Øving 2 Lineære operatører UNIK4380

av Furkan Kaiya

Problem I: Siden vi har den ene Bloch-bølgen, som H, så setter vi det andre feltet som E slik sedvanen er i elektromagnetismen. De to feltene har da hvert sitt magnetiske og elektriske felt, altså E_a, H_a og E_b, H_b.

Dette gir oss Lorentz reciprocitet teoremet:

$$\iiint_V \nabla \cdot (E_a \times H_b - E_b \times H_a)\, dv \qquad (1)$$

som er at man ser på effekten på de to feltene på hverandre.

Ved å benytte oss av divergensteoremet får vi

$$\oiint_S (E_a \times H_b - E_b \times H_a)\, dS$$

Ved uendelig er integralet null som en følge av det samme forholdet mellom E og H for begge kilder. Dette gir oss da

$$\oint_S (E_a \times H_b - E_b \times H_a)\, dS = 0$$

se som igjen gir

$$\oint_S E_a \times H_b \, dS = \oint_S E_b \times H_b$$

Vi ser altså at de er like og at det er en Hermitiansk operator. ~~Integral~~ by parts fungerer da på samme måte.

a) Vi skal vise at overflate integral bidragene forsvinner hvis Bloch er reell. Jeg gjør integrasjon by parts.

$u_k \cdot \exp(ikr - i\omega t)$ som blir

$$\int u_k \cdot \exp(ikr - i\omega t) = u \cdot k \cdot \exp(ikr - i\omega t)$$

$$- \int u \cdot k \cdot ir \cdot \exp(ikr - i\omega t)$$

$$= uk \cdot \exp(ikr - i\omega t) - \frac{uk^2}{2} \cdot ir \cdot \exp(ikr - i\omega t)$$

$$- \int \frac{uk^2}{2} \cdot (ir)^2 \cdot \exp(ikr - i\omega t) + C \quad (2)$$

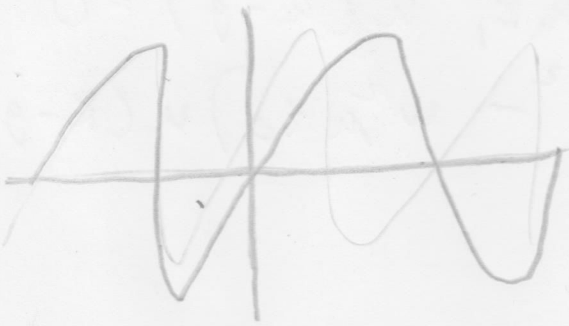
Når vi ser på overflate bidragene, så ser vi grenseverdiene (se på side 12). Det blir $k = 0$ og $k = \infty$

2

Da har vi fra matematikken at

$$\exp(0) = 1 \quad \text{og} \quad \exp(\infty) = \infty$$

Ved den ene grensen blir bidraget 0, mens det ved andre grensen gir periodisk som også gir null i bidrag. Det er periodisk fordi u_k er periodisk og en bølge er bestemt av cos og sin. De har like stort bidrag fra negativ som positiv og ekvaliserer hverandre



Bidraget er periodisk og like mye på positiv og negativ side.

En sinus-kurve

b) Når man refererer til en Bloch-bølgen som kunne evanescent, så betyr det at det er en travelling Bloch-bølge.

Vi ser på delvis integrasjon igjen:

Det elektriske feltet i et periodisk medium som et Fourier-integral er gitt som:

$$E = \int d^3k \cdot u(k) e^{ikx}$$ som blir til

$\int d^3k \times [k \times u(k)]\, e^{-ikx} = w^2 \mu \sum_G \int d^3k\, \varepsilon$
$u(k-G)\, e^{-ikx} \Rightarrow k \times [k \times u(k)] + w^2 \mu \sum_G \varepsilon$
$u(k-G) = 0$ for alle k. Her er også G
det resiprokale gitter.

Når vi skal finne bølgevektoren, K, kommer vi
frem til

$$(K^2 - w^2 \mu \varepsilon_0)\, u(k) - w^2 \mu \varepsilon_1\, u(k-g) = 0$$
$$-w^2 \mu \varepsilon_1\, u(k) + \left((K-g)^2 - w^2 \mu \varepsilon_0\right) u(K-g) = 0$$

Dette blir til

$$\det \begin{bmatrix} K^2 - w^2 \mu \varepsilon_0 & -w^2 \mu \varepsilon_1 \\ -w^2 \mu \varepsilon_{-1} & (K-g)^2 - w^2 \mu \varepsilon_0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(K^2 - w^2 \mu \varepsilon_0\right)\left((K-g)^2 - w^2 \mu \varepsilon_0\right) - (w^2 \mu \varepsilon_1)^2 =$$

Røttene for

$$w^2 = \frac{K^2}{\mu(\varepsilon_0 \pm \varepsilon_1)}$$

Mellom w_+ og w_- er røttene for K evanescent.
Her blir K en eksponentielt senkende og

gir moduser som kan gå fra grensene til e krystall, men kan ikke eksistere i bulken.

$\omega_+ - \omega_-$ representerer også det forbudte gap.

Problem 2: Vi har

$$\nabla \times \nabla \times E(r) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(r) E(r) \quad (26)$$

Den grunnleggende ideen bak perturbasjonsteori er enkel: når perturbasjonen er liten i forhold til den uperturberte ligningen, så gir perturbasjonsteori oss muligheten til å rette på løsninger til det uperturberte problem til å tilnærme en løsning på påvirkningen på perturbasjonen.

Vi finner eigenverdiene

$$E_n = E_n(0),\ \frac{1}{1}\frac{dE_n}{d\theta}\Big|_{\theta=0},\ \frac{1}{2!}\frac{d^2E_n}{d\theta^2}\Big|_{\theta=0},$$

$$\frac{1}{3!}\frac{d^3E_n}{d\theta^3}\Big|_{\theta=0}, \ldots$$

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_r(0),\ r\frac{d\varepsilon(r)}{d\theta},\ \frac{1}{2!}\frac{r^2 d\varepsilon(r)}{d\theta^2},$$

$$\frac{1}{3!}\frac{r^3 d\varepsilon(r)}{d\theta^3}$$

Dette blir da

$$\Delta W = -\frac{W}{2}\frac{\int d^3r\, \Delta\varepsilon\, |E(r)|^2}{\int d^3r\, \varepsilon\, |E(r)|^2} + O(\Delta\varepsilon^2)$$

Slik standard prosedyre for perturbasjonsteori tilsier. Vi har altså utført en ekspansjon på forrige side, men kutter det ut etter det første leddet $O(\Delta\varepsilon^2)$ fordi det ifølge teorien er tilstrekkelig.