Instituto Federal do Sul de Minas Gerais

Projeto e Análise de Algoritmos

(Grafos)

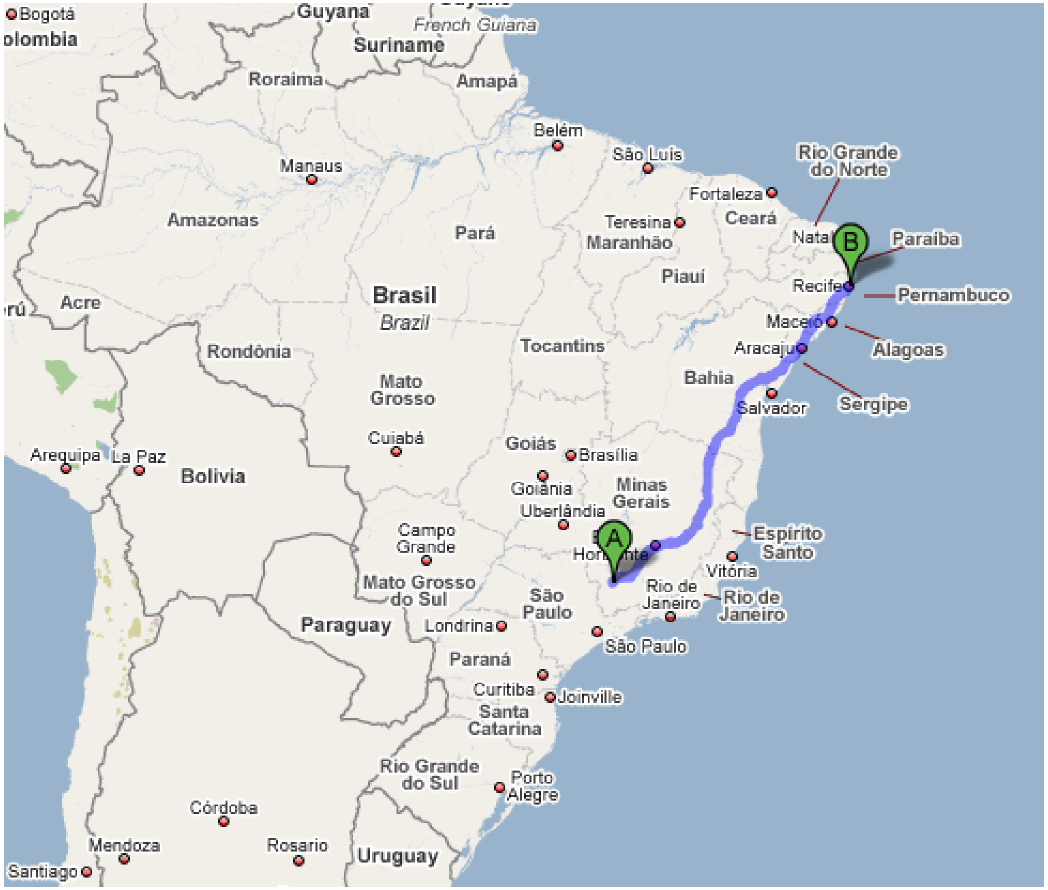
Aula 08 – Caminho Mínimo: Bellman-Ford

Prof. Humberto César Brandão de Oliveira
Prof. Douglas Castilho

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL DE MINAS GERAIS

Caminho Mínimo

- Suponha que você deseja encontrar um caminho mais curto de Alfenas/MG para Recife/PE;

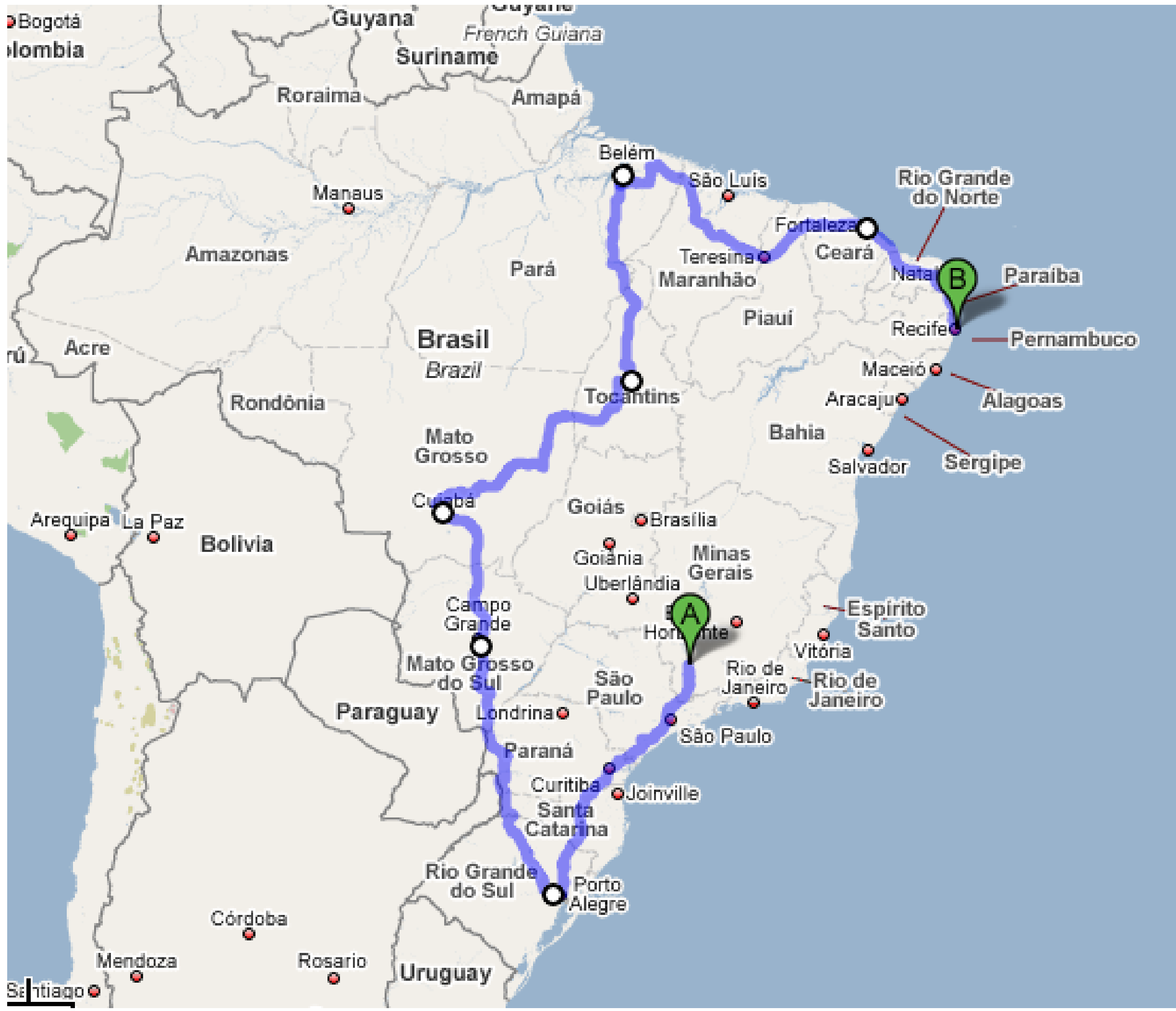


Caminhos mais curtos de origem única

- A principio, podemos *imaginar* um algoritmo que *enumera* todas as possíveis rotas;
    - Se você conhece TODAS as possibilidades a tarefa é apenas computar a distância de cada uma delas e escolher aquela que oferece o menor trajeto.
        - O problema é computável;
        - Pode ser resolvido por uma máquina de Turing ou máquina equivalente.
    - Obviamente, tomando o cuidado de não considerar trajetos com ciclos;

Caminhos mais curtos de origem única

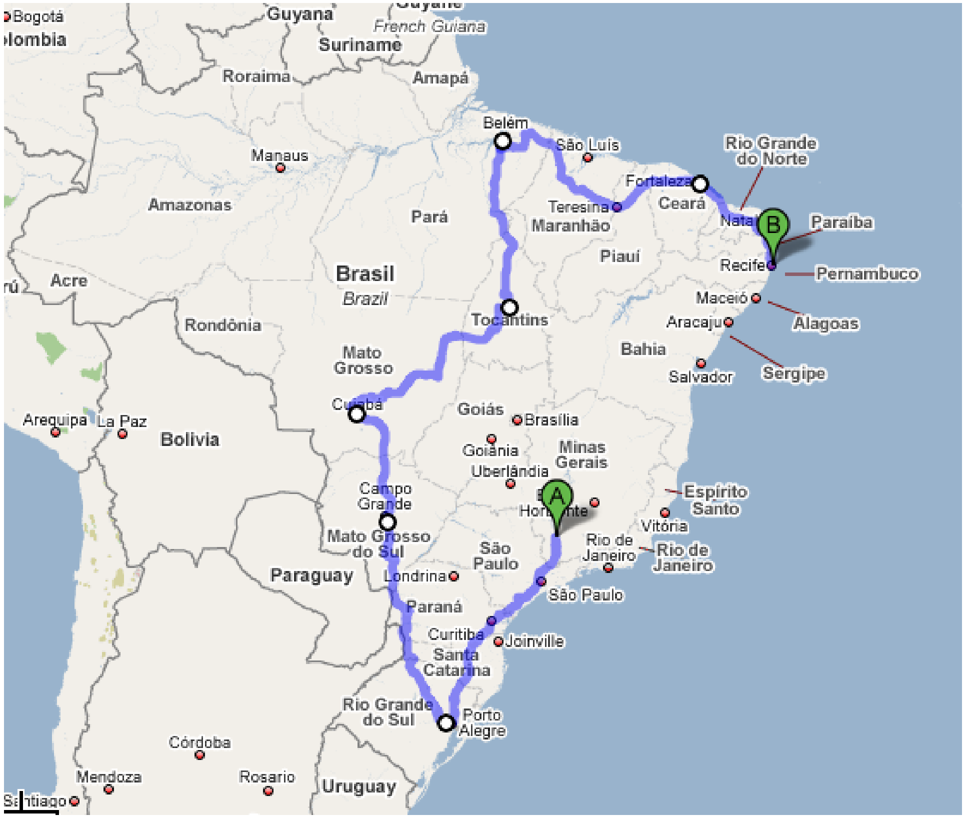
- O problema da abordagem da enumeração é que haverá milhões/bilhões de possibilidades;
- Sendo que a maioria não vale a pena considerar...
- Veja exemplo na figura...



Caminhos mais curtos de origem única

- Podemos realizar obviamente uma enumeração implícita.

- Se a minha rota incompleta atual já possui distância maior que a minha melhor rota completa até então conhecida, então, não precisa continuar com o caminho incompleto atual.
  - Política de corte em uma busca em profundidade.



Caminhos mais curtos de origem única

- Para o problema dos caminhos mais curtos, temos um grafo orientado ponderado

$$G = (V, A)$$

- Com função de peso

$$w : A \rightarrow \Re$$

- Mapeando as arestas em valores reais.

Caminhos mais curtos de origem única

- O peso do caminho p

$$p = \langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$$

- é o somatório dos pesos de suas arestas

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$

Caminhos mais curtos de origem única

- Definimos peso do caminho mais curto de *u* até *v* como:

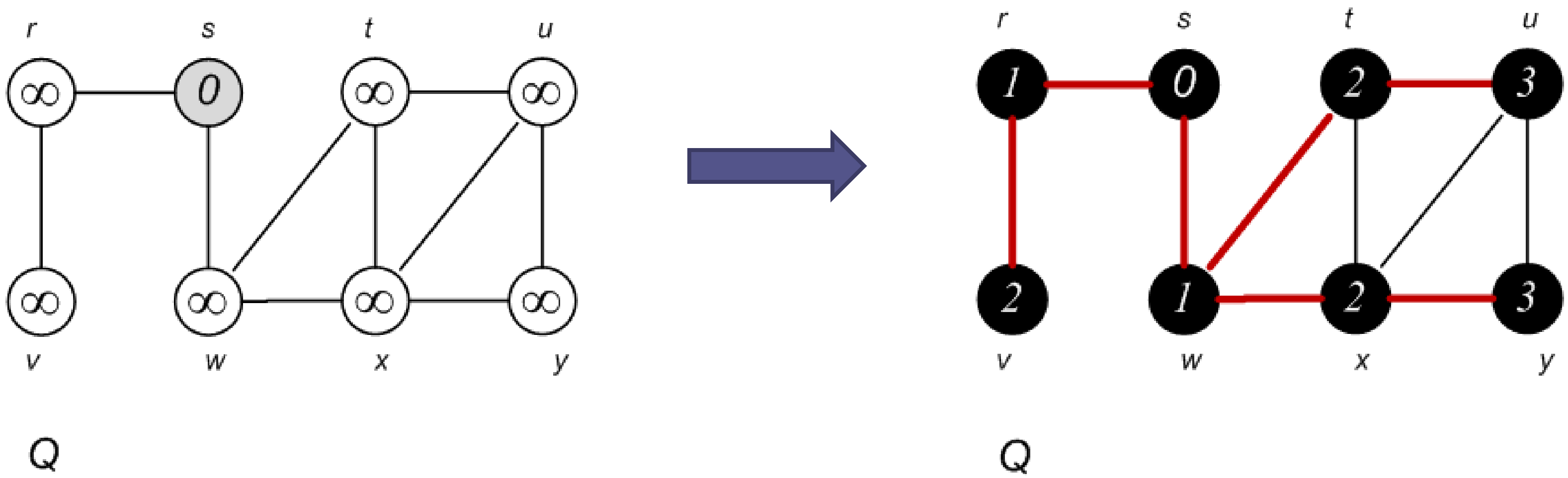
$$\delta(u,v) = \begin{cases} \min\{ w(p) : u \overset{p}{\leadsto} v \}, \text{ se existe caminho de u até v} \\ \infty, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

- Assim, um caminho mais curto de u para v é definido como qualquer caminho p onde

$$w(p) = \delta(u,v)$$

Caminhos mais curtos de origem única

- <u>Relembrando...</u>
  - O algoritmo de busca em largura (BFS) é um algoritmo que calcula caminhos mais curtos em grafos não ponderados...



Caminhos mais curtos de origem única

- Variantes do Problema
  - Caminhos mais curtos de origem única;
  - Caminhos mais curtos de destino único;
  - Caminho mais curto de um único par;
  - Caminhos mais curtos de todos para todos;

Sub-estrutura ótima

Caminhos mais curtos de origem única

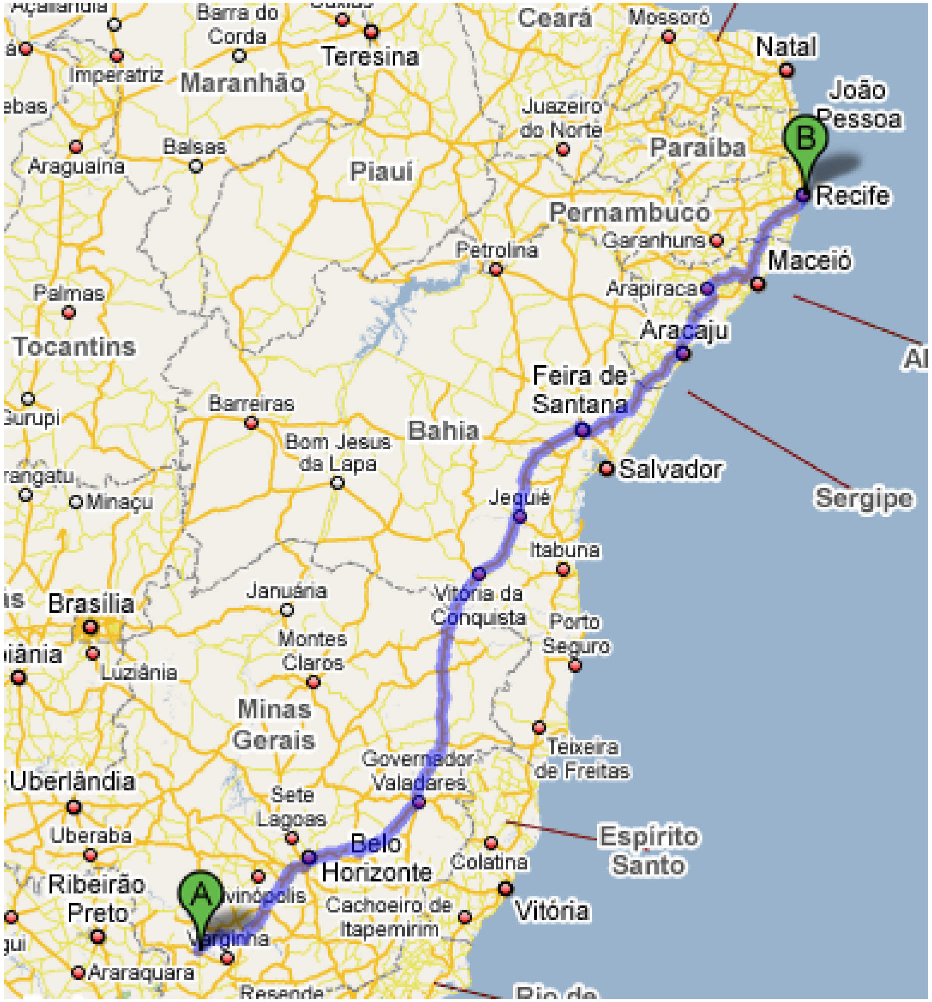
- Sub-estrutura ótima de um caminho mais curto
  - Serve de base para todos os algoritmos exatos que calculam as variantes do caminho mais curto;
  - Seja $p=<v_1,v_2,\ldots,v_k>$ um caminho mais curto de v_1 para v_k;
    - Para quaisquer i e j tais que $1<=i<=j<=k$, e seja $p_{ij}=<v_i, v_{i+1},\ldots,v_j>$ o subcaminho p' desde o vértice v_i até v_j.
    - Então p_{ij} é um caminho mais curto de v_i para v_j.

Caminhos mais curtos de origem única

- <u>**Subestrutura ótima de um caminho mais curto**</u>

Sub-caminho de Aracaju para Maceió é ótimo;

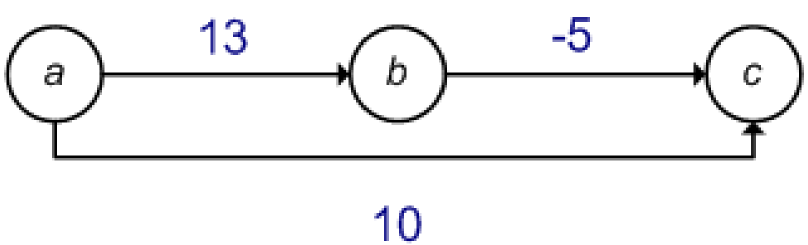
Sub-caminho de Maceió para Recife também é ótimo.



Arestas de peso negativo em um Algoritmo de Caminho Mínimo

Caminhos mais curtos de origem única

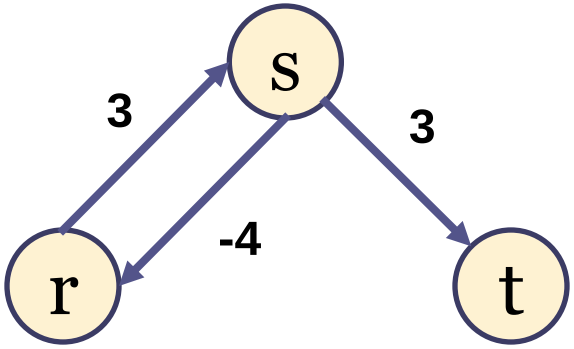
- Arestas de peso negativo
  - Grafos podem ter arestas de peso negativo;
  - Qual é o custo do menor caminho de *a* até *c*?



  - Você visualiza alguma dificuldade envolvendo arestas de pesos negativos?

Caminhos mais curtos de origem única

- <u>Arestas de peso negativo</u>
  - Se existe um ciclo de peso negativo acessível a partir da origem *s*, os pesos dos caminhos mais curtos perdem a referencia;
  - <u>Sempre será possível</u> encontrar um caminho mais curto de peso menor que o já encontrado;



Caminhos mais curtos de origem única

- Arestas de peso negativo
  - Se existe um ciclo de peso negativo em algum caminho desde *s* até *v*, definimos

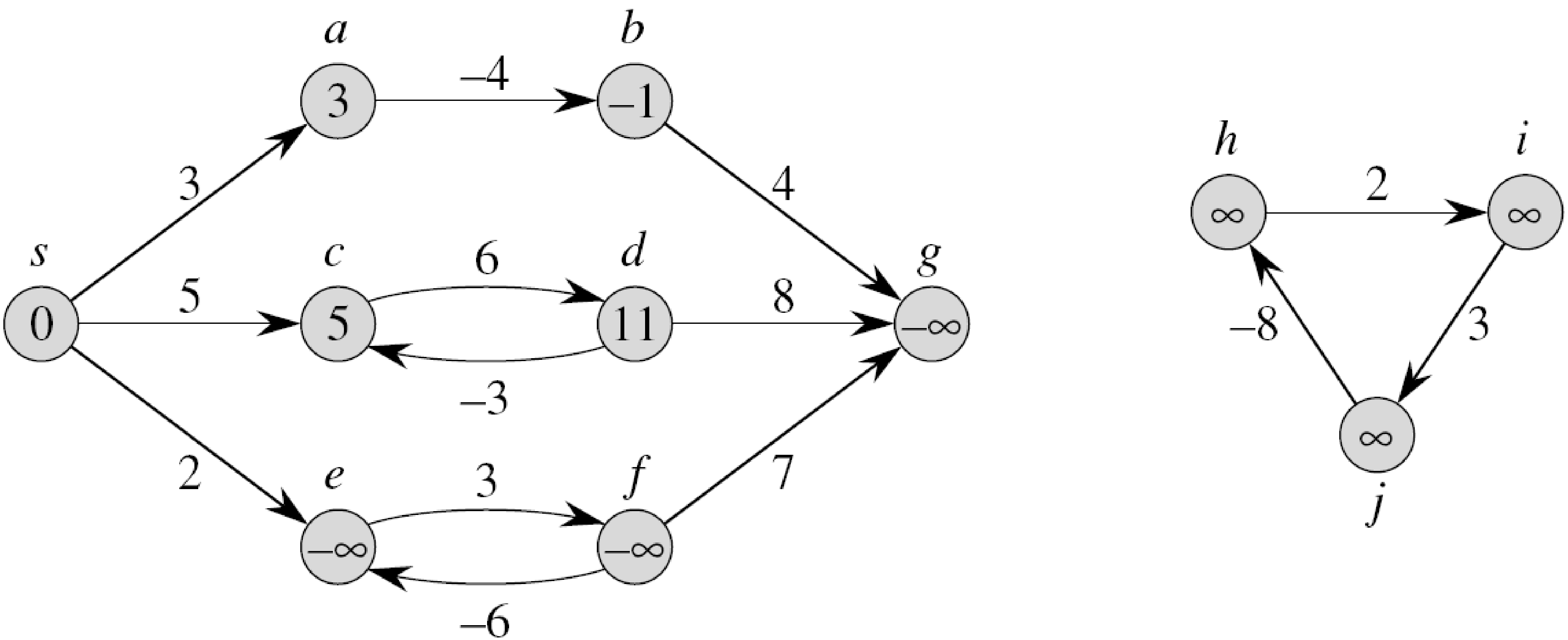
$$\delta(s,v) = -\infty$$

  - Relembrando...

$$\delta(u,v) = \begin{cases} \min\{ w(p) : u \overset{p}{\leadsto} v \}, \text{ se existe caminho de u até v} \\ \infty, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Caminhos mais curtos de origem única

- <u>Arestas de peso negativo</u>



Caminhos mais curtos de origem única

- Arestas de peso negativo

  - O algoritmo de Dijkstra assume que todos os pesos de arestas no grafo de entrada são não negativos;
    - Ideal para aplicação em mapas rodoviários;
    - Algoritmo mais aplicado na prática em sistemas comerciais;

  - O algoritmo de Bellman-Ford permite a existência de arestas de peso negativo, e produz a resposta correta;
    - *Não entra em loop infinito.*

Caminhos mais curtos de origem única

- <u>Ciclos</u>

  - Como vimos, caminhos mais curtos não podem conter ciclos de peso negativo;

  - Mas eles podem conter ciclo de peso positivo?

Caminhos mais curtos de origem única

- Ciclos
  - Como vimos, caminhos mais curtos não podem conter ciclos de peso negativo;
  - Mas eles podem conter ciclo de peso positivo?
  - E ciclo de peso zero?

Caminhos mais curtos de origem única

- Representação de caminhos mais curtos
  - Assim como na busca em largura (BFS) iremos utilizar os **vetores** d e π **para recuperar caminhos** após a aplicação dos algoritmos;
  - Relembrando:

$$\pi[u] = \begin{cases} \text{pai do vértice u, se u é alcançável;} \\ \text{NULL, em caso contrário.} \end{cases}$$

$$d[u] = \begin{cases} \delta(s,u)\text{, se u é alcançável;} \\ \infty\text{, em caso contrário.} \end{cases}$$

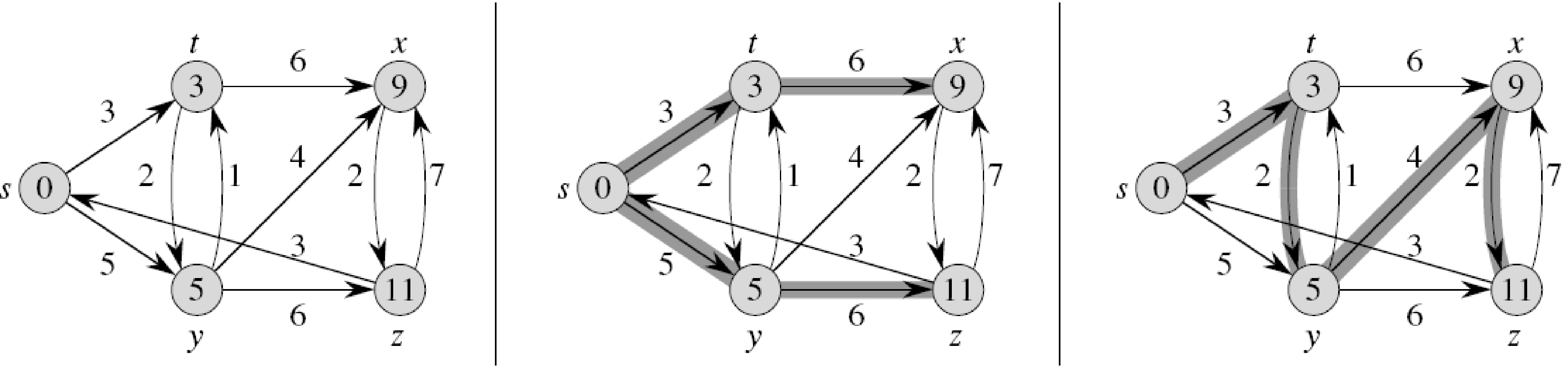
Caminhos mais curtos de origem única

- <u>Árvore de caminhos mais curtos</u>

$$G' = (V', A')$$

$$V' \subseteq V \text{ e } A' \subseteq A$$

- V’ é o conjunto de vértices acessíveis a partir de *s* no grafo;
- G’ forma uma árvore enraizada com raiz *s*;
- Para todo vértice do grafo, o único caminho simples desde *s* até *v* em G’ é um caminho mais curto desde *s* até *v* em G.



Caminhos mais curtos de origem única

- <u>Inicialização dos vetores</u>
  - Os algoritmos que veremos para esta classe de problemas usam um método para inicializar os vetores auxiliares:

$$\text{INICIALIZA}(G = (V, A), s)$$

$$para\ cada\ \ v \in V$$

$$d[v] = \infty$$

$$\pi[v] = NULL$$

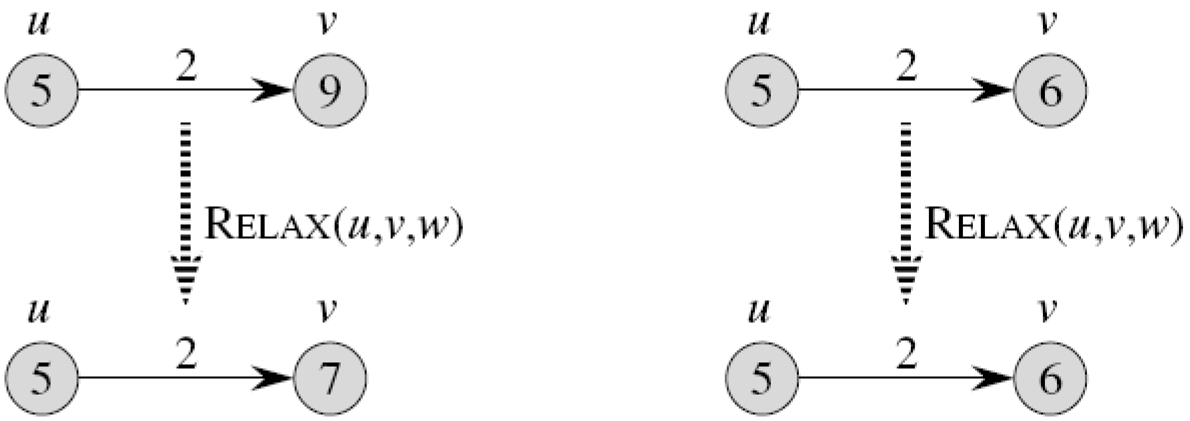
$$fim\ \ para$$

$$d[s] = 0$$

$$fim$$

Caminhos mais curtos de origem única

- <u>Técnica do relaxamento</u>
  - "O processo de relaxar uma aresta *(u,v)* consiste em testar se podemos melhorar o caminho mais curto para *v* encontrado até agora pela passagem de *u* e, neste caso, atualizar *d[v]* e *π[v]*."



Caminhos mais curtos de origem única

- Técnica do relaxamento

$$\text{RELAXA}(u, v, w)$$

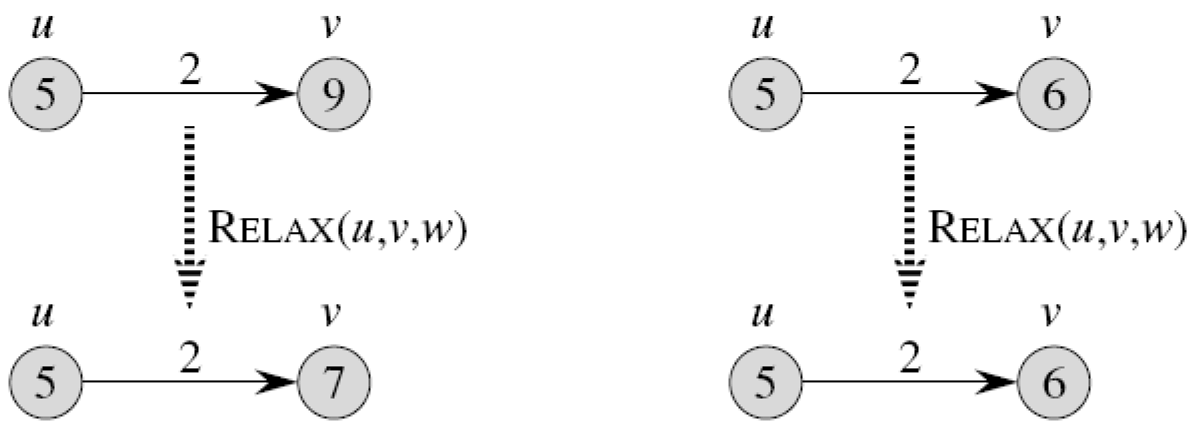
$$\quad se\, d[v] > (d[u] + w(u,v)) \;\; então$$

$$\qquad d[v] \leftarrow d[u] + w(u,v)$$

$$\qquad \pi[v] = u$$

$$\quad fim \;\; se$$

$$fim$$



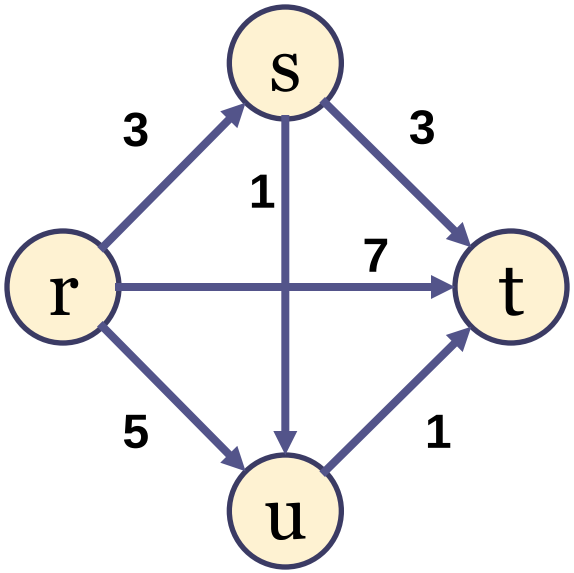
Algoritmo de Bellman-Ford

Algoritmo de Bellman-Ford

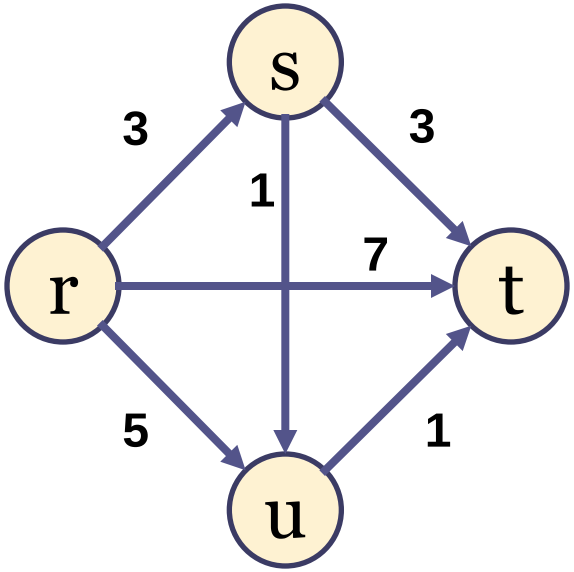
- Resolve o problema de caminhos mais curtos de uma única origem;
- São permitidas arestas com peso negativo (resolve o caso mais geral);
- Retorna verdadeiro se não existe ciclo negativo, e falso em caso contrário;

Algoritmo de Bellman-Ford

- Vamos encontrar os caminhos mais curtos de *r* para todos os outros vértices do seguinte grafo:



Algoritmo de Bellman-Ford



$$\text{INICIALIZA}(G = (V, A), s)$$

$$\quad para\ cada\ v \in V$$

$$\qquad d[v] = \infty$$

$$\qquad \pi[v] = NULL$$

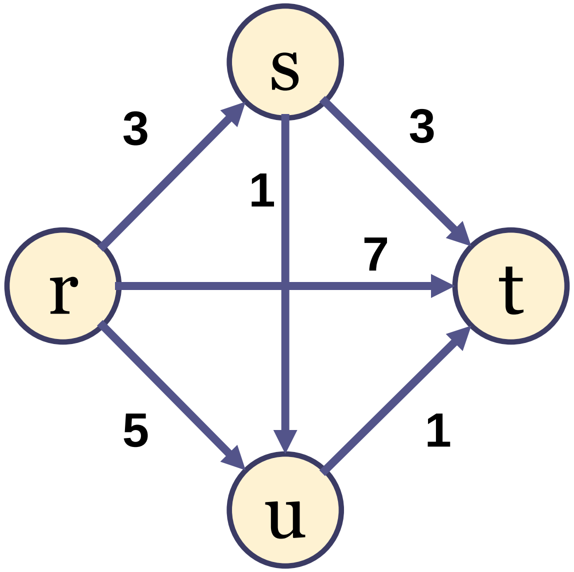
$$\quad fim\ \ para$$

$$\quad d[s] = 0$$

$$fim$$

vértice	r	s	t	u
d	0	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL

Algoritmo de Bellman-Ford



$$BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s)$$
$\quad INICIALIZA(G,s)$
$\quad para\ i \leftarrow 1\ até\ |V|-1$
$\quad\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$
$\quad\quad\quad RELAXA(u,v,w)$
$\quad\quad fim\ \ para$
$\quad fim\ \ para$
$\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$
$\quad\quad se\ d[v] > d[u] + w(u,v)$
$\quad\quad\quad retorna\ falso$
$\quad\quad fim\ \ se$
$\quad fim\ \ para$
$\quad retorna\ verdadeiro$
fim

variável	valor
i	1

vértice	r	s	t	u
d	0	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL

Algoritmo de Bellman-Ford

(s,t)

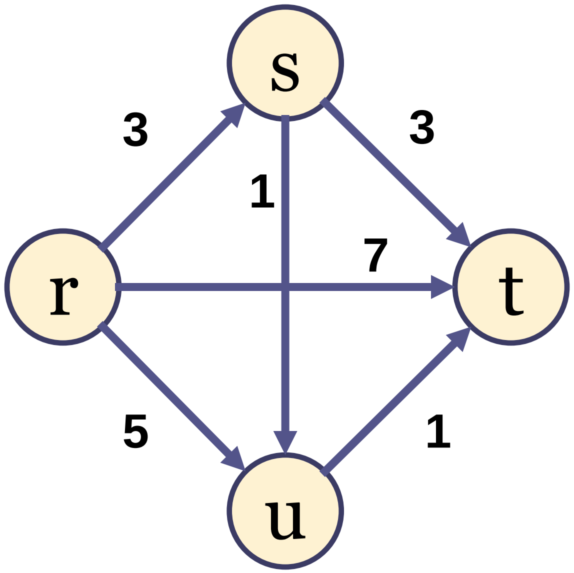
(s,u)

(u,t)

(r,t)

(r,s)

(r,u)



$$
\begin{array}{l}
BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s)\\
\quad INICIALIZA(G,s)\\
\quad para\ i \leftarrow 1\ até\ |V|-1\\
\quad\quad para\,cada\,aresta\,(u,v)\in A\\
\quad\quad\quad RELAXA(u,v,w)\\
\quad\quad fim\ \ para\\
\quad fim\ \ para\\
\quad para\,cada\,aresta\,(u,v)\in A\\
\quad\quad se\ d[v] > d[u]+w(u,v)\\
\quad\quad\quad retorna\ \ falso\\
\quad\quad fim\ \ se\\
\quad fim\ \ para\\
\quad retorna\ \ verdadeiro\\
fim
\end{array}
$$

variável	valor
i	1

vértice	r	s	t	u
d	0	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL

Algoritmo de Bellman-Ford

$\boxed{\texttt{(s,t)}}$

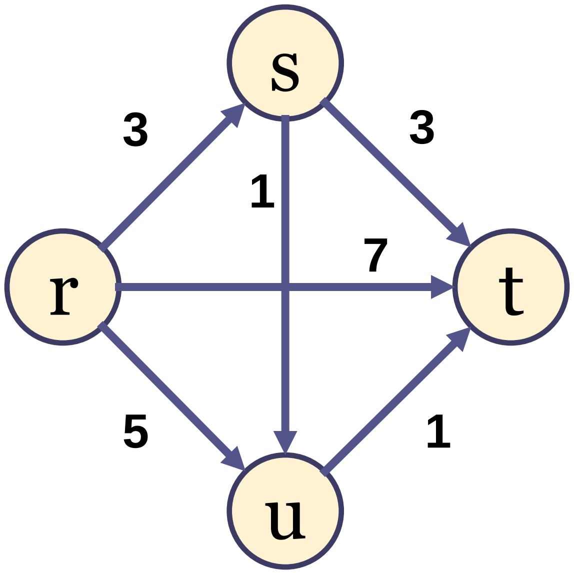
(s,u)

(u,t)

(r,t)

(r,s)

(r,u)



variável	valor
i	1

vértice	r	s	t	u
d	0	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL

$BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s)$

$\quad INICIALIZA(G,s)$

$\quad para\ i \leftarrow 1\ até\ |V|-1$

$\quad\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad\quad RELAXA(u,v,w)$

$\quad\quad fim\ \ para$

$\quad fim\ \ para$

$\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad se\ d[v] > d[u] + w(u,v)$

$\quad\quad\quad retorna\ \ falso$

$\quad\quad fim\ \ se$

$\quad fim\ \ para$

$\quad retorna\ \ verdadeiro$

fim

Algoritmo de Bellman-Ford

(s,t)

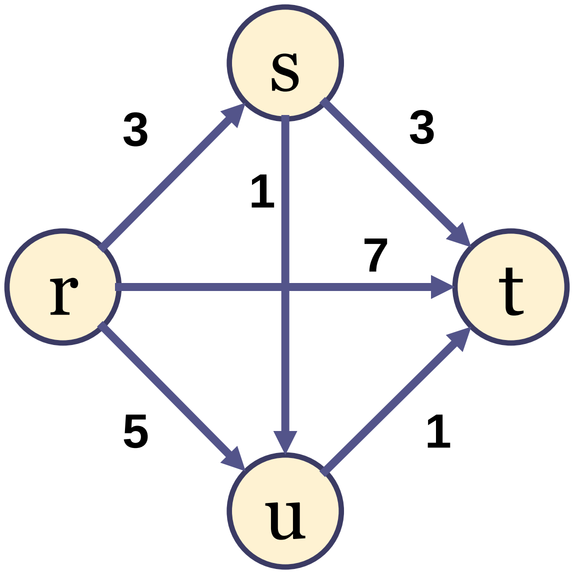
$\boxed{\text{(s,u)}}$

(u,t)

(r,t)

(r,s)

(r,u)



variável	valor
i	1

vértice	r	s	t	u
d	0	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL

$BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s)$

$INICIALIZA(G,s)$

$para\ i \leftarrow 1\ até\ |V|-1$

$para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$RELAXA(u,v,w)$

$fim\ \ para$

$fim\ \ para$

$para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$se\ d[v] > d[u] + w(u,v)$

$retorna\ \ falso$

$fim\ \ se$

$fim\ \ para$

$retorna\ \ verdadeiro$

fim

Algoritmo de Bellman-Ford

(s,t)

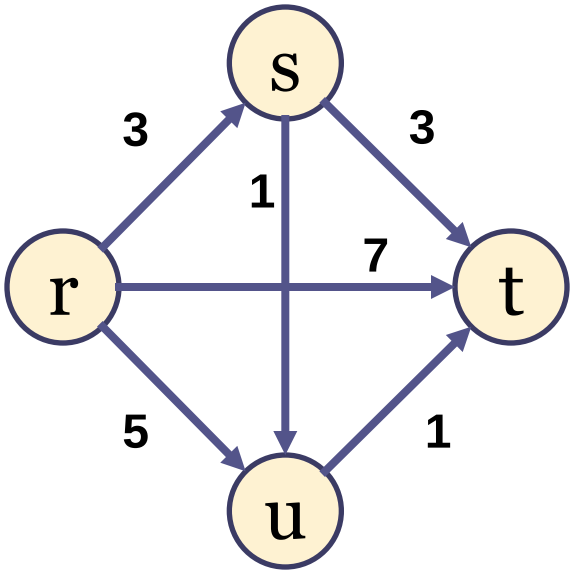
(s,u)

$\boxed{(u,t)}$

(r,t)

(r,s)

(r,u)



$$
\begin{array}{l}
BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s) \\
\quad INICIALIZA(G,s) \\
\quad para\ i \leftarrow 1\ até\ |V|-1 \\
\quad\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A \\
\quad\quad\quad RELAXA(u,v,w) \\
\quad\quad fim\ \ para \\
\quad fim\ \ para \\
\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A \\
\quad\quad se\ d[v] > d[u] + w(u,v) \\
\quad\quad\quad retorna\ \ falso \\
\quad\quad fim\ \ se \\
\quad fim\ \ para \\
\quad retorna\ \ verdadeiro \\
fim
\end{array}
$$

variável	valor
i	1

vértice	r	s	t	u
d	0	∞	∞	∞
π	NULL	NULL	NULL	NULL

Algoritmo de Bellman-Ford

(s,t)

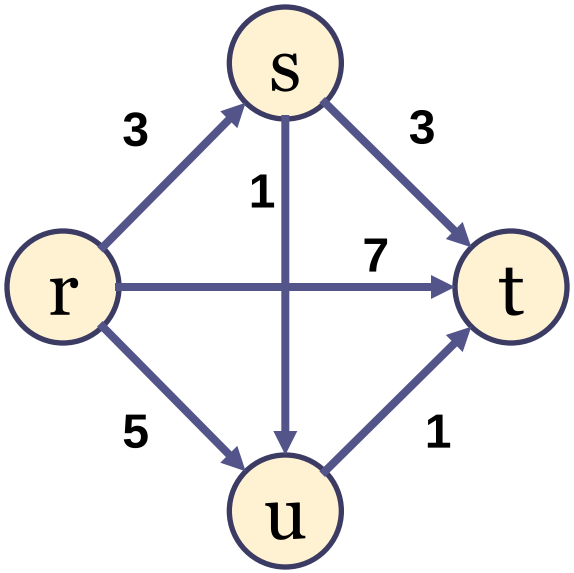
(s,u)

(u,t)

$\boxed{(r,t)}$

(r,s)

(r,u)



variável	valor
i	1

vértice	r	s	t	u
d	0	∞	7	∞
π	NULL	NULL	r	NULL

$BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s)$

$\quad INICIALIZA(G,s)$

$\quad para\ i \leftarrow 1\ até\ |V|-1$

$\quad\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad\quad RELAXA(u,v,w)$

$\quad\quad fim\ \ para$

$\quad fim\ \ para$

$\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad se\ d[v] > d[u] + w(u,v)$

$\quad\quad\quad retorna\ \ falso$

$\quad\quad fim\ \ se$

$\quad fim\ \ para$

$\quad retorna\ \ verdadeiro$

fim

Algoritmo de Bellman-Ford

(s,t)

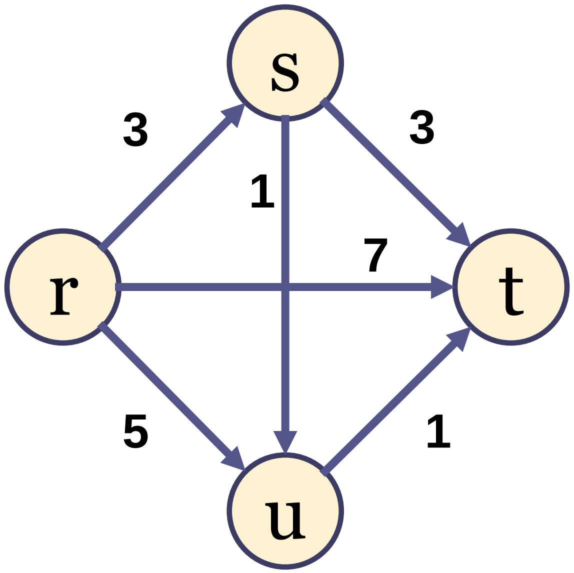
(s,u)

(u,t)

(r,t)

$\boxed{\text{(r,s)}}$

(r,u)



variável	valor
i	1

vértice	r	s	t	u
d	0	3	7	∞
π	NULL	r	r	NULL

$BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s)$

$\quad INICIALIZA(G,s)$

$\quad para\ i \leftarrow 1\ até\ |V|-1$

$\quad\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad\quad RELAXA(u,v,w)$

$\quad\quad fim\ \ para$

$\quad fim\ \ para$

$\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad se\ d[v] > d[u] + w(u,v)$

$\quad\quad\quad retorna\ \ falso$

$\quad\quad fim\ \ se$

$\quad fim\ \ para$

$\quad retorna\ \ verdadeiro$

fim

Algoritmo de Bellman-Ford

(s,t)

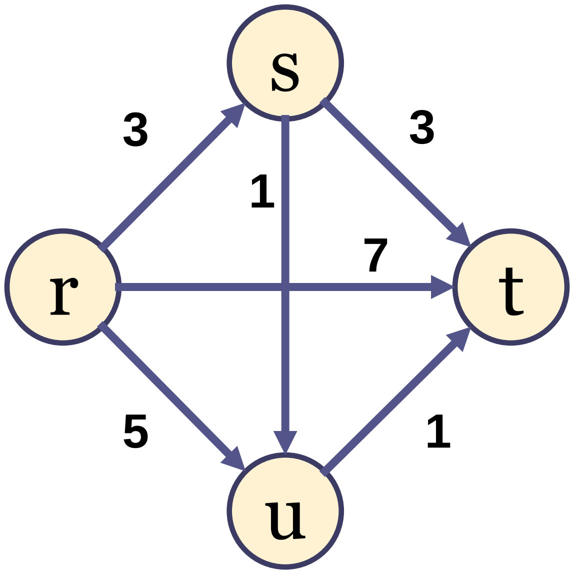
(s,u)

(u,t)

(r,t)

(r,s)

$\boxed{\text{(r,u)}}$



variável	valor
i	1

vértice	r	s	t	u
d	0	3	7	5
π	NULL	r	r	r

$BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s)$

$\quad INICIALIZA(G,s)$

$\quad para\ i \leftarrow 1\ até\ |V|-1$

$\quad\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad\quad RELAXA(u,v,w)$

$\quad\quad fim\ \ para$

$\quad fim\ \ para$

$\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad se\ d[v] > d[u] + w(u,v)$

$\quad\quad\quad retorna\ \ falso$

$\quad\quad fim\ \ se$

$\quad fim\ \ para$

$\quad retorna\ \ verdadeiro$

fim

Algoritmo de Bellman-Ford

(s,t)

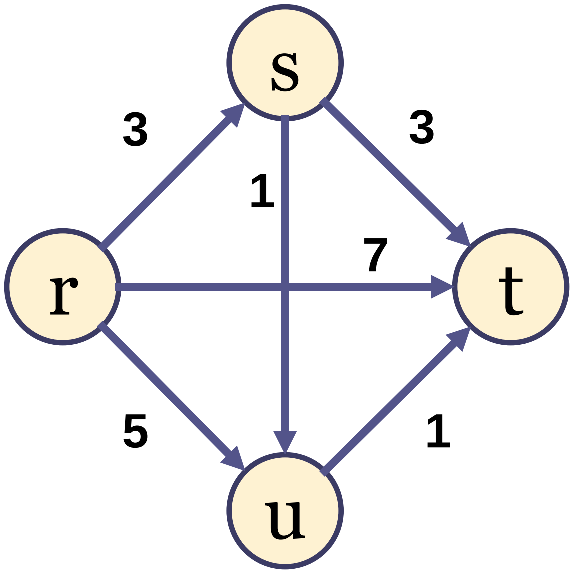
(s,u)

(u,t)

(r,t)

(r,s)

(r,u)



variável	valor
i	2

vértice	r	s	t	u
d	0	3	7	5
π	NULL	r	r	r

$BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s)$

$\quad INICIALIZA(G,s)$

$\quad para\ i \leftarrow 1\ até\ |V|-1$

$\quad\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad\quad RELAXA(u,v,w)$

$\quad\quad fim\ \ para$

$\quad fim\ \ para$

$\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad se\ d[v] > d[u] + w(u,v)$

$\quad\quad\quad retorna\ \ falso$

$\quad\quad fim\ \ se$

$\quad fim\ \ para$

$\quad retorna\ \ verdadeiro$

fim

Algoritmo de Bellman-Ford

(s,t)

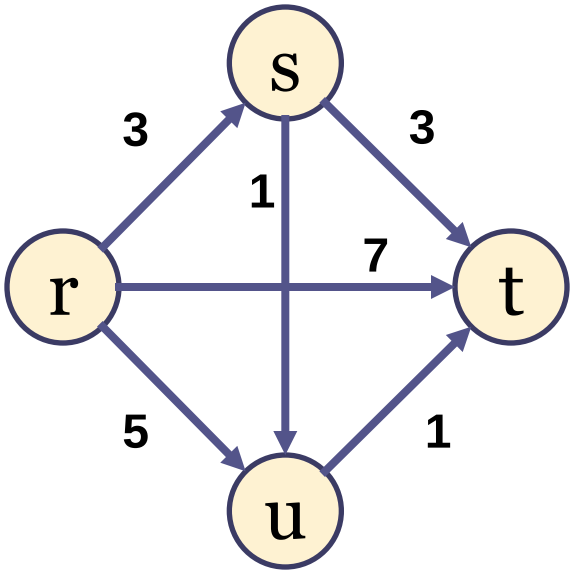
(s,u)

(u,t)

(r,t)

(r,s)

(r,u)



variável	valor
i	2

vértice	r	s	t	u
d	0	3	6	5
π	NULL	r	s	r

$BELLMAN - FORD(G = (V, A), w, s)$

$\quad INICIALIZA(G, s)$

$\quad para\ i \leftarrow 1\ até\ |V| - 1$

$\quad\quad para\ cada\ aresta\ (u, v) \in A$

$\quad\quad\quad RELAXA(u, v, w)$

$\quad\quad fim\ \ para$

$\quad fim\ \ para$

$\quad para\ cada\ aresta\ (u, v) \in A$

$\quad\quad se\ d[v] > d[u] + w(u, v)$

$\quad\quad\quad retorna\ \ falso$

$\quad\quad fim\ \ se$

$\quad fim\ \ para$

$\quad retorna\ \ verdadeiro$

fim

Algoritmo de Bellman-Ford

(s,t)

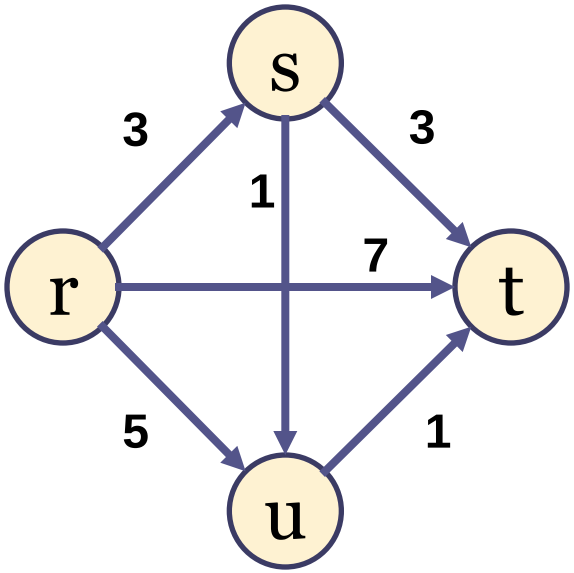
$\boxed{\text{(s,u)}}$

(u,t)

(r,t)

(r,s)

(r,u)



variável	valor
i	2

vértice	r	s	t	u
d	0	3	6	4
π	NULL	r	s	s

$BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s)$

$\quad INICIALIZA(G,s)$

$\quad para\ i \leftarrow 1\ até\ |V|-1$

$\quad\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad\quad RELAXA(u,v,w)$

$\quad\quad fim\ \ para$

$\quad fim\ \ para$

$\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad se\ d[v] > d[u] + w(u,v)$

$\quad\quad\quad retorna\ \ falso$

$\quad\quad fim\ \ se$

$\quad fim\ \ para$

$\quad retorna\ \ verdadeiro$

fim

Algoritmo de Bellman-Ford

(s,t)

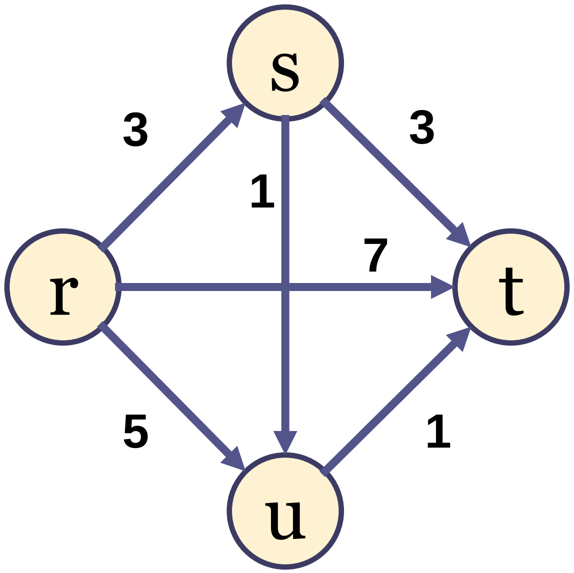
(s,u)

$\boxed{\texttt{(u,t)}}$

(r,t)

(r,s)

(r,u)



$BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s)$

$\quad INICIALIZA(G,s)$

$\quad para\ i \leftarrow 1\ até\ |V|-1$

$\quad\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad\quad RELAXA(u,v,w)$

$\quad\quad fim\ \ para$

$\quad fim\ \ para$

$\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad se\ d[v] > d[u] + w(u,v)$

$\quad\quad\quad retorna\ \ falso$

$\quad\quad fim\ \ se$

$\quad fim\ \ para$

$\quad retorna\ \ verdadeiro$

fim

variável	valor
i	2

vértice	r	s	t	u
d	0	3	5	4
π	NULL	r	u	s

Algoritmo de Bellman-Ford

(s,t)

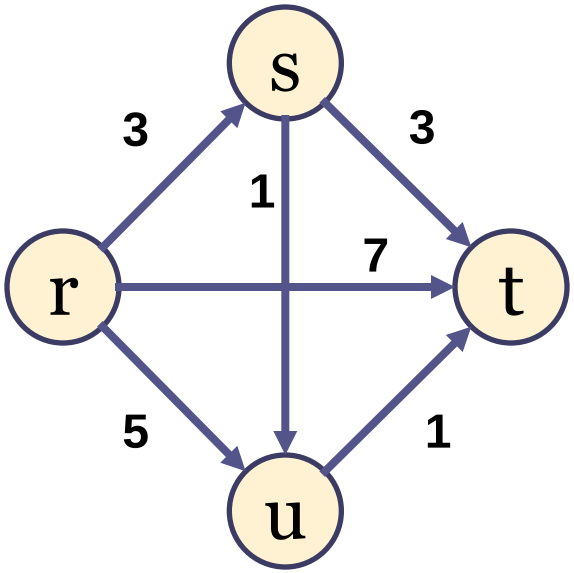
(s,u)

(u,t)

(r,t)

(r,s)

(r,u)



variável	valor
i	2

vértice	r	s	t	u
d	0	3	5	4
π	NULL	r	u	s

$BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s)$

$\quad INICIALIZA(G,s)$

$\quad para\ i \leftarrow 1\ até\ |V|-1$

$\quad\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad\quad RELAXA(u,v,w)$

$\quad\quad fim\ \ para$

$\quad fim\ \ para$

$\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad se\ d[v] > d[u] + w(u,v)$

$\quad\quad\quad retorna\ \ falso$

$\quad\quad fim\ \ se$

$\quad fim\ \ para$

$\quad retorna\ \ verdadeiro$

fim

Algoritmo de Bellman-Ford

(s,t)

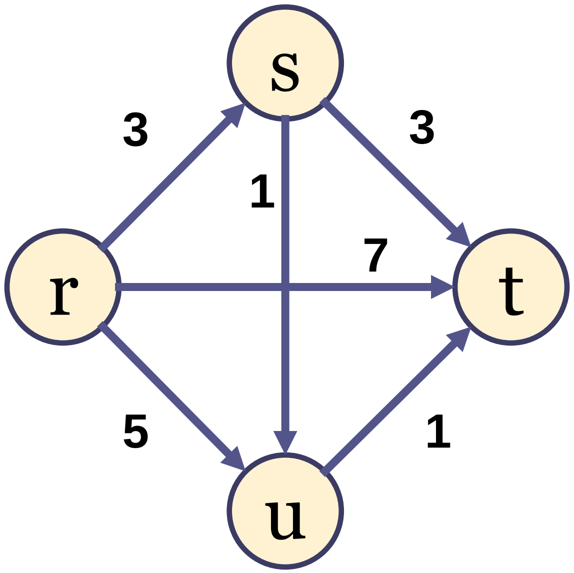
(s,u)

(u,t)

(r,t)

$\boxed{\text{(r,s)}}$

(r,u)



variável	valor
i	2

vértice	r	s	t	u
d	0	3	5	4
π	NULL	r	u	s

$BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s)$

$\quad INICIALIZA(G,s)$

$\quad para\ i \leftarrow 1\ até\ |V|-1$

$\quad\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad\quad RELAXA(u,v,w)$

$\quad\quad fim\ \ para$

$\quad fim\ \ para$

$\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad se\ d[v] > d[u] + w(u,v)$

$\quad\quad\quad retorna\ \ falso$

$\quad\quad fim\ \ se$

$\quad fim\ \ para$

$\quad retorna\ \ verdadeiro$

fim

Algoritmo de Bellman-Ford

(s,t)

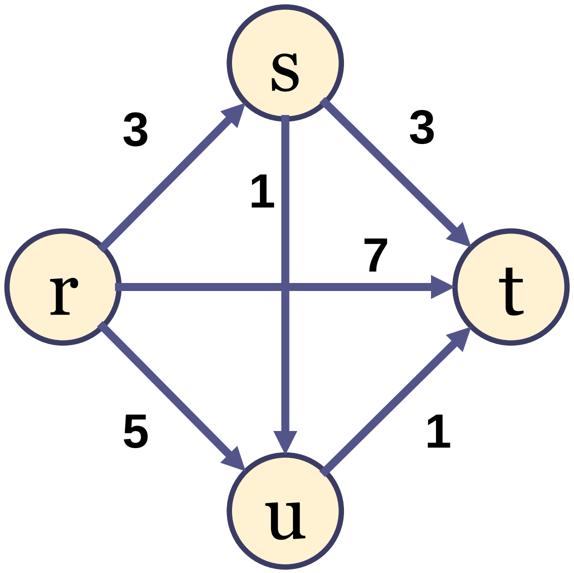
(s,u)

(u,t)

(r,t)

(r,s)

$\boxed{\text{(r,u)}}$



variável	valor
i	2

vértice	r	s	t	u
d	0	3	5	4
π	NULL	r	u	s

$BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s)$

$\quad INICIALIZA(G,s)$

$\quad para\ i \leftarrow 1\ até\ |V|-1$

$\quad\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad\quad RELAXA(u,v,w)$

$\quad\quad fim\ \ para$

$\quad fim\ \ para$

$\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad se\ d[v] > d[u] + w(u,v)$

$\quad\quad\quad retorna\ \ falso$

$\quad\quad fim\ \ se$

$\quad fim\ \ para$

$\quad retorna\ \ verdadeiro$

fim

Algoritmo de Bellman-Ford

(s,t)

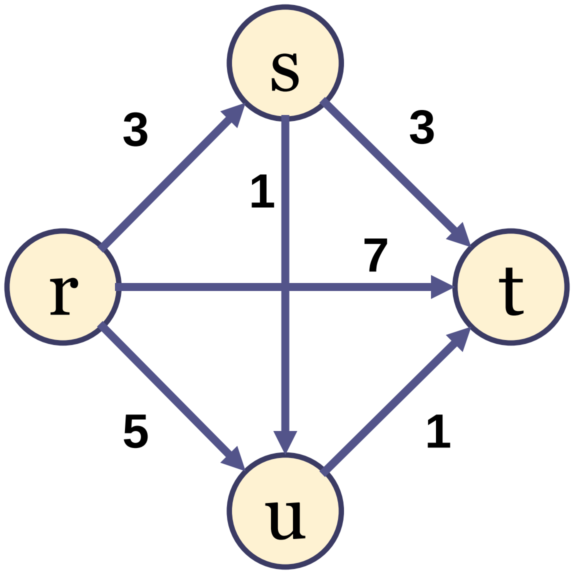
(s,u)

(u,t)

(r,t)

(r,s)

(r,u)



variável	valor
i	3

vértice	r	s	t	u
d	0	3	5	4
π	NULL	r	u	s

$BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s)$

$\quad INICIALIZA(G,s)$

$\quad para\ i \leftarrow 1\ at\acute{e}\ |V|-1$

$\quad\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad\quad RELAXA(u,v,w)$

$\quad\quad fim\ \ para$

$\quad fim\ \ para$

$\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad se\ d[v] > d[u] + w(u,v)$

$\quad\quad\quad retorna\ \ falso$

$\quad\quad fim\ \ se$

$\quad fim\ \ para$

$\quad retorna\ \ verdadeiro$

fim

Algoritmo de Bellman-Ford

(s,t)

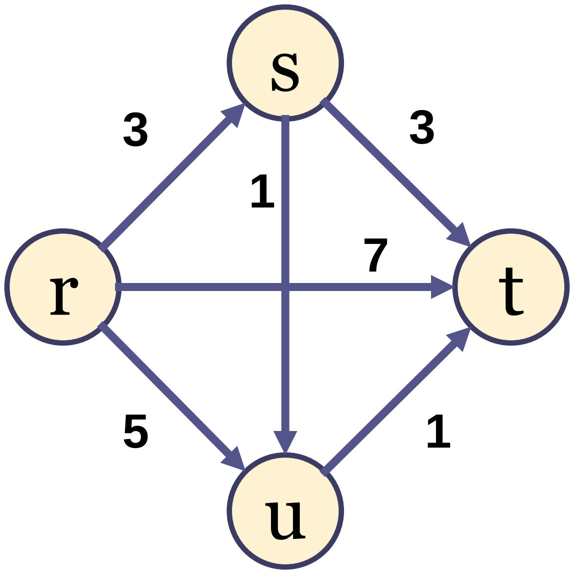
(s,u)

(u,t)

(r,t)

(r,s)

(r,u)



variável	valor
i	3

vértice	r	s	t	u
d	0	3	5	4
π	NULL	r	u	s

$BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s)$

$\quad INICIALIZA(G,s)$

$\quad para\ i \leftarrow 1\ até\ |V|-1$

$\quad\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad\quad RELAXA(u,v,w)$

$\quad\quad fim\ \ para$

$\quad fim\ \ para$

$\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad se\ d[v] > d[u] + w(u,v)$

$\quad\quad\quad retorna\ \ falso$

$\quad\quad fim\ \ se$

$\quad fim\ \ para$

$\quad retorna\ \ verdadeiro$

fim

Algoritmo de Bellman-Ford

(s,t)

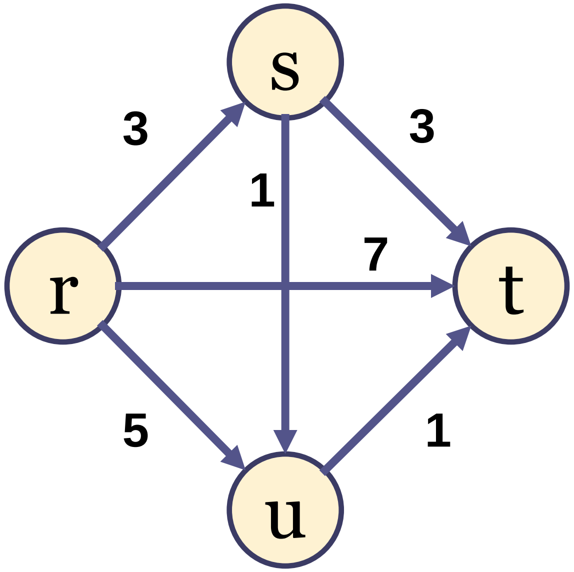
$\boxed{\text{(s,u)}}$

(u,t)

(r,t)

(r,s)

(r,u)



variável	valor
i	3

vértice	r	s	t	u
d	0	3	5	4
π	NULL	r	u	s

$BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s)$

$\quad INICIALIZA(G,s)$

$\quad para\ i \leftarrow 1\ até\ |V|-1$

$\quad\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad\quad RELAXA(u,v,w)$

$\quad\quad fim\ \ para$

$\quad fim\ \ para$

$\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad se\ d[v] > d[u] + w(u,v)$

$\quad\quad\quad retorna\ \ falso$

$\quad\quad fim\ \ se$

$\quad fim\ \ para$

$\quad retorna\ \ verdadeiro$

fim

Algoritmo de Bellman-Ford

(s,t)

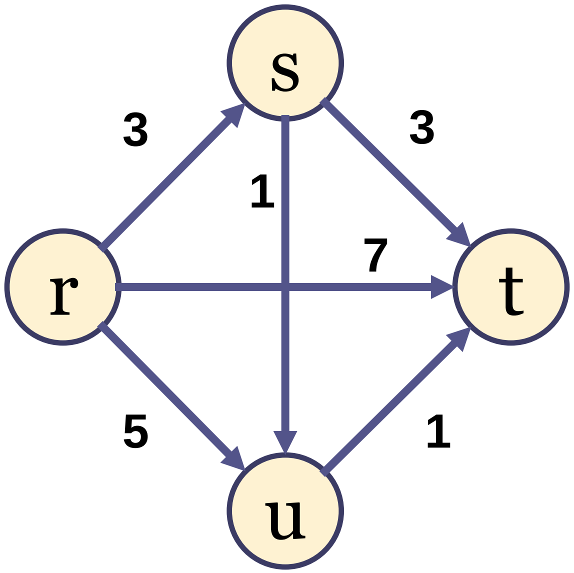
(s,u)

$\boxed{\text{(u,t)}}$

(r,t)

(r,s)

(r,u)



variável	valor
i	3

vértice	r	s	t	u
d	0	3	5	4
π	NULL	r	u	s

$BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s)$

$\quad INICIALIZA(G,s)$

$\quad para\ i \leftarrow 1\ até\ |V|-1$

$\quad\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad\quad RELAXA(u,v,w)$

$\quad\quad fim\ \ para$

$\quad fim\ \ para$

$\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad se\ d[v] > d[u] + w(u,v)$

$\quad\quad\quad retorna\ \ falso$

$\quad\quad fim\ \ se$

$\quad fim\ \ para$

$\quad retorna\ \ verdadeiro$

fim

Algoritmo de Bellman-Ford

(s,t)

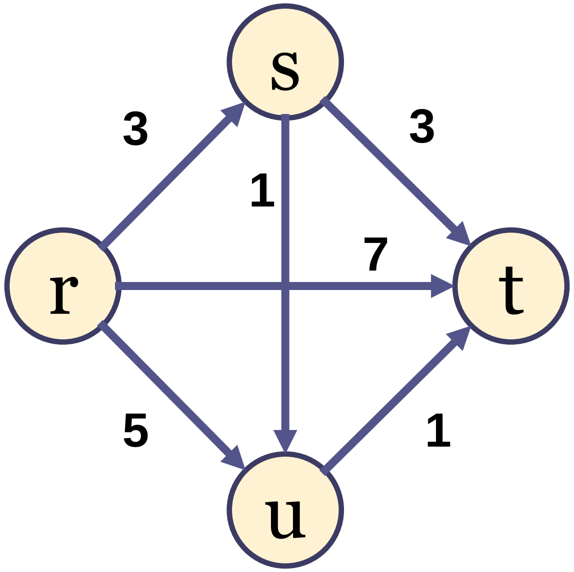
(s,u)

(u,t)

$\boxed{(r,t)}$

(r,s)

(r,u)



variável	valor
i	3

vértice	r	s	t	u
d	0	3	5	4
π	NULL	r	u	s

$BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s)$

$\quad INICIALIZA(G,s)$

$\quad para\ i \leftarrow 1\ at\acute{e}\ |V|-1$

$\quad\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad\quad RELAXA(u,v,w)$

$\quad\quad fim\ \ para$

$\quad fim\ \ para$

$\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad se\ d[v] > d[u] + w(u,v)$

$\quad\quad\quad retorna\ \ falso$

$\quad\quad fim\ \ se$

$\quad fim\ \ para$

$\quad retorna\ \ verdadeiro$

fim

Algoritmo de Bellman-Ford

(s,t)

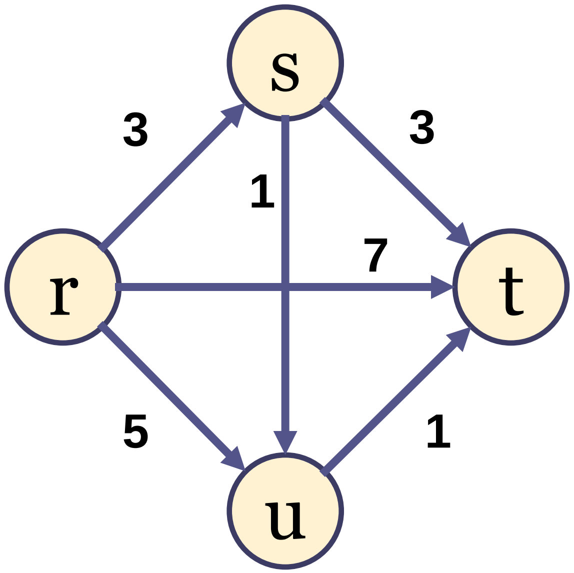
(s,u)

(u,t)

(r,t)

$\boxed{(r,s)}$

(r,u)



$BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s)$

$\quad INICIALIZA(G,s)$

$\quad para\ i \leftarrow 1\ até\ |V|-1$

$\quad\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad\quad RELAXA(u,v,w)$

$\quad\quad fim\ para$

$\quad fim\ para$

$\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad se\ d[v] > d[u] + w(u,v)$

$\quad\quad\quad retorna\ falso$

$\quad\quad fim\ se$

$\quad fim\ para$

$\quad retorna\ verdadeiro$

fim

variável	valor
i	3

vértice	r	s	t	u
d	0	3	5	4
π	NULL	r	u	s

Algoritmo de Bellman-Ford

(s,t)

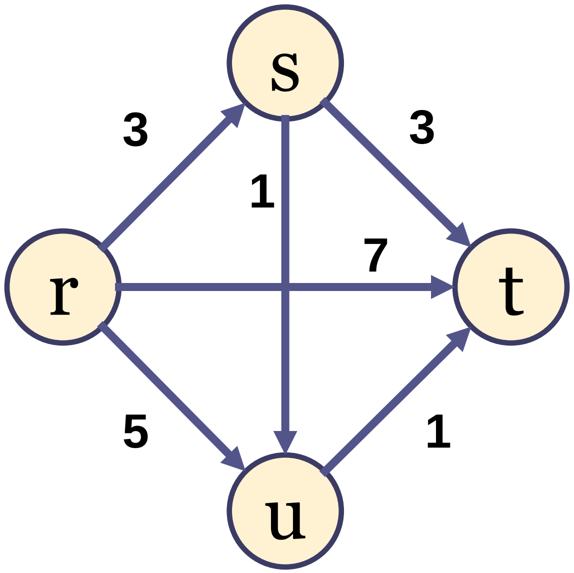
(s,u)

(u,t)

(r,t)

(r,s)

$\boxed{\text{(r,u)}}$



variável	valor
i	3

vértice	r	s	t	u
d	0	3	5	4
π	NULL	r	u	s

$BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s)$

$\quad INICIALIZA(G,s)$

$\quad para\ i \leftarrow 1\ até\ |V|-1$

$\quad\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad\quad RELAXA(u,v,w)$

$\quad\quad fim\ \ para$

$\quad fim\ \ para$

$\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad se\ d[v] > d[u] + w(u,v)$

$\quad\quad\quad retorna\ \ falso$

$\quad\quad fim\ \ se$

$\quad fim\ \ para$

$\quad retorna\ \ verdadeiro$

fim

Algoritmo de Bellman-Ford

(s,t)

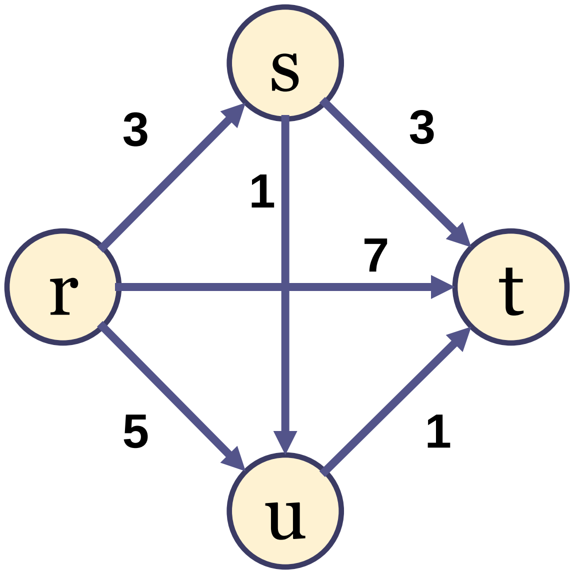
(s,u)

(u,t)

(r,t)

(r,s)

(r,u)



variável	valor
i	3

vértice	r	s	t	u
d	0	3	5	4
π	NULL	r	u	s

$BELLMAN-FORD(G=(V,A),w,s)$

$\quad INICIALIZA(G,s)$

$\quad para\ i \leftarrow 1\ até\ |V|-1$

$\quad\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad\quad RELAXA(u,v,w)$

$\quad\quad fim\ \ para$

$\quad fim\ \ para$

$\quad para\ cada\ aresta\ (u,v) \in A$

$\quad\quad se\ d[v] > d[u] + w(u,v)$

$\quad\quad\quad retorna\ \ falso$

$\quad\quad fim\ \ se$

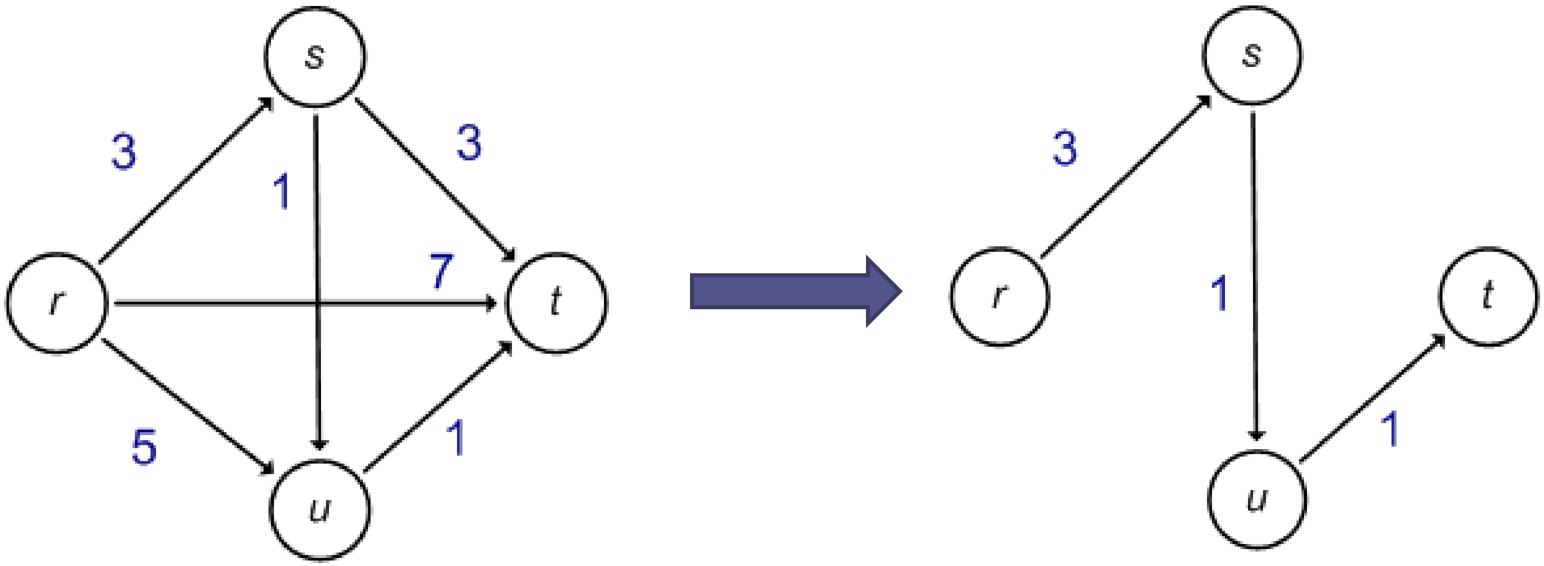
$\quad fim\ \ para$

$\quad retorna\ \ verdadeiro$

fim

Algoritmo de Bellman-Ford

- Solução do exemplo...



vértice	r	s	t	u
d	0	3	5	4
π	NULL	r	u	s

Bellman-Ford

- Aplicação:
  - Uma variação **distribuída** deste algoritmo é implementada na área de redes de computadores;
  - O algoritmo de roteamento chamado **vetor de distâncias**;
  - Seu objetivo é fornecer informação para cada *host* que deseja enviar pacotes (criar tabelas de encaminhamento);
  - Por qual saída ele deve enviar um pacote de modo que o mesmo chegue rapidamente ao destinatário;

Bellman-Ford

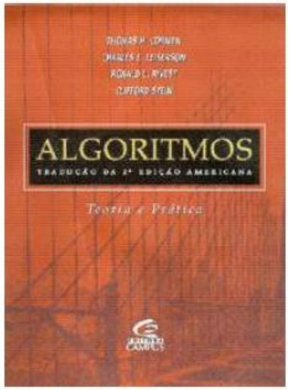
- Aplicação:
  - Na área de redes de computadores devemos **tomar cuidado com os "caminhos mais curtos"**, ou os "caminhos de maior vazão";
  - Podemos **congestionar** a toda a rede se, na execução do Algoritmo do Vetor de Distâncias, um ***host*** **se tornar o "gargalo" da rede**.
  - Geralmente este problema é "resolvido" no protocolo TCP;

Exercício

- Proponha um grafo de 5 vértices, com um ciclo de peso negativo, e apresente passo a passo a execução do algoritmo Bellman-Ford.

Bibliografia

- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; (2002). Algoritmos – Teoria e Prática. Tradução da 2ª edição americana. Rio de Janeiro. Editora Campus.



- ZIVIANI, N. (2007). Projeto e Algoritmos com implementações em Java e C++. São Paulo. Editora Thomson;