OPPGAVESETT 5

Oppgave 1

En brannbil med stige og et bur som brannmannen kan stå i er vist i figur (ref...). I det øyeblikket som er vist på figuren, roterer basen med en vinkelhastighet $\omega_2 = 0.1\ rad/s$ med $\dot{\omega}_2 = 0.2\ rad/s^2$ relativt til brannbilen. Armen AB roterer med vinkelhastigheten $\omega_1 = 0.2\ rad/s$ med $\dot{\omega}_1 = 0.8\ rad/s^2$ relativt til stigen DA. Buret roterer relativt til AB slik at mannen i buret alltid står rett opp i forhold til bakken. Lengden på $DA = 13\ m$, og lengden på $AB = 3\ m$. Hva er hastighets- og akselerasjonevektorene til brannmannen relativt til bakken, hvis $\alpha = 45°$ og $\beta = 30°$?

Løsning:

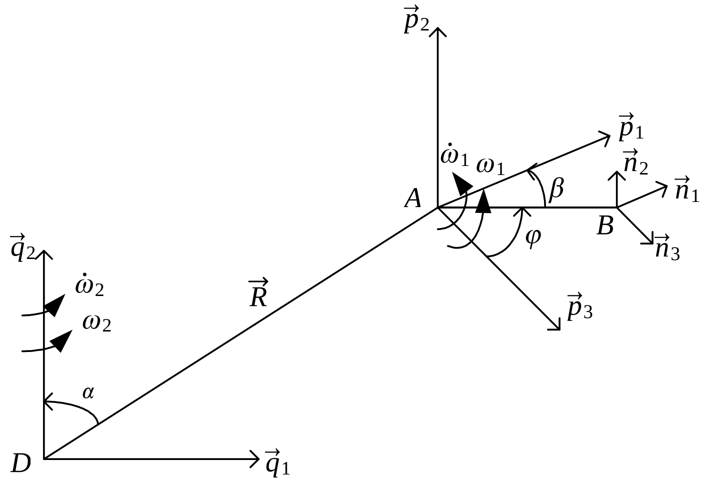

Figure 3:

a) Definere først systemene.

q**: Systemet fast på lastebilen**

* Origo i punktet D

* $\vec{q}_2$ ligger på rotasjonsretningen av $\vec{\omega}_2$

* $\vec{q}_1$ ligger langs lastebilen

* $\vec{q}_3$ (ortogonal på lasteplanet) peker ut av arket

p**: Systemet fast på armen** DA

* Origo i punktet A, på toppen av armen

* $\vec{p}_3$ ligger på rotasjonsretningen til $\vec{\omega}_1$, $\dot{\vec{\omega}}_1$, $\vec{p}_3 \perp$ planet (AD, AB)

* $\vec{p}_2$ ligger på planet AD, AB og $\vec{p}_2 \| \vec{q}_2$

* $\vec{p}_1$ følger høyre-hånds regelen

n**: Systemet fast på cockpiten**

* Origo i punktet B, på liten arm AB

* $\vec{n}_1 \| \vec{p}_1$, $\vec{n}_2 \| \vec{p}_2$, $\vec{n}_3 \| \vec{p}_3$

b) Beskriver problemet basert på de definerte systemene og utleder matematiske formler som gir svaret.

Hastighet av B sett fra q:

$$^q\vec{v} = {}^q\dot{\overrightarrow{R}} + {}^q\vec{v} + {}^q\vec{\omega}_p \times \varphi \tag{120}$$

Akselerasjon av B sett fra q:

$$^q\vec{a} = {}^q\ddot{\overrightarrow{R}} + {}^q\vec{a} + {}^q\dot{\vec{\omega}}_p \times \varphi + {}^q\vec{\omega}_p \times ({}^q\vec{\omega}_p \times \varphi) + 2{}^q\vec{\omega}_p \times {}^p\vec{v} \tag{121}$$

Vi må finne ${}^q\dot{\overrightarrow{R}}, {}^q\ddot{\overrightarrow{R}}, {}^p\vec{v}, {}^p\vec{a}$ og uttrykke alle vektorene ved hjelp av en basis.

1) Først må vi finne ${}^p\vec{v}, {}^p\vec{a}$ fra relativ bevegelse av B i forhold til p-systemet.

2) Må finne ${}^q\dot{\overrightarrow{R}}, {}^q\ddot{\overrightarrow{R}}$ fra relativ bevegelse av P i forhold til q-systemet.

1) Vi må velge q- eller p-systemet for å uttrykke vektorene. Det er vanskelig å uttrykke på q-systemet, da vi ikke har nok informasjon. (Når AD dreier, vil ikke AD være i planet $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$. Man må derfor defineres planet ved hjelp av tre komponenter, $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ og $\vec{q}_3$).

${}^q\vec{\omega}_p = \vec{\omega}_2$ kan uttrykkes i p-systemet: ${}^q\vec{\omega}_p^p = {}^q\vec{\omega}_p^1$ $(\vec{p}_2 \| \vec{q}_2)$. Samme for $\dot{\vec{\omega}}_2$. $\overrightarrow{R}$ ligger i planet definert av $\vec{p}_1, \vec{p}_2$, og kan dekomponeres ved hjel av α.

Bevegelse av B relativt til p-systemet:

* posisjon

$$\varphi = \rho_1\vec{p}_1 + \rho_2\vec{p}_2 = \rho\cos\beta\cdot\vec{p}_1 - \rho\sin\beta\cdot\vec{p}_2 \tag{122}$$

ρ har fast lengde.

* hastighet

Vi kan implementere direkte ${}^p\vec{v} = {}^n\dot{\varphi} + {}^n\vec{v} + {}^p\vec{\omega}_n \times \vec{r}$, $\vec{r} = 0$

$$^p\vec{v} = {}^p\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = {}^n\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) + {}^p\vec{\omega}_n = {}^n\vec{v} + {}^p\vec{\omega}_n \times \varphi = \vec{\omega}_1 \times \varphi \tag{123}$$

eller hvor ${}^n\vec{v} = 0$ (ϕ har konstant lengde), ${}^p\vec{\omega}_n = \vec{\omega}_1$

$$^p\vec{v} = \vec{\omega}_1 \times \varphi \tag{124}$$

direkte.

$$\begin{aligned} {}^p\vec{v} &= \vec{\omega}_1 \times \varphi = (\vec{\omega}_1\vec{p}_3) \times (\rho\cos\beta\cdot\vec{p}_1 - \rho\sin\beta\cdot\vec{p}_2) && (125)\\ &= \vec{\omega}_1\rho\cos\beta\cdot\vec{p}_2 + \vec{\omega}_1\rho\sin\beta\cdot\vec{p}_1\ (m/s) && (126)\end{aligned}$$

Vi har $\omega_1 = 0.2$, $\rho = 3$, $\beta = 30^\circ \Longrightarrow$

$$^p\vec{v} = 0.520\vec{p}_2 + 0.3\vec{p}_1\ (m/s) \tag{127}$$

* akselerasjon

$$\begin{aligned} {}^p\vec{a} &= {}^p(\frac{d\,{}^p\vec{v}}{dt}) = {}^p(\frac{d}{dt}(\vec{\omega}_1 \times \varphi)) = {}^p(\frac{d\vec{\omega}_1}{t}) \times \varphi + \vec{\omega}_1 \times {}^p(\frac{d\,\varphi}{dt}) && (128)\\ &= \dot{\vec{\omega}}_1 \times \varphi + \vec{\omega}_1 \times^p \vec{v} && (129)\\ &= (\dot{\omega}_1\vec{p}_3) \times (\rho\cos\beta\cdot\vec{p}_1 - \rho\sin\beta\cdot\vec{p}_2) + (\omega_1\vec{p}_3) \times (\vec{\omega}_1\rho\cos\beta\cdot\vec{p}_2 + \vec{\omega}_1\rho\sin\beta\cdot\vec{p}_1) && (130)\\ &= \dot{\omega}_1\rho\cos\beta\cdot\vec{p}_2 + \dot{\omega}_1\rho\sin\beta\cdot\vec{p}_1 - \omega_1^2\rho\cos\beta\cdot\vec{p}_1 + \vec{\omega}_1^2\rho\sin\beta\cdot\vec{p}_2 && (131)\\ &= (\dot{\omega}_1\rho\sin\beta - \omega_1^2\rho\cos\beta)\vec{p}_1 + (\dot{\omega}_1\rho\cos\beta + \vec{\omega}_1^2\rho\sin\beta)\vec{p}_2 && (132)\end{aligned}$$

Vi vet at $\dot{\omega}_1 = 0.8 \Longrightarrow$

$$^q\vec{a} = 1.096\vec{p}_1 + 2.138\vec{p}_2\ m/s^2 \tag{133}$$

2a) Bevegelse av p relativt q-systemet:

* posisjon

Uttrykk $\overrightarrow{R}$ i p-systemet:

$$\overrightarrow{R}^p = R_1\vec{p}_1 + R_2\vec{p}_2 = R\sin\alpha\cdot\vec{p}_1 + R\cos\alpha\cdot\vec{p}_2 \tag{134}$$

* hastighet

$$^q\dot{\overrightarrow{R}} = {}^p\dot{\overrightarrow{R}} + \vec{\omega}_2\times\overrightarrow{R} \tag{135}$$

uttrykt i p-systemet:

$$^q\dot{\overrightarrow{R}}^p = {}^p\dot{\overrightarrow{R}} + \vec{\omega}_2^p\times\overrightarrow{R} \tag{136}$$

hvor $\vec{\omega}_2 = {}^q\vec{\omega}_p = {}^q\vec{\omega}_p^p$ og ${}^p\dot{\overrightarrow{R}} = 0$ ($\overrightarrow{R}$ har konstant lengde)$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} ^q\dot{\overrightarrow{R}}^p &= \omega_2\vec{p}_2\times(R\sin\alpha\cdot\vec{p}_1 + R\cos\alpha\cdot\vec{p}_2) && (137)\\ &= -\omega_2 R\sin\alpha\cdot\vec{p}_3 && (138)\end{aligned}$$

Vi vet at $R = DA = 13m \Longrightarrow$

$$-0.919\vec{p}_3\ m/s \tag{139}$$

* akselerasjon

$$^q\ddot{\overrightarrow{R}} = {}^q(\frac{d\,{}^q\dot{\overrightarrow{R}}}{dt}) ={}^q (\frac{d}{dt}\vec{\omega}_2\times\overrightarrow{R}) = \dot{\vec{\omega}}_2\times\overrightarrow{R} + \vec{\omega}_2\times{}^q\dot{\overrightarrow{R}} \tag{140}$$

uttrykt i p-systemet:

$$^q\ddot{\overrightarrow{R}}^p = \dot{\vec{\omega}}_2^p\times\overrightarrow{R}^p + \vec{\omega}_2\times{}^q\dot{\overrightarrow{R}}^p \tag{141}$$

$$\begin{aligned} ^q\ddot{\overrightarrow{R}} &= \dot{\omega}_2\vec{p}_2\times(R\sin\alpha\cdot\vec{p}_1 + R\cos\alpha\cdot\vec{p}_2) + \omega_2\vec{p}_2\times(-\omega_2 R\sin\alpha\cdot\vec{p}_3) && (142)\\ &= -\dot{\omega}_2 R\sin\alpha\cdot\vec{p}_3 - \omega_2^2 R\sin\alpha\cdot\vec{p}_1 && (143)\\ &= -1.838\vec{p}_3 - 0.092\vec{p}_1 && (144)\end{aligned}$$

2b) Bevegelse av n (B) relativ q-systemet:

* posisjon

$$\vec{r} = \overrightarrow{R} + \varphi \tag{145}$$

* hastighet

$$^q\vec{v} = {}^q\dot{\overrightarrow{R}} + {}^p\vec{v} + \vec{\omega}_2\times\varphi \tag{146}$$

Ser på leddet $\vec{\omega}_2\times\varphi$:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_2\times\varphi &= \omega_2\vec{p}_2\times(\rho\cos\beta\cdot\vec{p}_1 - \rho\sin\beta\cdot\vec{p}_2) && (147)\\ &= -\omega_2\rho\cos\beta\cdot\vec{p}_3 && (148)\\ &= -0.260\vec{p}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ^q\vec{v} &= -0.919\vec{p}_3 + (0.520\vec{p}_2 + 0.3\vec{p}_1) - 0.260\vec{p}_3 && (149)\\ &= 0.3\vec{p}_1 + 0.520\vec{p}_2 - 1.179\vec{p}_3 && (150)\end{aligned}$$

* akselerasjon

$$ {}^q\vec{a} = {}^q \ddot{\vec{R}} + {}^p\vec{a} + \dot{\vec{\omega}}_2 \times \varphi + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \varphi) + 2\vec{\omega}_2 \times {}^p\vec{v} \tag{151} $$

Ser på leddet $\dot{\vec{\omega}}_2 \times \varphi$:

$$ \begin{aligned} \dot{\vec{\omega}}_2 \times \varphi &= \dot{\omega}_2 \vec{p}_2 (\rho \cos\beta \cdot \vec{p}_1 - \rho \sin\beta \cdot \vec{p}_2) & (152)\\ &= -\dot{\omega}_2 \rho \cos\beta \cdot \vec{p}_3 & (153)\\ &= -0.520 \vec{p}_3 & (154) \end{aligned} $$

Ser på leddet $\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \varphi)$:

$$ \begin{aligned} \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \varphi) &= \omega_2 \vec{p}_2 \times (-\omega_2 \rho \cos\beta \cdot \vec{p}_3) & (155)\\ &= -\omega_2^2 \rho \cos\beta \cdot \vec{p}_1 & (156)\\ &= -0.026 \vec{p}_1 & (157) \end{aligned} $$

Ser på leddet $2\vec{\omega}_2 \times^p \vec{v}$:

$$ \begin{aligned} 2\vec{\omega}_2 \times^p \vec{v} &= 2\omega_2 \vec{p}_2 \times (\omega_1 \rho \cos\beta \cdot \vec{p}_2 + \omega_1 \rho \sin\beta \cdot \vec{p}_1) & (158)\\ &= -2\omega_2 \omega_1 \rho \cos\beta \cdot \vec{p}_3 & (159)\\ &= -0.06 \vec{p}_3 & (160) \end{aligned} $$

Vi får følgende total akselerasjon (2):

$$ \begin{array}{rclll} & & -0.092\vec{p}_1 & & -0.838\vec{p}_3 \\ & & & & -0.52\vec{p}_3 \\ {}^q\vec{a} & = & -0.026\vec{p}_1 & & \\ & & & & -0.06\vec{p}_3 \\ & & +1.096\vec{p}_1 & +2.138\vec{p}_2 & -2.418\vec{p}_3 \\ & = & \multicolumn{3}{l}{0.978\vec{p}_1 + 2.138\vec{p}_2 - 2.418\vec{p}_3 \ m/s^2} \end{array} \tag{161} $$

Sammenlikner ${}^p\vec{a}$ og ${}^q\vec{a}$:

$$ \begin{aligned} {}^p\vec{a} &= 1.096\vec{p}_1 + 2.138\vec{p}_2 & (162)\\ {}^q\vec{a} &= 0.978\vec{p}_1 + 2.138\vec{p}_2 - 2.418\vec{p}_3 \ m/s^2 & (163) \end{aligned} $$

og $\overrightarrow{F}_p$ tilsynelatende og $\overrightarrow{F}_q$ ytre krefter:

Ved dreining ω_2, $\dot{\omega}_2$ med kraft på B som prøver å rotere B om $\vec{p}_2$-aksen, skyldes:

$$ \begin{aligned} -m\omega \times \ddot{\overrightarrow{R}} &= \overrightarrow{F}_0 \text{ (translasjon av } p\text{-rundt lastebil)} & (164)\\ m\dot{\omega} \times \varphi &= \overrightarrow{F}_t \text{ (tangensial kraft skyldes vinkelakselerasjon } \dot{\omega}_2\text{)} & (165) \end{aligned} $$

Oppgave 2

I figuret gitt i oppgavesettet er det vist en roterende plattform. Det sitter en mann i posisjonen merket A med ansiktet vendt mot punktet O. Avstanden fra mannen til O er $3\ m$. Mannen holder en masse på $100\ g$ og går med en hastighet på $3\ m/s$ mot sentrum av plattformen. Plattformen har en vinkelhastighet $\omega = 10\ rad/s$ og en vinkelakselerasjon $\dot{\omega} = 5\ rad/s^2$ relativt til bakken i dette øyeblikket. Hvilken kraft F må mannen utøve på massen for at den skal akselerere med $1\ m/s^2$ mot sentrum av plattformen?

Løsning: Systemer:

q**: treghetssystem fast på bakken**

* Origo på O

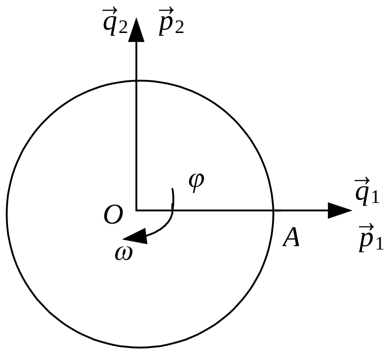

Figure 4:

* $\vec{q}_3$: $\perp$ på plattformen langs dreiningsaksen

* $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$vilkårlig

p**: fast på plattform**

* Origo på O

* $\vec{p}_1$: langs OS

* $\vec{p}_2$: i følge høyre-hånds lov

* $\vec{p}_3$: langs dreiningsaksen (peker ut fra bakken)

ω er langs $\vec{q}_3 \equiv \vec{p}_3$ akse$\Longrightarrow$samme uttrykk for p- og q-systemet.

Vi uttrykker alle vektorene ved hjelp av basisen $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\}$.

$\varphi = \rho\vec{p}_1\ m$ hvor $\rho = 3$

${}^p\vec{v} = -v\vec{p}_1\ m/s$ hvor $v = 3$ (beveger seg mot origo)

${}^p\vec{a} = -a\vec{p}_1\ m/s^2$ hvor $a = 1$ (beveger seg mot origo)

$\vec{\omega} = -\omega\vec{p}_3\ rad/s$ hvor $\omega = 10$ (motsatt dreining)

$\dot{\vec{\omega}} = -\dot{\omega}\vec{p}_3\ rad/s^2$ hvor $\dot{\omega} = 5$ (motsatt dreining)

$m = 100\ gr$

Ser på bevegelse av masse relativt treghetssystemet og finner likningene for akselerasjon og deretter kreftene.

a) Bevegelse av masse m relativt p-systemet:

* posisjon

Gitt

$$\varphi = \rho\vec{p}_1 \tag{166}$$

hvor $\rho = 3$.

* hastighet

Gitt

$$ {}^p\vec{v} = {}^p\dot{\varphi} = -v\vec{p}_1 \tag{167}$$

hvor $v = 3\ m/s$.

* akselerasjon

$$ {}^p\vec{a} = -a\vec{p}_1 \tag{168}$$

hvor $a = 1\ m/s^2$.

b) Bevegelse av p relativt q-systemet:

* $\overrightarrow{R} = 0$, ${}^q\dot{\overrightarrow{R}} = 0$, ${}^q\ddot{\overrightarrow{R}} = 0$ (p, q har samme origo)

* dreining

$$\vec{\omega}_{qp} = \vec{\omega} = -\omega\vec{p}_3 \tag{169}$$

hvor $\omega = 10\ rad/s$ (motsatt dreining).

$$\dot{\vec{\omega}}_{qp} = \dot{\vec{\omega}} = -\dot{\omega}\vec{p}_3 \tag{170}$$

hvor $\dot{\omega} = 5\ rad/s$.

c) Akselerasjon av masse m relativt q-systemet:

$${}^q\vec{a} = {}^q\ddot{\overrightarrow{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \varphi + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \varphi) + 2\vec{\omega} \times {}^p\vec{v} + {}^p\vec{a} \tag{171}$$

Ser på leddet $\dot{\vec{\omega}} \times \varphi$:

$$\dot{\vec{\omega}} \times \varphi = (-\dot{\omega}\vec{p}_3) \times (\rho\vec{p}_1) \tag{172}$$
$$= -\dot{\omega}\rho\vec{p}_2 \tag{173}$$

Ser på leddet $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \varphi)$:

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \varphi) = (-\omega\vec{p}_3) \times [(-\omega\vec{p}_3) \times (\rho\vec{p}_1)] \tag{174}$$
$$= (-\omega\vec{p}_3) \times (-\omega\rho\vec{p}_2) \tag{175}$$
$$= -\omega^2\rho\vec{p}_1 \tag{176}$$

Ser på leddet $2\vec{\omega} \times {}^p\vec{v}$:

$$2\vec{\omega} \times {}^p\vec{v} = 2\,(-\omega\vec{p}_3) \times (-v\vec{p}_1) \tag{177}$$
$$= -2\omega v\vec{p}_2 \tag{178}$$

Og til sist akselerasjonen:

$${}^p\vec{a} = -a\vec{p}_1 \tag{179}$$

Samlet får vi:

$$\begin{array}{rcllcl} & & & -\dot{\omega}\rho\vec{p}_2 & : & \dot{\vec{\omega}} \times \varphi \\ {}^q\vec{a} & = & -\omega^2\rho\vec{p}_1 & & : & \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \varphi) \\ & & & 2\omega v\vec{p}_2 & : & 2\vec{\omega} \times {}^p\vec{v} \\ & & -a\vec{p}_1 & & : & {}^p\vec{a} \end{array}$$

$$= (-a - \omega^2\rho)\vec{p}_1 + (-\dot{\omega}\rho + 2\omega v)\vec{p}_2 \tag{180}$$
$$= (-1 - 10^2 \cdot 3)\vec{p}_1 + (-5 \cdot 3 + 2 \cdot 10 \cdot 3)\vec{p}_2 \tag{181}$$
$$= -301\vec{p}_1 + 45\vec{p}_2\ m/s^2 \tag{182}$$

Newton’s andre lov.

Ytre krefter:

$$\overrightarrow{F}_q = m\,{}^q\vec{a} = \frac{1}{10}(-301\vec{p}_1 + 45\vec{p}_2) \tag{183}$$
$$= -30.1\vec{p}_1 + 4.5\vec{p}_2\ (\frac{kg \cdot m}{s^2} = N) \tag{184}$$

Mannen må utøve denne kraften i tillegg til å motstå gravitasjonen (vekt) i $\vec{q}_3$-retning.

$$F_{\text{max}} = \overrightarrow{F}_q + mg\vec{p}_3 \text{ (fordi } \vec{p}_3 \text{ peker ut av bakken)} \tag{185}$$
$$= -30.1\vec{p}_1 + 4.5\vec{p}_2 + 0.98\vec{p}_3 \tag{186}$$

Hvis plattformen ikke dreier relativt bakkes, har man ${}^{q}\vec{a} = {}^{p}\vec{a}$ som gir:

$$\vec{F}' = m\,{}^{p}\vec{a} = \frac{1}{10}(-1\vec{p}_1) = -\frac{1}{10}\vec{p}_1\ N \tag{187}$$

og

$$\vec{F}'_{\text{mann}} = -\frac{1}{10}\vec{p}_1\ + 0.98\vec{p}_3 \tag{188}$$

Man har stor forskjell mellom $\vec{F}'$ og $\vec{F}$ ($\vec{F}'_{\text{mann}}$ og $\vec{F}_{\text{mann}}$).

Oppgave 3

I en romkoloni som er en stor roterende sylinder, spilles det baseball. Romkolonien er så stor at det er mulig å spille baseball i den, og den roterer så fort at det på innsiden av sylinderet er normal jordgravitasjon. Som referansepunkt på innsiden av sylinderet bruker vi hjemmebasen A. La O være projeksjonen av hjemmebasen på sylinderens omdreiningsakse.

a) Finn likningene for akselerasjonen og de kreftene som virker på baseballen når en spiller holder ballen.

Løsning:

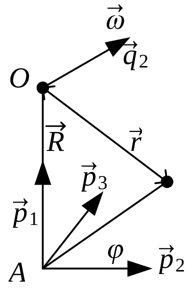

Figure 5:

Systemer:

q**: Systemet fast på aksen av sylinderet**

* Origo er på aksen i punkt O, slik at OA (hvor A er på hjemmedelen av baseballbanen)er radiusen av sylinderet ($OA\perp$akse).

* $\vec{q}_3$: langs sylinderaksen, peker i samme retning som ω

* $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$: fast vilkårlig akse

p**: Systemet fast på hjemmedelen**

* Origo i A

* $\vec{p}_3$: samme retning som $\vec{q}_3$

* $\vec{p}_2$: langs OA, peker mot O

* $\vec{p}_1$: følger høyre-hånd regelen

Vi uttrykker alle vektorene i p-systemet:

$$\vec{R} = -R\vec{p}_1 \tag{189}$$

$$\vec{\omega} = \omega\vec{p}_1 \tag{190}$$

Spilleren holder ballen. Ballen er med i systemet av sylinder:

a) Likninger for $\vec{a}$ og $\vec{F}$, det vil si ${}^{p}\vec{a}$, ${}^{q}\vec{a}$ og de tilsvarende kreftene.

i)Bevegelse av baseball relativ p-systemet:

* posisjon (tilfeldig)

$$\varphi = \rho_1\vec{p}_1 + \rho_2\vec{p}_2 + \rho_3\vec{p}_3 \tag{191}$$

* hastighet

$${}^p\vec{v} = {}^p\dot{\varphi} = \dot{\rho}_1\vec{p}_1 + \dot{\rho}_2\vec{p}_2 + \dot{\rho}_3\vec{p}_3 \tag{192}$$

* akselerasjon

$${}^p\vec{a} = {}^p\ddot{\varphi} = \ddot{\rho}_1\vec{p}_1 + \ddot{\rho}_2\vec{p}_2 + \ddot{\rho}_3\vec{p}_3 \tag{193}$$

Ingen dreining av baseball relativt p-systemet.

ii) Bevegelse av ρ relativt q-systemet:

* posisjon

$$\overrightarrow{R} = -R\vec{p}_1 \tag{194}$$

Negativt fortegn fordi den er i motsatt retning av $\vec{p}_1$.

* hastighet

$${}^q\dot{R} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{R} \tag{195}$$

$\vec{\omega}_{qp} = \vec{\omega}$, ${}^p\dot{R} = 0$, konstant lengde:

$${}^q\dot{\overrightarrow{R}} = \omega\vec{p}_3 \times (-R\vec{p}_1) = -\omega R\vec{p}_2$$

* akselerasjon

$${}^q\ddot{\overrightarrow{R}} = {}^q\left(\frac{d}{dt}\vec{\omega} \times \overrightarrow{R}\right) = {}^q\dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{R} + \vec{\omega} \times {}^q\dot{\overrightarrow{R}} \tag{196}$$

${}^q\dot{\vec{\omega}} = 0$, konstant vinkelhastighet.

$$\begin{aligned} {}^q\ddot{\overrightarrow{R}} &= \vec{\omega} \times {}^q\dot{\overrightarrow{R}} = \omega\vec{p}_3 \times (-\omega R\vec{p}_2) \\ &= \omega^2 R\vec{p}_1 \end{aligned} \tag{197}$$

iii) Bevegelse av baseball relativt q-system:

* akselerasjon

$${}^q\vec{a} = \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \varphi + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \varphi) + 2\vec{\omega} \times {}^p\vec{v} + {}^p\vec{a} \tag{198}$$

Ser på leddet $\dot{\vec{\omega}} \times \varphi$:

$$\dot{\vec{\omega}} \times \varphi = 0 \ (\dot{\vec{\omega}}\text{konstant}) \tag{199}$$

Ser på leddet $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \varphi)$:

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \varphi) &= \omega\vec{p}_3 \times (\rho_1\vec{p}_1 + \rho_2\vec{p}_2 + \rho_3\vec{p}_3) \qquad (200) \\ &= \omega\rho_1\vec{p}_2 - \omega\rho_2\vec{p}_1 \\ \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \varphi) &= \omega\vec{p}_3 \times (\omega\rho_1\vec{p}_2 - \omega\rho_2\vec{p}_1) \qquad (201) \\ &= -\omega^2\rho_1\vec{p}_1 - \omega^2\rho_2\vec{p}_2 \qquad (202) \end{aligned}$$

Ser på leddet $2\vec{\omega} \times^p \vec{v}$:

$$\begin{aligned} 2\vec{\omega} \times {}^p\vec{v} &= 2\omega\vec{p}_3 \times (\dot{\rho}_1\vec{p}_1 + \dot{\rho}_2\vec{p}_2 + \dot{\rho}_3\vec{p}_3) \qquad (203) \\ &= 2\omega\dot{\rho}_1\vec{p}_2 - 2\omega\dot{\rho}_2\vec{p}_1 \qquad (204) \end{aligned}$$

Samlet får vi:

$$\begin{array}{rclllll} {}^q\vec{a} & = & \omega^2 R\vec{p}_1 & & & :{}^q\ddot{\vec{R}} \\ & & -\omega^2\rho_1\vec{p}_1 & -\omega^2\rho_2\vec{p}_2 & & :\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\varphi) \\ & & -2\omega\dot{\rho}_2\vec{p}_1 & 2\omega\dot{\rho}_1\vec{p}_2 & & :2\vec{\omega}\times^p\vec{v} \\ & & \ddot{\rho}_1\vec{p}_1 & \ddot{\rho}_2\vec{p}_2 & \ddot{\rho}_3\vec{p}_3 & :{}^p\vec{a} \\ & = & \multicolumn{4}{l}{\left(\omega^2 R-\omega^2\rho_1-2\omega\dot{\rho}_2+\ddot{\rho}_1\right)\vec{p}_1+\left(-\omega^2\rho_2+2\omega\dot{\rho}_1+\ddot{\rho}_2\right)\vec{p}_2+\ddot{\rho}_3\vec{p}_3} \end{array} \tag{205}$$

Ser på kreftene:

$\vec{F}_q = m\,{}^q\vec{a}$: ytre kraft

$\vec{F}p = m\,{}^p\vec{a}$: tilsynelatende

$\vec{F}_0 = -m\ddot{\vec{R}} = -m\omega^2 R\vec{p}_1$: kraft som skyldes translasjon av $\vec{p}_1$, som peker ut fra sylinderet

$\vec{F}_t = 0$: tangential

$\vec{F}_s = -m\cdot\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\varphi) = m\omega^2\rho_1\vec{p}_1 + m\omega^2\rho_2\vec{p}_2$: sentrifugalkraft, peker til innerrommet av sylinderet og er ortogonal til vinkelhastigheten (sylinderaksen)

$\vec{F}_c = -2m\cdot\vec{\omega}\times{}^p\vec{v} = 2m\omega\dot{\rho}_2\vec{p}_1 - 2m\omega\dot{\rho}_1\vec{p}_2$: Coriolis kraft, peker til innerrommet av sylinderet og er ortogonal til sylinderaksen

...

b) *Spilleren kaster ballen. Finn bevegelsen til baseballen sett fra punktet O og fra hjemmebasen A. Se på tilfellet der ballen beveger seg langs kanten av kolonien med en fart mye mindre enn rotasjonshastigheten til sylinderet.*

Løsning: i) Sett fra O:

$\vec{F}_q$: ytre kraft (gravitasjonskraft), eller kunstig gravitasjon. Men kunstig gravitasjon gjelder bare på overflaten av sylinderet og de objekter som roterer med og er knyttet til den. Ballen er i fritt rom og er ikke knyttet til romkolonien$\Longrightarrow$ $\vec{F}_q = 0$

I følge Newton's lov:

- hvis ballen er i ro, vil den forsette å være i ro

- hvis ballen beveger seg, vil den fortsette å bevege seg i rett linje med konstant hastighet (ingen påvirkning av krefter).

$$\vec{F}_q = 0 \Longrightarrow {}^q\vec{a} = 0 \tag{206}$$

Hvilket vil si at ballen enten er i ro eller beveger seg med konstant hastighet.

ii) Sett fra A:

Komponentform

$$\omega^2 R - \omega^2\rho_1 - 2\omega\dot{\rho}_2 + \ddot{\rho}_1 = 0 \Longleftrightarrow \ddot{\rho}_1 = \omega^2\rho_1 + 2\omega\dot{\rho}_2 - \omega^2 R \tag{207}$$

$$-\omega^2\rho_2 + 2\omega\dot{\rho}_1 + \ddot{\rho}_2 = 0 \Longleftrightarrow \ddot{\rho}_2 = \omega^2\rho_2 - 2\omega\dot{\rho}_1 \tag{208}$$

$$\ddot{\rho}_3 = 0 \Longleftrightarrow \ddot{\rho}_3 = 0 \tag{209}$$

($\ddot{\rho}_3 = 0$ fordi man har konstant hastighet langs $\vec{p}_3$-aksen).

Baseballen beveger seg nær utkant av kolonien$\Longrightarrow$ $\rho_1 << R$. Hastigheten $(\omega\rho_1, \omega\rho_2)$ mye mindre enn rotasjonshastigheten (ωR) til stasjonen$\Longrightarrow$ $\omega\rho_1 << \omega R$ og $\omega\rho_2 << \omega R$.

$\Longrightarrow$

$$\ddot{\rho}_1 = -\omega^2 R \tag{210}$$
$$\ddot{\rho}_2 = 0 \tag{211}$$
$$\ddot{\rho}_3 = 0 \tag{212}$$

og da:

$$\overrightarrow{F}_q = m\,{}^p\vec{a} = -m \cdot \omega^2 R \vec{p}_1 \tag{213}$$

$m\omega^2 R$ er den samme med akselerasjon om origo A for p-systemet og den er også den "kunstige gravitasjonen".