

Versuchsprotokoll M1

Pendel

Protokoll zum Versuch Nummer M1 vom 03.11.2014

Christian Mannweiler, Robin Balske

Gruppe 5

christian.mannweiler@uni-muenster.de

r_bals02@wwu.de

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Ziel des Versuchs	1
1.2. Physikalische Grundlagen	1
1.2.1. Federpendel	1
1.2.2. Fadenpendel	1
1.2.3. gekoppelte Pendel	2
1.3. Stand der Literatur	3
1.4. Mess- und Auswertemethoden	3
1.4.1. Federpendel	3
1.4.2. Fadenpendel	3
1.4.3. gekoppeltes Pendel	4
2. Versuchsdurchführung	4
2.1. Federpendel	4
2.2. Fadenpendel	4
2.3. gekoppeltes Pendel	5
2.3.1. statische Bestimmung des Kopplungsgrades	5
2.3.2. dynamische Bestimmung des Kopplungsgrades	5
3. Versuchsauswertung- und Ergebnisse	6
3.1. Federpendel	6
3.2. Fadenpendel	6
3.3. gekoppeltes Pendel	6
3.3.1. statische Bestimmung des Kopplungsgrades	6
3.3.2. dynamische Bestimmung des Kopplungsgrades	6
3.3.3. Bestimmung der relativen Frequenzaufspaltung	7
3.4. Doppelpendel	7
4. Graphische Darstellung der Ergebnisse	8
4.1. Kopplung durch Cu-Feder	8
4.2. Kopplung durch Fe-Feder	11
5. Einordnung der Ergebnisse, Literaturvergleich und Diskussion	13

6. Physikalische Interpretation	13
A. Anhang	14
A.1. Fehlerrechnungen	14
A.1.1. Federpendel	14

1. Einleitung

1.1. Ziel des Versuchs

Im Versuch M1 sollte das Verhalten verschiedener Pendel betrachtet werden.

1.2. Physikalische Grundlagen¹

1.2.1. Federpendel

Am Federpendel gilt das Hooksches Gesetz $F = -Dx$. Zusammen mit dem 2. Newton'schen Axiom ergibt sich als Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x} + \frac{D}{m}x = 0 \quad (1.1)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \quad (1.2)$$

$$\text{mit } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

1.2.2. Fadenpendel

Beim Fadenpendel wirkt als Rückstellkraft $F_\varphi = -mg \sin \varphi$

Somit ist die Bewegungsgleichung mit dem zweiten Newtonschen Axiom:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (1.3)$$

Mithilfe der Kleinwinkelnäherung $\sin \varphi \approx \varphi$ vereinfacht sich diese Gleichung zu:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad (1.4)$$

mit der Lösung:

$$\ddot{\varphi}(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \quad (1.5)$$

$$\text{wobei } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

¹Grundlagen basierend auf [1–3]

1.2.3. gekoppelte Pendel

Bei gekoppelten Pendeln gibt es zwei Grundmoden: Wenn beide Pendel mit der gleichen Phase und Auslenkung schwingen gilt $\omega_0 = \omega_{gl}$. Wenn beide Pendel mit derselben Auslenkung und entgegengesetzter Phase schwingen gilt: $\omega_{geg} = \sqrt{1 + 2D_F/D_0}$ mit $D_0 = \frac{mg}{l}$ und $D_F = D_F' \frac{l}{L}$, wobei D_F' die Federkonstante der Kopplungsfeder ist, L die Gesamtlänge des Pendels und l die Länge des Pendels bis zur Aufhängung der Feder.

Die Bewegungsgleichungen im Allgemeinen lauten:

$$m\ddot{x}_1 = -D_0x_1 - D_F(x_1 - x_2) \quad (1.6)$$

$$m\ddot{x}_2 = -D_0x_2 - D_F(x_1 - x_2) \quad (1.7)$$

und werden durch folgende Gleichungen gelöst:

$$x_1 = x_0 \cos \left[\left(\frac{1}{2} \omega_{geg} - \omega_{gl} t \right) \right] \cdot \sin \left[\left(\frac{1}{2} \omega_{geg} + \omega_{gl} t \right) \right] \quad (1.8)$$

$$x_2 = x_0 \sin \left[\left(\frac{1}{2} \omega_{geg} - \omega_{gl} t \right) \right] \cdot \sin \left[\left(\frac{1}{2} \omega_{geg} + \omega_{gl} t \right) \right] \quad (1.9)$$

Für die Periodendauer ergibt sich $T = \frac{4\pi}{\omega_{geg} + \omega_{gl}}$ und für die Schwebungsdauer:
 $T = \frac{4\pi}{\omega_{geg} - \omega_{gl}}$

Darüber hinaus gibt es einen Kopplungsgrad, definiert durch

$$k := \frac{x_1}{x_2} \quad (1.10)$$

Er kann auf zwei verschiedene Arten bestimmt werden. Aus Betrachtung der Bewegungsgleichung im statischen Fall ergibt sich:

$$k = \frac{D_F}{D_0 + D_F} \quad (1.11)$$

Über die Grundfrequenzen ω_{geg} und ω_{gl} ergibt sich:

$$k = \frac{\omega_{geg}^2 - \omega_{gl}^2}{\omega_{geg}^2 + \omega_{gl}^2} \quad (1.12)$$

Nach Umformung erhält man für den Quotienten aus den beiden Kreisfrequenzen:

$$\frac{\omega_{geg}}{\omega_{gl}} = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \quad (1.13)$$

und daraus für die Frequenzaufspaltung

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} - 1 \quad (1.14)$$

Durch Taylorentwicklung erhalten wir als Näherung:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = k + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k^3 \quad (1.15)$$

1.3. Stand der Literatur

Die Normalfallbeschleunigung wurde bei $g_n = 9,806 \text{ m/s}^2$ festgelegt. Dieser Wert ist nicht überall gültig, da die Erde keine perfekte Kugel ist. In Anbetracht unserer Messungenauigkeiten ist er trotzdem mehr als ausreichend .

1.4. Mess- und Auswertemethoden

1.4.1. Federpendel

Die Position der Waagschale und dadurch die Auslenkung der Feder wurde durch Ablesen einer an der Wand angebrachten Skala mit 2 mm Genauigkeit durchgeführt. Die Genauigkeit aller Messungen der Auslenkung wurde mithilfe eines hinter die Waagschale gehaltenen Spiegels erhöht wodurch ein senkrechtes Ablesen gesichert wurde. Durch lang anhaltende kleine Oszillationen der Waagschale wurde die Messgenauigkeit dennoch beeinflusst, was den Fehler um schätzungsweise weitere 2 mm erhöhte. Die Massen der verwendeten Gewichte wurden von uns mit der digitalen Waage überprüft.

1.4.2. Fadenpendel

Der Radius der Kugel wurde über Messung des Durchmessers mit einer Schieblehre bestimmt. Die Länge der Pendelschnur wurde durch Anhalten eines Maßbandes abgelesen.

1.4.3. gekoppeltes Pendel

Die statische Auslenkung der beiden Pendel wurde über ein in Höhe der Pendelspitzen aufgestelltes Lineal abgelesen. Die Bestimmung der Auslenkung während der Schwingungen wurde hingegen über einen Ultraschall-Entfernungssensor vorgenommen, welcher an ein Laptop angeschlossen war. Auf diesem wurden die Messwerte in Echtzeit grafisch dargestellt. Gemessen wurde dabei der Abstand des rechten Pendels zum Entfernungssensor. Im Messprogramm war es möglich, für jede Messreihe über eine Fouriertransformation die Frequenz der Schwingung berechnen zu lassen. Der Umgang mit dem Programm und dem Sensor gestaltete sich allerdings schwierig, da sich Einstellungen oft verstellten, das Programm abstürzte und andere unerklärliche Fehler auftraten.

2. Versuchsdurchführung

2.1. Federpendel

Bei diesem ersten Versuchsteil sollte die Federkonstante D der Feder eines Federpendels auf zwei Arten bestimmt werden. Die erste Methode war die statische Bestimmung, bei welcher die Auslenkung der Feder aus der Ruhelage bei drei verschiedenen Gewichtsstücken die Grundlage der Berechnungen war. Hierzu wurde zuerst die Position der Waagschale in Ruhelage, also ohne zusätzliche Gewichtsstücke, gemessen. Danach wurden die Massestücke nacheinander auf die Waagschale gelegt und jeweils die resultierende Position erfasst. Die Differenz zur Ruheposition ergab die Auslenkung. Zuletzt wurden noch die Masse der Waagschale und der Feder bestimmt, da diese ebenfalls für die Berechnung benötigt werden.

2.2. Fadenpendel

Im zweiten Versuchsteil sollte die Erdbeschleunigung g durch die Schwingungsdauer eines Fadenpendels bestimmt werden. Hierzu wurde das Pendel bei drei verschiedenen Längen l um einen kleinen Winkel ausgelenkt und die benötigte Zeit für 50 Schwingungen gestoppt. Die Länge des Pendels wurde durch die Addition des Radius der Kugel und der Länge der Pendelschnur bestimmt.

2.3. gekoppeltes Pendel

Beim gekoppelten Pendel war die Aufgabe, den Kopplungsgrad k und die relative Frequenzaufspaltung $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ für 2 verschieden harte Federn (Kupfer und Eisen) zu bestimmen. Die Aufhängung der Feder wurde vorab auf einer Ebene ca. im zweiten Drittel der gesamten Pendellänge festgesetzt.

2.3.1. statische Bestimmung des Kopplungsgrades

Die erste Art der Bestimmung von k war die statische Bestimmung über die Auslenkung der Pendel. Hierzu wurde ein Pendel um $x_1 = (10,0 \pm 0,2)$ cm von der Ruheposition ausgelenkt. Dies resultierte in folgenden Auslenkungen des gekoppelten Pendels:

Kupferfeder $x_2 = (1,2 \pm 0,4)$ cm

Eisenfeder $x_2 = (2,1 \pm 0,4)$ cm

2.3.2. dynamische Bestimmung des Kopplungsgrades

Zu Beginn der Messungen wurde sichergestellt, dass die Schwingungsdauern beider Pendel übereinstimmten. Nach einer Einführung durch den Versuchsbetreuer in den Umgang mit dem Ultraschall-Entfernungssensor wurde die Schwingungsdauer $T_0 = (2,48 \pm 0,02)$ s eines einzelnen Pendels durch Stoppen der Dauer für 50 Schwingungen bestimmt. Dann wurde das Doppelpendel für jede Feder jeweils zu einer gleichsinnigen und gegensinnigen Schwingung angeregt. Mithilfe des Ultraschall-Entfernungssensors wurde die Schwingung aufgezeichnet. Die Periodendauer T_{gl} und T_{geg} konnte nun aus der vom Messprogramm berechneten Frequenz f_{gl} und f_{geg} berechnet werden.² Während des Versuchs wurde von uns festgestellt, dass es schwierig war eine gleichsinnige Schwingung in Gang zu bringen, da dort Schwebungen auftraten, sodass wir mehrere Versuche benötigten um diese Schwebungen gering zu halten. Bei den gegensinnigen Schwingungen trat dieses Problem nur in einem viel geringeren Maß auf.

Als nächstes wurde das System zu Schwebungen angeregt indem ein Pendel ausgelenkt wurde, während das andere auf der Ruhelage festgehalten wurde. Wenn nun beide Pendel gleichzeitig losgelassen wurden konnten zuverlässig Schwebungen produziert werden. Bei diesem Teil des Experiments traten allerdings massive Fehler mit dem Messprogramm auf. Zusätzliche zu den in ?? erwähnten Problemen funktionierte die Berechnung der Fre-

²Werte siehe Laborbuch

quenzen nicht mehr zuverlässig. Während bei der Eisenfeder keine Probleme auftauchten und das Programm zwei Peaks im Frequenzverlauf anzeigte welche auch mit f_{gl} und f_{geg} übereinstimmten, wurde uns bei der Auswertung der Kupferfeder zuerst nur ein Peak angezeigt. Auch mithilfe des Versuchsbetreuers und nach mehrmaligem erneuten Messen mit verschiedenen Abtastraten des Entfernungsmessers konnte kein reproduzierbarer Frequenzverlauf erzeugt werden. Die beste Messung mit zwei Peaks (??eigte eine ungefähre Übereinstimmung mit f_{gl} , der zweite Peak ist aber weit abseits des Wertes von f_{geg} .

3. Versuchsauswertung- und Ergebnisse

3.1. Federpendel

Aus den gemessenen Werten und Gleichung (1.1) ergibt sich für die statische Bestimmung der Federkonstante $D = (12\,520,50 \pm 1954,29) \text{ g/s}^2$

Bei der dynamischen Bestimmung der Federkonstante ergibt sich der Wert $D = (12\,836,000 \pm 1,794) \text{ g/s}^2$

3.2. Fadenpendel

3.3. gekoppeltes Pendel

3.3.1. statische Bestimmung des Kopplungsgrades

Kupferfeder $x_1 = (10,0 \pm 0,2) \text{ cm}$ und $x_2 = (1,2 \pm 0,4) \text{ cm}$ also ist $k = \frac{x_2}{x_1} = 0,12 \pm 0,02$

Eisenfeder $x_1 = (10,0 \pm 0,2) \text{ cm}$ und $x_2 = (2,1 \pm 0,4) \text{ cm}$ also ist $k = \frac{x_2}{x_1} = 0,21 \pm 0,02$

3.3.2. dynamische Bestimmung des Kopplungsgrades

Aus den Periodendauern lässt sich mit Gleichung (1.12) der Kopplungsgrad bestimmen.

Kupferfeder

$$T_{gl} = (2,439 \pm 0,006) \text{ s} \text{ und } T_{geg} = (1,960 \pm 0,004) \text{ s} \Rightarrow k = (21,52 \pm 0,06) \cdot 10^{-2}$$

Eisenfeder

$$T_{gl} = (2,326 \pm 0,005) \text{ s} \text{ und } T_{geg} = (1,695 \pm 0,003) \text{ s} \Rightarrow k = (30,63 \pm 0,07) \cdot 10^{-2}$$

3.3.3. Bestimmung der relativen Frequenzaufspaltung

Die relative Frequenzaufspaltung $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ ist mit k aus der statischen Bestimmung und Gleichung (1.13)

$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 0,1282 \pm 0,0229$ für die Kupferfeder und

$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 0,2376 \pm 0,0259$ für die Eisenfeder.

Mit Gleichung (1.14) ergeben sich hingegen folgende Werte:

$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 0,1281 \pm 0,0228$ für die Kupferfeder und

$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 0,2367 \pm 0,0255$ für die Eisenfeder.

Die benutzte Näherung ist also offensichtlich sowohl beim Funktionswert als auch beim Fehlerwert bis auf die dritte Nachkommastelle genau.

3.4. Doppelpendel

Bei großen Winkeln verhält sich das Doppelpendel chaotisch, ohne irgendein erkennbares Muster. Bei kleineren Auslenkungen beruhigt sich dieses Verhalten und es ist eine klare Periodizität erkennbar. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Bewegungsgleichungen keine lineare Differentialgleichungen sind und sich das System somit auch nicht wie ein harmonischer Oszillator verhält. Bei kleinen Winkel wirkt die Kleinwinkelnäherung und die Differentialgleichungen werden linear.

4. Graphische Darstellung der Ergebnisse

Die wirklich abgelesene Frequenz in der Fouriertransformation wird durch einen Punkt angezeigt

4.1. Kopplung durch Cu-Feder

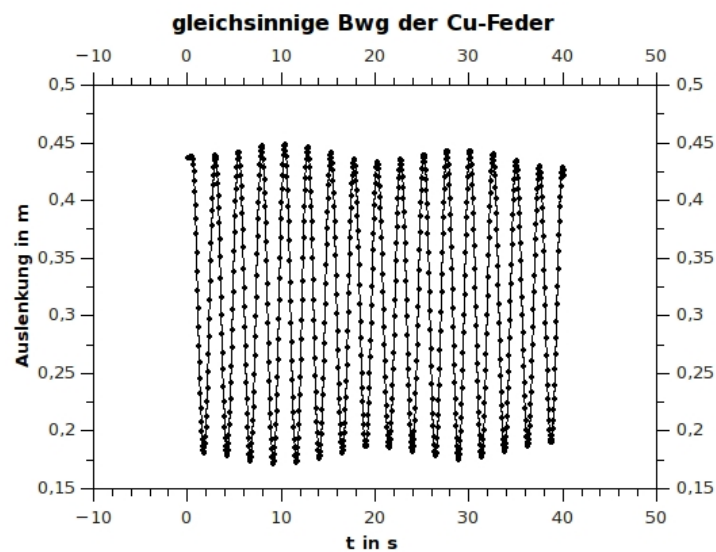


Abbildung 1 – Beide Pendel schwingen möglichst gleichphasig

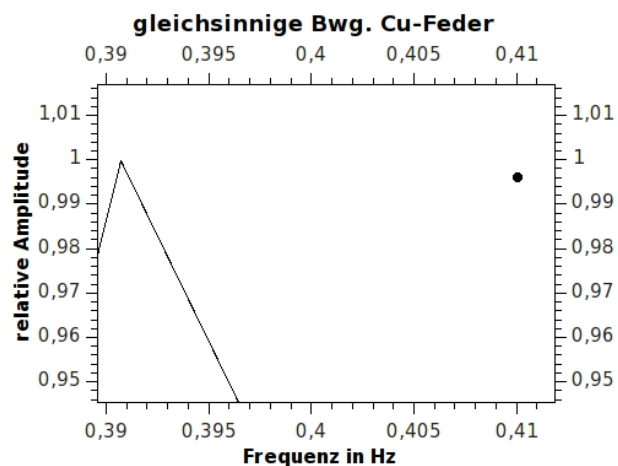


Abbildung 2 – Die dazugehörige Fouriertransformation

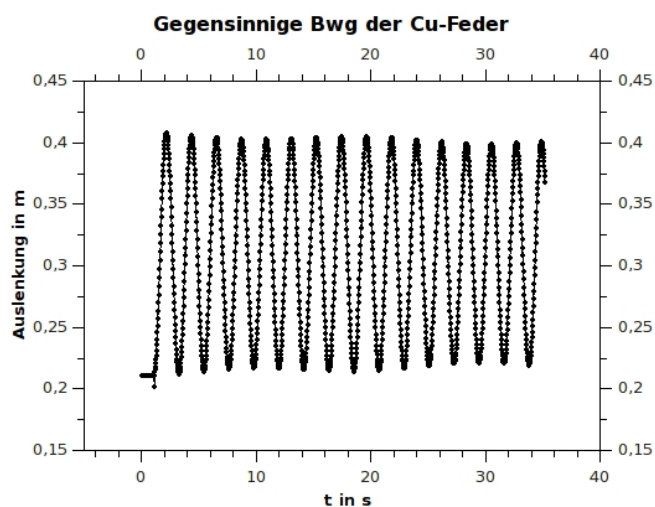


Abbildung 3 – Beide Pendel schwingen möglichst gegenphasig

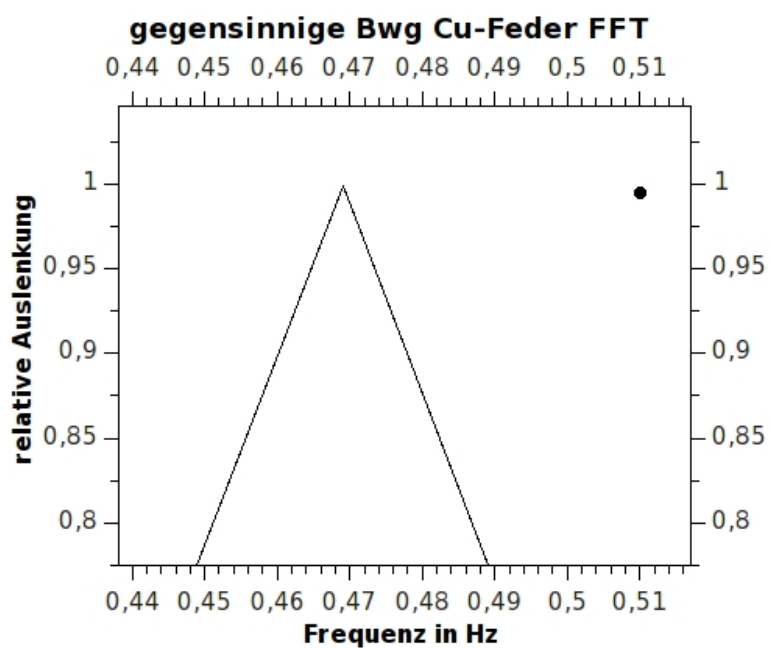


Abbildung 4 – Die dazugehörige Fouriertransformation

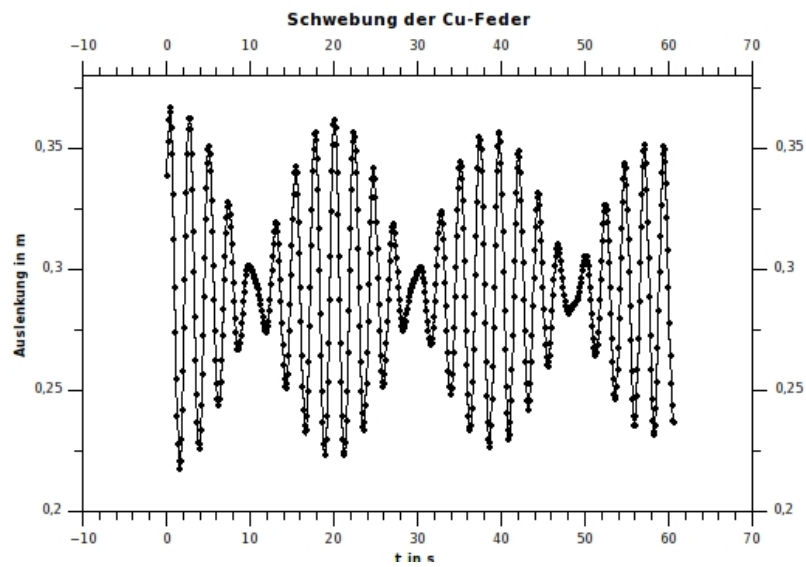


Abbildung 5 – Die Pendel werden zu Schwebungen angeregt

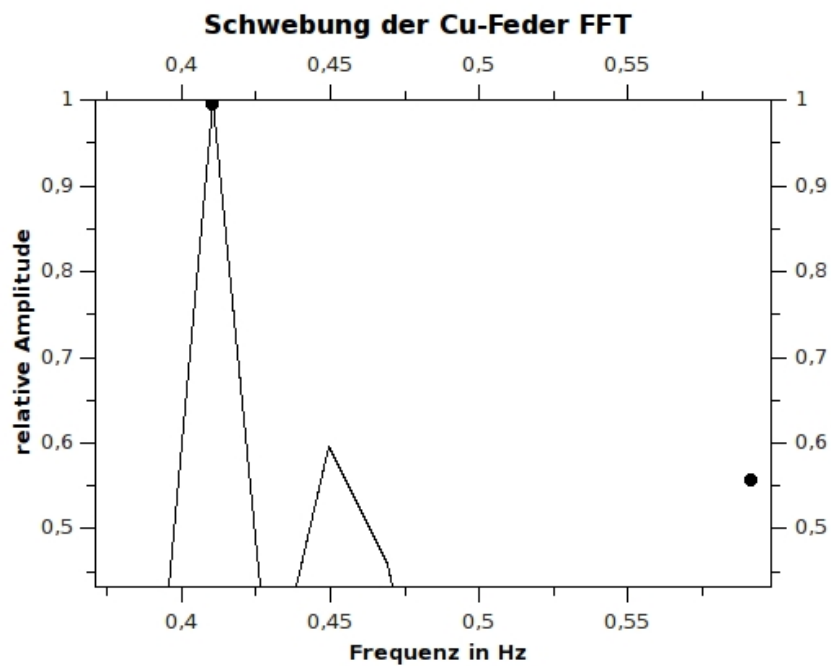


Abbildung 6 – Die dazugehörige Fouriertransformation

4.2. Kopplung durch Fe-Feder

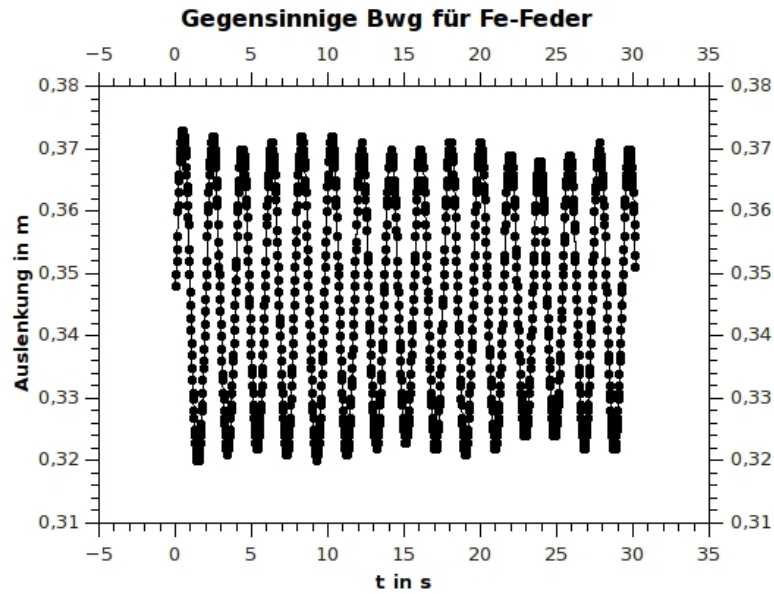


Abbildung 7 – Die Pendel schwingen möglichst gegenphasig

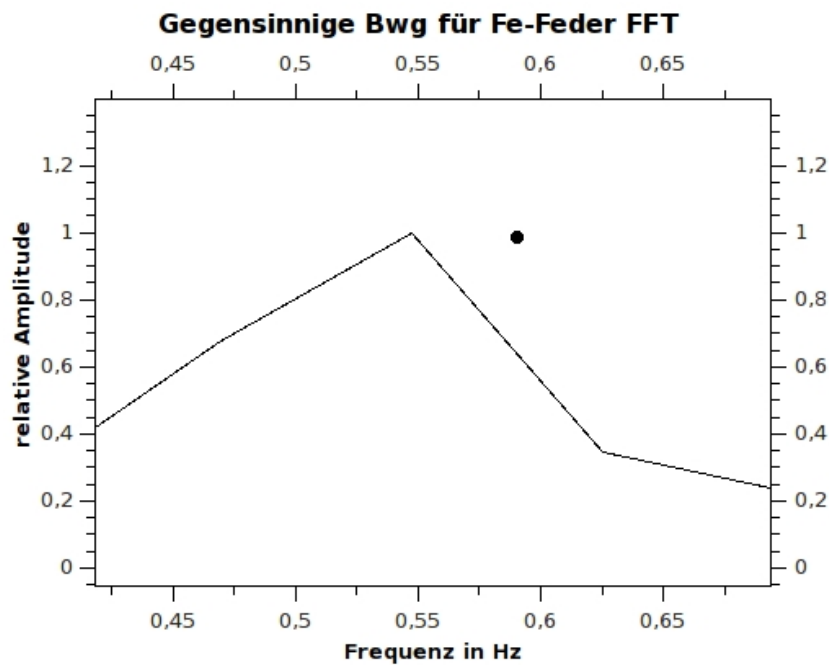


Abbildung 8 – Die dazugehörige Fouriertransformation

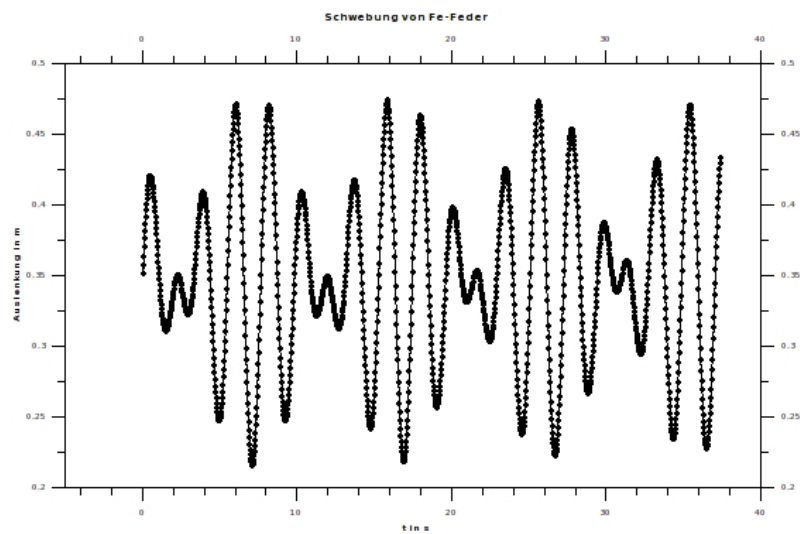


Abbildung 9 – Die Pendel wurden zu Schwebungen angeregt

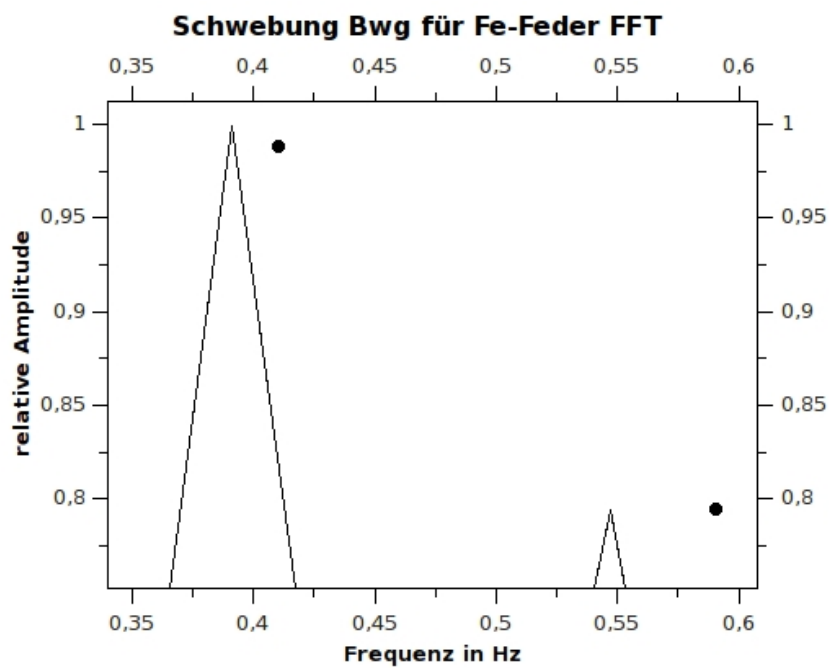


Abbildung 10 – Die dazugehörige Fouriertransformation

5. Einordnung der Ergebnisse, Literaturvergleich und Diskussion

Beim ersten Teilversuch stimmen die Ergebnisse im Fehlerbereich überein. Bei den Messungen und der Auswertung sind keine groben Fehler passiert. Man erkennt an den Fehlern, dass die statische Methode deutlich ungenauer ist als die dynamische Methode. Bei ersterem ist die statische Auslenkung aufgrund von kleinen Schwingungen nur ungenau zu bestimmen. Bei Letzterem musste nur die Periodendauer gemessen werden, was genau durchführbar ist, wenn man die Zeit für 50 Perioden misst.

Bei der Bestimmung der Erdbeschleunigung stimmt unsere Messung mit dem Literaturwert im Fehlerbereich überein. Jedoch ist dieser Fehler mit über 10% recht groß was auf die Vereinfachungen zurückzuführen sind. So wurde der Faden als masselos aufgefasst sowie die reale Ausdehnung der Kugel ebenso wie die Reibung vernachlässigt. Die Messung der Fadenlänge war mit dem Lineal ebenfalls ungenau.

Die Kopplungsgrade bei beiden Kopplungen stimmen nicht im Fehlerbereich überein. Die Ursache liegt in der fehlenden Kalibrierung des Ultraschallsensors sowie dem fehlerhaften Programm mit dem die Auswertung geschah.

6. Physikalische Interpretation

Die Messung der Erdbeschleunigung ist mit dem Fadenpendel nicht genau möglich. Es müssen zu viele Annahmen gemacht werden, als dass der reale Wert genau ermittelt werden könnte. Mit einem Federpendel (mit bekannter Federhärte) hingegen wäre die Messung viel genauer, da keine Annahmen gemacht werden müssen. Die Messfehler können durch Messung von mehreren Schwingungsperioden minimiert werden, so dass ein genauerer Wert für die Erdbeschleunigung als beim Fadenpendel bestimmt werden kann.

A. Anhang

A.1. Fehlerrechnungen

$$\Delta k = \sqrt{\left(-\frac{x_2}{x_1^2} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_1}\right)^2}$$

A.1.1. Federpendel

$$\sqrt{\frac{1000000000\pi^4\text{fm}^2}{t^4} + \frac{4000000000\pi^4\text{ft}^2(m+36.4667)^2}{t^6}}$$

Literatur

- [1] GIANCOLI, D.C.: *Physik: Lehr- und Übungsbuch*. Pearson Deutschland, 2010 (Pearson Studium - Physik). <http://books.google.de/books?id=blIf3HCpDy8C>. – ISBN 9783868940237
- [2] TIPLER, P.A. ; MOSCA, G.: *Physics for Scientists and Engineers*. W. H. Freeman, 2008 (Physics for Scientists and Engineers Teile 1-33). <http://books.google.de/books?id=AttDBYgLeZkC>. – ISBN 9781429201247
- [3] DONATH, Markus ; SCHMIDT, Anke: *Anleitung zu den Experimentellen Übungen zur Mechanik und Elektrizitätslehre*. Auflage Wintersemester 2014/2015. Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Oktober 2014