OPPGAVESETT 3

Oppgave 1

Et objekt roteres ϕ grader rundt sin egen x akse, og deretter ψ grader rundt sin nye y akse. For Eulervinkler er orienteringen av objektet gitt ved: $R_x(\phi)R_y(\psi)$.

Hvis rotasjonene refereres til en fast referanseramme vil resultatet bli: $R_y(\psi)R_x(\phi)$.

Det kan se ut som rekkefølgen på mutiplikasjonen avhenger av om rotasjonene beskrives i forhold til en fast eller relativ referanseramme. Rotasjoner i en relativ referanseramme spesifiseres i den faste referanserammen ved similaritetstransformasjonen: $R_x(\phi)R_y(\psi)R_x^{-1}(\phi)$.

Denne similaritetstransformasjonen, der $R_x(\phi)$ multipliseres inn fra venstre, resulterer i uttrykket der det ser ut som rekkefølgen på multiplikasjonen er byttet om.

Utled rotasjonsmatrisen som er ekvivalent med $Z-Y-Z$ Eulervinklene (α, β, γ), ved å se på rotasjoner i en relativ referanseramme på denne måten.

Løsning: 1) Roterer først α grader om x akse: $R_z(\alpha)$.

2) Roterer β grader om objektets y akse (bruker similaritetstransformasjon): $R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha)R_z(\alpha)$.

3) Roterer γ grader om z akse (bruker similaritetstransformasjon):

$$R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)R_y^{-1}(\beta)R_z^{-1}(\alpha)R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha)R_z(\alpha).$$

4) Forenkler uttrykket: $R_{zyz}(\alpha,\beta,\gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)R_y^{-1}(\beta)R_z^{-1}(\alpha)R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha)R_z(\alpha) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$.

Dette er rotasjonsmatrisen for $Z-Y-Z$ Eulervinklene.

Oppgave 2

Finn differensiallikningen av en rotasjon i planet, det vil si rotasjon om z aksen, og sammenlikn med differensiallikningen av den generelle retningskosinmatrisen.

Løsning: Rotasjon i planet:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{82}$$

$$RR^T = \begin{bmatrix} \cos^2\theta+\sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta+\sin^2\theta \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \tag{83}$$

$$(R\dot{R}^T) = \dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0 \tag{84}$$

Definerer:

$$S = R\dot{R}^T \tag{85}$$

$$S + S^T = \dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0 \Longrightarrow S \text{ er skjevsymetrisk} \tag{86}$$

S er skjevsymetrisk, og må ha formen: $\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}$

$$\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0 \Longrightarrow \dot{R} = -R\dot{R}^T R = -S^T R = SR \tag{87}$$

Differensiallikningen for R:

$$\begin{aligned}\dot{R} &= \begin{bmatrix} -\dot{\theta}\sin\theta & -\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\theta}\cos\theta & -\dot{\theta}\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &=: \begin{bmatrix} \omega\sin\theta & \omega\cos\theta \\ -\omega\cos\theta & \omega\sin\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{88}$$

Fra dette ser vi at:

$$\omega = -\dot{\theta} \tag{89}$$

Slik at:

$$\dot{R} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}\sin\theta & -\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\theta}\cos\theta & -\dot{\theta}\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} \\ \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = SR \tag{90}$$

Samme form som for den generelle retningskosinmatrisen. Rotasjon i planet er et spesialtilfelle av rotasjon i tre dimensjoner, der rotasjon foregår om z aksen:

$$R = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{91}$$

$$\dot{R} = SR = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & \omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{92}$$

$$=: \begin{bmatrix} -\omega_z\sin\theta & -\omega_z\cos\theta & \omega_y \\ \omega_z\cos\theta & -\omega_z\sin\theta & \omega_x \\ -\omega_y\cos\theta + \omega_x\sin\theta & \omega_y\sin\theta + \omega_x\cos\theta & 0 \end{bmatrix} \tag{93}$$

Ingen rotasjon om x og y aksen slik at $\omega_x = \omega_y = 0$.

$$\begin{aligned}\dot{R} &= SR = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & 0 \\ \omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &=: \begin{bmatrix} -\dot{\theta}\sin\theta & -\dot{\theta}\cos\theta & 0 \\ \dot{\theta}\cos\theta & -\dot{\theta}\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$