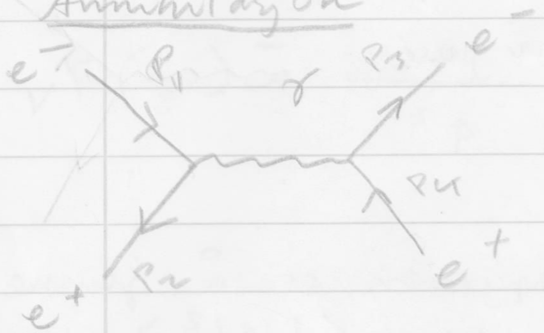
Prosjekt 1 i FYS4555 Partikkelfysikk
av Furkan Kaya

Oppgave 1 Først tegner vi de to laveste orden Feynman-diagrammer for scattering-prosessen:

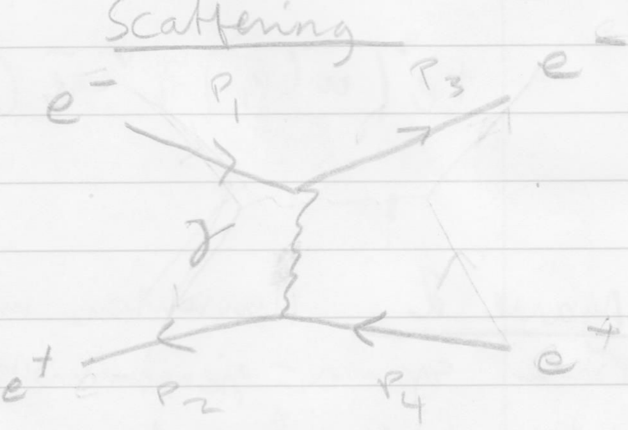
$$e^+e^- \to e^+e^-$$

Også kjent som Bhabha-scattering. Som nevnt i forrige innlevering, så får vi bidrag fra både scattering og annihilasjon. Derfor tegner vi begge disse:

Annihilasjon



Scattering



Så får vi uttrykk for de korresponderende matrise-elementer ved bruk av QED Feynman-regler. Vi legger i hvert fall først til at $M = M_A + M_S$ hvor matrise-elementene har bidrag fra både annihilasjon, M_A, og scattering, M_S. Basert på side 124 i Thomson

$$M_A = iu(p_1) e \gamma^\mu \bar{v}(p_2) \cdot \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \cdot \bar{u}(p_3)$$

$$\cdot\, ie \gamma_\nu v(p_4) = ie^2(u(p_1)$$

$$= e^2 \left(u(p_1) \gamma^\mu \bar{v}(p_2) \cdot \frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \cdot \bar{u}(p_3) \gamma_\nu v(p_4) \right)$$

$$q^2 = (p_1+p_2)^2 = (p_3+p_4)^2 \quad (1)$$

$$M_s = u(p_1)\, ie\, \gamma^\mu\, \bar{u}(p_3)\ \frac{-ig_{\mu\nu}}{q'^2} \cdot \bar{v}(p_2)\, ie\, \gamma_\mu\, \bar{v}(p_4) = -e^2 \left(u(p_1)\, \gamma^\mu\, \bar{u}(p_3) \right) \frac{ig_{\mu\nu}}{q'^2}\, \bar{v}(p_2)\, \gamma_\mu\, v(p_4)$$

hvor da $q' = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2$

For M får vi da

$$M = -e^2 \left(u(p_1)\, \gamma^\mu\, \bar{u}(p_3) \right) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q'^2} \cdot \bar{v}(p_2)\, \gamma_\mu\, v(p_4)$$
$$+ e^2 \left(u(p_1)\, \gamma^\nu\, \bar{v}(p_2) \right) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\, \bar{u}(p_3)\, \gamma_\nu\, V(p_4)$$

<u>Oppgave 2</u> Hensikten med oppgaven er å finne den totale spinn-gjennomsnittlige matrise $\langle |M|^2 \rangle$ ved å bruke trace-formalisme og Dirac spinor kompletthetrelasjoner. Fremgangsmåten er beskrevet i pensumboken skrevet av Thomson, kapittel 6 er kapittelet brukt. Og da spesielt 6.5.

I henhold til reglene for Mandelstam-variablene får vi at $q^2 = (p_1 + p_2)^2 = s$ og $q'^2 = (p_1 - p_3)^2 = t$

Samtidig har vi regelen:

$$\langle |M_{fi}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |M_{fi}|^2$$

som er at det spinn-gjennomsnittliges sum korresponderer til alle mulige helicity konfigurasjoner.

Side 132 Helicity amplituder

side 146

Vi har at matrise-elementet $|M_{fi}|^2$ er produktet av M_{fi} og M_{fi}^+ hvor da M_{fi}^+ er:

$$M_{fi}^+ = -e^2 \left(u(p_1)\gamma^\nu \bar{w}(p_3)\right) \frac{i g_{\mu\nu}}{t} \left(\bar{v}(p_2)\gamma_\nu v(p_4)\right)^+ + e^2 \left(u(p_1)\gamma^\mu \bar{v}(p_2)\right) \frac{i g_{\mu\nu}}{s} \left(\bar{w}(p_3)\gamma_\mu v(p_4)\right)^+$$

Dette multipliserer vi og får (forhåpentligvis følger du med :))

$$|M_{fi}|^2 = \frac{e^2}{t} \left(u(p_1)\gamma^\nu \bar{w}(p_3)\right) g_{\mu\nu} \left(\bar{v}(p_2)\gamma_\nu v(p_4)\right)^+ \cdot \left(\frac{e^2}{t} \left(u(p_1)\gamma^\mu \bar{w}(p_3)\right) g_{\mu\nu} \left(\bar{v}(p_2)\gamma_\mu v(p_4)\right)\right) + \frac{e^2}{s} \left(u(p_1)\gamma^\mu \bar{v}(p_2)\right) g_{\mu\nu} \left(\bar{w}(p_3)\gamma_\mu v(p_4)\right)^+ \cdot \left(\frac{e^2}{s} \left(u(p_1)\gamma^\nu \bar{v}(p_2)\right) g_{\mu\nu} \left(\bar{w}(p_3)\gamma_\nu v(p_4)\right)\right) - \frac{e^2}{t} \left(u(p_1)\gamma^\mu \bar{w}(p_3)\right) g_{\mu\nu} \left(\bar{v}(p_2)\gamma_\mu v(p_4)\right) \cdot \frac{e^2}{s} \left(u(p_1)\gamma^\mu \bar{v}(p_2)\right) g_{\mu\nu} \left(\bar{w}(p_3)\gamma_\mu v(p_4)\right)^+ - \frac{e^2}{s} \left(u(p_1)\gamma^\nu \bar{v}(p_2)\right) g_{\mu\nu} \left(\bar{w}(p_3)\gamma_\nu v(p_4)\right) \cdot \frac{e^2}{t} \left(u(p_1)\gamma^\nu \bar{w}(p_3)\right) g_{\mu\nu} \left(\bar{v}(p_2)\gamma_\nu v(p_4)\right)^+$$

Utregningen på forrige side var litt i det messe
laget, men vi bruker det til å vise de forskjellige
bidrag til $\langle |M|^2 \rangle$. Vi følger likning 6.42 i pensum-
$|M|^2$ boken og antar at vi fortsetter utregningen over u.
Det samme gjøres for M_{fi}^+ også. Vi får da

$$= \frac{e^2}{t}\left(u^s(p_1)\gamma^\nu \bar{u}^{s'}(p_3)\right)\left(\bar{v}^r(p_2)\gamma_\nu v^{r'}(p_4)\right)^\dagger$$

$$\cdot \frac{e^2}{t}\left(u^s(p_1)\gamma^\mu \bar{u}^{s'}(p_3)\right)\left(\bar{v}^r(p_2)\gamma_\mu v^{r'}(p_4)\right)$$

$$+ \frac{e^2}{s}\left(u^s(p_1)\gamma^\mu \bar{v}^r(p_2)\right)\left(\bar{u}^{s'}(p_3)\gamma_\mu v^{r'}(p_4)\right)^\dagger$$

$$\cdot \frac{e^2}{s}\left(u^s(p_1)\gamma^\nu \bar{v}^r(p_2)\right)\left(\bar{u}^{s'}(p_3)\gamma_\nu v^{r'}(p_4)\right)$$

$$- \frac{e^2}{t}\left(u^s(p_1)\gamma^\mu \bar{u}^{s'}(p_3)\right)\left(\bar{v}^r(p_2)\gamma_\mu v^{r'}(p_4)\right)$$

$$\cdot \frac{e^2}{s}\left(u^s(p_1)\gamma^\mu_\mu \bar{v}^r(p_2)\right)\left(\bar{u}^{s'}(p_3)\gamma_\mu v^{r'}(p_4)\right)^\dagger$$

$$- \frac{e^2}{s}\left(u^s(p_1)\gamma^\nu \bar{v}^r(p_2)\right)\left(\bar{u}^{s'}(p_3)\gamma_\nu v^{r'}(p_4)\right)$$

$$\cdot \frac{e^2}{t}\left(u^s(p_1)\gamma^\nu \bar{u}^{s'}(p_3)\right)\left(\bar{v}^r(p_2)\gamma_\nu v^{r'}(p_4)\right)^\dagger$$

Hopp over denne 4 siden om ønskelig. Ble gjort for [illegible]

Så bruker vi den samme ligningen til å finne den spinn-gjennomsnittlige matrise-element med labelne s, s', r og r' til å benevne 16 mulige spinn-tilstander (eller ekvivalent helicity-tilstander).

$$\langle |M_{fi}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\text{spinns}} |M_{fi}|^2$$ som gir

et utrykk vi har på side 4, men multiplisert med $\frac{1}{4}$.

Vi finner så disse leddene på side 4 separat, t er annihilasjonsleddet. Altså det som er multiplisert med $\frac{e^4}{t^2}$. Etter litt mellomregning som er for drøy for her får man:

$$= \frac{Q_q^2 e^4}{t^2} \mathrm{Tr}(\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu)\, \mathrm{Tr}([\not{p}_3 + m_q](\gamma_\mu) [\not{p}_4 - m_q] \gamma_\nu)$$

Vi setter da $\not{p}_1 = \gamma^0 p_{1\sigma}$ og $\not{p}_2 = \gamma^\rho p_{2\rho}$ og får at:

$$\mathrm{Tr}(\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu) = 4 p_2^\mu p_1^\nu - 4 g_{\mu\nu}(p_1 \cdot p_2) + 4 p_2^\nu p_1^\mu$$ og $$4 p_{3\mu} p_{4\nu} - 4 g_{\mu\nu}(p_3 \cdot p_4) + 4 p_{3\nu} \cdot p_{4\mu}$$

Med kontraksjonsindisene får vi da:

$$= 4 \frac{Q_q^2 e^4}{t^2} \left(2(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + 2(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) \right)$$

Vi ser så på scatteringleddet og får da:

$$\frac{e^4 2 \cdot (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4)}{s^2}$$

Mens interferensleddet blir

$$- \frac{(p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)}{st}$$

Dette gir oss totalt

$$\langle |M_{fi}|^2 \rangle = 4e^4 \left(2 \left(\frac{(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4)}{s^2} \right. \right.$$

$$+ \frac{(p_3 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_2) + (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)}{t^2} -$$

$$\left. \left. \frac{(p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)}{st} \right) \right)$$

Fra side 132 har vi Helicity-amplituder for C.o.M: Videre på side 137 forklares det hvordan man uttrykker dette i eksplisitt Lorentz invariant form:

$$p_3 \cdot p_4 = p_1 \cdot p_2 = 2E^2 \;, \; p_1 \cdot p_3 = E^2(1 + \cos\theta) = p_2 \cdot p_4$$

$$p_1 \cdot p_4 = E^2(1 - \cos\theta) = p_2 \cdot p_3 \;, \; s = 4E^2$$

6

$$\text{og } t = 2E^2(1 - \cos\theta)$$

- Disse gir da tilslutt: med $e^2 = 4\pi\alpha$

$$\langle |M_{fi}|^2 \rangle = (4\pi\alpha)^2 \Bigg(\frac{\left(E^2(1+\cos\theta)\right)^2 + \left(E^2(1-\cos\theta)\right)^2}{16E^4}$$

$$+ \frac{(4E^4) + \left(E^2(1+\cos\theta)\right)^2}{\left(2E^2(1-\cos\theta)\right)^2} - \frac{\left(E^2(1+\cos\theta)\right)^2}{8E^4(1-\cos\theta)} \Bigg)$$

$$= (4\pi\alpha)^2 \Bigg(\frac{(1+\cos\theta)^2 + (1-\cos\theta)^2}{16}$$

$$+ \frac{2 + (1+\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)^2} - \frac{(1+\cos\theta)}{8(1-\cos\theta)} \Bigg)$$

I Mandelstam-variabler blir dette svaret:

$$\frac{|M|^2}{2e^4} = \frac{u^2+s^2}{t^2} + \frac{2u^2}{st} + \frac{u^2+t^2}{s^2}$$

Så vi ser på nevnerne at vi er i nærheten av riktig svar i hvertfall.

c) Så skal vi kalkulere differensial tverrsnitt og plotte det som funksjon av θ. Ligningen for diff. tverrsnitt er: (3.37)

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s\, p_i^{*2}} \left| M_{fi} \right|^2$$

hvor da $p_i^{*2} = \frac{1}{4s}\left[s-(m_1+m_2)^2\right]\left[s-(m_1-m_2)^2\right]$

Siden vi da bare trenger å sette inn $|M_{fi}|^2$, så kan vi bruke Mandelstam-variablene. Men for å plotte trenger vi $\cos\theta$ ettersom det er etterspurt i oppgaven. Grunnet mangel på datamaskin legger jeg ved plot fra Wolfram Alpha. Selve diff. tverrsnitt blir da:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s} \cdot (4\pi\alpha)^2 \cdot \left| M_{fi} \right|^2$$

Trenger ikke å skrive $|M_{fi}|^2$ to ganger føler jeg

Forskjellen mellom $e^+e^- \to e^+e^-$ og $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ er at man får scattering som en følge av fotonutveksling. For muon-prosessen har man ikke et slikt bidrag.

d) Vi skal her finne den totale tverrsnittet og plotte denne. Det vi gjør er å integrere diff. tverrsnittet over $\cos\theta$ for intervallet $[-0,98; 0,98]$. Dette blir da gjort på Wolfram Alpha ettersom jeg ikke har en funksjonell datamaskin til stede for øyeblikket, har heller ikke studentkort grunnet at jeg er enkelt-emne student.

Vi setter iallefall $\sqrt{s} = 64$ GeV og foretar selve plott på Wolfram Alpha.

Den eksakte verdien blir da:

$$\sigma = \frac{1}{32(\cos\theta - 1)^2}\pi\Big(32\sin\theta\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 16\sin\theta$$

$$+ \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\Big(42\theta + \sin(2\theta) + 4\log\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) - 4\log\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\Big)\Big)$$

En undersøkelse på Google gir at med $\sqrt{s} = 14$ GeV får man total kryss-seksjon.

$$\sigma \approx 90 \text{ μb},$$

Vi har da ligningen $N = L\sigma *$ effektivitet setter effektivitet på 30 %, og får da

$$N = 10^{12} \cdot 90 \cdot 10^{-6} \cdot 0,30 = \underline{2,7 \cdot 10^{7}} \text{ hendelser}$$

Har likt oppfordret med mine 9 prøver.

WolframAlpha computational intelligence.

(1+cos^4 (theta/2))/(sin^4 (theta/2)) + ((1+cos^2 (theta))/2) - ((2 cos^4 (theta/2))/(sin^2 (theta

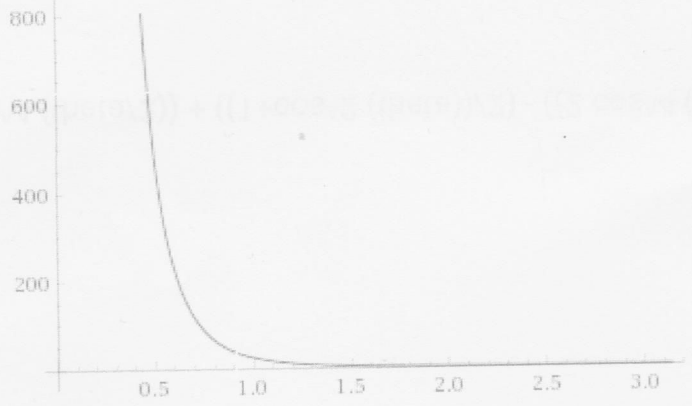
Extended Keyboard Upload Examples Random

Input interpretation:

plot	$\frac{1+\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{1}{2}\left(1+\cos^2(\theta)\right) - \frac{2\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$	$\theta = 0$ to π

Open code

Plot:



Enlarge Data Customize Open code

Download Page POWERED BY THE WOLFRAM LANGUAGE

Related Queries:

= plot in|(1 + cos^4(thet = integrate (1 + cos^4(th

WolframAlpha computational intelligence.

integral of (1+cos^4 (theta/2))/(sin^4 (theta/2)) + ((1+cos^2 (theta))/2) - ((2 cos^4 (theta/2))/(s

Extended Keyboard Upload Examples Random

Indefinite integral: Step-by-step solution

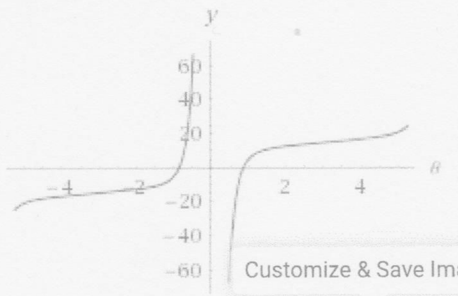
$$\int\left(\frac{1+\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}+\frac{1}{2}\left(1+\cos^2(\theta)\right)-\frac{2\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)d\theta =$$
$$\frac{1}{8}(38\theta+\sin(2\theta))+\frac{16}{3}\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin(\theta)\left(1-\frac{2}{3}\csc^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)+\text{constant}$$

$\cot(x)$ is the cotangent function

$\csc(x)$ is the cosecant function

Open code

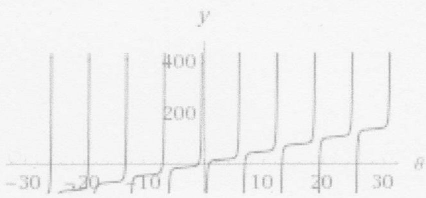
Plots of the integral:



(θ from −5.3 to 5.3)

Customize & Save Images

Enlarge Data Customize Open code



(θ from −31.5 to 31.5)