Problemsett 3

I

FYS3120

Klassisk Mekanikk og Elektrodynamikk

Av Furkan Kaya

Problem 1:

a)

Her skal vi først uttrykke de kartesiske koordinater x og y som en funksjon av s. La oss da først referere til figur 1. Og samtidig har vi (1.17) i pensumheftet til Leinaas å forholde oss til. Da får vi følgende:

$$x = s\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\ s$$

$$y = \ -s\sin(30°) + h = \ -\frac{1}{2}s + h$$

(her legger vi til h fordi objektet står på en flate med denne dimensjonen allerede gitt)

Så skal vi finne Lagrange uttrykt ut ifra s og s'. Da finner vi først s', noe som er gjort nedenfor:

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}\ s'$$

$$y' = \ -\frac{1}{2}s'$$

Det gir oss da med den etter hvert velkjente Lagrange L = T – U (kinetisk energi – potensiell energi). Først finner vi T (som da er kinetisk) og så U (som er potensiell).

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \ \ og\ U = mgy$$

Her er v gitt av et plan som består av x og y. Så vi bruker da den deriverte til x og y for å finne svaret. Og det er en rettvinklet-plan slik at vi kan bruke Pytagoras på den v-delen. Dette gir oss da v = sqrt(x'^2 + y'^2) som da gir oss:

$$T = \frac{1}{2}\ m\ (x'^2 + y'^2) = \frac{1}{2}m\ \left(\frac{3}{4}\ s'^2 + \frac{1}{4}s'^2\right) = \frac{1}{2}ms'^2$$

Så finner vi U ved å gjøre følgende:

$$U = mg(-\frac{1}{2}s + h)$$

Som da gir oss til slutt innsatt i Lagrange:

$$L = \frac{1}{2}ms'^2 + \frac{1}{2}mgs - mgh$$

b)

Så antar vi at akselerasjonen a er konstant og ikke-forsvinnende. Igjen skal vi finne de kartesiske koordinater og deres tidsderivater + Lagrange til systemet. Vi har da at a går mot x og ikke i y-retningen. Dette gir oss da at y forblir det samme i oppgaven ovenfor, mens da i x-retningen så må a integreres. Som blir gjort på følgende måte:

$$x = \int at + (\frac{\sqrt{3}}{2}\ s)$$

Delen i parentes skal ikke integreres. Vi får da til slutt følgende ligning:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}s$$

Og den deriverte av dette blir da igjen:

$$x' = at + \frac{\sqrt{3}}{2}s'$$

Så finner vi L = T – U som i forrige oppgave og tenker oss at U forblir uforandret. Det gir da kun T som i oppgaven nedenfor:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\left(at + \frac{\sqrt{3}}{2}\ s'\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}s'\right)^2}\right)^2 + \frac{mgs}{2} - mgh$$

$$L = \frac{1}{2}m\left(a^2t^2 + \frac{3}{4}s'^2 + 2at\frac{\sqrt{3}}{2}\ s' + \frac{1}{4}s'^2\right) + \frac{mgs}{2} - mgh$$

c)

Vi finner så Lagranges likning for systemet og løser likningen under antagelsen at body begynner ved tid t = 0 fra toppen av det inklinerte plan (s = 0) med null velositet relativt til planet. Som gjort flere ganger tidligere, så finner vi:

$$\frac{\partial L}{\partial s}, \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial s'}\ og\ \frac{\partial L}{\partial s'}.$$

Dette gir da for verdiene vi fant i b).

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{1}{2}\, mg$$

$$\frac{\partial L}{\partial s'} = ms' + \frac{\sqrt{3}}{2} mat$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial s'} = \frac{\sqrt{3}}{2} ma$$

<u>Problem 2:</u>

a)

I oppgave a skal vi finne Lagrange uttrykt ut i fra θ og θ' og derivere Lagranges ligning for dette. Vi har da følgende forhold mellom kartesiske og sfæriske koordinater.

$$x = r \sin\theta \cos\phi\,, y = r \sin\theta \sin\phi, z = \mathrm{r} \cos\theta$$

Da får vi:

$$x' = r\cos\theta\cos\phi - r\sin\theta\cos\phi\,, y' = r\cos\theta\sin\phi + r\ \sin\theta\cos\phi\,,\ z' = -r\sin\theta$$

Med $T = \frac{1}{2} m\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)$.

Opphøyingen blir da noe tilsvarende:

$$\begin{aligned} r^2\,(\cos^2\theta\cos^2\phi \\ &+ \sin^2\theta^2\phi \\ &- 2\cos\theta\cos\phi\sin\theta\sin\phi) \\ &+ r^2\,(\cos^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta\cos^2\phi + 2\cos\theta\sin\phi\sin\theta\cos\phi) + r^2\sin^2\theta \end{aligned}$$

Som da etter en del omregning blir til:

$$= r^2\,(1 + \sin^2\theta)$$

Da blir da i Lagrange det slik at U = 0. Noe som ble gjennomgått i lignende sfæriske eksempler på nettet og bekreftet. Da får vi altså en Lagrange gitt av:

$$L = \frac{1}{2} mr^2\,(1 + \sin^2\theta)$$

b)

Vi må da her vise at Lagrange er den samme som den til en partikkel som beveger seg i en tids-uavhengig, periodisk potensiale V (θ) med to stabile og to ustabile likevekts-punkter. Her har jeg forholdt meg til det jeg har funnet om Lagrange punkter:

https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian_point#Stability

I tillegg vet vi også at med mekanisk likevekt menes det at netto kraft er lik null. Og gjennom å undersøke litt på nettet, så finner vi gjennom denne linken:

http://farside.ph.utexas.edu/teaching/336k/Newtonhtml/node126.html

at for at et Lagrange-punkt skal være stabilt, så må alle dets røtter være rent imaginære.

Da har vi da at vi kan bruke Lagrange polynom til å finne Lagrange for de to stabile og ustabile punkter, og så adderer vi dem sammen for å få Lagrange for hele systemet. Kvalitativt forklart.

$$P\ (x) = \frac{(x - x_2)}{x_1 - x_2}\ y_1 + \frac{(x - x_1)}{x_2 - x_1}\ y_2$$

Det er den generelle formelen for Lagrange interpolasjon med to punkter. Som da gir en form for Lagrange gjennom:

$$P_1(x) = y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

For et stabilt punkt må vi da ha både negative og positive verdier i en andregradslikning, mens vi ikke har det i ustabile. Det gjør da at vi kan gjerne den ene Lagrange i P_1 (x). Her kan man da velge L_2 for eksempel. Så har vi har at det er et periodisk potensial hvor perioden er 2π. Det gir oss da sin (θ). Med ½ mr^2 allerede gitt for partikkelen, så får vi da samme Lagrange som i oppgaven før.

c)

Her får vi da oppgitt at $\Phi = \theta - \theta_0$ skal introduseres og bestem liten-vinkel form til ligningen. Dette betegnes da som et lite avvik. Her har vi da allerede fra a)

$$L = \frac{1}{2}\, mr^2(1 + \sin\theta)$$

Da ser vi $\theta = \Phi + \theta_0$ og setter dette inn i Lagrange ovenfor. Her antydes det i oppgaveteksten at vi også må finne Lagranges ligning også for systemet. Det gjøres da gjennom de sedvanlige ligninger nedenfor:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2 \sin\theta \cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta'} = mr^2\theta'$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \theta'} = mr^2\theta''$$

Her har jeg også introdusert θ' som en følge av at jeg omtalte den deriverte som i oppgave a). Det gir da at jeg ikke kan finne Lagrange system med det. Vi får da ligningen:

$$\theta'' mr^2 - mr^2 \sin\theta \cos\theta = 0$$

Som da gir med innsatt for θ.

$$(\Phi + \theta_0)'' mr^2 - mr^2 \sin(\Phi + \theta_0) \cos\,(\Phi + \theta_0) = 0$$

Problem 3:

a)

Først finner vi da Lagrange til systemet, før vi finner Lagranges ligning til systemet. Her har vi da et to-body system og et to-koordinat system omtalt som polar koordinater (r, θ). Vi finner da både T og U nedenfor. Men sier på forhånd at i polar koordinater, så er bevegelsen til en sirkel beskrevet av r = R fremfor x^2 + y^2 = R fra kartesiske koordinater.

Ut ifra det får vi da at vi:

$$\frac{1}{2}\, mv^2 = \frac{1}{2} m\, \left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right)^2 = \frac{1}{2} m\, \left(\sqrt{r'^2}\right)^2 = \frac{1}{2} mr'^2$$

For sirkel-leddet. Så ser vi på det andre leddet:

$$y = r\sin(\theta)$$

Som da med formelen for kinetisk ligning gir oss:

$$y' = r^2 \cos^2(\theta)$$

Da får vi til slutt for T:

$$T = \frac{1}{2}mr'^2 + \frac{1}{2}mr^2 \cos^2(\theta)$$

Nå ser vi på U:

$$U = mgz$$

Siden vi har et to-koordinat system (polart), så gir det oss r minus en maksgrense, som da er en betingelse på f. Da får vi til slutt:

$$L = \frac{1}{2}mr'^2 + \frac{1}{2}mr^2 \cos^2(\theta) - mg(r - f)$$

Dette skal da brukes til å finne Lagranges ligning til hele systemet.

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr \cos^2(\theta) - mg$$

$$\frac{\partial L}{\partial r'} = mr'$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial r'} = mr''$$

Som da gir oss

$$mr'' - mr \cos^2(\theta) + mg$$

b)

Vi skal her redusere bevegelseslikningene til et 1-dimensjonalt problem basert på variabelen r. Da har vi at bevegelsen er slik at etter hvert som bodien som går i sirkel går med eller mot klokken, så trekkes body 2 (vertikal-bevegelse) opp eller ned.