Innlevering 5 UNIK4380 Fotoniske krystaller

av Furkan Kaya

Problem I Vi skal bruke uttrykk (1.5) til å derivere et uttrykk ut i fra $\eta = \eta_2(0)$. I den har vi at impedansen må være den samme på begge sider av interfacen $z=0$.

$$\eta_2 \frac{1+\Gamma_2}{1-\Gamma_2} = \eta_2(0) = \eta_1 \frac{1+\Gamma_1}{1-\Gamma_1}$$

for Γ_2:

$$\eta_2 (1+\Gamma_2) = \eta_2(0)(1-\Gamma_2)$$

$$\eta_2 + \eta_2\Gamma_2 = \eta_2(0) - \eta_2(0)\Gamma_2$$

$$\eta_2 - \eta_2(0) = -\eta_2\Gamma_2 - \eta_2(0)\Gamma_2$$

$$\frac{\eta_2 - \eta_2(0)}{-\eta_2 - \eta_2(0)} = \Gamma_2$$

for Γ_1:

$$\eta_2(0) = \eta_1 \frac{1+\Gamma_1}{1-\Gamma_1}$$

$$\eta_2(0)(1-\Gamma_1) = \eta_1(1+\Gamma_1)$$

$$\eta_2(0) - \eta_2(0)(\Gamma_1) = \eta_1 + \eta_1\Gamma_1$$

$$\eta_2(0) - \eta_1 = \eta_1 \Gamma_1 + \eta_2(0)\Gamma_1$$

$$\eta_2(0) - \eta_1 = \left(\eta_1 + \eta_2(0)\right)\Gamma_1$$

$$\Gamma_1 = \frac{\eta_2(0) - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2(0)}$$

Problem 2 Vi skal først vise at $\eta_2(-d_1) = \eta_2(d_2)$. Dette gir oss da ettersom $\eta_1 = \eta_2$, så

$$\eta_1 \frac{1 + \Gamma_1 \exp(-2ik_1 d_1)}{1 - \Gamma_1 \exp(2ik_1 d_1)} = \eta_2 \frac{1 + \Gamma_2 \exp(-2ik_2 d)}{1 - \Gamma_2 \exp(-2ik_2 d_2)}$$

hvor $\eta_2 \frac{1 + \Gamma_2}{1 - \Gamma_1} = \eta_1 \frac{1 + \Gamma_1}{1 - \Gamma_1}$.

som gir $\eta_2 \frac{\exp(2ik_1 d_1)}{\exp(2ik_1 d_1)} = \frac{\exp(-2ik_2 d_2)}{\exp(-2ik_2 d_2)} \eta_2$

som igjen gir $\eta_2(-d_1) = (d_2)\,\eta_2$

Så ser vi på den effektive impedansen til metamaterialet ved bruk av resultatene fra problem 1. Dette gjøres på neste side grunnet plassmangel på denne siden.

En powerserie er gitt av:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2$$

Dette gir oss for (a)

$$\eta_2(z) = n_0 n_1 + n_1^2 \left(\frac{1+\Gamma_1 \exp(-2ik_1 z)}{1-\Gamma_1 \exp(-2ik_1 z)} \right)$$

mens (10) blir

$$n_2(z) = n_0 n_2 + n_1 n_2 \left(\frac{1+\Gamma_2 \exp(-2ik_2 z)}{1-\Gamma_2 \exp(-2ik_2 z)} \right)$$

Dette igjen gir siden $n_1 \frac{1+\Gamma_1}{1-\Gamma_1} = \frac{1+\Gamma_2}{1-\Gamma_2} n_2$

$$n_0 n_1 + n_1 = (n_0 n_2 + n_1) \cdot \frac{k_2}{k_1}$$

$$\frac{n_0 n_1}{n_0 n_2} = \frac{k_2}{k_1} \quad \text{hvor } \frac{k_2}{k_1} = n$$

$$\frac{n_0}{n} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{hvor } \frac{n_2}{n_1} = n$$

Problem 3 Vi har da dette å forholde oss til fra oppgaveteksten:

$$k_{zp} = k_p \cos \varphi_p = \sqrt{k_p^2 - k_y^2}$$

$$k_y = k_1 \sin \varphi_1 = \sqrt{k_1^2 - k_{z1}^2}$$

$$k_y = k_2 \sin \varphi_2 = \sqrt{k_2^2 - k_{z2}^2}$$

Vi har $\eta_p = \dfrac{E_p}{\cos \varphi_p}$ som etter litt mellomregning gir oss:

$$\frac{\sin(k_{zp}(z - z_p))}{\cos(k_{zp}(z - z_p))} \cdot 1 = \tan(k_z)$$

Så legger vi til at superposisjonsprinsippet for de to lagene gir (og det for ligning (29))

$$\underline{\underline{k_y = k_{z1} \tan\left(k_{z1} \frac{d_1}{2}\right) + k_{z2} \tan\left(k_{z2} \frac{d_2}{2}\right)}}$$

Jeg må også nevne at kun $E_{xp}(z)$ og $H_{y\phi}(z)$ er kontinuerlige ved $z = 0$.