Oblig II MAT1012 Furkan Kaya

Oppgave 1 a) Standardmatrisen til T:

Vi har da at

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4,\ 2x_2 - 2x_3 - x_4)$$

Standardmatrisen blir da:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Basis for Null (T):

Nul (T) finnes ved $T(x) = 0$ og Gauss-Jorda eliminasjon av radene. Dette gir oss oppsettet

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

gir

$$x_1 = -x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

$$x_2 = x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

$$x_1 = -x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

$$x_1 = \frac{1}{2}x_3 - x_4$$

$$x_2 = x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

som gir løsningsmengden

$$x_3 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) Vi skal vise at det er en ortonormal basis:

Vi sier at det er en ortonormal basis hvis de er ortogonale (altså at prikkproduktet av dem er lik) og de har lengde 1.

$$1\cdot -2 + 2\cdot 1 + 2\cdot 0 + 0\cdot 2 = \underline{0}$$

De er altså ortogonale.

Så ser vi på lengden.

$$\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+0^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}$$

$= \underline{1}$ for x_3-vektoren

$$\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}} = \underline{1}$$ for x_4-vektoren

Altså har de begge lengden 1 og er da en ortonormal basis for Null(T)

d) <u>Vi skal finne A^{-1}:</u>

Vi har da at

$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9/2 & -9 & -2 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2/9 & 0 & -1/9 & 2/9 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9/2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2/9 & 0 & -1/9 & 2/9 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & -4/5 & -2/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2/9 & 2/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2/9 & 0 & -1/9 & 2/9 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -5/9 & 0 & 2/9 & -4/9 \\ 0 & 1 & -2/5 & 0 & -2/9 & 1/5 & -4/45 & 8/45 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2/9 & 2/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2/9 & 0 & -1/9 & 2/9 \end{bmatrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/9 & 2/9 & 2/9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2/9 & 1/9 & 0 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2/9 & 2/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2/9 & 0 & -1/9 & 2/9 \end{array}\right] \sim$$

Vi husker fra tidlig i oppgaven at vi tok ut et 3 multiplisert ledd for å gjøre utregningen enklere. Det gir oss da:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Oppgave 2 a) De kritiske punktene til

f:

$$f(x,y) = xy^2 + x^2y - xy$$

I henhold til definisjon 5.6.1 i pensum-boken kalles et kritisk punkt dersom dets partiell derivert i punktet enten ikke eksisterer eller er 0.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 2xy - y = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + x^2 - x = 0 \quad (2)$$

(2) blir da:

$$2xy = x - x^2$$

$$y = \frac{x - x^2}{2x} \Rightarrow y = \frac{1-x}{2}$$

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 + 2x\left(\frac{1-x}{2}\right) - \left(\frac{1-x}{2}\right) = 0$$

$$\frac{1}{4} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + x - x^2 - \frac{1}{2} + \frac{x}{2} = 0$$

$$-\frac{3x^2}{4}-\frac{1}{4}+x=0 \qquad (3)$$

Her bruker vi andregradslikningen på (3)

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow \frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}}{2\cdot\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{1\pm\sqrt{1-\frac{3}{4}}}{3/2}=\frac{1\pm\frac{1}{2}}{3/2}$$

$x=1$ eller $x=\frac{1}{3}$

Det gir da de kritiske punkter

med $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1-\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{3}$

med $x=1$, $y=\frac{1-1}{2}=\underline{0}$

Da har vi de kritiske punkter

$(0,0)$, $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ og $(1,0)$

b) Klassifisering av de kritiske punktet:

Her bruker vi så Hesse-determinanten til å finne. Hesse-determinanten er gitt av

$$H(a,b) = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \underline{2y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y + 2x - 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y + 2x - 1$$

som gir

$$\begin{vmatrix} 2y & 2y + 2x - 1 \\ 2y + 2x - 1 & 2x \end{vmatrix} = 4xy - (2y + 2x - 1)^2$$

for $(0,0)$:

$$4 \cdot 0 - (2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1)^2 = \underline{-1}$$

for $(1,0)$:

$$0-(2\cdot 0+2\cdot 1-1)^2 = \underline{-1}$$

for $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$:

$$\frac{4}{9}-\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-1\right)^2 = \underline{\frac{1}{3}}$$

Reglene for Hesse-determinant tilsier at $H(a,b) < 0$ gir saddelpunkt, mens $H(a,b) > 0$ gir lokalt minimums og maksimums punkt.

Det gir da at $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ er et minimums-punkt, mens $(0,0)$ og $(1,0)$ er saddelpunkt

c) Vis at F er konservativt:

Et vektorfelt er konservativt $F(x,y) = (p(x,y), q(x,y))$ når

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

$$F(x,y) = \left(y + 2xe^{x^2-y^2}, x - 2ye^{x^2-y^2}\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 1 + 2xe^{x^2-y^2} \cdot -2y$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \underline{1 - \left(4xy\, e^{x^2-y^2}\right)}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 1 - 2ye^{x^2-y^2} \cdot 2x$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \underline{1 - \left(4xy\, e^{x^2-y^2}\right)}$$

Altså er det et konservativt vektorfelt fordi de to partiell derivarte er like.

Så skal vi finne f slik at $\nabla f = F$.

$$\int \left(y + 2xe^{x^2-y^2}\right) dx = yx + e^{x^2-y^2} + h'(y)$$

Det gir da

$$f(x,y) = yx + e^{x^2-y^2} + h(y)$$

Vi kan også finne $h(y)$, men det er

kanskje ikke nødvendig i dette emnet.

d) Sirkulasjonen av G:

Sirkulasjon er definert som

$G(p(x,y), (q(x,y)))$

$$\text{curl } G = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}$$

$G(y^2+xy, \; x^2-y^2)$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 2x \;, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 2y+x$$

Det gir da curl G:

$$\text{Curl } G = 2x - 2y - x = \underline{\underline{x-2y}}$$

e) Integralkurve til H:

Vi må da ha en funksjon $y = g(x)$ er integralkurve for et vektorfelt $(1, g'(x))$ er parallell med $F(x,y)$

Vi har da

$H(2y;2x)$ med $y=2\sqrt{x^2-4}$, $x>2$

$$y=g' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{2x}{2y}$$

Dette gir oss fra

$$g'(x) = \frac{q(x,y)}{p(x,y)}$$, hvor $p(x,y)$ = y-leddet og $q(x,y)$ = x-leddet

Ut i fra definisjonen betyr det altså

$y(x)$ er en integralkurve til $H(2y,2x)$

f) <u>Kurveintegralet av vektorfeltet F:</u>

Først må det noen presiseringer til.

c) $F(x,y) = \left(y + 2xe^{x^2-y^2},\ x - 2y\,e^{x^2-y^2}\right)$

e) $y = \sqrt{x^2-4}$

for $x \in [2, e^2 + e^{-2}]$

Vi setter

$$f(x) = yx + e^{x^2-y^2}$$

som blir til

$$f(x) = x\sqrt{x^2-4} + e^{x^2-x^2+4}$$

$$f(x) = x\sqrt{x^2-4}\; e^{4}$$

Dette gir da integralet ved

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2(x^2-2)}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{2x^2-4}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\int_2^{e^2+e^{-2}} x\sqrt{x^2-4} \cdot \frac{2x^2-4}{\sqrt{x^2-4}}\, dx$$

$$= \int_2^{e^2+e^{-2}} 2x^3 - 4x\, dx = \left[\frac{x^4}{2} - 2x^2\right]_2^{e^2+e^{-2}}$$

$$= \underline{\underline{1279}}$$

(Må innrømme at jeg benyttet meg av Wolfram her)