Oblig I MAT1012 Furkan Kaya

Oppgave 1 a) Monotoni-egenskaper og ekstremalpunkter

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$, benytter oss av $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \underline{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}$$

Setter opp en fortegnslinje

$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$

$1-x^2$ - - - - 0 ———— 0 - - - - - -

$1+x^2$ ————————————

$1+x^2$ ————————————

$f'(x)$ - - - - 0 ———— 0 - - - - - -

Den avtar ved $x \leq -1$, stiger ved $-1 \leq x \leq 1$ og avtar igjen ved $x > 1$

Funksjonen har globale ekstremalpunkter i $x=-1$ og $x=1$, $x=-1$ er et globalt minimumspunkt, mens $x=1$ er et globalt maksimumspunkt. Dette kommer av at selv om det ikke er noen randpunkter eller et intervall, så er det slik at $x=1$ er maksimum for funksjonen og $x=-1$ er minimum for funksjonen.

b) <u>Hvor f krummer og vendepunkt:</u>

Først, skissen til f er tegnet på MATLAB og følger som vedlegg.

Så ser vi på hvor den krummer og eventuelle vendepunkter.

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad \text{, derivert gir det} \quad \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x \cdot (1+x^2)^2 - (1-x^2)\,2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 4x(1-x^2)(1+x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2) - 4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

Vi tegner derfor en fortegnslinje igjen

	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$2x$	– – –	– – –	0	———	———	———
(x^2-3)	———	0 – – –	– – –	– – –	0	———
$(1+x^2)^3$	———	———	———	———	———	———
$f''(x)$	– – –	0 ———	0	– – –	0	———

Vi ser på fortegnslinjen at den krummer ned når $x < -\sqrt{3}$, $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ og oppover når $x > \sqrt{3}$ og $-\sqrt{3} \leq x \leq 0$.

Vendepunktene er ved $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ og $x = \sqrt{3}$

c) Integralet av $f(x)$:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_0^2 \frac{2x}{2(1+x^2)}\,dx$$

Vi kan bruke substitusjons-metoden til å regne ut funksjonen

$$u = x^2, \quad du = 2x\,dx$$

$x = 0$ gir $u = 0$ og $x = 2$ gir $du = 4\,dx$

Innsatt i integralet blir det

$$\int_0^4 \frac{1}{2}\frac{du}{1+u} = \frac{1}{2}\ln(1+u)\Big]_0^4$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln 5}} \approx \underline{\underline{0,80472}}$$

d) <u>Beregning av funksjonen med trapes-metoden:</u> I trapes-metoden har man et intervall $[a,b]$ som deles i n deler. I dette tilfellet er $n = 4$. Lengden er gitt av $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

og $\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n$ hvor

$$T_n = \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_n)$$

Dette gir $\Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$

$$T_n = \frac{1}{4}(0 + 2\cdot 0,4 + 2\cdot 0,5 + 2\cdot 0,4615 + 0,4)$$

$T_n \approx \underline{\underline{0{,}78075}}$

e) <u>Beregning av integralet med Simpsons metode</u>

Samme funksjon, intervall og n som i d).

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n \quad \text{(fra Rottmann)}$$

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right)$$

$$S_n = \frac{1}{6}\left(0 + 4\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}5 + 4\cdot 0{,}4615 + 0{,}4\right)$$

$$S_n \approx \underline{\underline{0{,}80767}}$$

Så ser vi på den beste tilnærmingen

$$\frac{S_n}{\text{Svar}} = \frac{0{,}80767}{0{,}80472}\cdot 100\,\% \approx \underline{100{,}4\,\%}$$

$$\frac{T_n}{\text{Svar}} = \frac{0{,}78075}{0{,}80472}\cdot 100\,\% \approx \underline{97{,}02\,\%}$$

Vi ser at Simpsons metode er langt bedre tilnærming enn Trapes-metoden.

f) Beregning av $f'''(0)$ og Taylor-polynomet:

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \qquad \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Det gir da for den tredjederiverte

$$f'''(x) = \frac{(6x^2-6)(1+x^2)^3 - (2x^3-6x)3 \cdot 2x(1+x^2)^2}{(1+x^2)^6}$$

$$f'''(x) = \frac{(6x^2-6)(1+x^2) - (2x^3-6x)6x}{(1+x^2)^4}$$

$$f'''(x) = \frac{6x^2+6x^4-6-6x^2-12x^4+36x^2}{(1+x^2)^4}$$

$$f'''(x) = \frac{-6x^4+36x^2-6}{(1+x^2)^4}$$

for $f'''(0)$ blir det da

$$f'''(0) = \frac{-6}{1} = \underline{\underline{-6}}$$

Da blir Taylorpolynomet:

$$T_3 = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$$+ \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$$

6

$$T_f = 0 + 1 \cdot (x) + \frac{0}{2 \cdot 1}(x)^2 - \frac{6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot (x)^3$$

$$T_f = \underline{\underline{x - x^3}}$$

g) $\underline{f(x) \text{ som geometrisk rekke når } |x|<1:}$

Vi har da $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

En rekke konvergerer kun hvis absolutt-verdien av x er mindre enn 1, $|x|<1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{4}{17} + \frac{5}{26} + \ldots$$

Vi ser at det skjer en konvergens ettersom for hvert ledd kommer vi nærmere 0.

Vi har at integrasjon av $f(x)$ gir $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$. Dette gir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{2n}.$$ Vi ser på selve rekken:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6}.$$ Så deriverer vi den.

$x - 4x^3 + 6x^5$ for geometrisk rekke.

$x - x^3$ for Taylor-polynom.

Men vi vet at ved å legge til et ledd, så får vi et x^5-ledd i Taylor-polynomet. Det betyr at de er veldig nærme hverandre

Oppgave 2 a) Hvilke av rekkene som konvergerer og divergerer

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, vi skriver den ut for å få et bilde av hvordan rekken ser ut.

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$$

For at en rekke skal konvergere, så må $a_n \to 0$ når $n \to \infty$. Vi ser at rekken ovenfor tyder på dette. Men dette er en såkalt p-rekke. Det betyr at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. For konvergens må $p > 1$. Altså rekken divergere

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \pm \dots$$

Når det kommer til alternerende rekker, bruker vi Leibniz konvergenskriterium. Vi må da ha $a_{n+1} < a_n$ og $a_n \to 0$ når $n \to \infty$.

Dette ser vi stemmer med ii) og derfor konvergerer den også.

iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n 2^n e^{-n} :$$

$$\frac{2}{e} + \frac{8}{e^2} + \frac{24}{e^3} + \frac{64}{e^4} + \frac{160}{e^5} + \dots$$

(i tall) $0{,}736 + 1{,}083 + 1{,}195 + 1{,}172 + 1{,}078$

Denne rekken konvergerer også

b) <u>Tilnærmet løsning av diff. ligning:</u>

$$y' + y = xe^{-x} \quad , \quad y(0) = 1$$

Vi setter $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$

Og $y = \sum a_n x^n$, $y' = \sum a_n x^{n-1}$

Dette gir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1) a_{n+1} + a_n\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} x^{n}$$

Det giv

for $n = 6$:

$$a_1 + a_0 = -1$$

$$2a_2 + a_1 = 1$$

$$3a_3 + a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$4a_4 + a_3 = \frac{1}{6}$$

$$5a_5 + a_4 = -1/24$$

$$6a_6 + a_5 = 1/120$$

$$7a_7 + a_6 = -1/720$$

Når vi vet at $y(0) = a_0 = 1$, får vi

$a_1 = -2$, $a_2 = 3/2$, $a_3 = -2/3$, $a_4 = \frac{5}{24}$

$a_5 = -1/20$, $a_6 = 7/720$

Det giv oss et Taylor-polynom av $n = 6$.

$$T(x) = 1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{1}{20}x^5 + \frac{7}{720}x^6$$

Så beregner vi $y(1) =$

$$T(1) = 1 - 2 \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot 1^2 - \frac{2}{3} \cdot 1^3 + \frac{5}{24} \cdot 1^4 - \frac{1}{20} \cdot 1^5 + \frac{7}{720} \cdot 1^6 \approx \frac{11}{20}$$

c) Eksakt verdi for diff. likningen:

Dessverre hadde jeg ikke MAT1001, men likevel vil jeg regne ut den eksakte verdien.

$$y' + y = xe^{-x}$$

$$y' \cdot e^{x} + y \cdot e^{x} = xe^{-x} \cdot e^{x}$$

$$(y \cdot e^{x})' = x$$

$$y \cdot e^{x} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = \frac{x^2}{2} \cdot e^{-x} + Ce^{-x}$$

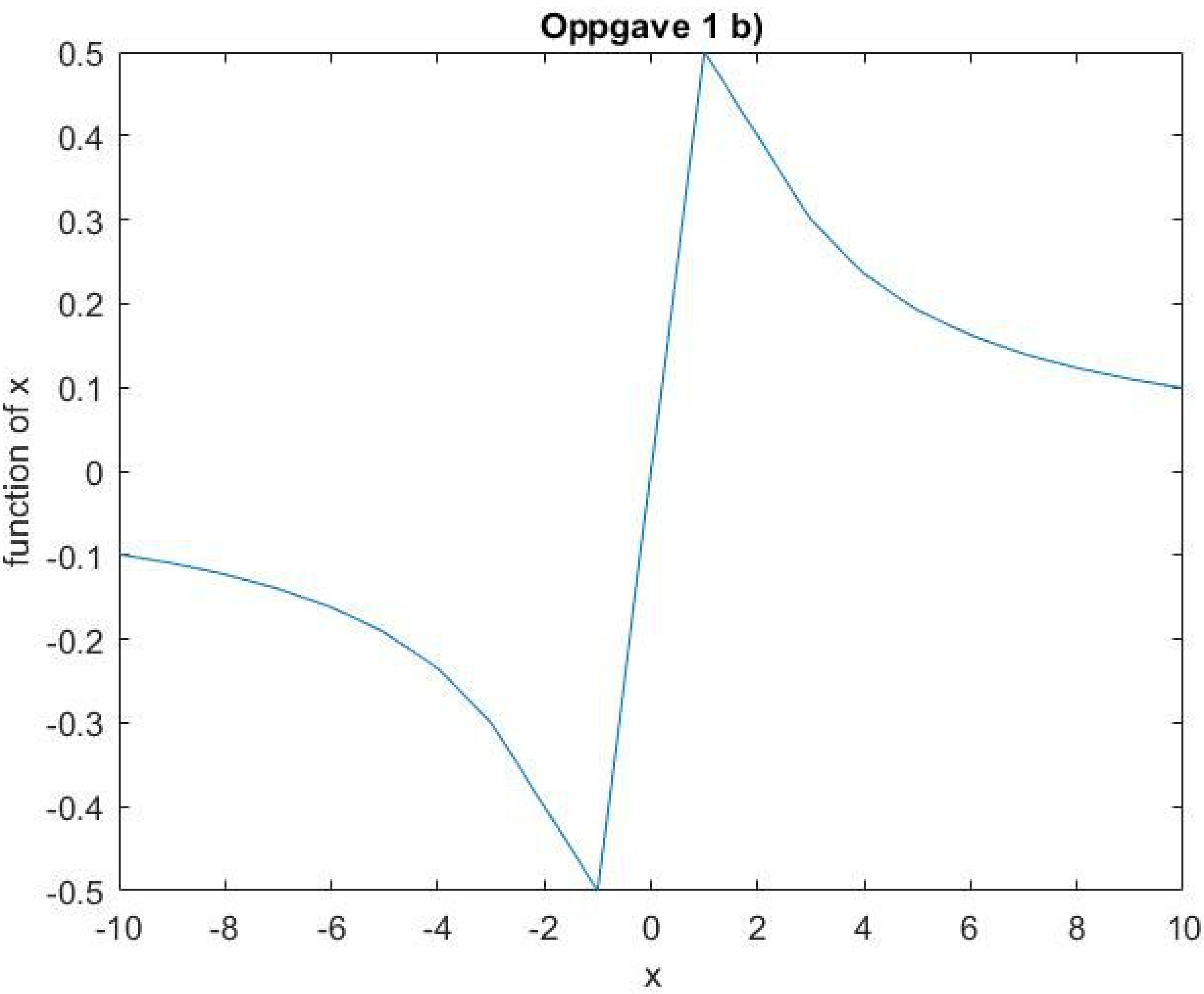
Så har vi $y(0) = 1$ for å få konstant c

$$y(0) = C$$

Det gir

$$y = \frac{x^2}{2} \cdot e^{-x} + e^{-x} = \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)e^{-x}$$

$$y(1) = \left(\frac{1}{2} + 1\right)e^{-1} = \underline{\underline{0{,}552}}$$


Oppgave 1 b)
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
function of x
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
x