# OPPGAVESETT 2

## Oppgave 1

*Koordinatsystemet $A$ er et kartesisk koordinatsystem med basisvektorer $\underline{x}^A, \underline{y}^A, \underline{z}^A$.*

*a) Vektoren $\underline{p}^A$ roteres først en vinkel $\theta$ om aksen $\underline{z}^A$ og deretter en vinkel $\phi$ om aksen $\underline{x}^A$. Finn rotasjonsmatrisen som utfører disse to rotasjonene på $\underline{p}^A$ i den gitte rekkefølgen.*

**Løsning:**

$$\begin{aligned}
R &= R(\phi)R(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \cos(\phi)\sin(\theta) & \cos(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi)\sin(\theta) & \sin(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \frac{1}{2}\sin(\phi+\theta) + \frac{1}{2}\sin(-\phi+\theta) & \frac{1}{2}\cos(-\phi+\theta) + \frac{1}{2}\cos(\phi+\theta) & -\sin(\phi) \\ \frac{1}{2}\cos(-\phi+\theta) - \frac{1}{2}\cos(\phi+\theta) & \frac{1}{2}\sin(\phi+\theta) - \frac{1}{2}\sin(-\phi+\theta) & \cos(\phi) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

b) *Vektoren $\underline{p}^A$ roteres først $30^\circ$ om aksen $\underline{y}^A$ og deretter $45^\circ$ om aksen $\underline{x}^A$. Finn rotasjonsmatrisen som utfører disse to rotasjonene på $\underline{p}^A$ i den gitte rekkefølgen.*

**Løsning:**

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ 0 & \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) & -\sin(\frac{\pi}{6}) & 0 \\ \sin(\frac{\pi}{6}) & \cos(\frac{\pi}{6}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{61}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \end{bmatrix} \tag{62}$$

## Oppgave 2

*$R_B^A$ er en $3 \times 3$ matrise med egenverdiene $1, e^{-\alpha i}, e^{\alpha i}$, der $i = \sqrt{-1}$. Hva er den fysiske tolkningen av egenvektoren til $R_B^A$ som er assosiert med egenverdien $1$?*

**Løsning:**

$$R_B^A = M\Lambda M^{-1} \tag{63}$$

$R_B^A$ kan diagonaliseres fordi den har distinkte egenverdier.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\alpha i} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\alpha i} \end{bmatrix} \tag{64}$$

$(M\Lambda M^{-1} - \lambda I)m = 0 \implies M\Lambda M^{-1}m - \lambda Im = 0 \implies \Lambda q - \lambda Iq = 0 \implies (\Lambda - \lambda I)q = 0$. Der $q = M^{-1}m$.

$\lambda = 1:$

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\alpha i} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\alpha i} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; q_1 = \begin{bmatrix} t_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{65}$$

$\lambda = e^{-\alpha i}$ :

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\alpha i} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\alpha i} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ t_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{66}$$

$\lambda = e^{\alpha i}$ :

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\alpha i} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\alpha i} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) q_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; q_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t_3 \end{bmatrix} \tag{67}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{68}$$

$$\Lambda x = \begin{bmatrix} x_1 \\ e^{-\alpha i} x_2 \\ e^{\alpha i} x_3 \end{bmatrix}, \text{Rotasjon om } q_1 \text{med vinkelen } \alpha \tag{69}$$

$R_B^A = M \Lambda M^{-1} x$, $x$ transformeres over til egenvektorens koordinatsystem, roteres en vinkel $\alpha$ om $q_1$ og transformeres tilbake igjen.

## Oppgave 3

a) *I tillegg til katesiske koordinater, kan punkter beskrives i sylindriske koordinater. De tre koordinatene er definert som i figuren i oppgaveteksten. Koordinaten $\theta$ gir retningen i $xy$ planet som punktet skal translateres med lengden $r$. Høyden over $xy$ planet angis av koordinaten $z$. Finn de kartesiske koordinatene til $\underline{p}^A$ uttrykt med de sylindriske koordinatene, og finn de sylindriske koordinatene for vektoren uttrykt med de kartesiske koordinatene.*

**Løsning:** Kartesisk $(x, y, z)$:

$$x = r\cos\theta \tag{70}$$
$$y = r\sin\theta \tag{71}$$
$$z = z \tag{72}$$

Sylindrisk $(r, \theta, z)$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{73}$$
$$\theta = arc\tan(\frac{y}{x}) \tag{74}$$
$$z = z \tag{75}$$

b) *Punktet kan også beskrives i sfæriske koordinater. De tre koordinatene er definert som i figuren i oppgaveteksten. Koordinatene $\alpha$ og $\beta$ gir vinkelen til henholdsvis $\underline{x}^A$ og $\underline{y}^A$ aksen. Koordinaten $r$ angir avstanden fra origo og retningen beskrevet av $\alpha$ og $\beta$ til punktet $\underline{p}^A$. Finn de kartesiske koordinatene til $\underline{p}^A$ uttrykt med de sfæriske koordinatene, og finn de sfæriske koordinatene for vektoren uttrykt med de kartesiske koordinatene.*

**Løsning:** Kartesisk $(x, y, z)$:

$$x = r\cos\alpha\cos\beta \tag{76}$$
$$y = r\sin\alpha\cos\beta \tag{77}$$
$$z = r\sin\beta \tag{78}$$

Stærisk $(r, \alpha, \beta)$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{79}$$

$$\alpha = \arctan(\frac{y}{x}) \tag{80}$$

$$\beta = \arctan(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}) \tag{81}$$