Instituto Federal do Sul de Minas Gerais

Projeto e Análise de Algoritmos

(Grafos)

Aula 01 – Introdução e História dos Grafos

Material - Prof. Humberto César Brandão de Oliveira
Prof. Douglas Castilho

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL DE MINAS GERAIS

Leonhard Euler

- Em 1735, Euler ganha fama mundial ao resolver um problema que por décadas foi desafio para os matemáticos da época (Série infinita da soma dos inversos dos quadrados – conhecido como problema da Basiléia);

- A maioria dos grandes matemáticos de seu tempo tentaram sem êxito encontrar o resultado desta série infinita;

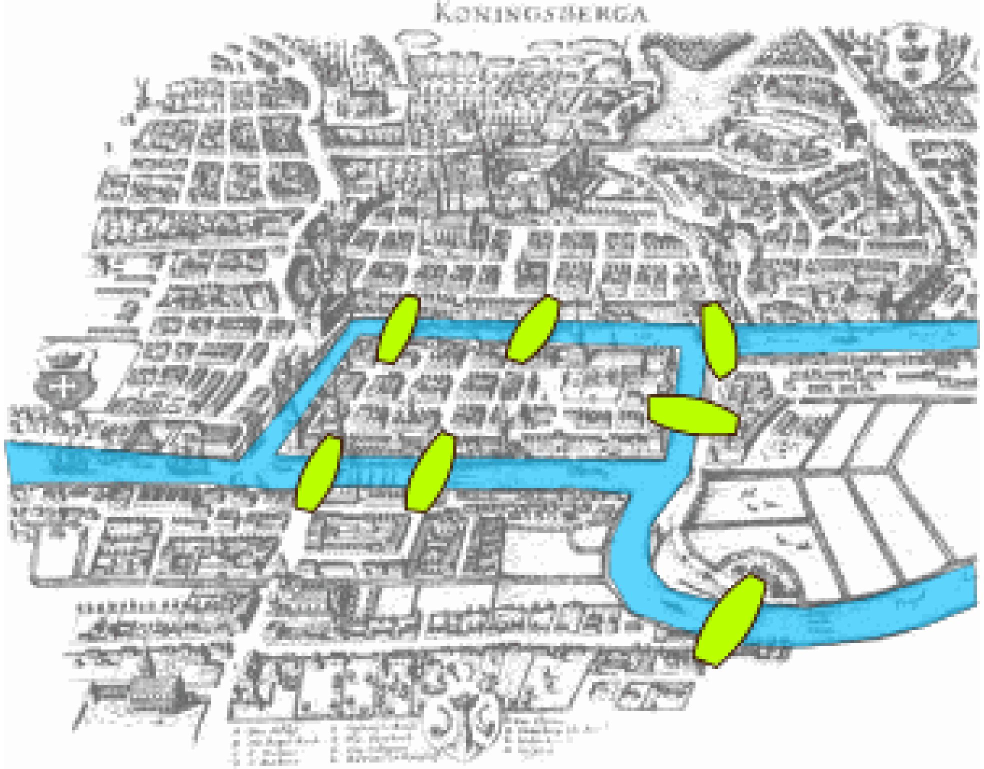
- Euler possuía apenas 28 anos na época;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

Leonhard Euler

- Um ano mais tarde (1736), Euler resolve o problema conhecido como as Sete pontes de Königsberg.

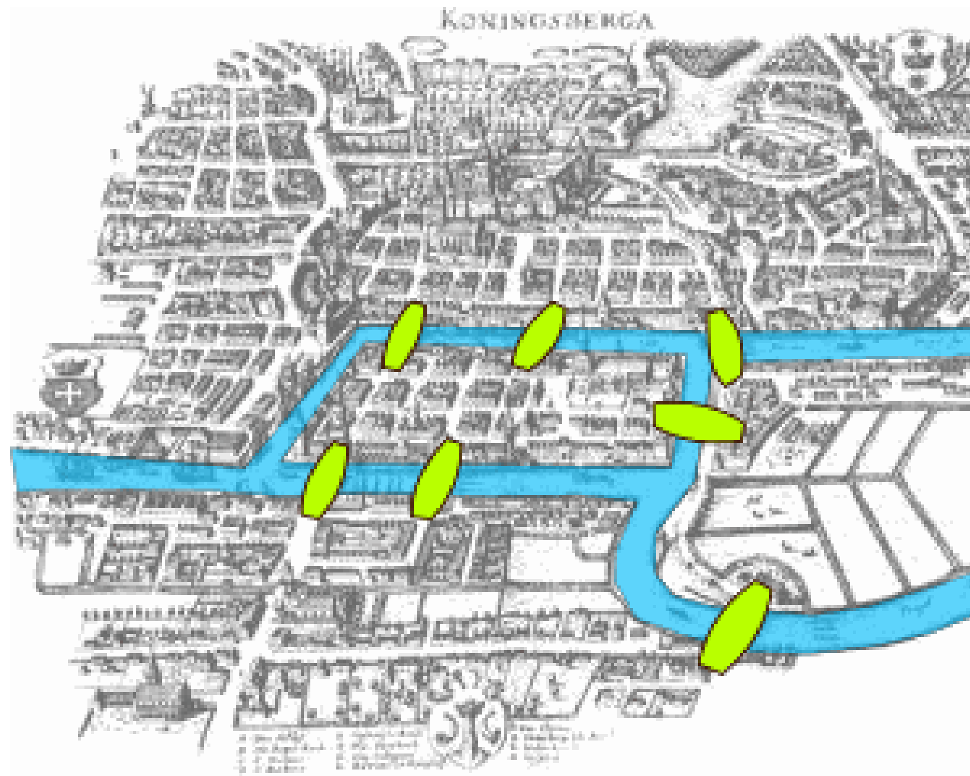
- Problema:
  - É possível que uma pessoa faça um percurso na cidade de tal forma que inicie e volte a mesma posição passando por todas as pontes somente uma única vez?



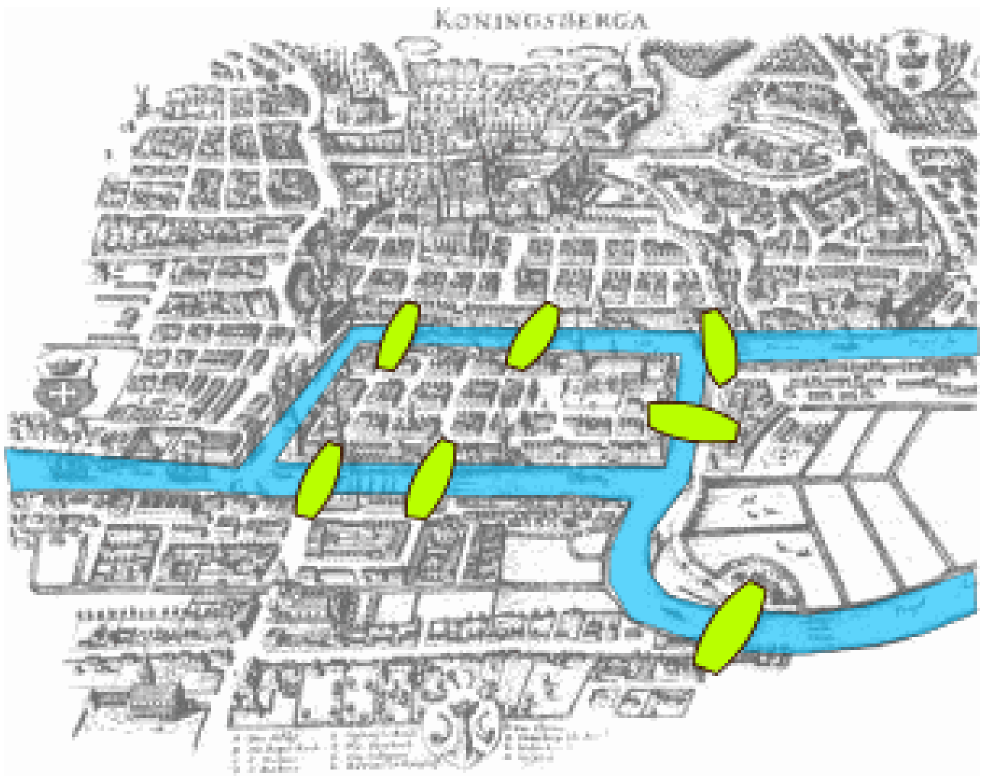
As Sete Pontes de Königsberg

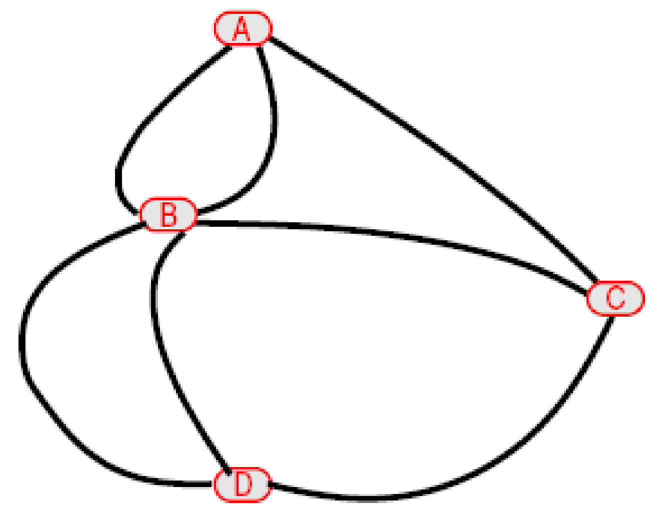
- Euler resolve este problema simplificando a forma de se enxergar o mapa:

- Cada faixa de terra representa um ponto, e as pontes são ligações entre os pontos.



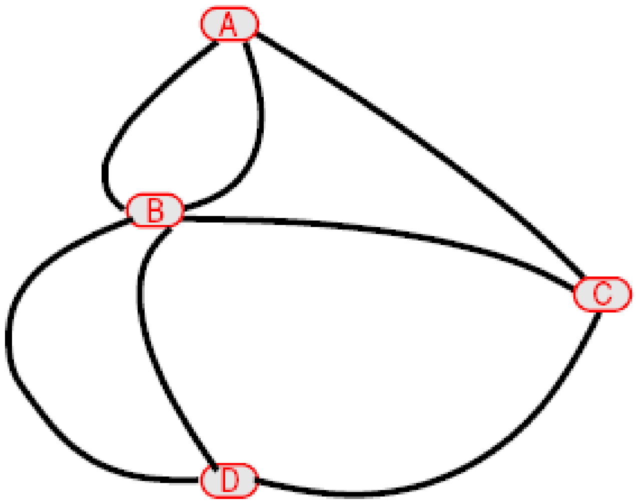
As Sete Pontes de Königsberg





As Sete Pontes de Königsberg

- Obviamente, existem duas respostas possíveis para o dilema:
  - Ou Existe solução...
    - Basta mostrar uma!!! Fácil... ☺
    - Será mesmo simples??? Para todo problema...
  - Ou não existe solução.
    - Pode se mostrar enumerando todos os caminhos possíveis, e mostrar que todos falham;
      - Árvore de possibilidades;
    - ou de forma mais elegante, provando através das características do grafo que não existe solução para o problema.

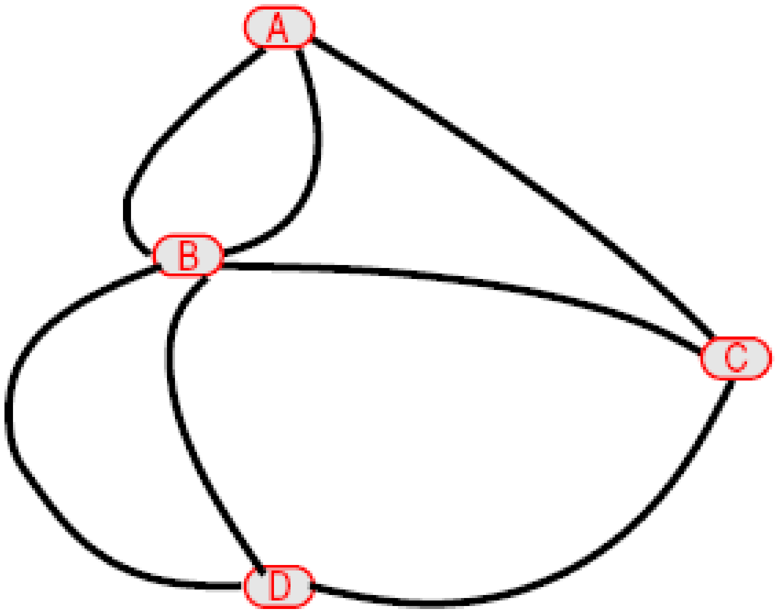


As Sete Pontes de Königsberg

- Aparentemente não existe solução;

- Partindo do vértice A, e percorrendo outros vértices, podemos ver a utilização de no mínimo duas arestas (pontes) “chegada” e a de “saída”.

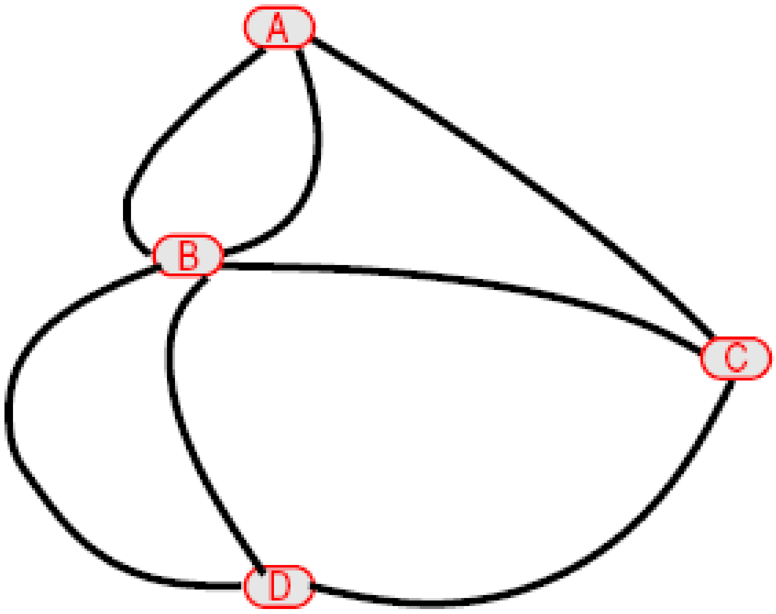
- Assim, se for possível achar uma rota que usa todas as arestas do grafo e começa e termina em A, então o número total de “chegadas” e “saídas” de cada vértice deve ser um valor múltiplo de 2.



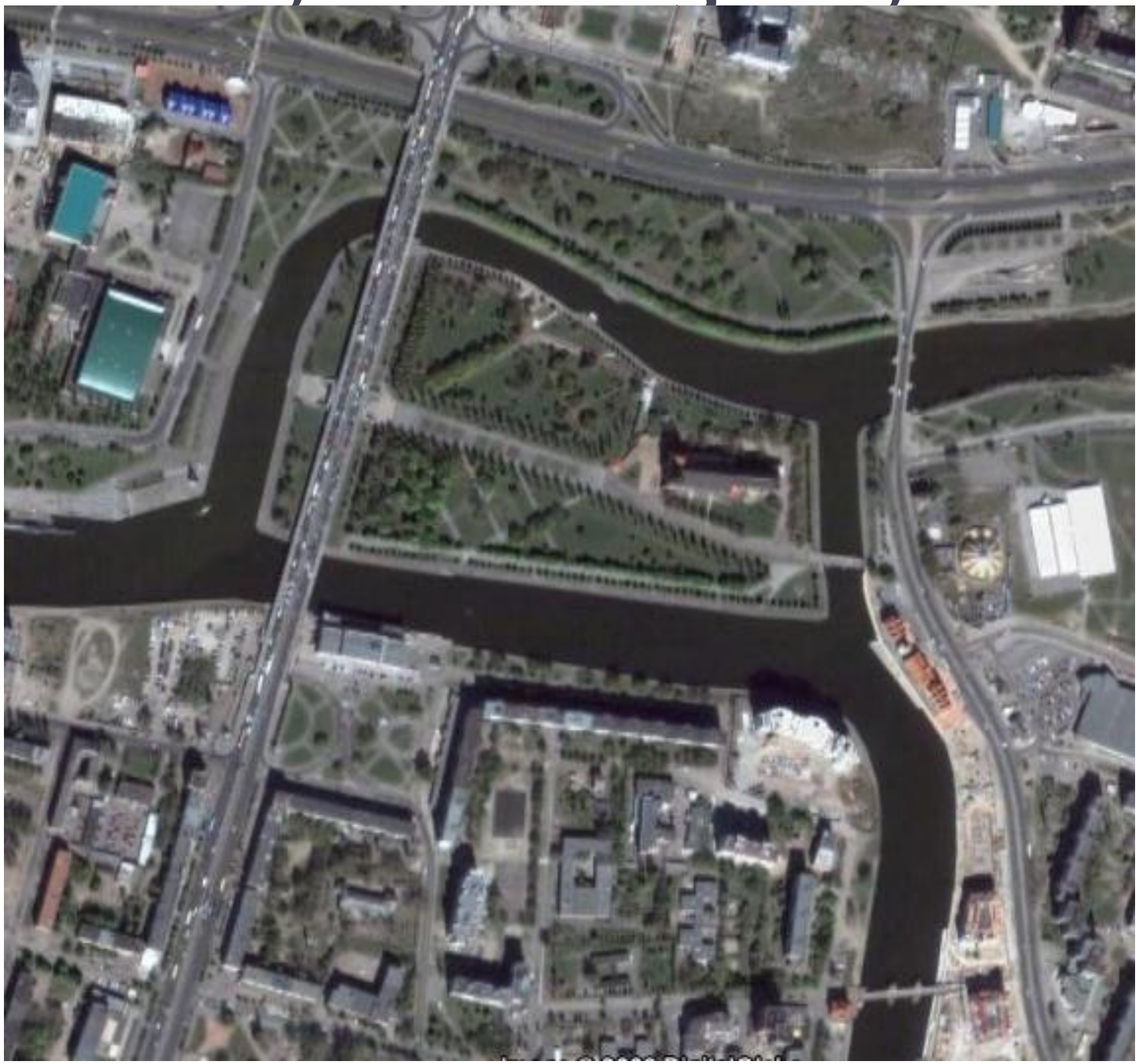
As Sete Pontes de Königsberg

- No entanto, temos:
  - grau(A) = grau(C) = grau(D) = 3;
  - grau(B) = 5.

- Assim, por este raciocínio não é possível percorrer as faixas de terra, passando por cada ponte uma única vez, retornando ao vértice de partida.

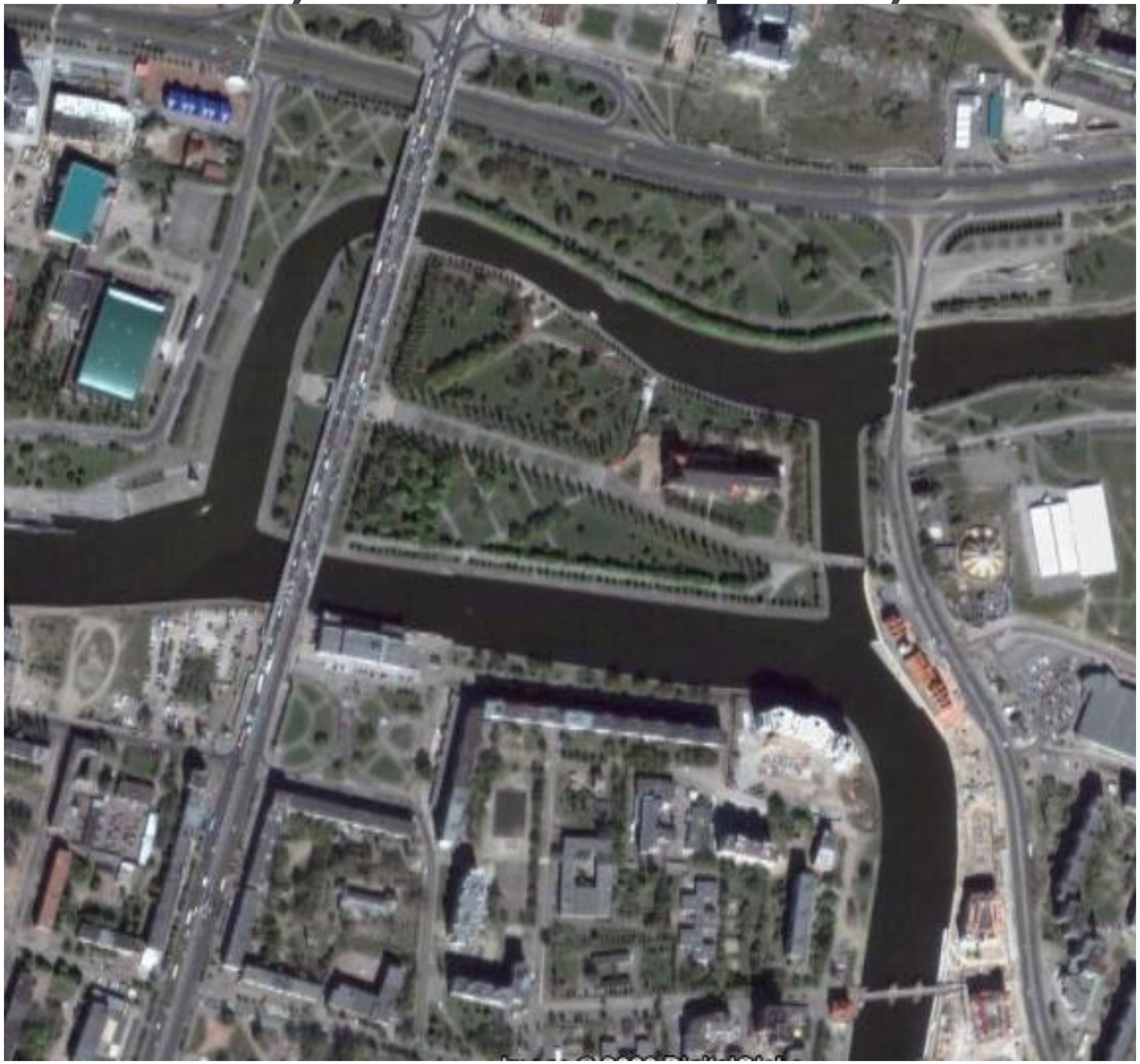


1736, Königsberg, Prússia
2007, Kaliningrad, Rússia



- Foto de 29/04/2007.
- A configuração das pontes está diferente.
- Mas agora existe caminho que satisfaz ao problema proposto no passado?

1736, Königsberg, Prússia
2007, Kaliningrad, Rússia



- Foto de 29/04/2007.
- A configuração das pontes está diferente.
- Mas agora existe caminho que satisfaz ao problema proposto no passado?
- Ciclo Euleriano

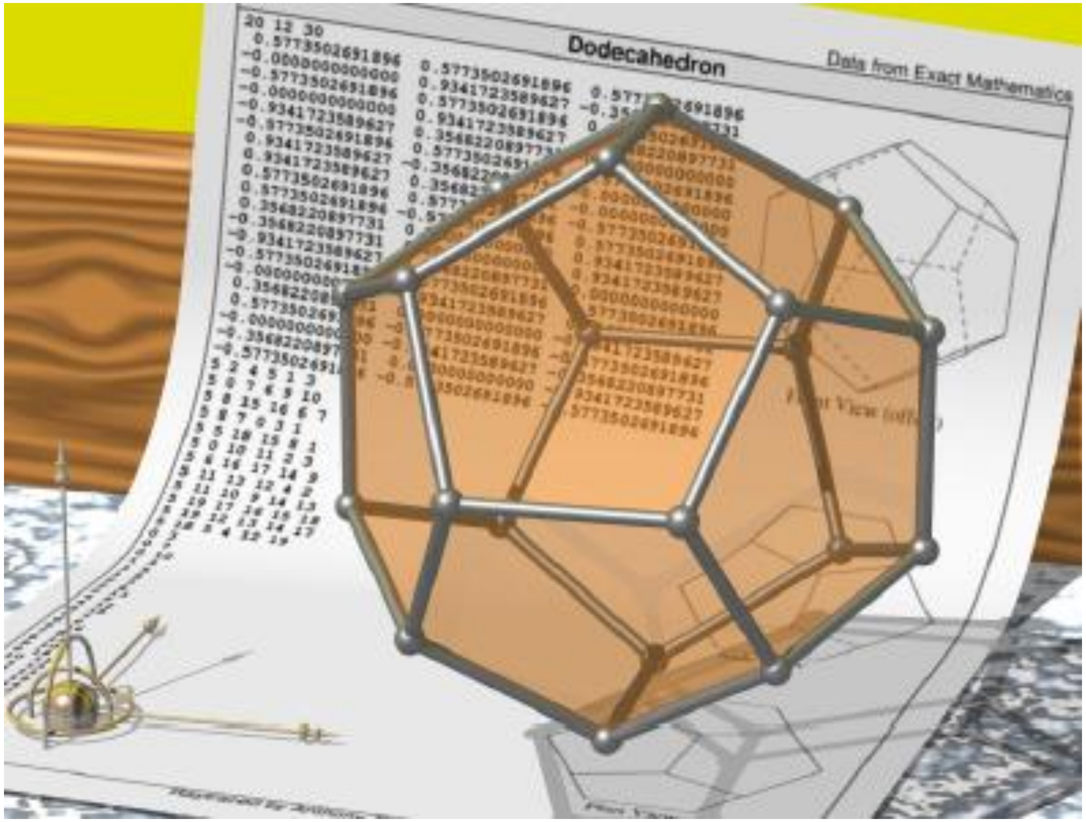
Leonhard Euler

curiosidades…

- Euler é atualmente considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos;
- Produziu mais de 1100 artigos e livros;
- Durante os últimos 17 anos de vida, ele ficou praticamente cego, quando produziu quase que metade de seus trabalhos.

Um pouco de história...

- 1859 – Hamilton propôs um *toy problem*, a princípio sem aplicação prática. A busca por um circuito fechado em um dodecaedro regular;

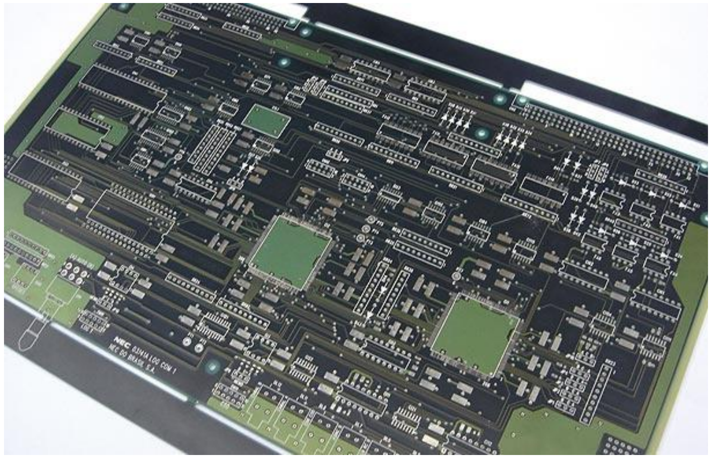


Um pouco de história…

- Diferentemente do problema de Euler (que não se repete aresta, e pode se repetir vértices), o problema de Hamilton não permite a repetição de vértices, e consequentemente também não se repetem arestas;

- Atualmente, o ciclo Hamiltoniano é utilizado na definição formal do problema do Caixeiro Viajante (*um dos mais importantes e complexos problemas já descritos*);

Um pouco de história...
Aplicação do ciclo Hamiltoniano



- Imagine que você precisa construir uma placa de circuito impresso.
- Esta possui inúmeros furos para o encaixe de seus componentes.

- Suponha que você possui a disposição um braço eletrônico para perfurar a placa e precisa descrever um algoritmo para encontrar a ordem perfuração dos buracos;

Um pouco de história...
Aplicação do ciclo Euleriano

- Imagine que você precisa entregar encomendas em todas as ruas de uma região de Poços.

- Existe a possibilidade de encontrar uma rota sem repetir ruas inutilmente?
  - Minimizando assim o trajeto a ser percorrido..

Um pouco de história...

- 1879 – Kempe procurou demonstrar a "Conjectura das 4 cores". Trata-se de provar que todo mapa desenhado sobre uma superfície 2D e dividido em um número qualquer de regiões pode ser colorido com um máximo de 4 cores sem que duas regiões vizinhas tenham a mesma cor;
  - Mais tarde (1890) o matemático Heawood mostrou que a "prova" de Kempe estava errada;

Um pouco de história…

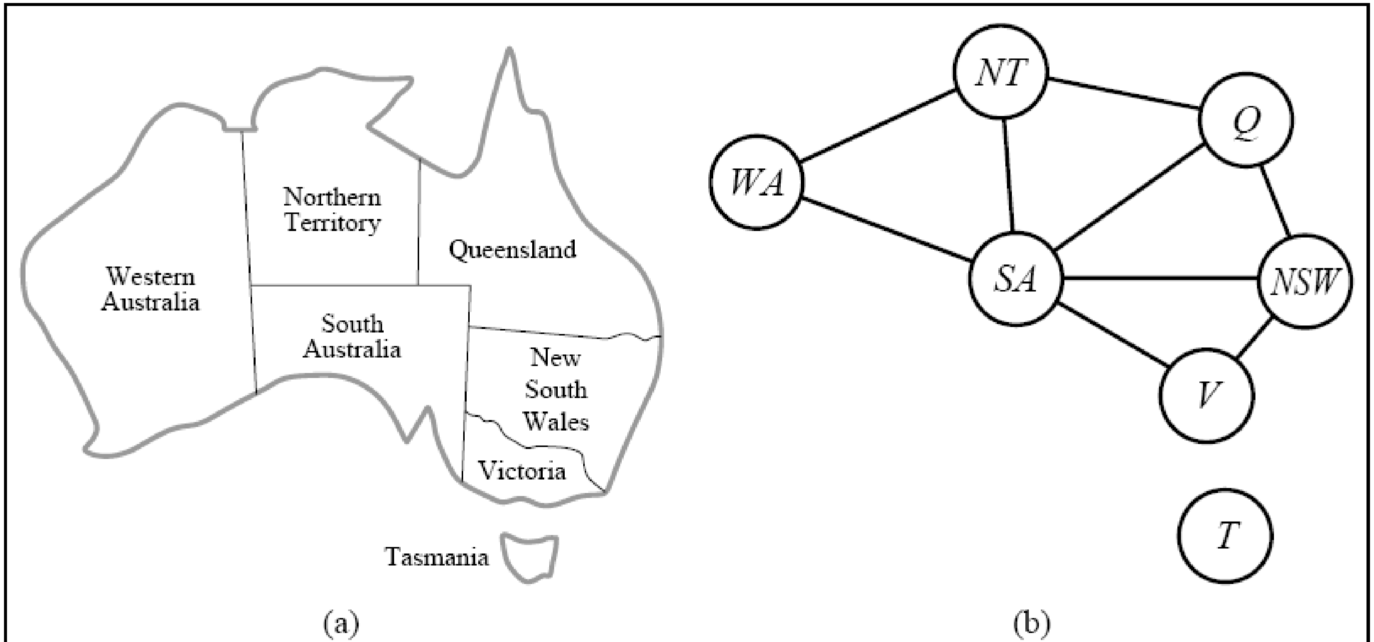


Figure 5.1 (a) The principal states and territories of Australia. Coloring this map can be viewed as a constraint satisfaction problem. The goal is to assign colors to each region so that no neighboring regions have the same color. (b) The map-coloring problem represented as a constraint graph.

Figura do livro

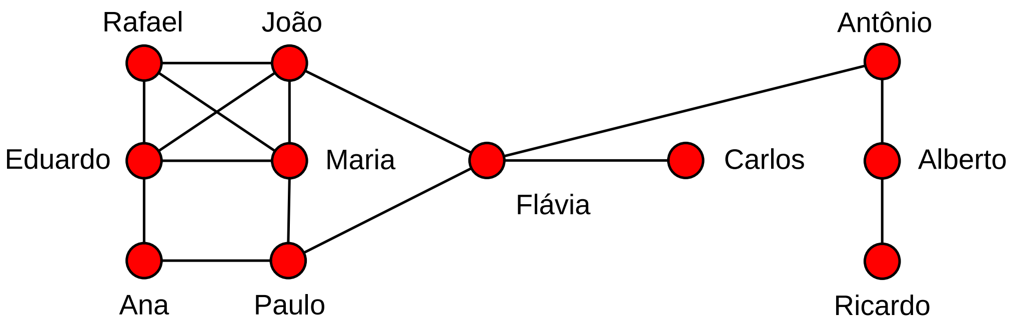
Artificial Intelligence – A modern approach

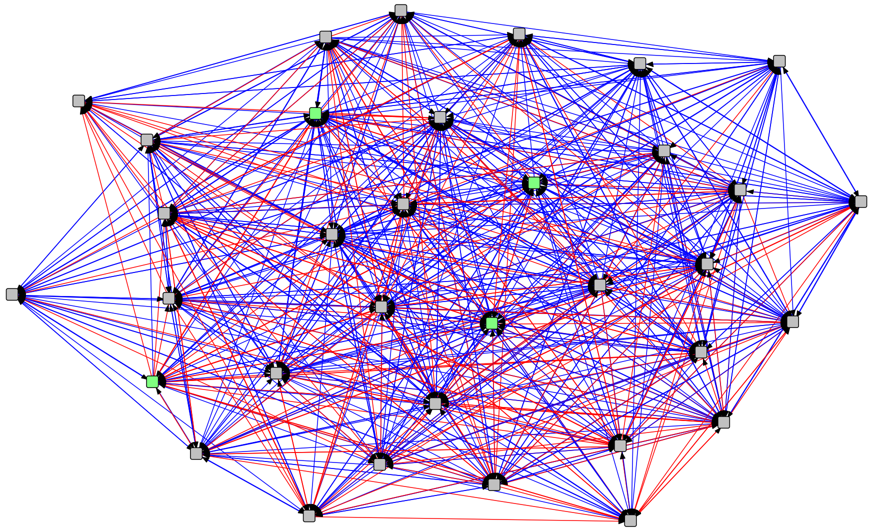
(AIMA)

Exemplos de Aplicações

Exemplo de Aplicação: Sociograma

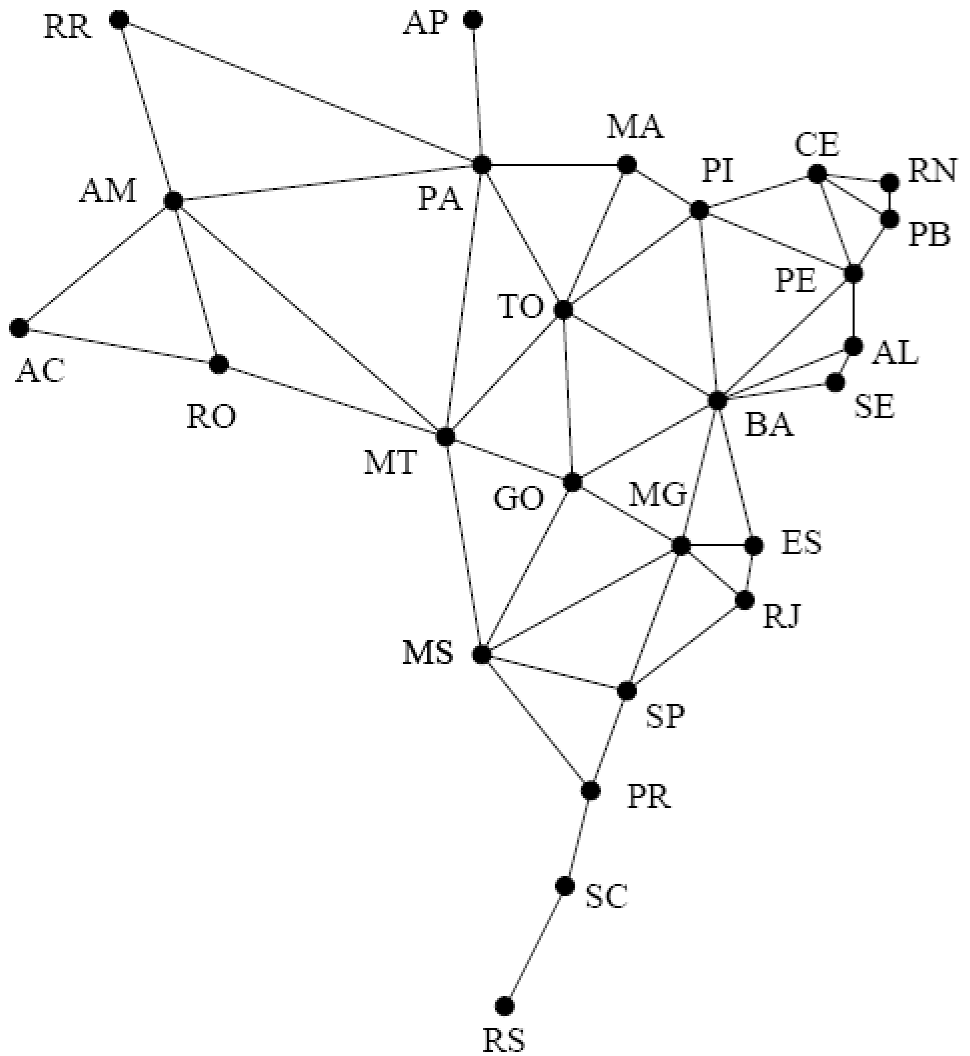
- Os sociogramas representam relacionamentos entre indivíduos;





Exemplo de aplicação:
Representação de Localidades

- A representação é base para inúmeras aplicações em grafos...



Exemplo de aplicação:

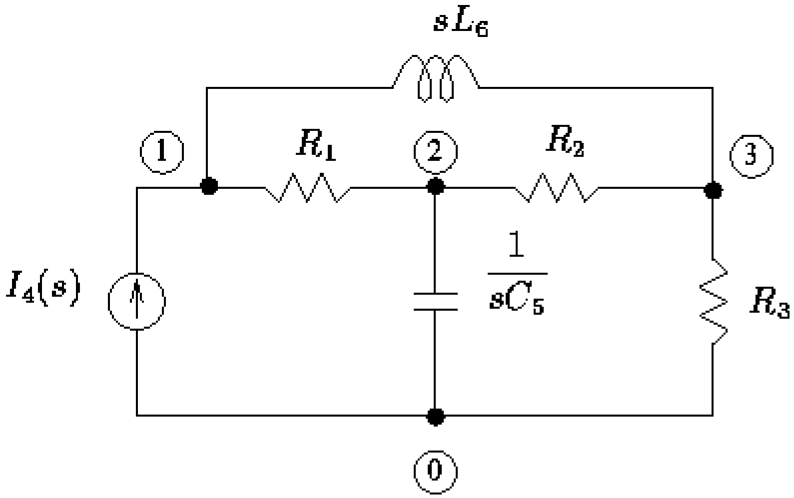
Caminho mínimo

- Exemplo:
  - Caminho mínimo entre BH e Alfenas calculado pelo *Google Maps*.

- O melhor algoritmo para este problema foi proposto por Dijkstra;

- O mesmo que propôs diversos algoritmos e estruturas na área de Sistemas Operacionais;

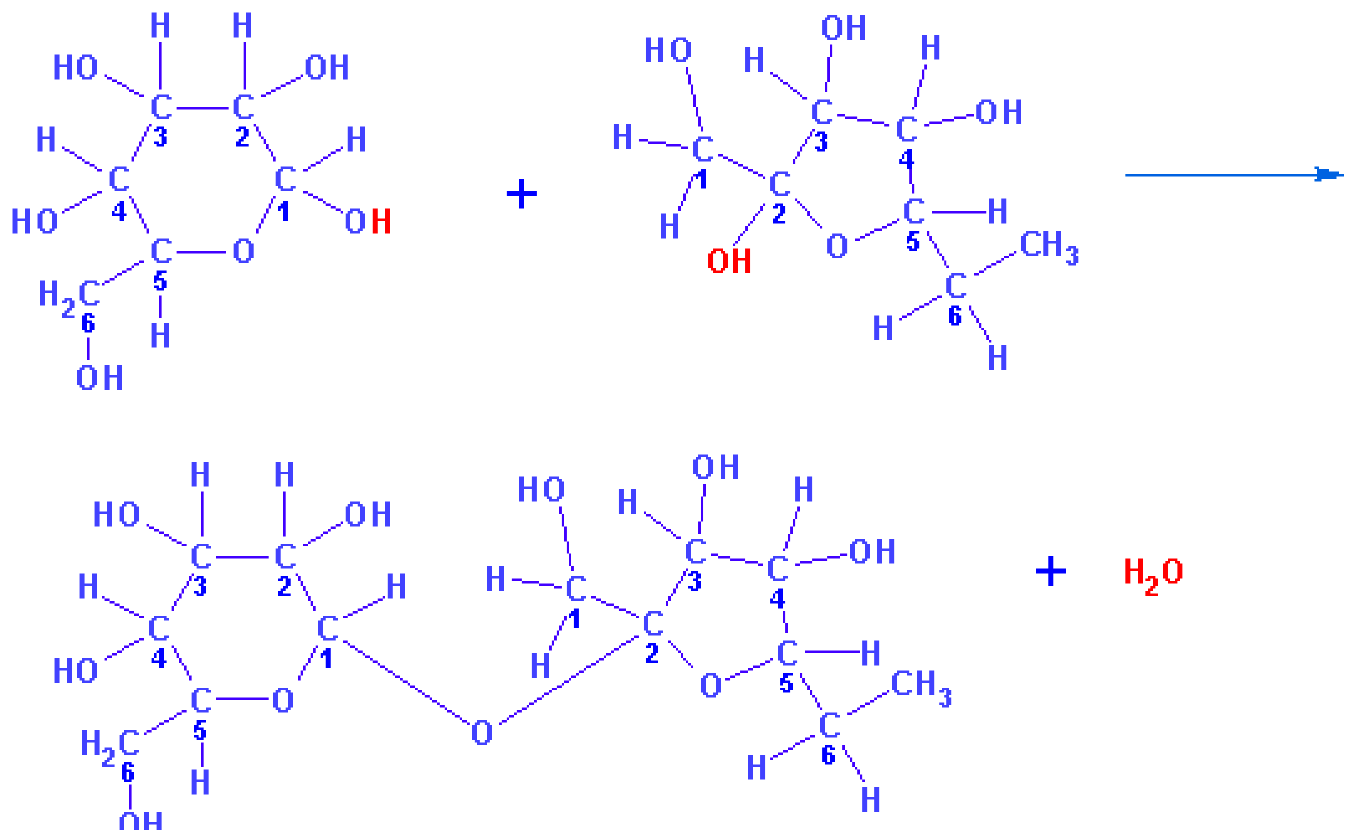
Exemplo de aplicação:
Circuitos elétricos



- Atualmente existem muitos problemas em aberto dedicados a prevenção de falhas no sistema elétrico de grandes metrópoles.

Exemplo de aplicação:
Química molecular

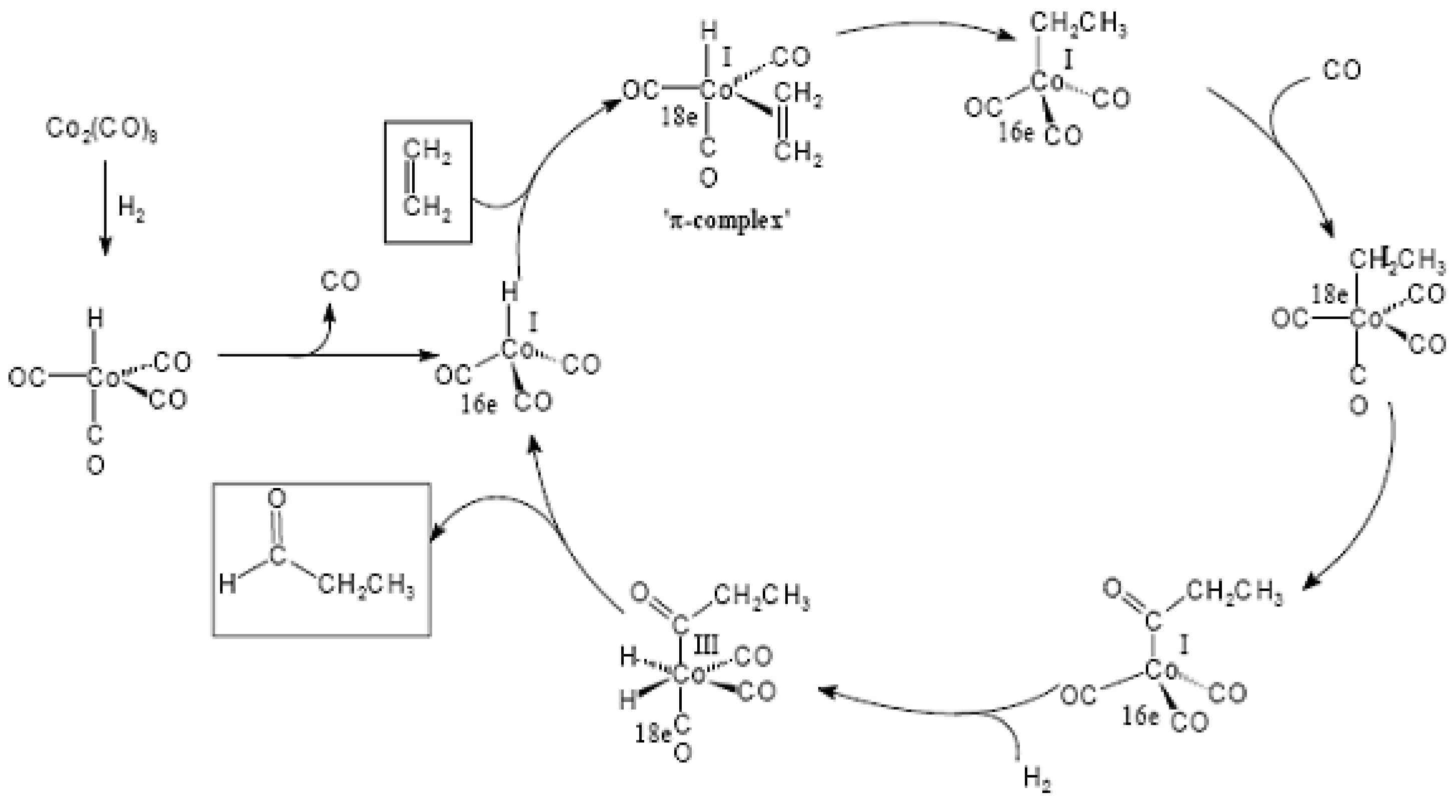
- Representação bidimensional de moléculas utilizando grafos...



molécula de sacarose

Exemplo de aplicação:
Química – Ciclos catalíticos

- Ciclos catalíticos...



Exemplo de aplicação:
Redes de computadores

- Redes de computadores utilizam tabelas de encaminhamento para o roteamento de pacotes...

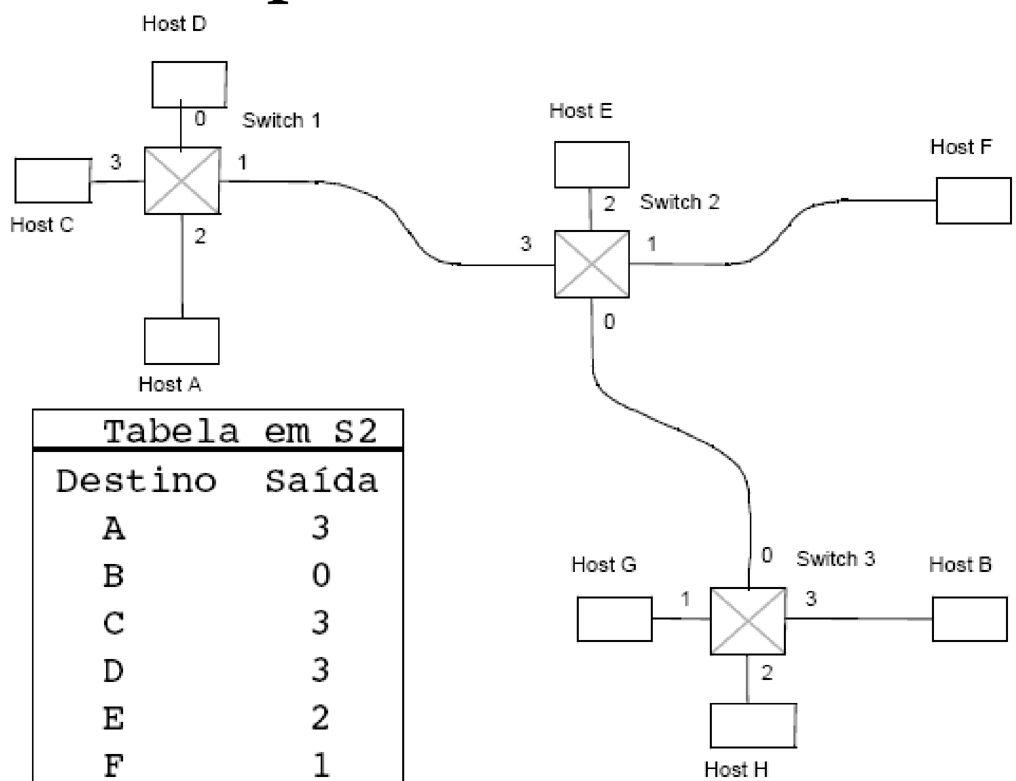
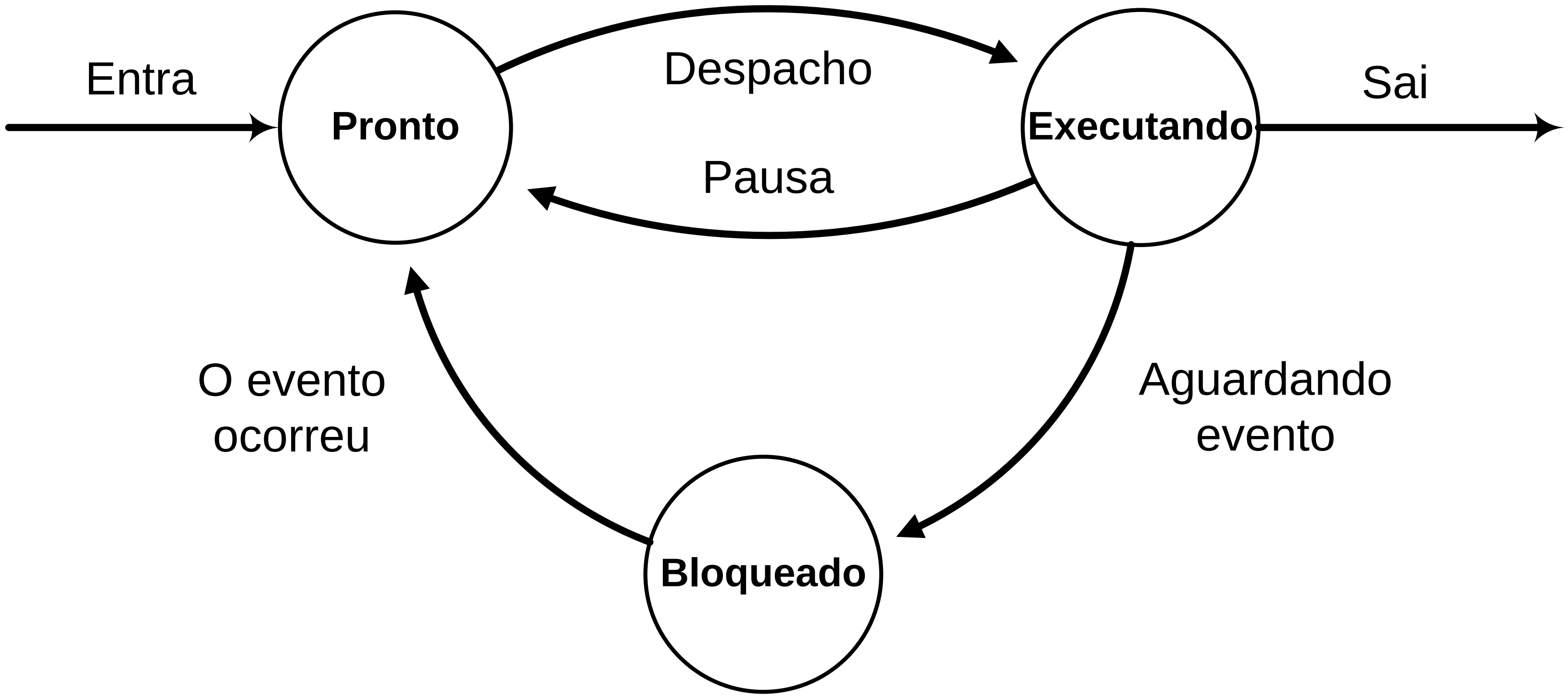


Tabela em S2	
Destino	Saída
A	3
B	0
C	3
D	3
E	2
F	1
G	0
H	0

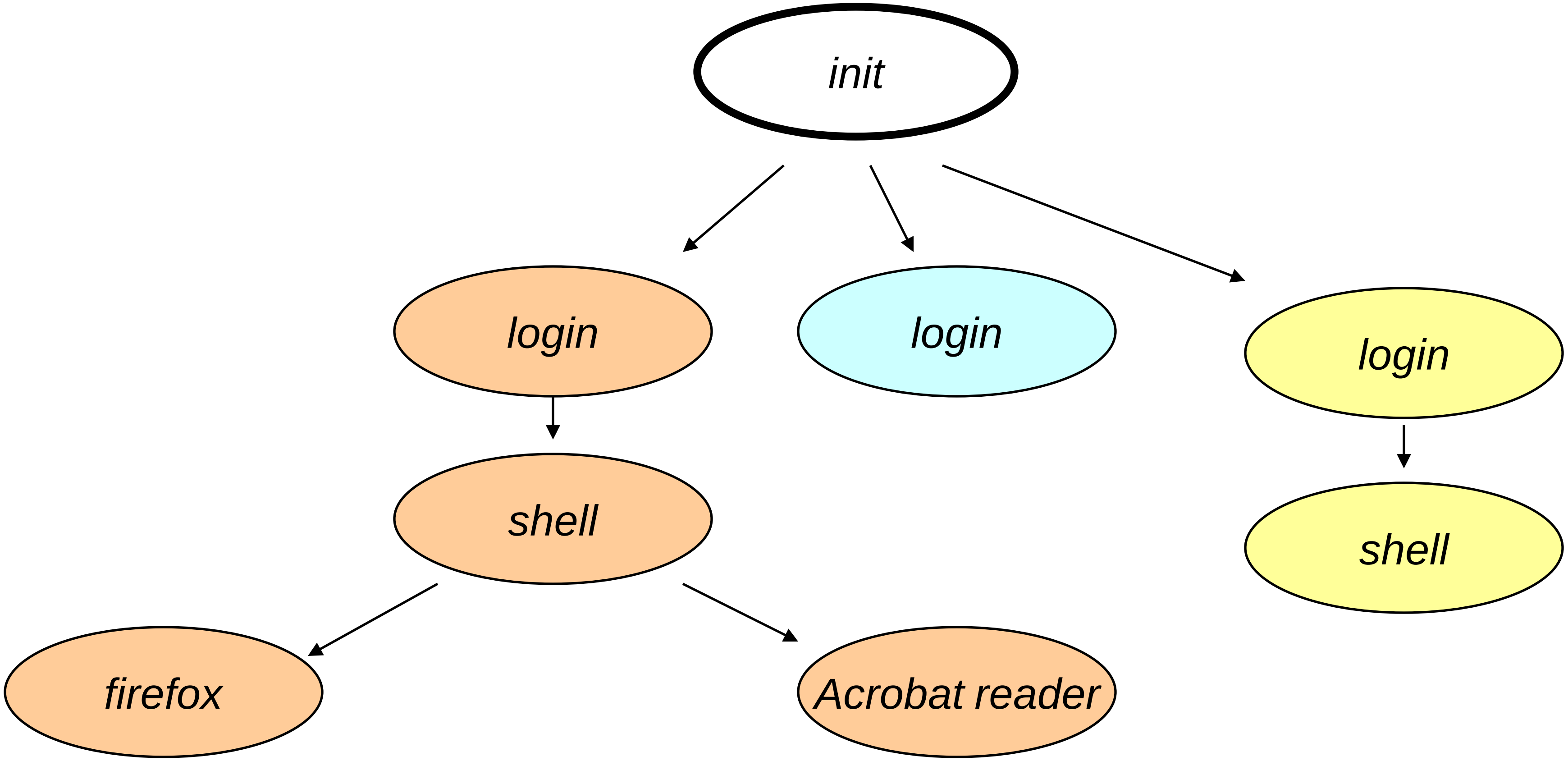
Exemplo de aplicação:
Sistemas Operacionais

- Abstraindo... Entendendo os estados de processos/*threads*...



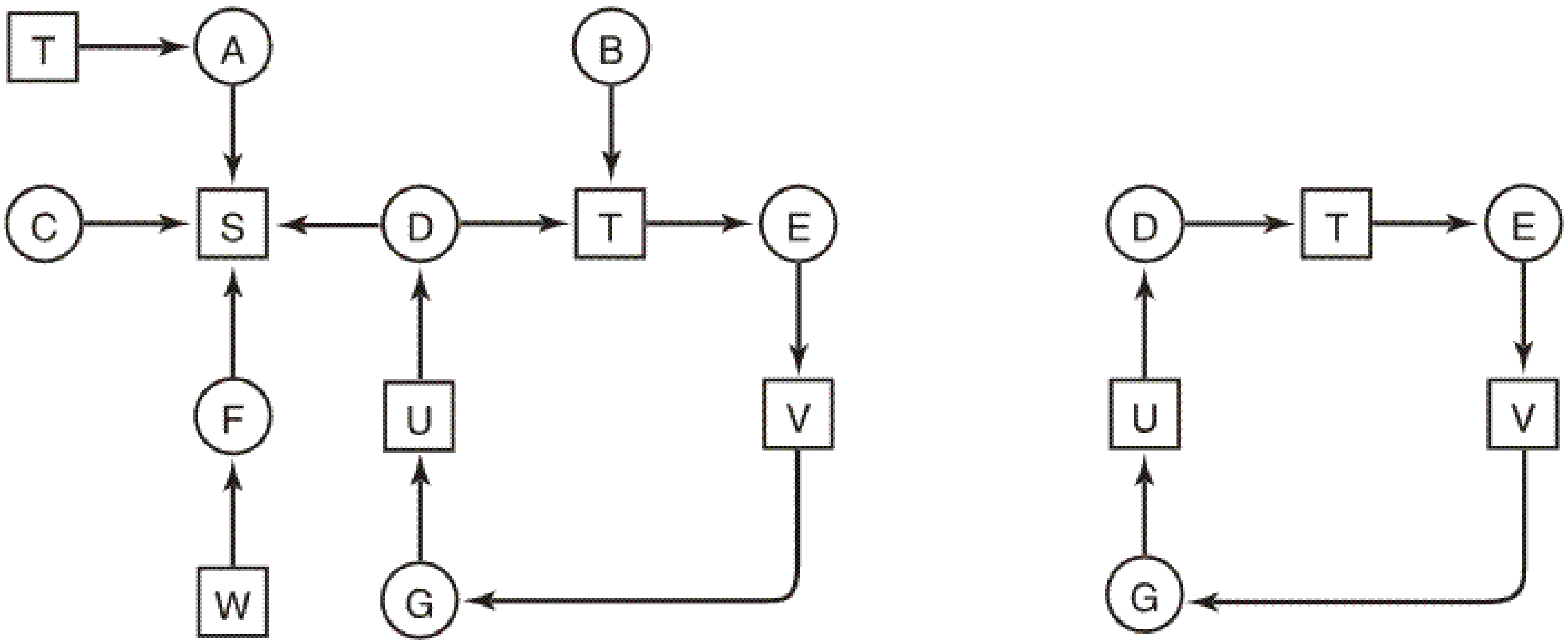
Exemplo de aplicação:
Sistemas Operacionais

- Hierarquia de Processos – Árvores são grafos especiais...



Exemplo de aplicação:
Sistemas Operacionais

- Detecção de *deadlock* através de ciclo no grafo...

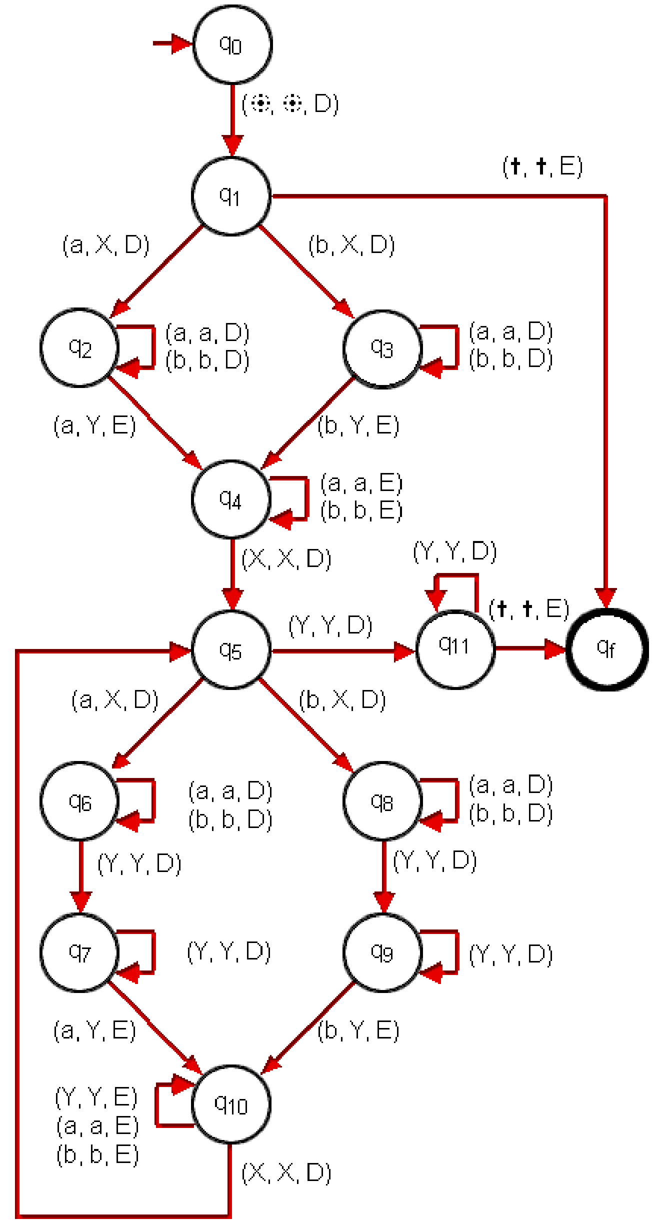


(a) (b)

Exemplo de aplicação:
Teoria da Computação

- Reconhecimento de textos de uma língua/linguagem qualquer.
  - Ex.: C++, Java, Português...

- Aplicação:
  - Detecção de erros sintáticos em frases de um documento por Máquinas de Turing ou Máquina equivalente.

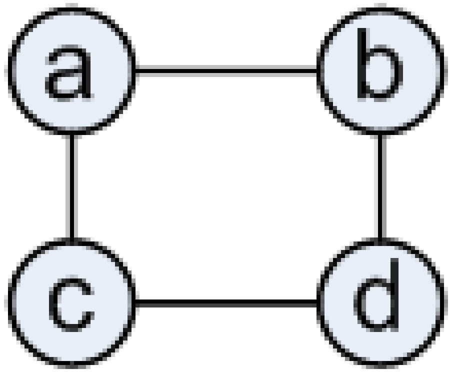


Introdução

Grafos - Introdução

- Os grafos são formados por:
  - Vértices - conjunto *V*;
  - Arestas – conjunto *A*;

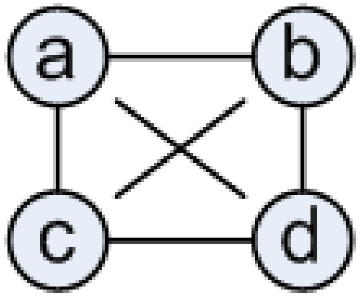
- Formalmente descrito como:
  - $G=(V,A)$



G_0

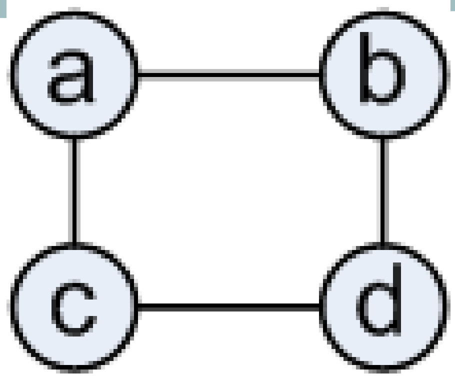
Grafos simples

- Grafo simples:
  - Para qualquer conjunto V, denotamos por $V^{(2)}$ o conjunto de todos os pares não ordenados de elementos de V;
  - $V=\{a, b, c, d\}$
  - $V^{(2)} = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d), (c,d)\}$
  - Portanto, em um grafo simples: $A \subseteq V^{(2)}$
- "Um grafo é um par (V,A), em que V é um conjunto arbitrário "*(finito)*", e A é um subconjunto de $V^{(2)}$."



G_1

Grafos simples



G_0

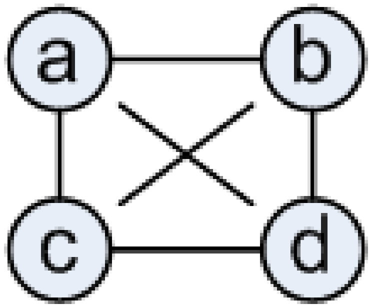
- Neste outro exemplo, o grafo simples G_o é denotado por:
  - $G_o=(V,A)$, onde:
    - $V=\{a,b,c,d\}$
    - $A=\{(a,b), (a,c), (b,d), (c,d)\}$
- *Repare que* A é um subconjunto de $V^{(2)}$;
- $V^{(2)} = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d), (c,d)\}$

Grafos simples

- Em um grafo simples, se a cardinalidade de V é igual a n, qual é a cardinalidade do conjunto $V^{(2)}$?

- $|V| = n$
- $|V^{(2)}| = ????$

- Lembrando que $V^{(2)}$ são os pares não ordenados de V.



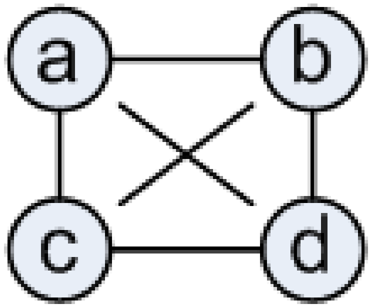
G_1

Grafos simples

- $|V| = n$
- $|V^{(2)}| = ????$

- Lembrando que $V^{(2)}$ são os pares não ordenados de V.

$$\left|V^{(2)}\right| = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$



G_1

Grafo <u>complementar</u> de um grafo simples

- Considere o grafo $G = (V, A)$
- Seu complemento é denotado por

$$\overline{G} = (V, V^{(2)} \setminus A)$$

Grafos simples

- Uma aresta como ***{a,b}*** será denotada simplesmente por ***ab*** ou por ***ba***.

- Dizemos que a aresta ***ab*** incide em ***a*** e em ***b***.

- Dizemos que ***a*** e ***b*** são pontas da aresta;

- Se ***ab*** é uma aresta, vamos dizer que ***a*** e ***b*** são vértices vizinhos ou adjacentes.

Grafos simples

- De acordo com nossa definição, um grafo simples não pode:
  - Ter **arestas paralelas**;
  - Ter **arestas do tipo "laço"**. Ex.: *bb, aa, hh, ...*

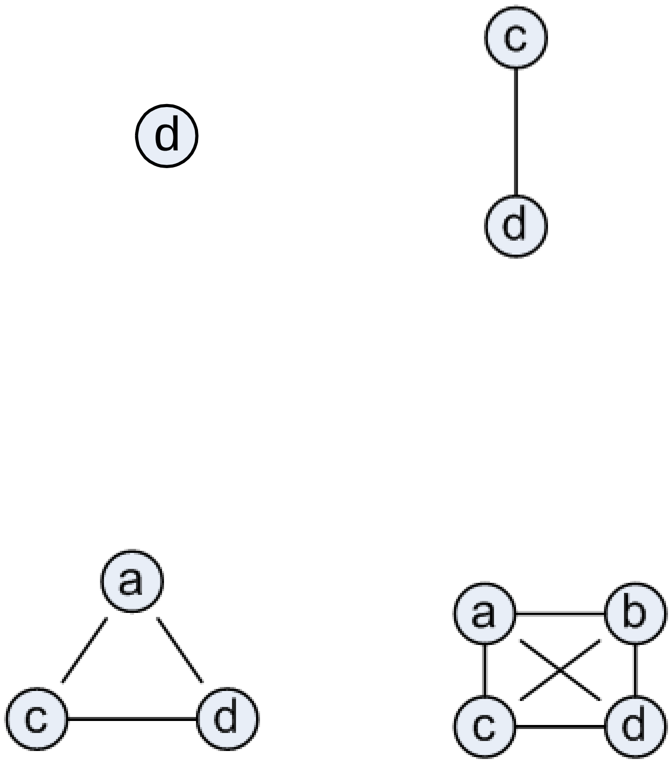
Grafos simples <u>completo</u>

- Um grafo

$$G = (V, A)$$

- é completo se somente se

$$|A| = |V^{(2)}|$$



Grafos simples vazio

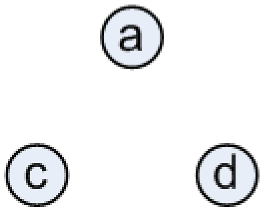
- Um grafo

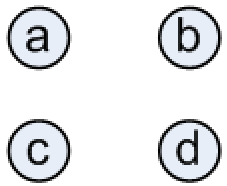
$$G = (V, A)$$

- é vazio se somente se

$$|A| = 0$$

$$A = \{\ \}$$





Grafos simples completo
Grafos simples vazio

- A expressão

$$G = K_n$$

  - é uma abreviação para dizer que G é simples e completo e tem n vértices;

- E a expressão

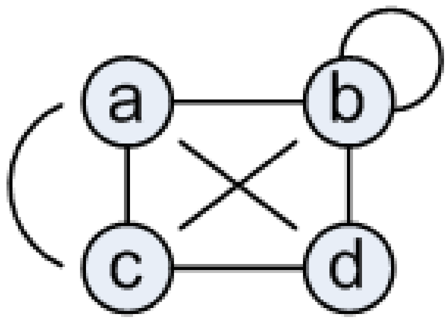
$$G = \overline{K_n}$$

  - é uma abreviação para dizer que G é vazio e tem n vértices.

Grafos não orientados

Grafos não orientados

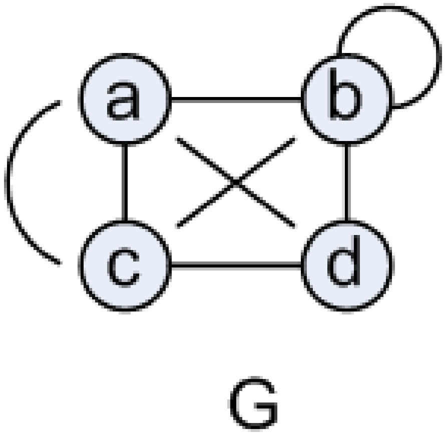
- Estrutura bem parecida com os grafos simples;
- A diferença é que pode possuir arestas paralelas e também arestas "laço";



G

Grafos não orientados

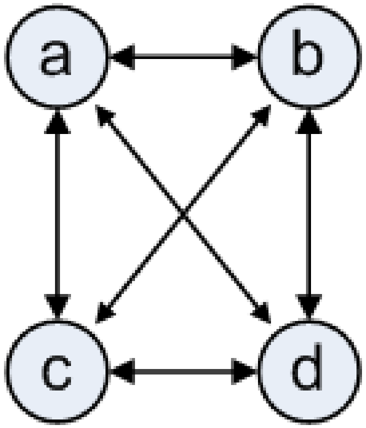
- Aplicações:
  - Em alguns casos, como fluxo em redes, por exemplo, existem dois caminhos que o objeto em questão pode passar entre dois vértices;
  - Exemplo:
    - Uma rede de computadores que possui dois canais de envio de informação;



Grafos orientados simples

Grafos orientados

- Grafo orientado:
  - Para qualquer conjunto V, denotamos por V^2 o conjunto de todos os pares ordenados de elementos de V;
  - $V=\{a, b, c, d\}$
  - $V^2 = \{(a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (a,d), (d,a), (b,c), (c,b), (b,d), (d,b), (c,d), (d,c)\}$
  - Portanto: $A \subseteq V^2$

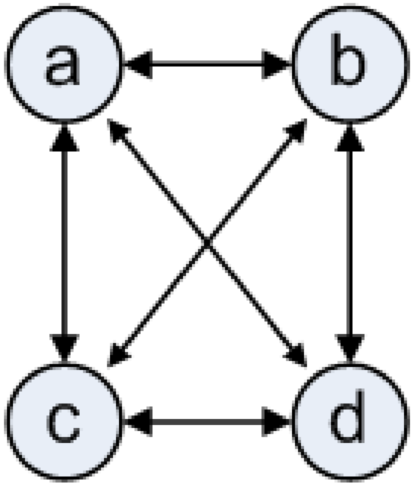


Grafos orientados

- Em um grafo orientado, se a cardinalidade de V é igual a n, qual é a cardinalidade do conjunto V^2?

- $|V| = n$
- $|V^2| = ????$

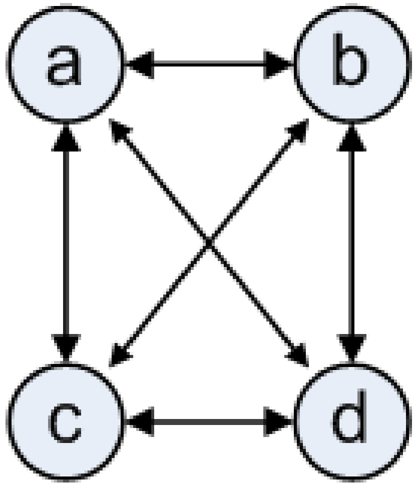
- Lembrando que V^2 são os <u>pares ordenados</u> de V.



Grafos orientados

- $|V| = n$
- $|V^2| = ????$

- Lembrando que V^2 são os pares ordenados de V.

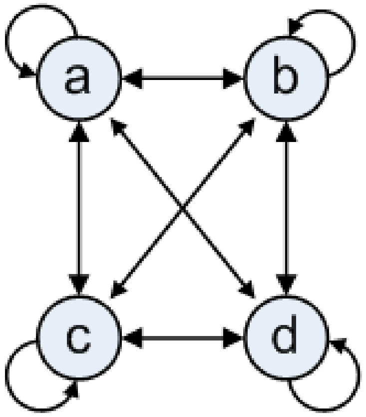


$$|V^2| = \sum_{i=1}^{n}(n-1) = n(n-1)$$

$$= n^2 - n$$

Grafos orientados com aresta “laço”

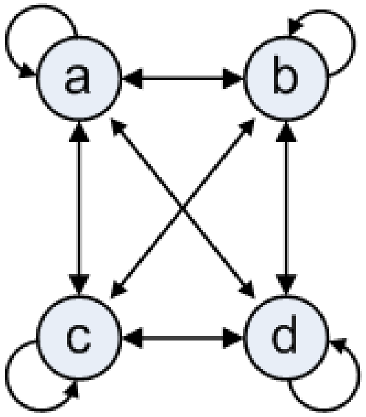
- Se os grafos orientados aceitam aresta do tipo laço,



- O número máximo de aresta é???

Grafos orientados com aresta "laço"

- Se os grafos orientados aceitam aresta do tipo laço,



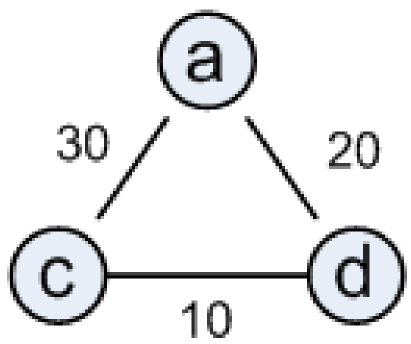
$$\sum_{i=1}^{n}(n) = n(n)$$

$$= n^2$$

Grafos Valorados

Grafos valorados

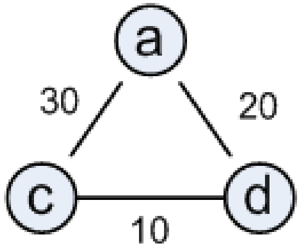
- São utilizados rótulos também nas arestas;



- Grafos valorados podem ser orientados e não orientados;

Grafos valorados

- Geralmente utilizamos rótulos em arestas para representar o custo de alguma coisa:
  - Por exemplo, a distância para sair da cidade *a* e chegar na cidade *b*.
  - Ou o tempo necessário...

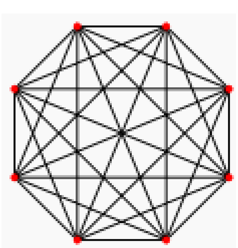


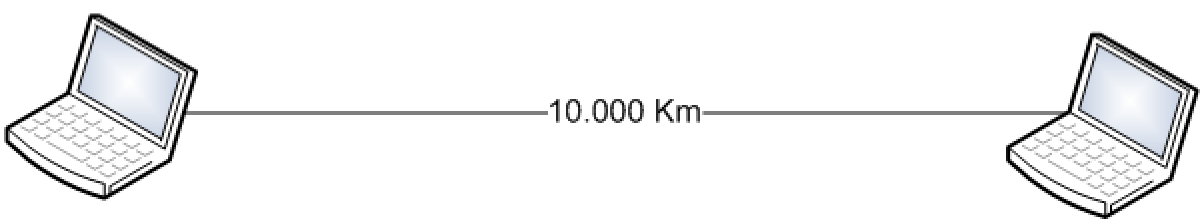
  - Em Redes de Computadores, a aresta muitas vezes recebe o RTT (*round-trip time*), tempo de ida e volta...

Exercício

Enviando um grafo pela rede...

- Você deseja enviar um grafo para outro computador;
- Considere o fluxo contínuo no envio de informação; (os dados não estão divididos em pacotes e não existem perdas)...
- Desconsidere a existência de roteadores no meio do caminho.





Enviando um grafo pela rede...

- Suponha que você possui em memória um grafo K_{2000};
- Cada aresta é representada por 3 inteiros:
  - Vértice de origem;
  - Vértice de destino;
  - Peso da aresta (exemplo: distancia entre dois pontos);
- Você precisa enviar o grafo K_{2000} para outro computador que está a 10.000 Km de distancia;
- Sua largura de banda é 100 Kbps;
- A velocidade da luz na fibra é: $2{,}0 * 10^8$ m/s;
- Qual é o tempo gasto para enviar todo grafo?