Prosjekt 2 i FYS4555: Partikkelfysikk
av Furkan Kaya

8.7 (fra Pensumboken) a) I den første oppgaven spør de etter $F_2^{ep}(x)$. Vi skal da vise at

$$F_2^{ep}(x) = \frac{4}{9}\left[u(x) + \bar{u}(x)\right] + \frac{1}{9}\left[d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)\right] \quad (1)$$

hvor $s(x)$ og $\bar{s}(x)$ er strange quark-parton fordelingsfunksjoner til protonet. Først forholder vi oss til ligning (8,24) gitt som

$$F_2^{ep}(x) = x \sum_i Q_i^2 q_i^p(x) \quad (2)$$

Da vet vi fra pensum at det skal være opp-kvarks (kjennetegnet med u), nedkvarks kjennetegnet med d og vi tar også med strange quark-komponenten kjennetegnet med s.

I (2) er q_i lik quark, mens Q er kvantiteten av denne partikkelformen.

Vi har da at protonet i henhold til tradisjonell forståelse består av 2 opp-kvarker og 1 ned-kvark. (Har da gått over til norske versjonen av ordet kvark)

En mer moderne definisjon er at protonet består av de nevnte oppkvarker, nedkvark, gluon og en sjø av virtuelle kvark-anti-kvark par som stammer fra interaksjonen mellom de tre kvarker.

Da har vi at i protonet er $\frac{2}{3}$ av partikler u, altså $Q = \frac{2}{3}$ og $q^p = u$. Det gir da $\frac{1}{3}$ nedkvark, med $Q = -\frac{1}{3}$ og $q^p = d$. Så ser vi på strange kvark. Dets elektriske ladning er $-\frac{1}{3}$. Da får vi $Q = -\frac{1}{3}$ og $q^p = s$. I tillegg har vi i henhold til standardmodellen at enhver partikkel har en anti-partikkel, angitt med hatt over bokstaven.

Ut i fra den kvalitative beskrivelsen av framgangsmåter får vi da

$$F_2^{ep}(x) = x\Big(\frac{4}{9}u(x) + \frac{4}{9}\bar{u}(x) + \frac{1}{9}d(x)$$

$$+ \frac{1}{9}\bar{d}(x) + \frac{1}{9}s(x) + \frac{1}{9}\bar{s}(x)\Big)$$

som er det samme som (2).

Vi har da at siden s har samme elektriske ladning som nedkvark, så er de i samme antall.

b) Så skal vi finne et tilsvarende uttrykk for $F_2^{en}(x)$. Her er da forskjellen at vi skal finne uttrykket for nøytronet. Forrige oppgave var da for protonet altså. Vi vet da at nøytronet i motsetning består av en opp-kvark og to ned-kvarker.

Ved å følge samme framgangsmåte som i forrige oppgave får vi da (etter å ha funnet ut hvordan strange-kvarker påvirker systemet). Vi antar at det i parentesen er slik at antallet strange-kvarker er like stor for både nøytroner og protoner ettersom de har lik masse.

Det gir oss da:

$$F_2^{en}(x) = \frac{4}{9} d(x) + \frac{4}{9} \bar{d}(x) + \frac{1}{9} u(x) + \frac{1}{9} \bar{u}(x) + \frac{1}{9} s(x) + \frac{1}{9} \bar{s}(x)$$

For andre del av oppgave b) skal vi vise at

$$\int_0^1 \left| F_2^{ep}(x) - F_2^{en}(x) \right| dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \int_0^1 (\bar{u}(x) - \bar{d}(x)) \qquad (3)$$

Da forsøker vi å regne ut til kvarkene i ligning (3).

$$\int_0^1 \Big| \frac{4}{9}\left(u(x) + \bar{u}(x) - d(x) - \bar{d}(x)\right) + \frac{1}{9}\left(d(x) + \bar{d}(x) - u(x) - \bar{u}(x)\right) + \frac{1}{9}\left(s(x) + \bar{s}(x) - s(x) - \bar{s}(x)\right) \Big| \, dx$$

$$= \int_0^1 \left| \frac{3}{9}\left(u(x) + \bar{u}(x) - d(x) - \bar{d}(x)\right) \right| dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3} \left| u(x) + \bar{u}(x) - d(x) - \bar{d}(x) \right|$$

I henhold til Handout 6 (slide 21/30) har vi oppgitt, med valens- og sjø-bidrag, følgende:

$$u(x) = u_v(x) + u_s(x) \qquad d(x) = d_v(x) + d_s(x)$$
$$\bar{u}(x) = \bar{u}_s(x) \qquad \bar{d}(x) = \bar{d}_s(x)$$

Og $u_v(x) = 2d_v(x)$ som gir oss

$$= \frac{1}{3}\left(u_v(x) + u_s(x) + \bar{u}_s(x) - d_v(x) - d_s(x) - \bar{d}_s(x) \right)$$

Og vi har flere regler å forholde oss til fra handouten.

$$u_s(x) = \bar{u}(x)$$

$$\int_0^1 u_v(x) = 2 \quad \text{og} \quad \int_0^1 d_v(x) = 1$$

Siste regel gir

$$= (2-1)\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\int_0^1 \left| u_s(x) + \bar{u}_s(x) - d_s(x) - \bar{d}_s(x) \right|$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\int_0^1 \left| 2\bar{u}(x) - 2\bar{d}(x) \right| dx$$

$2\bar{d}(x)$ kommer av $d_s(x) = \bar{d}_s(x) = \bar{d}(x)$

Da blir svaret

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\int_0^1 \left| \bar{u}(x) - \bar{d}(x) \right| dx$$

Så fortolker vi den målte verdien av
$0{,}24 \pm 0{,}03$.

Den målte verdien kan bli fortolket som

$$\int_0^1 \left(\bar{u}(x) - \bar{d}(x)\right) dx = \frac{3}{2}\left(0{,}24 - 0{,}33 \pm 0{,}03\right)$$

$$= -0{,}14 \pm 0{,}05$$

Det er da mangel på $\bar{u}$-kvarker sammenlignet med $\bar{d}$-kvarker i protonet. På siste oppgave støtter jeg meg litt til løsningsforslaget.

Jeg gjorde da Problem 8.7 først ettersom den kom først i pensum. Ikke fordi den var nødvendigvis enklest, selv om det sannsynligvis tilfeller.

Problem I   I denne oppgaven skal vi undersøke invariansen til den velkjente Dirac-ligningen.

Dirac-ligningen som beskriver et kvantefelt og dets interaksjon med Gluon-feltet G_a^{μ} er gitt som:

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\psi - \frac{g_s}{2}\gamma^{\mu}\lambda^{a}G_{\mu}^{a}\psi = 0$$

(1)

Vi har da følgende transformasjon:

$$\psi \to \psi' = e^{i\frac{g_s}{2}\lambda^{a}a^{a}}\psi = \left(1 + i\frac{g_s}{2}\lambda^{a}a^{a}\right)\psi$$

(2)

Vi ser så på

$$\left(1 + i\frac{g_s}{2}\lambda^{a}a^{a}\right)i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi$$

Her har vi da brukt produktregelen, og vi får da først derivasjonen av uttrykket på høyre side, før vi tar derivasjonen av det i parentes. Vi får da:

$$\left(1 + i\frac{g_s}{2}\lambda^{a}a^{a}\right)i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \frac{g_s}{2}\gamma^{\mu}\lambda^{a}(\partial_{\mu}a^{a})$$

$$\cdot\psi$$

Vi ser da at   7   derivasjon av det på høyresiden fjernet 1-fallet og siden kunne vi multiplisere $i \cdot i = -1$ slik at produktregel-plussen i $u' \cdot v + u \cdot v'$ ble til minus.

I andre del av oppgaven skal vi vise en transformasjon som involverer Gluon-leddet. Her forholder vi oss da til ligning (3) i oppgaveteksten, som vi også skriver ned:

$$G_\mu^a \to G_\mu^{a'} = G_\mu^a - \partial_\mu a^a - g_s f_{abc} a^b G_\mu^c$$

hvorda:

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2i f_{abc} \lambda_c$$

$-\frac{g_s}{2} \gamma^\mu \lambda^b G_\mu^{b'} \psi'$ ~~blir~~ da $(1 + i \frac{g_s}{2} \lambda^a a^a)$ det i ligning (3) for venmultiplisert med ψ og $G_\mu^{a'}$.

$$-\frac{g_s}{2} \gamma^\mu \lambda^b G_\mu^{b'} \psi' = -\left(1 + i \frac{g_s}{2} \lambda^a a^a\right) \frac{g_s}{2} \gamma^\mu$$

$$\lambda^b \psi \left(G_\mu^b - \partial_\mu a^b - g_s f_{abc} a^b G_\mu^c\right) +$$

Ved å bare beholde laveste orden a^a, altså se bort fra $a^a \cdot a^a$ får vi

$$= -\left(1 + i\frac{g_s}{2}\lambda^a a^a\right)\frac{g_s}{2}\gamma^\mu \lambda^b G_\mu^b \psi$$

$$+ \frac{g_s}{2}\gamma^\mu \lambda^b (\partial_\mu a^b)\psi.$$

Vi deriverer da med $\partial_\mu a^{bs}$ og fjerner leddet foran ettersom vi igjen går multiplikasjonen $a^a a^b$.

Fra det jeg ser bør jeg ha fått riktig svar med riktig framgangsmåte. Bruker da produktregelen på det siste leddet for hvr. leddet i parantes og det utenom.

Vi skal i den siste delen vise at ligning (1).

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi - \frac{g_s}{2}\gamma^\mu \lambda^a G_\mu^a \psi = 0$$

Her har vi da allerede sett på ledd 1 og 3 i ligning (1). Vi vet hva de transformerer til. Det gir oss da (se neste side →)

$(1+i\frac{g_s}{2}\lambda^a{}_a a) i\gamma^\mu\partial_\mu \Psi - \frac{g_s}{2}\gamma^\mu$

$\lambda^a(\partial_\mu a^a)\Psi - (1+i\frac{g_s}{2}\gamma^\mu\lambda^b G_\mu^b\Psi)$

$+\frac{g_s}{2}\gamma^\mu\lambda^b(\partial_\mu a^b)\Psi - (1+i\frac{g_s}{2}\lambda^a$

$a^a) m\Psi.$

Dette gir oss da med Einstein summekonvensjon hvor vi setter $\lambda^b = \lambda^a$ og $a^a = a^b$ at vi får ligning (8) i oppgaveteksten.

Når det gjelder det aller siste punktet om å multiplisere med den inverse transformasjon er dette da bare det komplekse konjugat og gir oss da

$$(1+i\frac{g_s}{2}\lambda^a{}_a a)(1-i\frac{g_s}{2}\lambda^a{}_a a)$$

$$= 1 + i\frac{g_s}{2}\lambda^a a^a - i\frac{g_s}{2}\lambda^a{}_a a + \frac{g_s}{2}\lambda^a{}_a a \lambda^a{}_a a$$

ser da bort fra det siste leddet fordi det er så lite og får svaret!

$= 1.$

Problem 2 Vi skal da først vise at uten det siste leddet i ligning (3) i oppgavesettet, så blir kvantiteten i ligning (13) invariant.

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu \qquad (4)$$

er da ligning (13) og vi skal vise at

$$F^a_{\mu\nu} \to F^{a'}_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu} \qquad (5)$$

Vi husker da også fra oppgaveteksten at ligning (11) gir at

$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi}\left(1 - i\,\frac{g_s}{2}\lambda^a a^a\right) \qquad (6)$$

Og ligning (3) er gitt av

$$G^a_\mu \to G^{a'}_\mu = G^a_\mu - \partial_\mu a^a - \left(g_s f_{abc}\, a^b G^b_\mu\right)$$

skal ikke tas med

Så ser vi på oppgaven vi skal løse:

$$= \partial_\mu\left(G^a_\nu - \partial_\nu a^a\right) - \partial_\nu\left(G^a_\mu - \partial_\mu a^a\right)$$

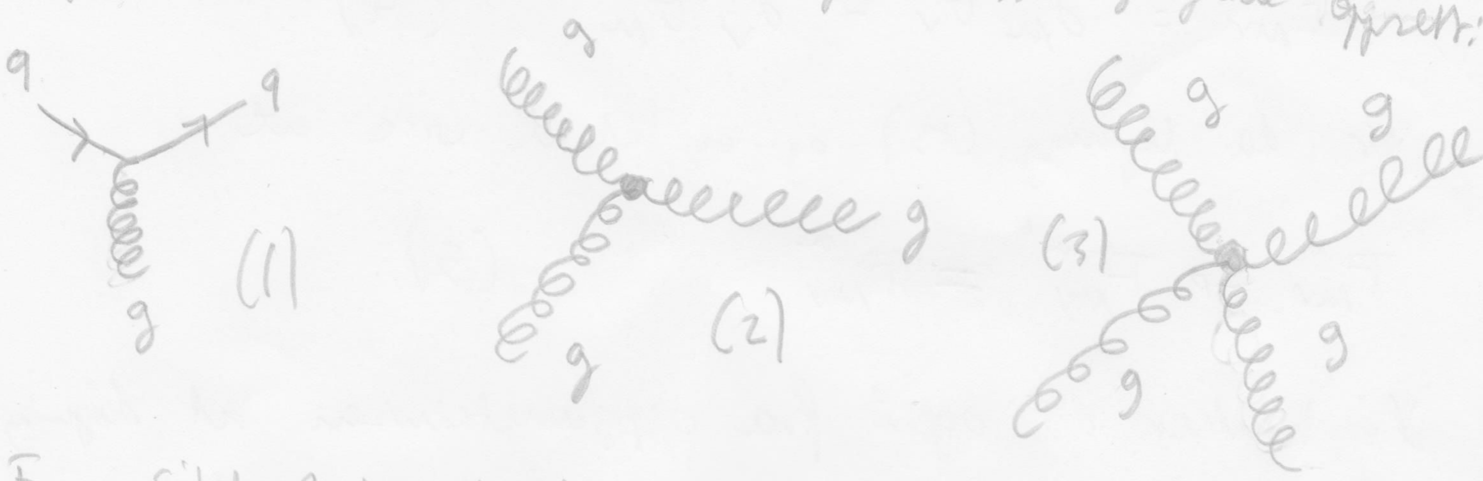
$$= \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\mu\partial_\nu a^a - \partial_\nu\left(G^a_\mu + \partial_\nu\partial_\mu a^a\right)$$

$$= \underline{\underline{\partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu}}$$

Altså er (5) oppfylt

For andre del av oppgaven er det forventet at vi skal foreta en kvantitativ forklaring av fenomenet gjennomgått.

Figur 10.1 i Thomson gir oss følgende oppsett:



For sikkerhets skyld skriver vi også ned ligning (16) fra oppgaveteksten:

$$\mathcal{L}_{gluons} \propto \left(F^a_{\mu\nu} - g_s f_{abc} G^b_\mu G^c_\nu\right)\left(F^{\mu\nu}_a - g_s f_{ade} G^\mu_d G^\nu_e\right)$$

Vi antar da at vi får oppsett som i (2) og (3) på figuren ovenfor. Grunnen til at vi får 3 eller 4 gluon vertices skyldes at i ligning (16) har vi to gluon-propagatorer i form av $G^b_\mu G^c_\nu$ i den ene parantesen og to i den andre $(G^\mu_d G^\nu_e)$. Vi ser også av uttrykket at de er forskjellige fra hverandre. Ut i fra det kan vi konkludere at vi har oppsett (2) og (3). Størrelsesorden er da 1 og 2. Altså g_s er opphøyd i 1 og 2.