Bestimmung von Federkonstanten Test

1 Der Versuch im Überblick

Ohne Zweifel! Stürzt man sich - festgezurrt wie bei einem Bungee-Sprung - in die Tiefe (Abb. 1), sind Kenntnisse über die Längenänderung des Seils wichtig. Ist die Längenänderung nur klein, kann sie den Spaß einschränken: der Fall ist zu kurz. Ist die Längenänderung zu groß ..... – wir wollen diesen Fall lieber nicht vertiefen.

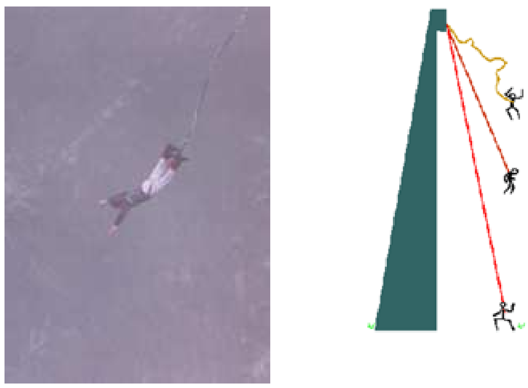

Abbildung 1: *Ein Bungee-Sprung (Photo und schematische Darstellung).*

Bei diesem Praktikumsversuch geht es genau darum. Sie sollen messen, wie groß die Längenänderung eines Seils ist, wenn eine Kraft wirkt. Der Praktikumsversuch ist nicht ganz so spektakulär wie der Bungee-Sprung. Statt des Bungees nehmen wir eine Schraubenfeder, statt des herabfallenden Menschen kleine Gewichte aus Metall.

Wie kann man die Längenänderung des Bungees oder allgemein die Längenänderung einer Feder quantitativ beschreiben?

Es gilt:

Wirkt eine Kraft auf eine Feder (z.B. ein Bungee), wird sie gedehnt: Die Feder wird länger. Intuitiv ist klar: Je größer die angreifende Kraft ist, umso größer wird die Längenänderung sein. Doch welcher Zusammenhang besteht zwischen wirkender Kraft und Längenänderung?

Eine Antwort gab bereits im Jahr 1678 der englische Physiker Robert Hooke. Sein nach ihm benanntes Gesetz lautet: Die Längenänderung Δx ist proportional zur von außen angreifenden Kraft F:

$$F = k\Delta x,$$

die Proportionalitätskonstante k nennt man *Federkonstante*.

Leider hat Herr Hooke uns nicht mitgeteilt, wie groß die Federkonstante ist. Konnte er auch nicht, denn es gibt nicht DIE Federkonstante: Sie ist abhängig vom Material und der Geometrie (z.B, Länge, Durchmesser) der Feder, also keine universelle, allgemein gültige Konstante.

Sie sollen im Rahmen des Praktikumversuchs die Federkonstante einer Feder bestimmen. Hierzu stehen Ihnen zwei Methoden zur Verfügung: die statische und die dynamische Methode.

Bei der statischen Methode werden unterschiedliche Kräfte auf eine Feder ausgeübt und die jeweiligen Längenänderungen gemessen. Sind die wirkenden Kräfte und die Längenänderungen bekannt, kann die Federkonstante bestimmt werden.

Bei der dynamischen Methode befestigt man eine Masse an eine Feder und versetzt sie in Schwingungen. Die Schwingungsdauer dieser Federschwingung ist eine Funktion der Masse und der Federkonstanten. Misst man die Schwingungsdauer kann man (bei bekannter Masse) die Federkonstante bestimmen.

Zum Verständnis der Versuchsanleitung sind Vorkenntnisse zu folgenden Begriffen notwendig:

Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, kinetische Energie, potentielle Energie, harmonische Schwingungen.

2 Die statische Methode

2.1 Das Hooke'sche Gesetz

Sicherlich haben Sie schon mal versucht ein Gummiband zu dehnen. Vielleicht ist Ihnen dabei aufgefallen, dass dies zu Anfang leicht fällt. Je stärker das Band aber gedehnt ist, umso kräftiger müssen Sie an dem Band zerren, um eine weitere Dehnung zu erreichen.

Auch wissen Sie, dass manche Federn sich leicht dehnen lassen, wie z.B. ein Gummiband. Dagegen kann es sehr schwer sein, eine Stahlfeder zu dehnen (Abb. 2).

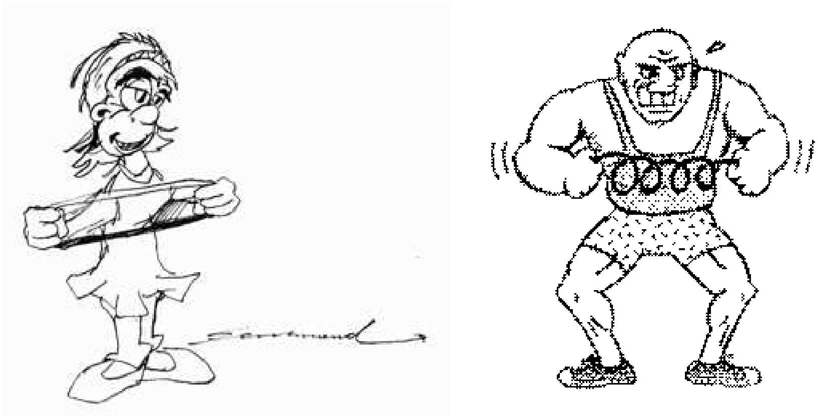

Abbildung 2: *Das Gummiband lässt sich leicht dehnen, die Stahlfeder nicht.*

Wie kann man die Längenänderung einer Feder als Funktion einer wirkenden Kraft quantitativ beschreiben? Aussage hierüber trifft das Hooke'sche Gesetz. Es wurde von dem englischen Physiker Robert Hooke im Jahr 1678 aufgestellt und sagt aus, dass die Längenänderung Δx eines festen Körpers, z.B. der im Praktikum genutzten Schraubenfeder, proportional zur angreifenden Kraft F ist:

$$F = k\,\Delta x \quad . \tag{1}$$

Die Proportionalitätskonstante k heißt Federkonstante. Sie ist abhängig von der Art des Materials und der Bauart der Feder (Abb. 3).

Mit Hilfe des Gesetzes kann man nicht erklären, **warum** die Längenänderung stattfindet, **warum** eine Stahlfeder sich schwerer dehnen lässt als ein Gummiband.

Kein Wunder! Denn das Hooke'sche Gesetz ist kein fundamentales Gesetz, sondern ein empirisch gefundener Zusammenhang, der aus grundsätzlichen Kenntnissen der inneren Kräfte der Festkörper hergeleitet werden kann. Dies erfordert allerdings komplexe Berechnungen, die nur in wenigen Spezialfällen durchführbar sind.

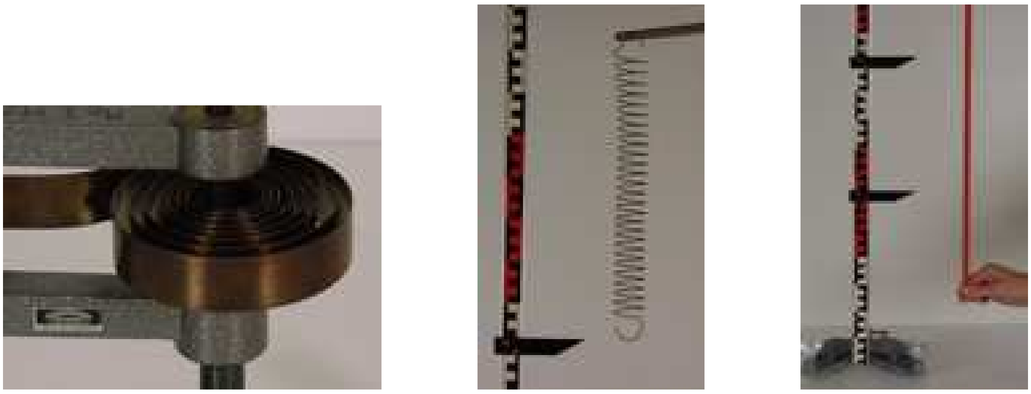

Abbildung 3: *Photos unterschiedlicher Federn: Spiralfeder, Schraubenfeder, Gummiband.*

Die praktisch nicht berechenbaren und somit unbekannten mikroskopischen Vorgänge steckt man in die Federkonstante, die man experimentell bestimmen muss.

Kennt man die Federkonstante, hilft das Hooke'sche Gesetz Längenänderungen vorherzusagen – wichtig für unseren Bungee-Springer.

Es gibt eine Gültigkeitsbeschränkung des Hooke'schen Gesetzes. Es gilt nicht für beliebige Längenänderungen. Sie wissen sicherlich aus eigener Erfahrung, dass ein Gummiband nicht unendlich dehnbar ist, sondern irgendwann reißt.

Somit halten Sie fest: Das Hooke'sche Gesetz gilt nur für Längenänderungen im elastischen Bereich. Es darf keine bleibende plastische Verformung auftreten; reißen darf das Band natürlich auch nicht (Abb. 4).

Abbildung 4: *Ein Stab aus Stahl wird gedehnt, es kommt zu einer plastischen Verformung, schließlich reißt der Stab.*

2.2 Bestimmung der Federkonstanten

Wie kann man die Federkonstante einer Feder experimentell bestimmen? Eine Methode ist: Man hänge an eine vertikal aufgehängte Feder verschieden große Massen.

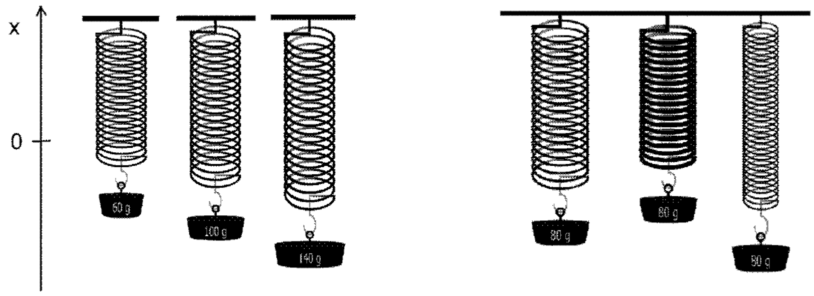

Abbildung 5: *Links: Unterschiedliche Massen an Federn gleicher Federkonstante. Rechts: Gleiche Massen an Federn unterschiedlicher Federnkonstanten.*

Die Feder wird aus der ursprünglichen Gleichgewichtsposition ($x = 0$) unterschiedlich stark ausgelenkt (Abb. 5). Warum?

Die Gravitationskraft mg dehnt die Feder um die Strecke x , bis die Federkraft kx die entgegengesetzt wirkende Gravitationskraft kompensiert. Für die Längenänderung x als Funktion der Masse erhält man durch Gleichsetzen der Beträge der beiden Kräfte:

$$mg = kx \quad \Longrightarrow \quad \text{umgeformt} \tag{2}$$

$$x = \frac{g}{k} m \quad . \tag{3}$$

Trägt man die Längenänderung x als Funktion der Masse m auf (Abb. 6), erhält man aus der Steigung der Geraden die Federkonstante (die Erdbeschleunigung $g = 9,81 \mathrm{m/s^2}$ ist ja bekannt).

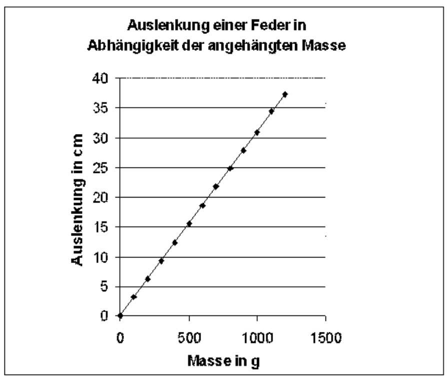

Abbildung 6: *Auslenkung als Funktion der wirkenden Kraft.*

3 Die dynamische Methode

3.1 Schwingung einer vertikalen Schraubenfeder

Die Federkonstante kann man ebenfalls mit Hilfe der harmonischen Schwingung einer vertikal aufgehängten Feder bestimmen. Wie, werden Sie im Folgenden sehen.

Hängt man an die Feder eine Masse, dehnt die Gravitationskraft die Feder, bis die Masse m sich in einer stabilen Gleichgewichtslage befindet (Abb. 7). In dieser Position ist die Feder um die Länge Δx gedehnt. Die Längenänderung ist gerade so groß, dass die durch die Feder aufwärts wirkende Kraft $k\Delta x$ die abwärts wirkende Gewichtskraft mg der Masse ausbalanciert. Für die Beträge der Kräfte gilt

$$k\Delta x \;=\; m\,g \quad . \tag{4}$$

Dies hatten wir bereits kennengelernt.

Abbildung 7: *Die Schraubenfeder wird durch eine angehängte Masse gedehnt.*

Lenkt man die Masse aus der Gleichgewichtsposition um eine Strecke x aus und lässt die Masse los, wirkt die Federkraft in Richtung der Gleichgewichtslage. Die Federkraft ist gemäß dem zweiten Newton'schen Gesetz Ursache für eine Beschleunigung. Es gilt:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} \;=\; -\;kx \tag{5}$$

Das negative Vorzeichen der Federkraft zeigt an, dass die Federkraft immer der Auslenkung entgegenwirkt: Federkraft und Auslenkung sind phasenverschoben.

Stellt man Gleichung (5) um, erhält man die Bewegungsgleichung:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} \;+\; \frac{k}{m}\,x \;=\; 0.} \tag{6}$$

Die Bewegungsgleichung (6) des Feder-Masse-Systems ist eine Schwingungsgleichung: die Masse vollzieht eine harmonische Schwingung.

Nun kann jede harmonische Schwingung durch eine **allgemeingültige** Bewegungsgleichung dargestellt werden. Sie lautet:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{7}$$

wobei ω die Kreisfrequenz (auch Eigenfrequenz genannt) des schwingungsfähigen Systems ist.

Durch Koeffizientenvergleich von (7) mit (6) erhält man die Kreisfrequenz ω der Federschwingung

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{8}$$

Mit Hilfe der Kreisfrequenz kann man die Schwingungsdauer T bestimmen, gemäß:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{9}$$

Für die Schwingungsdauer der Federschwingung erhält man somit:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{10}$$

Die Bewegungsgleichung gibt uns an, wie die Änderung des Ortes $x(t)$ lauten muss. In diesem Fall kann man die Lösung nur raten (es gibt in der Tat keine andere Methode!). Die Lösung lautet:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi), \tag{11}$$

wobei ϕ die sogenannte Phasenverschiebung ist.

Dass Gleichung (11) wirklich eine Lösung der Bewegungsgleichung ist, können Sie durch Einsetzen von (11) in (7) überprüfen.

Die Interpretation von Gleichung (11) zeigt, dass die Auslenkung x sich periodisch mit der Zeit ändert: Das Feder-Masse-System führt eine harmonische Schwingung durch.

Durch Differentiation von (11) nach der Zeit erhält man die Geschwindigkeit $v(t)$:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \phi), \tag{12}$$

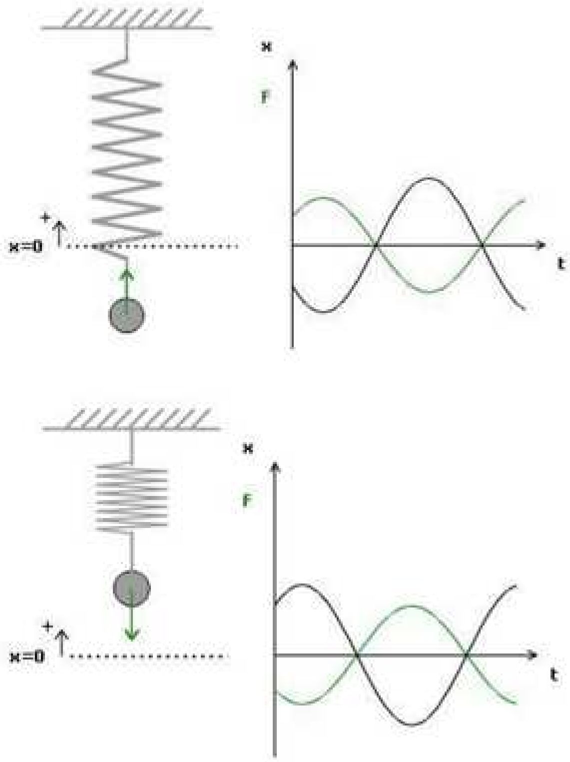

Abbildung 8: *Auslenkung und Federkraft sind phasenverschoben.*

durch Differentiation von (12) nach der Zeit die Beschleunigung $a(t)$:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi \ . \tag{13}$$

In Abb. 8 sind sowohl die Auslenkung als auch die Kraft als Funktion der Zeit dargestellt.

Vielleicht werden Sie mahnend sagen: Aber es wirkt neben der Federkraft auch die Gravitationskraft, darf die einfach vernachlässigt werden? Sie darf! Die Gravitationskraft hat keinen Einfluss auf die Schwingung. (Versuchen Sie, den Beweis zu geben.)

Trotzdem gilt Gleichung (10) der Schwingungsdauer nur näherungsweise. Warum? Zur Bestimmung der Schwingungsdauer wurde nur die Bewegung der angehängten Masse m berücksichtigt. Es bewegen sich aber ebenfalls Federelemente und diese Bewegung muss ebenfalls berücksichtigt werden.

Die korrekte Gleichung der Schwingungsdauer erhalten wir am einfachsten unter Nutzung des Energieerhaltungssatzes.

Für das Feder-Masse-System gilt der Energieerhaltungssatz:

$$E_{ges} \;=\; E_{kin} \;+\; E_{pot} \;=\; konst. \tag{14}$$

Die Gesamtenergie E_{ges} ist die Summe aus potentieller Energie E_{pot} und kinetischer Energie E_{kin} und bleibt während der Schwingung konstant. Im Gegensatz zur Gesamtenergie ändern sich während des Schwingungsvorgangs sowohl die potentielle als auch die kinetische Energie.

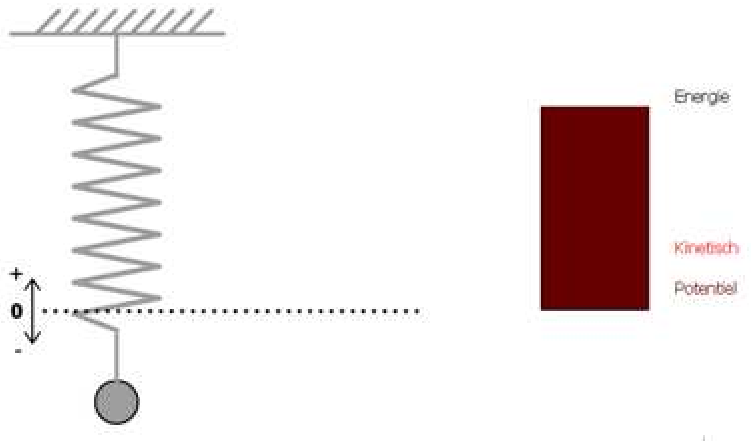

Abbildung 9: *Die Auslenkung ist maximal* $\Longrightarrow$ E_{pot} $=$ *maximal,* $E_{kin} = 0$.

Abbildung 10: *Die Auslenkung ist null* $\Longrightarrow$ E_{kin} $=$ *maximal,* $E_{pot} = 0$.

So sind z.B. an den Umkehrpunkten die potentielle Energie maximal und die kinetische Energie null (Abb. 9).

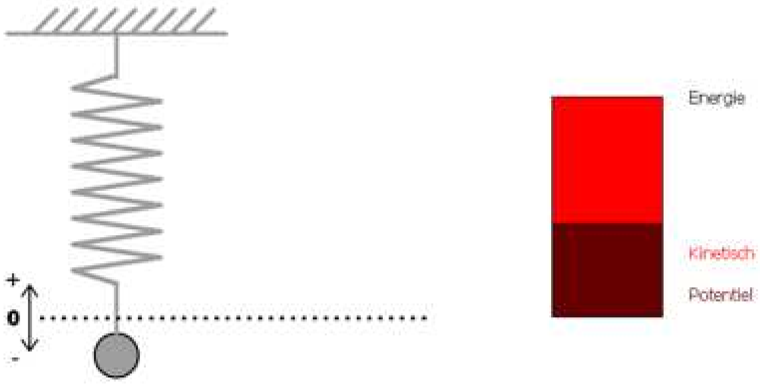

Abbildung 11: *Die Auslenkung ist zwischen null und einem Umkehrpunkt* $\Longrightarrow E_{ges}$ *setzt sich aus* E_{kin} *und* E_{pot} *zusammen.*

Beim Durchgang der Masse m durch die Gleichgewichtslage (Auslenkung = 0) ist dagegen die kinetische Energie maximal und die potentielle Energie null (Abb. 10). Bei einer Auslenkung zwischen null und einem Umkehrpunkt, hat das Feder-Masse-System sowohl kinetische als auch potentielle Energie (Abb. 11).

Um die Bewegungsgleichung (Schwingungsgleichung) mit Hilfe des Ernergieerhaltungssatzes aufstellen zu können, muss man beide Energieterme kennen.

Widmen wir uns zunächst der potentiellen Energie. Für sie muss nur das Feder-Masse-System berücksichtigt werden, die potentielle Energie der Masse im Gravitationsfeld hat keinen Einfluss auf die Bewegung. (Versuchen Sie, den Beweis zu geben.)

Die potentielle Energie ist allgemein über die negative Arbeit W definiert.

$$E_{pot} = -W = -\int \vec{F}\, d\vec{s} = -\int |F||ds| \cos\alpha = \int k\, x\, dx \quad \Longrightarrow$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2}\, k\, x^2 \; .$$

Beachten Sie, dass das negative Vorzeichen verschwindet. Sowohl bei Dehnung als auch bei Stauchung der Feder ist die potentielle Energie positiv (Abb. 12)

Im Gegensatz zur potentiellen Energie müssen bei der kinetischen Energie zwei Beiträge berücksichtigt werden:

1. die kinetische Energie der angehängten Masse m und
2. die kinetische Energie der Federmasse m_F.

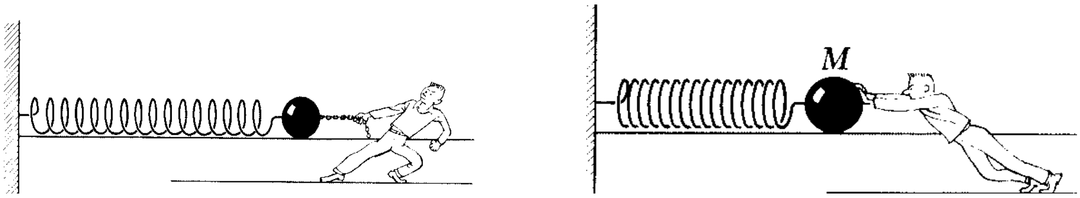

Abbildung 12: *Sowohl bei der Stauchung als auch bei der Dehnung wird in der Feder potentielle Energie gespeichert.*

Für die kinetische Energie der angehängten Masse m gilt:

$$E_{kin}^{m} = \frac{1}{2}\, m\, v^2 \; . \tag{15}$$

Die Berechnung der kinetischen Energie der Feder ist etwas schwieriger als die der potentiellen Energie. Das Problem ist, dass nicht alle Massenelemente dieselbe Geschwindigkeit haben. So ist z.B. ein Ende der Feder an der Wand fixiert und somit immer in Ruhe: die kinetische Energie ist immer null. Das andere Ende ist mit der angehängten schwingenden Masse m verbunden und hat deren Geschwindigkeit v (Abb. 13). Die übrigen Massenelemente haben eine Geschwindigkeit $v'(x)$, die zwischen null und v liegt.

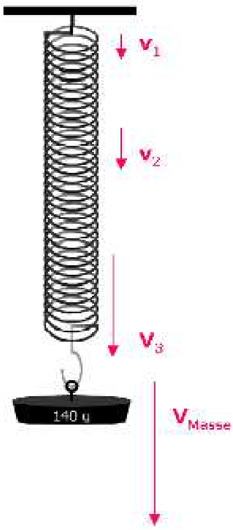

Abbildung 13: *Die Massenelemente der Feder haben unterschiedliche Geschwindigkeiten.*

Für die kinetische Energie dE_{kin}^{F} eines Massenelementes dm der Feder gilt:

$$dE_{kin}^{F} = \frac{1}{2}\, v'(x)^2 \; dm \; . \tag{16}$$

Wie kann man die kinetische Energie berechnen? Man nutzt eine wichtige Umformung: Man ersetze die Integration über die Massenlemente dm durch eine Integration über den Ort dx. Wie kann man dies tun? Bei einer homogenen Massenverteilung – und diese liegt hier vor – ersetzt man die Masse durch die Dichte. Da es sich hier um eine 1-dimensionale Dehnung handelt, wird die Linienmassendichte λ genutzt, definiert über:

$$\lambda = \frac{m_F}{l} \ ,$$

wobei l die Länge der Feder ist. Für das Massenelement dm gilt somit:

$$dm \ = \ \lambda dx \ = \ \frac{m_F}{l} \ dx \ . \tag{17}$$

Setzt man Gleichung (17) in (16) ein, ergibt sich für die kinetische Energie der Feder:

$$E^F_{kin} \ = \ \frac{1}{2} \ \frac{m_F}{l} \int v'(x)^2 dx \ . \tag{18}$$

Die Lösung des Integrals könnte Ihnen vielleicht Schwierigkeiten bereiten, denn die Geschwindigkeit v' ist leider nicht konstant, sondern ändert sich mit x, aber wie?

Zur Lösung nutzt man die Proportion:

$$\frac{v'(x)}{v} \ = \ \frac{x}{l} \quad \Longrightarrow \quad v'(x) \ = \ \frac{v}{l} \ x \ . \tag{19}$$

Einsetzen von (19) in (18) und Integration über die Länge der Feder von $x = 0$ bis $x = l$ ergibt:

$$E^F_{kin} \ = \ \frac{1}{2} \ \frac{m_F}{3} \ v^2 \ . \tag{20}$$

Die kinetische Energie der Feder ist also gleich der kinetischen Energie eines Körpers, der $\frac{1}{3}$ der Federmasse hat und der sich mit der gleichen Geschwindigkeit bewegt, wie die an der Feder hängenden Masse.

Für die gesamte Energie erhält man somit:

$$\boxed{E_{ges} \ = \ \frac{1}{2} \ (m \ + \ \frac{m_F}{3}) \ v^2 \ + \frac{1}{2} \ k \ x^2 \ .} \tag{21}$$

Differenziert man diese Gleichung (unter Nutzung der Kettenregel) nach der Zeit, erhält man die Schwingungsgleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m + \frac{m_F}{3}} x = 0 \qquad (22)$$

und damit durch Koeffizientenvergleich mit der allgemeinen Form der Bewegungsgleichung (7) für die Schwingungsdauer T des Systems:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{m_F}{3}}{k}} \,. \qquad (23)$$

Beachten Sie, dass man in diesem Fall eine andere Schwingungsdauer erhält als die in Gleichung (10) angegebene. Dies ist auch kein Wunder, denn zur Herleitung von Gl.(10) hatten wir nur die Bewegung der angehängten Masse betrachtet, die Bewegung der Massenlemente der Feder aber nicht berücksichtigt. Gleichung (10) gilt also nur näherungsweise falls die Federmasse wesentlich kleiner ist als die angehängte Masse, während Gleichung (23) exakt ist.

4 Versuchsdurchführung und Auswertung

Sie sollen die Federkonstanten einer Schraubenfeder jeweils nach der statischen und der dynamischen Methode bestimmen. Hierzu stehen Ihnen folgende Komponenten zur Verfügung:

Schraubenfedern, eine Aufhängung für die Federn, eine Längenskala, Metallzylinder mit unterschiedlichen Massen, ein Teller zum Anhängen der Massen, eine Waage und eine Stoppuhr (Abb. 14).

Abbildung 14: *Von links nach rechts: Aufhängung, Federn, Skala + Spiegel, unterschiedliche Massen mit Teller .*

Folgende Aufgaben müssen Sie vor Beginn des Praktikums erfüllen. (Die Praktikumsanleitung gibt Ihnen die notwendigen Hinweise.)

1. Skizzieren Sie sowohl für die dynamische als auch statische Methode den Versuchsaufbau.
2. Überlegen Sie sich für beide Methoden eine Versuchsdurchführung, und machen Sie eine kurze (schriftliche) Versuchsbeschreibung.
3. Beschreiben Sie, wie Sie die Federkonstante aus den Messdaten ermitteln können.

   Punkt 1., 2. und 3. sind Bestandteile Ihres Protokolls.
4. Überlegen Sie sich, wie häufig Sie die Messungen durchführen wollen. (Jede Messung hat einen Messfehler, den man durch wiederholtes Messen reduzieren kann.)
5. Bereiten Sie Tabellen für Ihre Messwerte vor.

Neben Fragen zu den physikalischen Grundlagen müssen Sie folgende Fragen jeweils zur statischen und dynamischen Methode beantworten können:

1. Welche physikalische Größe misst man?
2. Welche Funktion muss man graphisch darstellen, um die Federkonstante ermitteln zu können?
3. Wie erhält man aus dem Graphen die Federkonstante?

Folgende Aufgaben müssen Sie während des Praktikums erfüllen.

1. Führen Sie die Messungen durch, und tragen Sie die Messwerte in Tabellen ein.
2. Falls Sie Messungen mehrmals durchführen, bestimmen Sie die Mittelwerte.
3. Stellen Sie die Messwerte graphisch dar.
4. Ermitteln Sie die Federkonstanten.
5. Bestimmen Sie die Fehler Ihrer Federkonstanten.
6. Vergleichen Sie die beiden Messmethoden.