Problem sett 2 i FYS 3120: Klassisk mekanikk og Elektrodynamikk av Furkan Kaya

---

Problem 1 a) Vi skal i denne første oppgaven forklare forskjellen mellom de to former for tidsderivativer: $\frac{dL}{dt}$ og $\frac{\partial L}{\partial t}$. Her omtaler vi sistnevnte med partialderivativer for den eksplisitte tidsderivat, mens vi kaller den første for total tidsderivat.

Den eksplisitte tidsderivat er definert når det fungerer på enhver funksjon med variablene q (koordinat) og t (tid). Den totale tidsderivat derimot er kun relevant når vi ser på en spesiell tidsevolusjon, eller bane, uttrykt ~~ved~~ tidsavhengige koordinater, $q = q(t)$. Det fungerer på variabler som er definert på en slik bane i konfigurasjonsrom. For sikkerhets skyld legger vi også til at det totale tidsderivat er gitt av:

$$\frac{d}{dt} = \sum_{j=1} \dot{q}_j \frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial t}$$

b) I oppgaveteksten har vi fått en løsning på Lagranges ligninger å forholde oss til og vi skal vise at for den gitte løsning, så skal en ligning være tilfredsstilt. Jeg skriver da denne ligningen nedenfor slik at vi har et referansepunkt for resten av oppgaven:

$$\frac{d}{dt}\left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) = \frac{\partial}{\partial t} L$$

Og vi har at $\frac{d}{dt} = \sum_{j=1} \dot{q}_j \frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial t}$

Som da gir oss

$$\frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial t} - \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

$$= \frac{\partial L}{\partial t}$$

Fra ligning (2.84) har vi at $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} q_i\right) = 0$

Dette gir oss da:

$$\frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}$$

Som altså er kjerneregelen med mer enn en parameter

Problem 3 a) Her skal vi finne Lagranges ligning for radial koordinat r. Da har vi at $\theta = \omega t$. Og Lagranges ligning er gitt som

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (1) \text{ og}$$

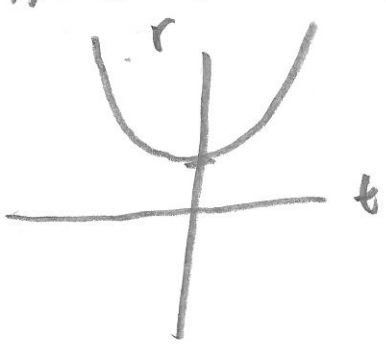
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (2)$$

Fra (1) har vi da $m\ddot r - mr\dot\theta^2 = 0$.

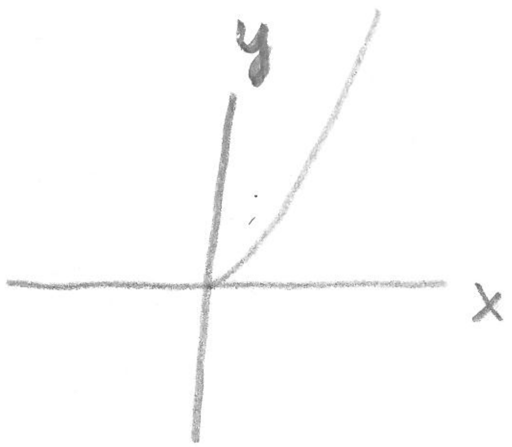
Dette gir oss med bane $r'' - r \Rightarrow r = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ som er $\cosh x$. Da får vi med initialbetingelsen $r = r_0 \cosh(\omega t)$ med $\theta = \omega t$. (brukte Wolfram alpha)

---

b) I b-oppgaven skal vi lage en plot av orbit i det horisontale x, y plan. Ut i fra betingelsene vi er gitt, så er r rett og slett $r = \cosh(t)$, men hvor t representerer vinkelen. Da går den slik med t, r plan:



overført til x, y planet blir dette da en



(5) eksponentiell vekst

Problem 4 a) I denne første oppgaven minner systemet om en standard pendel.

Som vanlig $L = T - V$.

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = mgl(1-\cos\theta)$$

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m l^2 \ddot{\theta}$$

---

b) Så foretar man en forandring hvor pendelen kan bevege seg fritt i x-retning (gitt av s).

$$T = s(t) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

V som før.

$$L = \underline{\underline{s(t) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)}}$$

c) Vi skal vise at s kan bli eliminert. Her ser jeg på det (6) kvantitativt og kvalitativt.

Ved å foreta samme utregninger som i a) ser vi at s totalt kan elimineres.

Hvis den går bortover i horisontal retning, så betyr det at den ikke kan bevege seg som en pendel som går frem og tilbake. Den faller da bare frem til grensen l.

b) Oppgaven sier at vi skal formulere Lagranges ligning for systemet, og finne den angulære frekvens for små oscillasjoner til det øvre rør rundt dets likevektsproblem

Så finner vi da Lagranges likninger: $\frac{\partial L}{\partial \theta}$, $\frac{\partial L}{\partial \theta'}$ og $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \theta'}$. Da blir

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \underline{\underline{-mgl\sin\theta}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta'} = \underline{\underline{\frac{2}{3}ml^2\theta' + \frac{1}{6}ml^2\theta'}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta'}\right) = \underline{\underline{0}}$$

Til slutt finner vi den angulære frekvens til det øvre rør. Likevekt antar da at det skal være lik 0. Det øvre rør er gitt av $\frac{1}{3}ml^2\theta' = 0$

$$\theta = \underline{\underline{\frac{3\,\text{Constant}}{ml^2} \cdot \theta}}$$

Problem 2 a) Først velger vi passende generaliserte koordinater til systemet og de korresponderende Lagrangeche. Da følger vi samme prosedyre som i forrige problemsett. Vi har to rør (som er rigide bodies). Disse har tro translasjonelle og et rotasjonell koordinat. Med formelen $d = N - M$, får vi da $N = 6$. Når det gjelder begrensningene har vi at det ene røret er festet til det andre og dets bevegelse er avhengig av det. Jeg vil si at vi får en bevegelse som minner om en pendel med

$d = 1$ frihetsgrad.

Da blir da den generaliserte koordinat tilsvarende

θ.

Lagrange er da definert som $L = T - U$. Her er da $T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$ og $U = mgl(1 - \cos\theta)$

Det gir oss da

$$L = \frac{1}{3} \frac{ml^2}{3} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{12} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos\theta$$

Antar at inertia-moment kan legges til algebraisk