Problemsett 3

I

FYS3120

Klassisk Mekanikk og Elektrodynamikk

Av Furkan Kaya

Problem 1:

a)

Her skal vi først uttrykke de kartesiske koordinater x og y som en funksjon av s. La oss da først referere til figur 1. Og samtidig har vi (1.17) i pensumheftet til Leinaas å forholde oss til. Da får vi følgende:

$$x = s\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,s$$

$$y = -s\sin(30°) + h = -\frac{1}{2}s + h$$

(her legger vi til h fordi objektet står på en flate med denne dimensjonen allerede gitt)

Så skal vi finne Lagrange uttrykt ut ifra s og s'. Da finner vi først s', noe som er gjort nedenfor:

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}\,s'$$

$$y' = -\frac{1}{2}s'$$

Det gir oss da med den etter hvert velkjente Lagrange L = T – U (kinetisk energi – potensiell energi). Først finner vi T (som da er kinetisk) og så U (som er potensiell).

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \;\; og\; U = mgy$$

Her er v gitt av et plan som består av x og y. Så vi bruker da den deriverte til x og y for å finne svaret. Og det er en rettvinklet-plan slik at vi kan bruke Pytagoras på den v-delen. Dette gir oss da v = sqrt(x'^2 + y'^2) som da gir oss:

$$T = \frac{1}{2}\,m\,(x'^2 + y'^2) = \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{4}\,s'^2 + \frac{1}{4}s'^2\right) = \frac{1}{2}ms'^2$$

Så finner vi U ved å gjøre følgende:

$$U = mg(-\frac{1}{2}s + h)$$

Som da gir oss til slutt innsatt i Lagrange:

$$L = \frac{1}{2}ms'^2 + \frac{1}{2}mgs - mgh$$

b)

Så antar vi at akselerasjonen a er konstant og ikke-forsvinnende. Igjen skal vi finne de kartesiske koordinater og deres tidsderivater + Lagrange til systemet. Vi har da at a går mot x og ikke i y-retningen. Dette gir oss da at y forblir det samme i oppgaven ovenfor, mens da i x-retningen så må a integreres. Som blir gjort på følgende måte:

$$x = \int at + (\frac{\sqrt{3}}{2}\ s)$$

Delen i parentes skal ikke integreres. Vi får da til slutt følgende ligning:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}s$$

Og den deriverte av dette blir da igjen:

$$x' = at + \frac{\sqrt{3}}{2}s'$$

Så finner vi L = T – U som i forrige oppgave og tenker oss at U forblir uforandret. Det gir da kun T som i oppgaven nedenfor:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\left(at + \frac{\sqrt{3}}{2}\ s'\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}s'\right)^2}\right)^2 + \frac{mgs}{2} - mgh$$

$$L = \frac{1}{2}m\left(a^2t^2 + \frac{3}{4}s'^2 + 2at\frac{\sqrt{3}}{2}\ s' + \frac{1}{4}s'^2\right) + \frac{mgs}{2} - mgh$$

c)

Vi finner så Lagranges likning for systemet og løser likningen under antagelsen at body begynner ved tid t = 0 fra toppen av det inklinerte plan (s = 0) med null velositet relativt til planet. Som gjort flere ganger tidligere, så finner vi:

$$\frac{\partial L}{\partial s}, \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial s'}\ og\ \frac{\partial L}{\partial s'}.$$

Dette gir da for verdiene vi fant i b).

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{1}{2}\ mg$$

$$\frac{\partial L}{\partial s'} = ms' + \frac{\sqrt{3}}{2} mat$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial s'} = \frac{\sqrt{3}}{2} ma + ms''$$

Dette skal vi da bruke til å finne Lagrange's likning. Som finnes gjennom:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial s'} - \frac{\partial L}{\partial s} = 0$$

Og da får vi gjennom innsetting:

$$ms'' + \frac{\sqrt{3}}{2}\ ma - \frac{1}{2} mg = 0$$

Problem 2:

a)

I oppgave a skal vi finne Lagrange uttrykt ut i fra θ og θ' og derivere Lagranges ligning for dette. Vi har da følgende forhold mellom kartesiske og sfæriske koordinater.

$$x = r \sin\theta \cos wt\,, y = r \sin\theta \sin wt, z = \mathrm{r} \cos\theta$$

Da får vi:

$$x' = \theta' r \cos\theta \cos wt - wr \sin\theta \sin wt\,, y' = \theta' r \cos\theta \sin wt + wr\ \sin\theta \cos wt\,,\ z' = \theta' r \sin\theta$$

Med $T = \frac{1}{2} m\ (x'^2 + y'^2 + z'^2)$.

Opphøyingen blir da noe tilsvarende:

$$(\theta' r \cos\theta \cos wt - wr \sin\theta \sin wt)^2 + (\theta' r \cos\theta \sin wt + wr \sin\theta \cos wt)^2 + (\theta' r \sin\theta)^2$$

Som da etter en del omregning blir til:

$$= \frac{1}{2} mr^2 \; (\theta'^2 + w^2 \sin^2 \theta)$$

Da blir da i Lagrange det slik at U = 0. Noe som ble gjennomgått i lignende sfæriske eksempler på nettet og bekreftet. Da får vi altså en Lagrange gitt av:

$$L = \frac{1}{2} mr^2 \; (\theta'^2 + w^2 \sin^2 \theta)$$

b)

Vi må da her vise at Lagrange er den samme som den til en partikkel som beveger seg i en tids-uavhengig, periodisk potensiale V (θ) med to stabile og to ustabile likevekts-punkter. Her må det også påpekes at mitt opprinnelige svar ikke godkjent, så jeg forsøker derfor på nytt i denne reviderte utgaven.

Først har vi at funksjonen -sin^2 θ har fire likevektspunkter. $\theta = 0 \; og \; \theta = \pi$ gir maks,, mens $\theta = \frac{\pi}{2} \; og \; \theta = \frac{3\pi}{2}$ gir minimum. Fra dette kan vi tolke det som at disse fire punktene utgjør de stabile og ustabile likevektspunkter.

Opprinnelig kom begge ledd i Lagrange fra den kinetiske energien ettersom U = 0 ble antatt. Men vi kan se på det på en annen måte. Vi ser på θ' som kinetisk og θ som potensiell energi. Dette gjør at vi kan skrive det leddet som V(θ) = potensial. Da får vi det vi ønsket i oppgaveteksten.

c)

Her får vi da oppgitt at $\Phi = \theta - \theta_0$ skal introduseres og bestem liten-vinkel form til ligningen. Dette betegnes da som et lite avvik. Her har vi da allerede fra a)

$$L = \frac{1}{2} \; mr^2 (\theta'^2 + w^2 \sin^2 \theta)$$

Da ser vi $\theta = \Phi + \theta_0$ og setter dette inn i Lagrange ovenfor. Her antydes det i oppgaveteksten at vi også må finne Lagranges ligning også for systemet. Det gjøres da gjennom de sedvanlige ligninger nedenfor:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2 w^2 \sin\theta \cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta'} = mr^2 \theta'$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \theta'} = mr^2 \theta''$$

Her har jeg også introdusert θ' som en følge av at jeg omtalte den deriverte som i oppgave a). Det gir da at jeg ikke kan finne Lagrange system med det. Vi får da ligningen:

$$\theta'' mr^2 - mr^2\, \mathrm{w}^2 \sin\theta \cos\theta = 0$$

Som da gir med innsatt for θ.

$$(\Phi + \theta_0)'' mr^2 - mr^2 \sin(\Phi + \theta_0) \cos\ (\Phi + \theta_0) = 0$$

Her skal vi da bruke et stabilt likevektspunkt. Da bruker vi $\theta_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$. Det gir oss etter litt mellomregning og bruk av Rottman at vi får:

$$\theta'' + w^2 \cos(\theta) \sin(\theta) = 0$$

Som da blir til for små θ er den harmoniske oscillator:

$$\theta'' + w^2 \theta = 0$$

Derfor har vi at små oscillasjoner rundt likevektspunktene pi/2 og 3pi/2 skjer med frekvens w.

<u>Problem 3:</u>

a)

Først finner vi da Lagrange til systemet, før vi finner Lagranges ligning til systemet. Her har vi da et to-body system og et to-koordinat system omtalt som polar koordinater (r, θ). Da har vi da:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = 0$$

Z for kroppen som ligger nederst er gitt av z = r – l fordi vi tar hensyn til lengden l på den. Med bevegelsen gitt som:

$$T = \frac{1}{2}m\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

Får vi fra ligningene på forrige side og innsatt i T følgende:

$$x' = r'\cos\theta - \theta' r \sin\theta$$

$$y = \theta' r \cos\theta + r' \cos\theta$$

$$z = r'$$

Som da innsatt i T og med litt omregning blir:

$$T = \frac{1}{2}m\,(2r'^2 + r^2{\theta'}^2)$$

Her har vi da allerede sett at U = mgz = mg(r-l), noe som fører til L = T – U.

$$L = \frac{1}{2}m\,(2r'^2 + r^2\theta'^2) - mg(r - l)$$

Så ønsker man at man skal finne Lagranges ligning. Dette blir da gjort som tidligere i teksten og gir oss:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = rm\theta'^2 - mg$$

$$\frac{\partial L}{\partial r'} = r'^2 m$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial r'} = 2r''m$$

Som da til slutt gir:

$$2r''m - rm{\theta'}^2 + mg$$

b)

Vi skal her redusere bevegelseslikningene til et 1-dimensjonalt problem basert på variabelen r. Da har vi at bevegelsen er slik at etter hvert som bodien som går i sirkel går med eller mot klokken, så trekkes body 2 (vertikal-bevegelse) opp eller ned. Dette såfremt at vi har rotasjon.

Hvis vi ikke har rotasjon, så trekkes tauet opp og ned. Det siste punktet er lagt til å for å besvare ditt spørsmål.