Innlevering 1 Fotoniske krystaller
av Turkan Kaya

Problem I Vi skal vise at (8) tilfredsstiller ligningen

$$e^2 - e\left[2\cos(k_1d_1 + k_2d_2) - \left(\frac{(k_1-k_2)^2}{k_1k_2}\right)s_1s\right.$$

$$+1 = 0$$

Vi har matrisen, M_1 s.t. $M_1 E(0) = E(d_1)$

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1/k_1 \\ -s_1k_1 & c_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E(0) \\ E'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(d_1) \\ E'(d_1) \end{bmatrix} \quad (1)$$

og matrisen, M_2: $M_2 E(d_1) = E(0)$

$$(2)\begin{bmatrix} c_2 & s_2/k_2 \\ -s_2k_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E(d_1) \\ E'(d_1) \end{bmatrix} = \exp(ikd)\begin{bmatrix} E(0) \\ E'(0) \end{bmatrix}$$

Vi setter (1) i (2) og får $M = M_1M_2$ eller $M\,E(0) = \exp(ikd)\,E(0)$

Dette gir oss

$$\begin{bmatrix} c_1c_2 - s_1s_2 & c_1s_2/k_2 - s_1c_2/k_1 \\ -k_1s_1c_1 - k_2c_1s_2 & -s_1s_2/k_1k_2 + c_1c_2 \end{bmatrix}$$

Egenverdien gis av:

$$\det(M - \exp(ikd) I) = 0 \qquad (1)$$

Hvis vi bruker den matematiske identiteten

$$\det(A - \lambda I) = \det A - Tr(A)\lambda + \lambda^2,$$

Så ser vi at (8) tilfredsstiller ligningen ettersom $e = \lambda$ og vi får med litt algebraisk omdanne ved forskjellige trigonometriske identiteter.

$$\begin{bmatrix} \cos(k_1 d_1 + k_2 d_2) & (k_1 - k_2)\sin(k_1 d_1 + k_2 d_2)/k_1 k_2 \\ (k_1 - k_2)(\sin(k_1 d_1 + k_2 d_2)) & \cos(k_1 d_1 + k_2 d_2) \end{bmatrix}$$

Ved bruk av (1)

$$e^2 - e(2\cos(k_1 d_1 + k_2 d_2)) + \cos^2(k_1 d_1 + k_2 d_2)$$

$$- \frac{(k_1 - k_2)^2 \cdot (\sin^2(k_1 d_1 + k_2 d_2))}{k_1 k_2}$$

Med litt utregninger ser vi at det stemmer altså..

Problem II: Vi skal vise at vi har et båndgap hvis

$$k_1 d_1 + k_2 d_2 = N\pi \text{, for relasjon (11)}$$

Her antydes at absolutt-verdien til høyrehåndsiden er over 1. Dette viser jeg på Matlab.

Relasjon (11) er gitt av

$$\cos(kd) = \cos(k_1 d_1 + k_2 d_2) - \frac{(k_1 - k_2)^2}{2 k_1 k_2} \sin(k_1 d_1) \cdot \sin(k_2 d_2)$$

Etter litt mellomregning får vi uttrykket

$$k(w) = \frac{1}{d} \cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{n_1 w}{c}\right)\cos\left(\frac{n_2 w}{c}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1}\right)\sin\left(\frac{n_1 w}{c}\right)\sin\left(\frac{n_2 w}{c}\right)\right] \quad (2)$$

Vi setter $c=1$, $n_1=1$, $n_2 = 1.5$ og $d=1$

Her kan vi allerede se at den ene cos har π multiplisert med 1 og den andre med 1.5. Ettersom $\cos(\pi) = 1$ og $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ får vi null. Det samme ser vi på sinus-leddet. $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$. Det gjør at svaret allerede er over 1 og gir båndgap. Men for sikkerhets skyld koder vi det i Matlab.

Matlab-koden:

```
w= [0: 0.1*pi : pi];

k= ((cos (w) .* cos(3.4 .* w)) - (0.5 .* (B1-4
./85) .* sin (w) .* sin (3.4) .* w));

plot (acos(k), w);
end
```

Selve plotten følger som vedlegg, men vi ser at det utvikler seg båndgap hvor det ikke er noen verdier. Samtidig legger jeg ved plotter hvor $n_1 = n_2 = 1$ og det ikke eksisterer båndgap for sammenligningsgrunnlag. De heter for vedlegg 1 og 2. I koden over satte jeg $n_1 = 1$ og $n_2 = 3.4$. Husk at $k = k_1 + k_2 =$ dispersjon relasjonen $= \pi N$.

Problem III:

Power-serie ekspansjon for cosinus er gitt av

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!}$$

Vi setter $x = k_1 d_1 + k_2 d_2 - N\pi$

Det gir

$$\cos(k_1 d_1 + k_2 d_2 - N\pi) = 1 - \frac{(k_1 d_1 + k_2 d_2 - N\pi)^2}{4}$$

Vi har også at

$$w_1 = \frac{k_1 c}{n_1} \quad \text{og} \quad w_2 = \frac{k_2 c}{n_2}$$, som fører til

$$0 = 1 - \frac{(w - N\pi)^2}{4} \Rightarrow 4 = (w - N\pi)^2$$

$$\pm 2 = w - N\pi \Rightarrow w_\Delta \approx \pm \frac{2}{\pi}$$

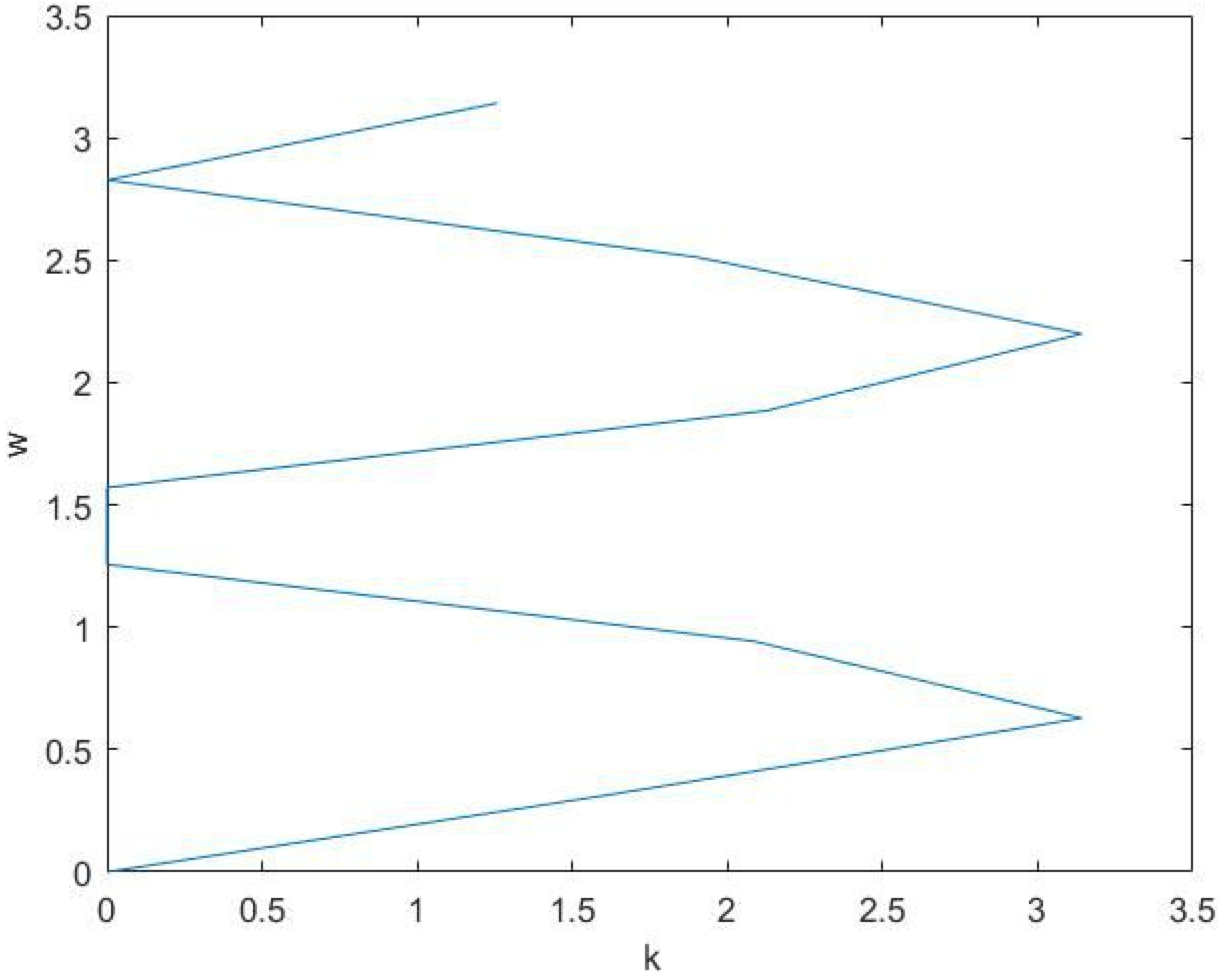
Dette kan stemme fordi det er omvendt proporsjonal til Brillouin-sone.

Problem 4: Så skal vi gjøre det samme for venstresiden for dispersjonsrelasjonen (11)

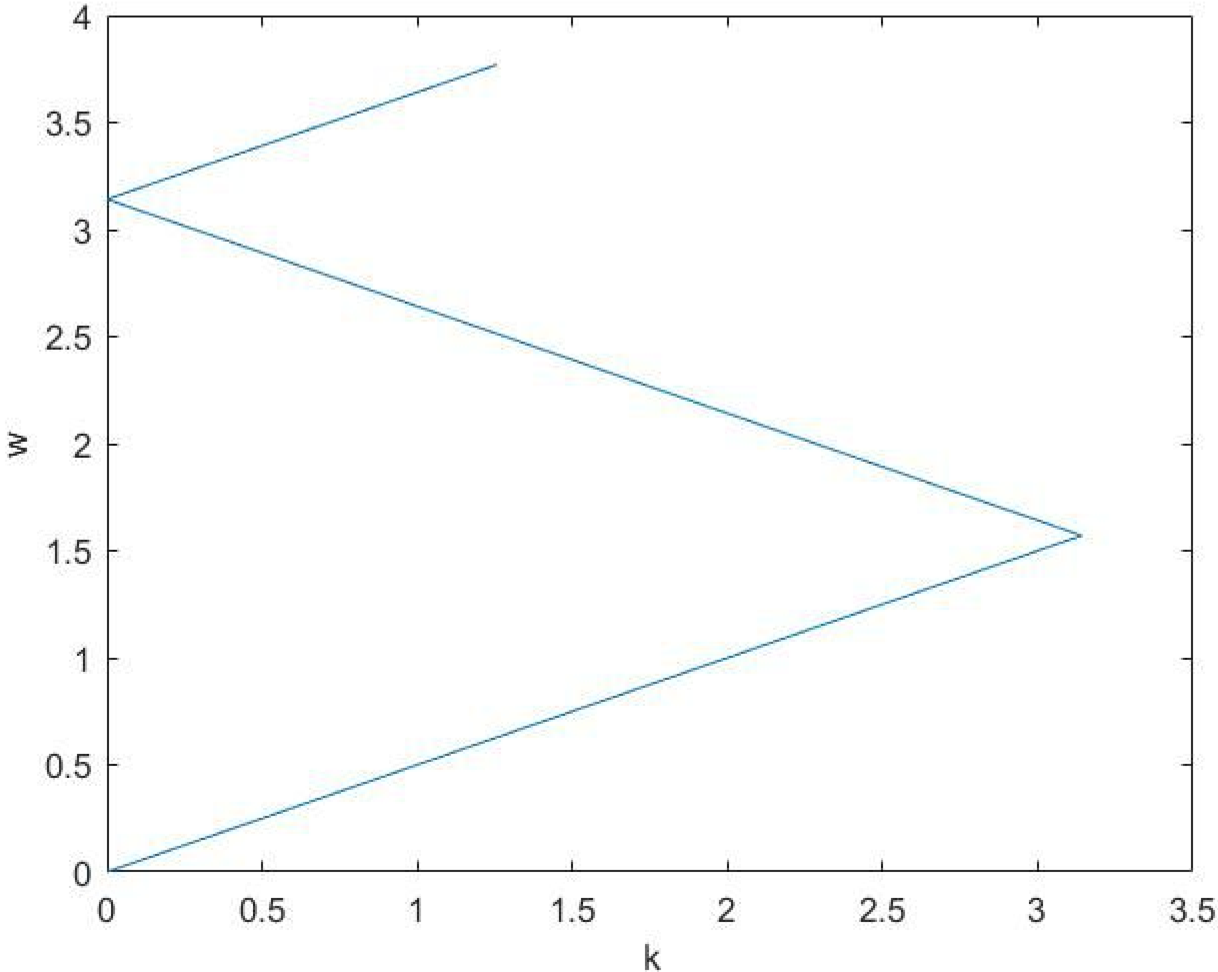
Her benytter jeg meg av tidligere utregnete (2) og dette bør gi meg:

$$k(w) = \frac{1}{d} \cos^{-1}\Big[\cos\left(\frac{n_1 N w_0}{c}\right)\cos\left(\frac{n_2 N w_0}{c}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1}\right)\sin\left(\frac{n_1 N w_0}{c}\right)\sin\left(\frac{n_2 N w_0}{c}\right)$$

Her bemerker jeg at $n_2 \doteq n_1 + n_\Delta <<< n_1$



3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
w
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
k



4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
w
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
k