Innlevering 3 Inversion symmetri

av Furkan Kaya

Problem I a) Vi skal vise at $E(r,w)$ og $H(r,w)$ har motsatt paritet når det fotoniske krystall har inversjon symmetri. Maxwells curl-ligninger er:

$$E_r = \frac{i}{w\varepsilon_0 \varepsilon_r} \nabla \times H_r \quad \text{og}$$

$$H_r = -\frac{i}{w\mu_0} \nabla \times E_r$$

Vi har at curl til en lik vektor er odde og at curl til en odde vektor er lik. Det gir da at

$$\nabla \times E_r = i w \mu_0 \cdot H_r$$

har motsatt paritet.

Så benytter vi oss av $\varepsilon(r) = \varepsilon(-r)$ for den andre ligningen, som da også blir

$$\nabla \times H_r = -i w \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot E_r$$

Her gir $\varepsilon(r) = \varepsilon(-r)$ motsatt paritet.

b) I matematikken og teoretisk fysikk, er en invariant en egenskap ved system som forblir uforandret ved en transformasjon. Vi skal i denne oppgaven vise dette for ligning 11 på side 35.

$$(ik+\nabla)\times \frac{1}{\varepsilon(r)}(ik+\nabla)\times u_k(r) = \left(\frac{\omega(k)}{c}\right)^2 \cdot u_k(r)$$

Vi inverterer så k og r separat fordi Bloch-ligningen består av de to variablene.

$$(-ik+\nabla)\times \frac{1}{\varepsilon(r)}(-ik+\nabla)\times u_{-k}(r) = \left(\frac{\omega(-k)}{c}\right)^2 \cdot u_{-k}(r) \quad \left[\text{inversjon av } k\right] \; (1)$$

$$(-ik+\nabla)\times \frac{1}{\varepsilon(-r)}(-ik+\nabla)\times u_{-k}(-r) = \left(\frac{\omega(-k)}{c}\right)^2 \cdot u_{-k}(-r) \quad \left[\text{inversjon av } r\right] \; (2)$$

Når $\varepsilon(r)$ har inversjonssymmetri er $\varepsilon(-r)$. (1) og (2) blir like.

Det gir da

$$\underline{\underline{\left(\frac{\omega(-k)}{c}\right)^2 \cdot u_{-k}(r) = \left(\frac{\omega(-k)}{c}\right)^2 \cdot u_{-k}(r)}}$$

c) Hva er forholdet mellom $H_{-k}(r, w)$ og $H_k(r, w)$ når $\varepsilon(r)$ har inversjonssymmetri.
Her har vi da tabellen på side 42 som viser at:

$$H_k(r) = u_k(r) \exp(ik \cdot r)$$

Når $\varepsilon(r)$ har inversjonssymmetri får vi at

$$H_k(-r) = u_k(-r) \exp(ik \cdot -r)$$
$$H_{-k}(r) = u_{-k}(r) \exp(ik \cdot r)$$
$$H_{-k}(-r) = u_{-k}(-r) \exp(-ik \cdot -r)$$

Dette gir oss da

$$H_k(r) = u_k(r) \exp(ik \cdot r) = H_{-k}(-r)$$

Vi har ikke noe forhold for $H_{-k}(r)$ og $H_k(r)$