensninger. En er at sylinderen begrenses til det horisontale plan. En annen er at røret må holdes på sylinderen. Tredje er at røret har faste grenser for sine verdier før det faller (altså at det har randkoordinater). To og tre her er da ganske like, men kan klassifiseres i hvor langt det (røret) ligger på sylinderen. Fjerde begrensning er da at rotasjonen til sylinderen må begrenses. Det gir M = 4. Vi får da:

$$d = 6 - 4 = 2 \tag{3}$$

Som da gir 2 frihetsgrader. Et passende sett av generaliserte koordinater kan være: translasjonal bevegelse langs x-aksen og vinkel θ til sylinderen.

d) Viser en spinnende topp som beveger seg på et horisontalt gulv.

Vi bruker igjen formelen og henviser til figur d) i oppgaveteksten før vi går videre. Vi bruker formelen fordi det fortsatt er snakk om et horisontalt plan (altså 2 dimensjoner). Her har vi da at komponentenkan bevege seg fritt i x og y retning. Samt at det har et rotasjonskoordinat som er fast (etter kraften man bruker til å foreta spinnet).

Da antar vi en rotasjon, to translasjonale horisontale og en translasjonal vertikal, samt en begrensning i form av at det må være på det horisontale plan. Det gir:

$$d = 4 - 1 = 3 \tag{4}$$

Da har vi i (4) 3 frihetsgrader. Som passende sett av generaliserte koordinater har vi da en vinkel θ som bestemmer vinkelfrekvensen og x- og y-koordinater.

3 Problem 2

I denne oppgaven skal vi se på en Atwood maskin. Først ser vi på graden av friheter.

Da har vi først at vi har en Atwood-maskin med tre vekter. Med en vekt hadde vi hatt to vertikale koordinater og en begrensning, slik at vi hadde fått en frihetsgrad. Med tre vekter har vi da plutselig to nye koordinater + en begrensning til å forholde oss til. Da får vi totalt 2 frihetsgrader.

Et passende sett av koordinater er da x og x′.

Så skal vi finne kinetisk og potensiell energi til systemet. Kinetisk energi er skrevet som:

$$K = \frac{1}{2}m_1x^2 + \frac{1}{2}m_2(-x + x')^2 + \frac{1}{2}m_3(-x - x')^2 \tag{5}$$

Dette kommer da av at vi har K = $\frac{1}{2}$mv^2 og superponeringsprinsippet. Da har vi da at den potensielle energien blir:

$$U = m_1gx - m_2g(l_1 - x + x') - m_3g(l_1 - x + l_2 - x') \tag{6}$$

Da skal vi til slutt finne den lagranske som oppgaveteksten krever. Vi har den generelle formelen, L = T - V, hvor T = total kinetisk energi og V = total potensiell energi. Dette fører til:

$$L = \frac{1}{2}(m_1x^2 + m_2(-x+x')^2 + m_3(-x-x')^2 - (m_1gx - m_2g(l_1 - x + x') - m_3g(l_1 - x + l_2 - x')) \tag{7}$$

4 Problem 3

Først skal vi vise at systemet har en frihetsgrad. Her har vi da tre rør plassert sammen. Disse er da såkalte rigide bodies med to translasjonale koordinater og en rotasjon. Det gir da N = 3 * 3 = 9. Så finner vi antall begrensninger. Her ser vi på figuren at to av tre rør er suspenderte. Det er den ene som beveges. Jeg tolker figuren slik at kun det ene røret beveger seg horisontalt, mens ingen av de andre kan gjøre det verken ned eller til siden. Det gir M = 8. Så får vi da:

$$d = 9 - 8 = 1 \tag{8}$$

Altså d = 1 grad av frihet. Og dette er da θ som vi ser på figuren i oppgaveteksten.

I siste del av oppgaveteksten skal vi finne den lagrangske til systemet. Den kinetiske energien til et roterende objekt er:

$$E_k = \frac{1}{2}Iw^2 \tag{9}$$

hvor da selvsagt I = $\frac{1}{3}ml^2$ og w = $\frac{2*\pi}{T}$ = θ som gir:

$$E_k = \frac{1}{6}ml^2\theta^2 \tag{10}$$

Siden vi her har 3 rør med 2 rotasjonssider hver, med unntak for det ene røret, så får vi:

$$K = \frac{5}{6}ml^2\hat{\theta}^2 \tag{11}$$

Da ser vi på den potensielle energien for systemet. U = - mgh = - mgl cos θ. Vi har da at det er to rør som peker nedover og dette gir oss da:

$$V = -2mgl * cos(\theta) \tag{12}$$

som igjen fører til:

$$L = \frac{5}{6}ml^2\hat{\theta}^2 + 2mgl * cos(\theta) \tag{13}$$

5 Problem 4

Problem 4 har fire forskjellige oppgaver. Selv om jeg ved dette tidspunktet merker litt slitasje, så vil jeg fortsatt gjøre et ærlig forsøk og venter da på ærlig tilbakemelding.

a) I den første oppgaven skal vi finne hvorfor det er 2 frihetsgrader og mer rundt det. Siden det er snakk om et 3D rom, så bruker vi d = 3N - M. Vi har da N = 1 ettersom det bare er snakk om en retningsbevegelse i 3D-rom. M $\approx$ 1 basert på innsetting i begrensningsligningen. Da får vi:

$$d = 3 - 1 = 2 \tag{14}$$

Igjen da 2 frihetsgrader.

Så finner vi uttrykket for posisjonsvektoren i form av x og y. Jeg er litt usikker på hva man leter etter her, men gjør likevel et forsøk:

$$r = (r_1, r_2, ...r_N) = (x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_N, y_N) \tag{15}$$

Her antar jeg at vi ligning (15) også kan skrive det som:

$$r = (x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_N, y_N; z) \tag{16}$$

b) Så skal vi finne δ r uttrykt i form δx og δy. Her mener jeg da at δ r er representert av:

$$\delta r = \delta x + \delta y \tag{17}$$

c) Setter her da f lik:

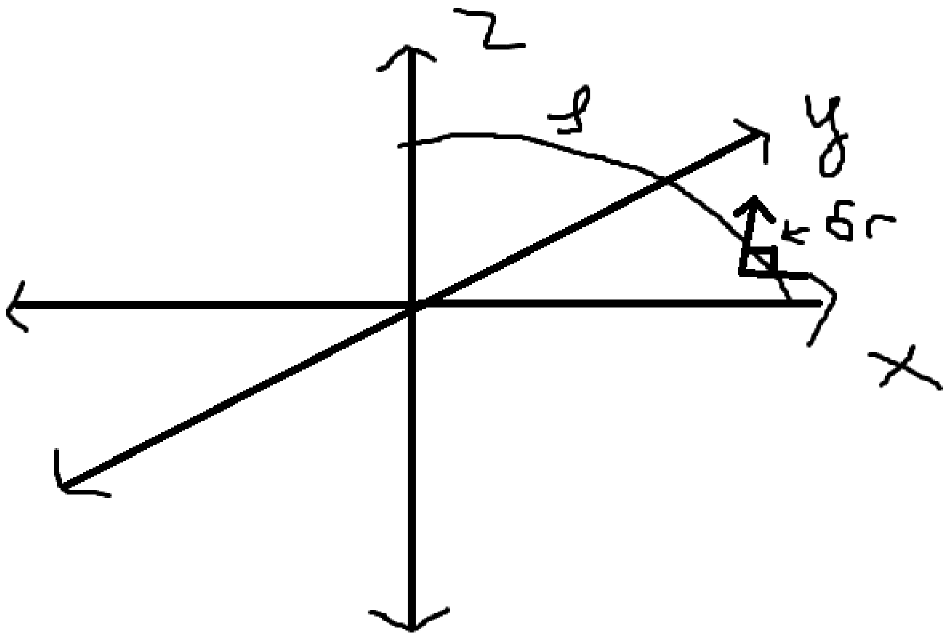
$$f = exp(-(x^2 + y^2)) + z \tag{18}$$

og integrerer denne som:

$$\int_{-\infty}^{\infty} exp(-(x^2 + y^2)) + z = 1 \tag{19}$$

som gir f = $\frac{1}{z}$. Er usikker på om svaret er helt rett her, men det er mitt beste forsøk etter forutsetningene.

d) Så skal vi lage en tegning for overflaten gjennom y = 0. Det er da en 2D-overflate i et 3D-rom. Som å tegne på et ark i et hotellrom vil jeg si.



Figur 1: Schematic shows the drawing for Problemsett 1, assignment 4d)

Omgjør litt på den tradisjonelle x, y og z-aksene for at det skal bli lettere å tegne y = 0. Så den beveger seg i bare x- og z-retning.