OPPGAVESETT 6

Oppgave 1

Finn likningen til bevegelsen av en rakett, det vil si et fartøy som produserer puff ved å kaste ut masse. Raketten er et variabel-masse system og vi antar at det ikke utøves noen ytre krefter på systemet.

Løsning: Raketten har masse $m(t)$ og beveger seg med hastighet $v(t)$ i et tidspunkt t.

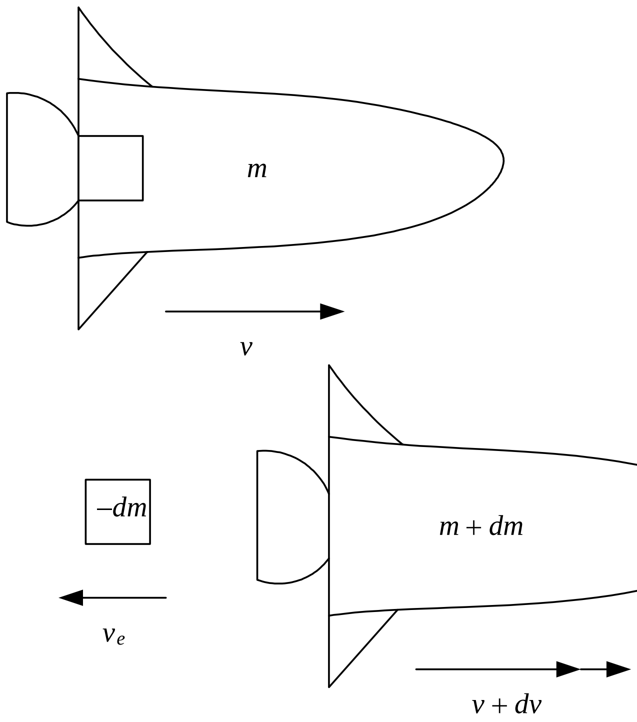

Figure 6:

Bevegelsen av en rakett (ingen ytre krefter):

I følge Newtons andre lov

$$\overrightarrow{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \neq m\vec{a} + \frac{dm}{dt}\vec{v} \tag{214}$$

Denne likningen er ikke riktig

Anta dynamisk system med partikler:

a) rakett

b) brennstoff

Massefarten i tidspunkt t er:

$$P(t) = m(t)\vec{v}(t) \tag{215}$$

masse $m(t)$ og hastighet $v(t)$.

Etter et tidsintervall dt, beveger ikke partiklene i systemet seg med samme hastighet. I løpet av tiden dt ble brennstoffet dm kastet ut fra resten av systemet. Massefarten i tidspunkt $t + dt$ er:

$$P(t + dt) = \underbrace{m(t + dt)\vec{v}(t + dt)}_{\text{massefarten av raketten}} + \underbrace{(m(t) - m(t + dt))}_{\text{massefarten av kastet brennstoff } |dm|}(\vec{v}(t) + \vec{v}_k(t + dt)) \tag{216}$$

$m(t+dt) = m(t) + dm$; hvor dm er negativ

$v(t+dt) = v(t) + dv$; hastighet av raketten i $t+dt$ sett fra treghetssystemet

$m(t) - m(t+dt) = -dm$

$\vec{v}_k(t)$; hastighet av brennstoff sett fra raketten

$\vec{v}(t) + \vec{v}_k(t)$; hastighet av brennstoff sett fra treghetssystemet

$$\overrightarrow{P}(t+dt) = (m+dm)(\vec{v}+d\vec{v}) - dm(\vec{v}+\vec{v}_k) \tag{217}$$

Ingen ytre krefter $\Longrightarrow \overrightarrow{F} = \dot{\overrightarrow{P}} = 0$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P}(t+dt) &= \overrightarrow{P}(t) \Longrightarrow (m+dm)(\vec{v}+d\vec{v}) - dm(\vec{v}+\vec{v}_k) = m\vec{v} && (218)\\
&\Longrightarrow m\vec{v} + dm\vec{v} + md\vec{v} + dmd\vec{v} - dm\vec{v} - dm\vec{v}_k = m\vec{v} && (219)\\
&\Longrightarrow md\vec{v} - dm\vec{v}_k = 0 && (220)\\
&\Longrightarrow m\frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} \Longrightarrow m\vec{a} = \frac{dm}{dt}\vec{v}_k && (221)
\end{aligned}$$

$\frac{dm}{dt}$; puff (negativ)

$\vec{v}_k$; uttømmerhastighet, motsatt retning med $\vec{a}$

Varierer fra (214) for at $\vec{v} \neq \vec{v}_k$. For at raketten akselererer med en akselerasjon $\vec{a}$, må den kaste ut "puffen" $\frac{dm}{dt}$ i motsatt retning, med uttømmerhastighet $\vec{v}_k$.

Bevegelseslikningen er (uten vektornotasjon)

$$m\frac{dv}{dt} = -v_k\frac{dm}{dt} \tag{222}$$

Setter $-dm$ for dm positiv. Jeg antar at v_k kan bestemmes (propulation technology - fremdrift teknologi). Variablene er v og m ((222) mulitplisert med dt):

$$\begin{aligned}
m \cdot dv &= -v_k \cdot dm && (223)\\
dv &= -v_k \cdot \frac{dm}{m} && (224)\\
\int_0^v dv &= -v_k \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} && (225)
\end{aligned}$$

hvor man antar at man begynner med 0 hastighet og initial masse m_0.

$$\begin{aligned}
v &= -v_k(\ln m - \ln m_0) && (226)\\
v &= -v_k \ln\frac{m}{m_0} && (227)\\
v &= v_k \ln\frac{m_0}{m} && (228)
\end{aligned}$$

som gir rakettlikningen.

Utkjørt hastigheten er avhengig av uttømt hastighet og hvor mye av fartøyets vekt som er drivstoff.

Forskjell mellom fly og rakett:

* Fly har tomrom, mens rakett er full av brennstoff.

* Rakett skal ha utkjørt hastighet lik uttømt hastighet hvis masseraten er $\frac{m_0}{m} = e$ og utkjørt hastighet er større enn uttømt hastighet når $\frac{m_0}{m} > e$.

Oppgave 2

a) Finn defferensiallikningen for pendelens bevegelse ved hjelp av Newtons andre lov.

Løsning:

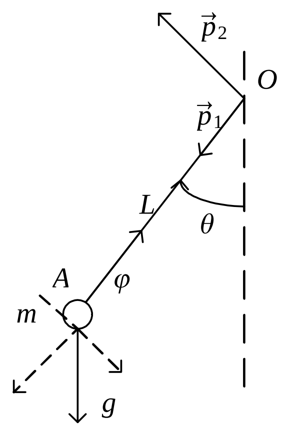

Figure 7:

Bevegelse av en pendel i vertikalplanet:

Differensiallikningen for bevegelsen ved hjelp av Newton's 2. lov. Vi kan igjen definere to system:

q**-treghetssystemet**

* O origo

* $\vec{q}_3$: ortogonal på vektorplanet, peker inn i arket

* $\vec{q}_1, \vec{q}_2$: vilkårlig

p**-systemet**

* Samme origo og $\vec{p}_3 \equiv \vec{q}_3$

* $\vec{p}_1$: langs OA, peker mot A

* $\vec{p}_2$: følger høyre-hånds regelen

Vi uttrykker alle vektorene ved hjelp av p-systemet. Vi får et problem med spennkraft T. Vi isolerer derfor T på $\vec{p}_1$-aksen og istedet for å bruke x og y koordinater, bruker vi bare θ som variabel.

A. Bevegelse sett fra p-systemet

* posisjon

$$\varphi = L\vec{p}_1 \tag{229}$$

* hastighet

$$^p\vec{v} = {}^p\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0 \tag{230}$$

* akselerasjon

$$^p\vec{a} = 0 \tag{231}$$

Vinkelhastigheten av p- relativ q-systemet er:

$$^q\vec{\omega}_p = \vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{p}_3 \quad (= \dot{\theta}\vec{q}_3) \tag{232}$$

Og siden den er tidsavhengig, får vi følgende vinkelakselerasjon:

$$^q\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right) = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\theta}\vec{p}_3 \quad (= \ddot{\theta}\vec{q}_3) \tag{233}$$

B. Bevegelse av pendelet sett fra q-systemet:

$$\begin{aligned}
{}^q\vec{a} &= \ddot{\vec{R}} + {}^p\vec{a} + \dot{\vec{\omega}} \times \varphi + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \varphi) + 2\vec{\omega} \times {}^p\vec{v} && (234)\\
&= \dot{\vec{\omega}} \times \varphi + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \varphi) && (235)\\
&= \ddot{\theta}\vec{p}_3 \times L\vec{p}_1 + \dot{\theta}\vec{p}_3 \times \left(\dot{\theta}\vec{p}_3 \times L\vec{p}_1\right) && (236)\\
&= \ddot{\theta}L\vec{p}_2 + \dot{\theta}\vec{p}_3 \times \left(\dot{\theta}L\vec{p}_2\right) && (237)\\
&= -\dot{\theta}^2 L\vec{p}_1 + \ddot{\theta}L\vec{p}_2 && (238)
\end{aligned}$$

Newtons andre lov:

$$\overrightarrow{F}_q = m{}^q\vec{a} = -m\dot{\theta}^2 L\vec{p}_1 + m\ddot{\theta}L\vec{p}_2 \tag{239}$$

hvor m er massen til pendelen. På pendelen er det utøvet to krefter, spennkraft $\overrightarrow{T} = -T\vec{p}_1$ og vekt $\vec{B} = m\vec{g} = mg\cos\theta \cdot \vec{p}_1 - mg\sin\theta\vec{p}_2$. Så:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_q &= \vec{T} + \vec{B} && (240)\\
-m\dot{\theta}^2 L\vec{p}_1 + m\ddot{\theta}L\vec{p}_2 &= -T\vec{p}_1 + mg\cos\theta \cdot \vec{p}_1 - mg\sin\theta\vec{p}_2 && (241)
\end{aligned}$$

På komponent form:

$$\begin{aligned}
\vec{p}_1 &: \quad -m\dot{\theta}^2 L = -T + mg\cos\theta && (242)\\
\vec{p}_2 &: \quad m\ddot{\theta}L = -mg\sin\theta && (243)
\end{aligned}$$

Første likning kalles equation of constrain. Den gir informasjon om mengden spennkraften T når θ er kjent. Andre likningen er bevegelses-differensiallikning (equation of motion) for pendelet (T er ikke med). I stedet for rektangulær koordinater......

b) Finn differensiallikningen til pendelens bevegelse ved hjelp av spinnsatsen. Pendelen har masse m og gravitasjonen er $g = 9.8m/s^2$.

Vi skal gjennom denne utledningen vise at vi kommer frem til den samme differensiallikningen av bevegelse av pendelen ved å bruke spinnsatsen. Vi begynner å se på spinn og momentum av pendelen. Begge er ulik null fordi vi har en rund bevegelse med varierende hastighet sett fra treghetssystemet.

Spinn av A rundt O:

$$\overrightarrow{H} = \varphi \times (m\,{}^q\vec{v}) = \varphi \times (m\,{}^q\dot{\varphi}) \tag{244}$$

hvor

$${}^q\dot{\varphi} = {}^p\dot{\varphi} + \vec{\omega} \times \varphi = 0 + \dot{\theta}L\vec{p}_2 \tag{245}$$

som gir:

$$\overrightarrow{H} = L\vec{p}_1 \times \left(m\dot{\theta}L\vec{p}_2\right) = mL^2\dot{\theta}\vec{p}_3 \tag{246}$$

Momentum av A rundt O:

Vi har pr. definisjon:

$$\overrightarrow{M} = \varphi \times \overrightarrow{F} \tag{247}$$

hvor $\overrightarrow{F} = \vec{T} + \vec{B} = -T\vec{p}_1 + mg\cos\theta \cdot \vec{p}_1 - mg\sin\theta\vec{p}_2$. Siden φ også er på $\vec{p}_1$, skal spennkraften og den komponenten av vekten som er på $\vec{p}_1$falle bort.

$$\overrightarrow{M} = -mgL\sin\theta\vec{p}_3 \tag{248}$$

Siden O er origo i treghetssystemet, vil $\overrightarrow{M} = \dot{\overrightarrow{H}}$.

$$\dot{\overrightarrow{H}} = {}^q\left(\frac{d}{dt}mL^2\dot{\theta}\vec{p}_3\right) = mL^2\ddot{\theta}\vec{p}_3 \tag{249}$$

Vi får $\overrightarrow{M} = \dot{\overrightarrow{H}}$:

$$-mgL\sin\theta\vec{p}_3 = mL^2\ddot{\theta}\vec{p}_3 \tag{250}$$

som på komponentform gir:

$$\vec{p}_3 : -mgL\sin\theta = mL^2\ddot{\theta} \tag{251}$$

Siden bevegelsen er en ren rotasjon i dette tilfellet, definerer momentum-differensiallikningen av bevegelsen.