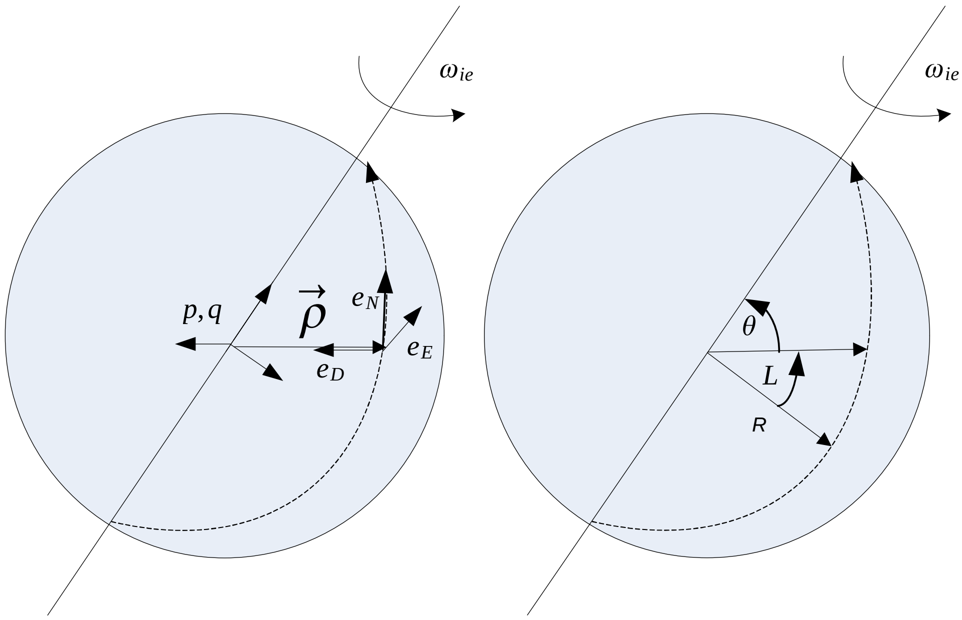
OPPGAVESETT 4

Oppgave 1

En partikkel beveger seg østover med konstant hastighet v_E relativt bakken på en roterende jord på breddegrad L. Finn akselerasjonen av bevegelsen sett fra treghetssystemet utrykt ved tangentvektoren $\vec{e}_E$. Anta at jorda er sfærisk med radius R og rotasjonshastighet $\vec{\omega}_{ie}$.



Løsning:

1) Definerer systemene:

$q = i$: treghetssystem, sentrum i jorden, fast i forhold til fiksstjernene.

$p = e$: (e=earth) jordfast system, sentrum i jorden, dreier med jorden.

n: geografisk aksekors på jordoverflaten.

$\vec{e}_N$: nordover langs meridianen.

$\vec{e}_E$: østover parallelt med ekvator.

$\vec{e}_D$: peker mot sentrum av jorden (antar at jorda er sfærisk).

2) Beskriver problemet basert på de definerte systemene og utleder matematiske formler som gir svaret:

Lengden av et kryssprodukt:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \angle \vec{u}\vec{v}$$

Formlene for hastighet og akselerasjon i q- og p-basisene

$$\left.\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_{qp} + \vec{\rho} \\ {}^q\vec{v} &= \dot{\vec{r}}_{qp} + {}^p\vec{v} + \vec{\omega}_{qp} \times \vec{\rho} \\ {}^q\vec{a} &= {}^q\ddot{\vec{r}}_{qp} + {}^p\vec{a} + {}^q\dot{\vec{\omega}}_{qp} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_{qp} \times (\vec{\omega}_{qp} \times \vec{\rho}) + 2\vec{\omega}_{qp} \times {}^p\vec{v} \end{aligned}\right\}$$

a) Se på posisjon (Illustrasjon).

b) Origo av i og e faller sammen ($\vec{r}_{ie} = 0$). Posisjonen av partikkelen er den samme som posisjon av origo for n og bestemt med vektor $\vec{\rho}$.

$$\vec{r} = \vec{\rho} \tag{94}$$

b) Ser på hastighet sett fra i-systemet.

$$^i\vec{v} = {}^e\vec{v} + \vec{\omega}_{ie} \times \vec{\rho} \tag{95}$$

Ser videre på $\vec{\omega}_{ie} \times \vec{\rho}$:

$\vec{\omega}_{ie}$ og $\vec{\rho}$ definerer et plan. Siden jorden er sfærisk, ligger $\vec{e}_N$ på dette planet (krysser $\vec{\omega}_{ie}$ langs rotasjonsaksen). $\vec{\omega}_{ie} \times \vec{\rho}$ er (90°) ortogonal på dette planet. $\vec{e}_E$ er (pr. definisjon) også ortogonal på planet ($\vec{e}_E \perp \vec{e}_D$, $\vec{e}_E \perp \vec{e}_N$). $\vec{\omega}_{ie} \times \vec{\rho}$ er langs $\vec{e}_E$ (øst-vest retning).

$$\begin{aligned} |\vec{\omega}_{ie} \times \vec{\rho}| &= |\vec{\omega}_{ie}||\vec{\rho}| \sin \angle \vec{\omega}_{ie}, \vec{\rho} = \omega_{ie} R \cos L \\ \Longrightarrow & \quad \vec{\omega}_{ie} \times \vec{\rho} = \omega_{ie} R \cos L \cdot \vec{e}_E \end{aligned} \tag{96}$$

Ser på ${}^e\vec{v}$:

${}^e\vec{v}$ uttrykkes i n-systemet. Pr. definisjon har vi:

$${}^e\vec{v} = 0\vec{e}_N + v_E \vec{e}_E + 0\vec{e}_D \tag{97}$$

Dette fordi bevegelsen er på jordoverflaten og østover.

$${}^i\vec{v} = \omega_{ie} R \cos L \cdot \vec{e}_E + v_E \vec{e}_E = (\omega_{ie} R \cos L + v_E)\vec{e}_E \tag{98}$$

Dette resultatet kunne vi satt opp direkte fordi farten til partikkelen i treghetsromme fås som summen av jordas hastighet ved partikkelen, $\omega_{ie} R \cos L$ pluss farten relativt bakken, v_e. Og retningen må være tangensielt til banen, dvs $\vec{e}_E$

c) Ser på akselerasjonen sett fra i-systemet.

$${}^i\vec{a} = \frac{{}^i d}{dt}{}^i\vec{v} = \frac{{}^e d}{dt}{}^i\vec{v} + \vec{\omega}_{ie} \times {}^i\vec{v} \tag{99}$$

$\frac{{}^e d}{dt}{}^i\vec{v} \neq 0$ fordi hastighetsvektoren ${}^i\vec{v}$ ikke er konstant relativt bakken (men har konstant lengde), den vil dreie seg med en vinkelhastighet $\vec{\omega} = \vec{e}_z^{\,i} v_E / R \cos L$ (punktet vandrer rundt jorda på meridianen L hvor avstanden fra jordas rotasjonsakse er $R \cos L$).

$$\begin{aligned} {}^i\vec{a} &= \vec{\omega} \times {}^i\vec{v} + \vec{\omega}_{ie} \times {}^i\vec{v} & (100) \\ &= (\vec{\omega} + \omega_{ie}) \times {}^i\vec{v} & (101) \\ &= \left(\frac{v_E}{R \cos L} + \omega_{ie}\right) (\omega_{ie} R \cos L + v_E)\, \vec{e}_z^{\,e} \times \vec{e}_E & (102) \\ &= \frac{(\omega_{ie} R \cos L + v_E)^2}{R \cos L} \vec{e}_z^{\,e} \times \vec{e}_E & (103) \end{aligned}$$

Dette resultatet for akselerasjonen i treghetssystemet kunne vi sett direkte fra utrykket for hastighet:

$${}^i\vec{v} = (\omega_{ie} R \cos L + v_E)\vec{e}_E$$

fordi partikkelen beveger seg med konstant fart ($\omega_{ie} R \cos L + v_E$) på en sirkelbane med radius $R \cos L$ i treghetsrommet blir akselerasjonen $fart^2/radius$ med retning inn mot rotasjonsaksen, her:

$$\frac{(\omega_{ie} R \cos L + v_E)^2}{R \cos L} \vec{e}_z^{\,e} \times \vec{e}_E$$

Oppgave 2

For et legeme i fritt fall nær jordoverflaten, finn Coriolis kraft og bruke den til å finne avbøyningen i øst-vest retning fra høyden $d = 100m$ på ekvator i forhold til treghetssystemet.

Løsning: Vi har her de samme systemer som i oppgave 1: i, e og n.

I stedet for å utlede likningen for ${}^i\vec{a}$, benytter vi oss av den generelle formelen for $\vec{a}$.

$${}^i\vec{a} = {}^i\ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}}_{ie} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_{ie} \times (\vec{\omega}_{ie} \times \vec{\rho}) + 2\vec{\omega}_{ie} \times {}^e\vec{v} + {}^e\vec{a} \tag{104}$$

Hvor $\ddot{\vec{R}} = 0$, $\dot{\vec{\omega}}_{ie} = 0 \Longrightarrow \dot{\vec{\omega}}_{ie} \times \vec{\rho} = 0$.

Ser på neste ledd $\vec{\omega}_{ie} \times (\vec{\omega}_{ie} \times \vec{\rho}\ )$:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{ie} \times \vec{\rho} &= \omega_{ie}\rho\cos L \cdot \vec{e}_E & (105)\\ &\Longrightarrow \vec{\omega}_{ie} \times (\vec{\omega}_{ie} \times \vec{\rho}) = \omega_{ie}\rho\cos L \cdot (\vec{\omega}_{ie} \times \vec{e}_E) & (106) \end{aligned}$$

hvor $\vec{\omega}_{ie} \times \vec{e}_E$ er ortogonal til $\vec{e}_E$.

Ser på det tredje leddet $2\vec{\omega}_{ie} \times {}^e\vec{v}$:

${}^e\vec{v} = {}^n\vec{v} \longmapsto$ ingen dreining mellom e og n.

${}^n\vec{v}$ er langs $\vec{e}_D$-aksen.

$\vec{\omega}_{ie} \times {}^e\vec{v}$ er langs $\vec{e}_E$-aksen (ortogonal på planet definert av $\vec{\omega}_{ie}$ og $\vec{e}_D$).

$$2\vec{\omega}_{ie} \times {}^e\vec{v} = 2\omega_{ie}v_D\cos L \cdot \vec{e}_E \qquad (107)$$

Ser på det siste leddet ${}^e\vec{a}$:

${}^e\vec{a}$ er langs $\vec{e}_D$-aksen (fritt fall, ingen dreining mellom e og n).

$${}^e\vec{a} = \vec{a}_D\vec{e}_D \qquad (108)$$

Dette gir:

$${}^i\vec{a} = \underbrace{\omega_{ie}\rho\cos L \cdot (\vec{\omega}_{ie} \times \vec{e}_E)}_{\vec{\omega}_{ie}\times(\vec{\omega}_{ie}\times\vec{\rho})} + \underbrace{2\omega_{ie}v_D\cos L \cdot \vec{e}_E}_{2\vec{\omega}_{ie}\times{}^e\vec{v}} + \underbrace{\vec{a}_D\vec{e}_D}_{{}^e\vec{a}} \qquad (109)$$

Coriolis er:

$$\begin{aligned} \vec{F}_c &= -2m\vec{\omega}_{ie} \times {}^e\vec{v} & (110)\\ &= -2m\omega_{ie}v_D\cos L \cdot \vec{e}_E \end{aligned}$$

Coriolis er langs øst-vest retningen når det er bevegelse på jorden.

Akselerasjon på øst-vest retning er bare coriolis-akselerasjon.

$$\begin{aligned} {}^i\vec{a}_E\vec{e}_E &= 2\omega_{ie}v_D\cos L \cdot \vec{e}_E & (111)\\ \vec{a}_E &= 2\omega_{ie}v_D\cos L & (112)\\ &\Longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega_{ie}v_D\cos L & (113) \end{aligned}$$

hvor x er lengden i øst-vest retning.

$v_D = g \cdot t$ (påvirkning av coriolis i e_D retning er veldig liten).

$d = \frac{1}{2}g \cdot t^2 \Longleftrightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \int_0^t 2\omega_{ie}v_D\cos L dt = 2\omega_{ie}\cos L \cdot g\int_0^t t\ dt & (114)\\ &= 2\omega_{ie}\cos L \cdot g \cdot \frac{t^2}{2} = \omega_{ie}\cos L \cdot g \cdot t^2 & (115) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t \omega_{ie}\cos L \cdot g \cdot t^2 dt = \frac{1}{3}\omega_{ie}g\cos L \cdot t^3 & (116)\\ &\Longrightarrow \frac{1}{3}\omega_{ie}g\cos L\left(\sqrt{\frac{2d}{g}}\right)^3 = \frac{1}{3}\omega_{ie}\cos L\sqrt{\frac{(2d)^3}{g}} & (117) \end{aligned}$$

$$\omega_{ie} = \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 3600}\right)\left(\frac{366,5}{365,5}\right) = 7,292 \cdot 10^{-5}\,\text{sec}^{-1} \qquad (118)$$

hvor første leddet representerer vinkelhastigheten relativ radius-vektor av solen. Andre leddet representerer raten av antall stjernedager i ett år, to tilsvarende av sol-dager. Dette leddet kalles korreksjonsfaktor og gir vinkelhastigheten relativt til stjernene.

Gitt: $L = 0 \Longrightarrow \cos L = 1$, $d = 100m$, $g = 9,78043m/\sec^2$

$\Longrightarrow x \cong 0,022m \Longrightarrow 2,2cm$

Coriolis:

Coriolis kraft er

$$F_c = -2m(\vec{\omega}_{ie} \times^e \vec{v}) \tag{119}$$

det vil si ortogonal på begge $\vec{\omega}$, $\vec{v}$ retninger. På nordlig halvkule vil $\vec{\omega}$ peke ut fra bakken. Coriolis peker til høyre for bevegelsesretningen når vi beveger på jordoverflaten.

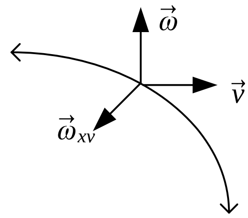


Figure 2:

På sørlig halvkule vil coriolis ha omvendt retning. På ekvator vil $F_{\text{coriolis}} = 0$ ($\vec{\omega}$ langs $\vec{v}$). På nordpolen får coriolisen størst verdi med akselerasjonen: $a_c = 2\omega v \cong 1,5 \cdot 10^{-4} v$.