INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL DE MINAS GERAIS

Projeto e Análise de Algoritmos

Recorrências

Professor Douglas Castilho
douglas.braz@ifsuldeminas.edu.br

Últimas aulas...

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL DE MINAS GERAIS

- Notações
  - O
  - Ω
  - Θ
  - ω
  - o

Curiosidade...

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL DE MINAS GERAIS

Função de custo	Tamanho n					
	10	20	30	40	50	60
n	0,00001 s	0,00002 s	0,00003 s	0,00004 s	0,00005 s	0,00006 s

supondo que uma operação gasta em média 10^{-6} segundos...

Curiosidade...

Função de custo	Tamanho n					
	10	20	30	40	50	60
n	0,00001 s	0,00002 s	0,00003 s	0,00004 s	0,00005 s	0,00006 s
n^2	0,0001 s	0,0004 s	0,0009 s	0,0016 s	0,0.35 s	0,0036 s

Curiosidade...

Função de custo	Tamanho n					
	10	20	30	40	50	60
n	0,00001 s	0,00002 s	0,00003 s	0,00004 s	0,00005 s	0,00006 s
n^2	0,0001 s	0,0004 s	0,0009 s	0,0016 s	0,0.35 s	0,0036 s
n^3	0,001 s	0,008 s	0,027 s	0,64 s	0,125 s	0.316 s

Curiosidade...

Função de custo	Tamanho n					
	10	20	30	40	50	60
n	0,00001 s	0,00002 s	0,00003 s	0,00004 s	0,00005 s	0,00006 s
n^2	0,0001 s	0,0004 s	0,0009 s	0,0016 s	0,0.35 s	0,0036 s
n^3	0,001 s	0,008 s	0,027 s	0,64 s	0,125 s	0.316 s
n^5	0,1 s	3,2 s	24,3 s	1,7 min	5,2 min	13 min

Curiosidade...

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL DE MINAS GERAIS

Função de custo	Tamanho n					
	10	20	30	40	50	60
n	0,00001 s	0,00002 s	0,00003 s	0,00004 s	0,00005 s	0,00006 s
n^2	0,0001 s	0,0004 s	0,0009 s	0,0016 s	0,0.35 s	0,0036 s
n^3	0,001 s	0,008 s	0,027 s	0,64 s	0,125 s	0.316 s
n^5	0,1 s	3,2 s	24,3 s	1,7 min	5,2 min	13 min
2^n	0,001 s	1 s	17,9 min	12,7 dias	35,7 anos	366 séc.

Curiosidade...

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL DE MINAS GERAIS

Função de custo	Tamanho n					
	10	20	30	40	50	60
n	0,00001 s	0,00002 s	0,00003 s	0,00004 s	0,00005 s	0,00006 s
n^2	0,0001 s	0,0004 s	0,0009 s	0,0016 s	0,0.35 s	0,0036 s
n^3	0,001 s	0,008 s	0,027 s	0,64 s	0,125 s	0.316 s
n^5	0,1 s	3,2 s	24,3 s	1,7 min	5,2 min	13 min
2^n	0,001 s	1 s	17,9 min	12,7 dias	35,7 anos	366 séc.
3^n	0,059 s	58 min	6,5 anos	3855 séc.	10^8 séc.	10^{13} séc.

Recorrência

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL DE MINAS GERAIS

- Quando um algoritmo contém uma chamadas recursiva, seu tempo de execução pode frequentemente ser descrito por uma recorrência;

Recorrência

- Quando um algoritmo contém uma chamadas recursivas, seu tempo de execução pode freqüentemente ser descrito por uma recorrência;

- Com o ferramental aprendido até o momento, não somos capazes de analisar a complexidade de algoritmos recursivos;

Recorrência

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL DE MINAS GERAIS

- Quando um algoritmo contém uma chamadas recursivas, seu tempo de execução pode freqüentemente ser descrito por uma recorrência;

- Com o ferramental aprendido até o momento, não somos capazes de analisar a complexidade de algoritmos recursivos;

- Para os algoritmos recursivos, a ferramenta principal desta análise não é uma somatória, mas um tipo especial de equação chamada relação de recorrência.

Recorrência

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL DE MINAS GERAIS

- Quando um algoritmo contém uma chamadas recursivas, seu tempo de execução pode freqüentemente ser descrito por uma recorrência;
- Com o ferramental aprendido até o momento, não somos capazes de analisar a complexidade de algoritmos recursivos;
- Para os algoritmos recursivos, a ferramenta principal desta análise não é uma somatória, mas um tipo especial de equação chamada relação de recorrência.
- Uma recorrência é uma equação ou desigualdade que descreve uma função em termos de seu valor em entradas menores;

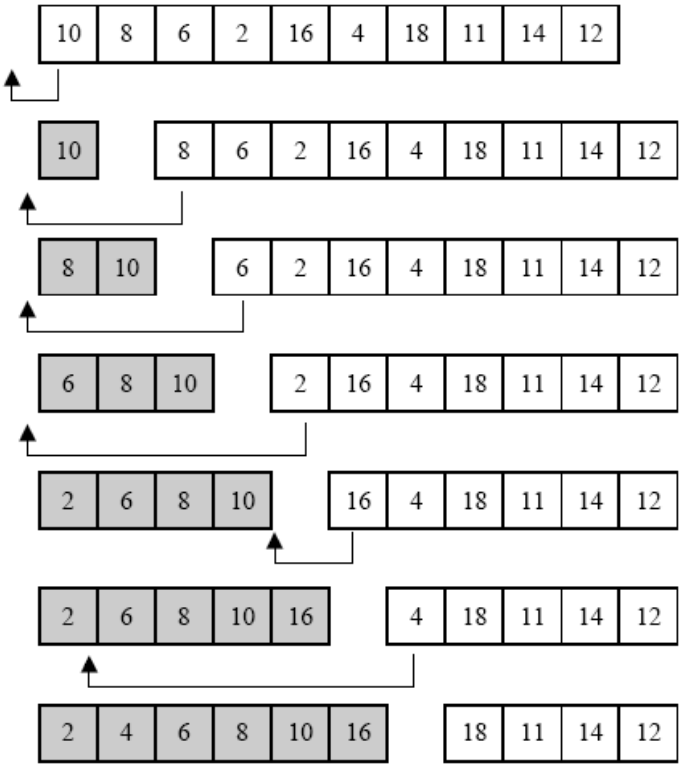
Recorrência

- Para cada procedimento recursivo é associada uma função de complexidade $T(n)$ desconhecida, onde n mede o tamanho dos argumentos para o procedimento.

- **Equação de recorrência:** maneira de definir uma função por uma expressão envolvendo a mesma função.

Recorrência

- Vamos considerar o algoritmo de ordenação por Inserção.



Recorrência

- Considerando o pior caso:
  - Na primeira vez, apenas uma operação é necessária...
  - Da segunda, 2...
  - Da terceira, 3... E isso é executado... N vezes...
  - Ou seja, todos os elementos serão inseridos na última posição verificada;

Recorrência

- Considerando o pior caso:
  - Na primeira vez, apenas uma operação é necessária...
  - Da segunda, 2...
  - Da terceira, 3... E isso é executado... N vezes...

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1)+1 \\
T(n-1) &= T(n-2)+2 \\
T(n-2) &= T(n-3)+3 \\
T(n-3) &= T(n-4)+4 \\
&\dots \\
T(2) &= T(1)+n-2 \\
T(1) &= n-1
\end{aligned}
$$

Recorrência

- Então...

$$T(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-2) + (n-1)$$

Recorrência

- Então...

$$T(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-2) + (n-1)$$

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i$$

Recorrência

- Então...

$$T(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-2) + (n-1)$$

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) - n = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) - n$$

$$T(n) = \frac{n^2 + n}{2} - n = \frac{n^2 + n - 2n}{2}$$

$$T(n) = \frac{n^2 - n}{2}$$

Recorrência

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL DE MINAS GERAIS

- Então...

$$T(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-2) + (n-1)$$

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) - n = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) - n$$

$$T(n) = \frac{n^2 + n}{2} - n = \frac{n^2 + n - 2n}{2}$$

$$T(n) = \frac{n^2 - n}{2}$$

$$T(n) = \frac{n^2 - n}{2} \in \Theta(n^2)$$

Recorrência

- Outro exemplo de recorrência:
  - Considere o algoritmo "pouco formal" abaixo:
    - O algoritmo inspeciona *n* elementos de um conjunto qualquer;
  - De alguma forma, isso permite descartar 2/3 dos elementos e fazer uma chamada recursiva sobre um terço do conjunto original.

```
Algoritmo Pesquisa(vetor)
   if vetor.size() ≤ 1 then
     inspecione elemento;
   else
      inspecione cada elemento recebido (vetor);
      Pesquisa(vetor.subLista(1,(vetor.size()/3));
   end if
end.
```

Recorrência

- Montando a equação de recorrência:

```
L1: Algoritmo Pesquisa(vetor)
L2:    if  vetor.size() ≤ 1 then
L3:      inspecione  elemento;
L4:    else
L5:       inspecione cada elemento recebido (vetor);
L6:       Pesquisa(vetor.subLista(1,(vetor.size()/3));
L7:    end if
L8: end.
```

- Caso base da recursão:
  - O custo da linha 2 é θ(1);
  - O custo da linha 3 é θ(1);

Recorrência

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL DE MINAS GERAIS

- Montando a equação de recorrência:

	L1:	Algoritmo Pesquisa(vetor)
Θ(1)	L2:	*if vetor.size*() ≤ 1 then
Θ(1)	L3:	*inspecione elemento*;
	L4:	else
	L5:	inspecione cada elemento recebido (vetor);
	L6:	Pesquisa(*vetor.subLista*(1, (*vetor.size*() / 3));
	L7:	end if
	L8:	end.

- Caso geral da recursão:
  - O custo da linha 5 é θ(n);
  - A linha 6 é onde a própria função Pesquisa é chamada em um conjunto reduzido.

Recorrência

- Montando a equação de recorrência:

	L1:	Algoritmo Pesquisa(vetor)
Θ(1)	L2:	*if* *vetor.size*() ≤ 1 then
Θ(1)	L3:	*inspecione elemento*;
	L4:	else
Θ(n)	L5:	inspecione cada elemento recebido (vetor);
Chamada recursiva	L6:	Pesquisa(*vetor.subLista*(1, (*vetor.size*() / 3));
	L7:	end if
	L8:	end.

- Monte a equação de recorrência...

Recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1, \ se\, n \leq 1 \\ T(n/3) + n, \ caso\, contrário \end{cases}$$

	L1:	Algoritmo Pesquisa(vetor)
Θ(1)	L2:	if *vetor.size*() ≤ 1 then
Θ(1)	L3:	*inspecione elemento*;
	L4:	else
Θ(n)	L5:	inspecione cada elemento recebido (vetor);
Chamada recursiva	L6:	Pesquisa*(vetor.subLista*(1, (*vetor.size*() / 3) *)*;
	L7:	end if
	L8:	end.

- Resolva a equação de recorrência...

Recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1, \ se\, n \leq 1 \\ T(n/3) + n, \ caso\, contrário \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= n + T(n/3) \\
T(n/3) &= n/3 + T(n/3/3) \\
T(n/3/3) &= n/3/3 + T(n/3/3) \\
T(n/3/3/3) &= n/3/3/3 + T(n/3/3/3) \\
&\ldots \\
T(n/3/3.../3) &= n/3/3/3.../3 + T(n/3/3/3.../3) \\
T(1) &= 1
\end{aligned}$$

Recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1, \ se\, n \leq 1 \\ T(n/3) + n, \ caso\, contrário \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= n + T(n/3) \\
T(n/3) &= n/3 + T(n/3/3) \\
T(n/3) &= n/3/3 + T(n/3/3) \\
T(n/3/3) &= n/3/3/3 + T(n/3/3/3) \\
&\ldots \\
T(n/3/3\ldots/3) &= n/3/3/3\ldots/3 + T(n/3/3/3\ldots/3) \\
T(1) &= 1
\end{aligned}$$

$$T(n) = n + n/3 + n/3/3 + \ldots + n/3/3\ldots/3/3 + 1$$

Recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1, \ se \ \ n \leq 1 \\ T(n/3) + n, \ caso \ \ contrário \end{cases}$$

$$T(n) = n + n/3 + n/3/3 + ... + n/3/3/3.../3 + 1$$

- A formula representa a soma de uma série geométrica de razão 1/3, multiplicada por *n*, e adicionada de T(n/3/3/3 · · · /3), que é menor ou igual a 1.

$$T(n) = n \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^i + 1$$

Recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1, \ se\, n \leq 1 \\ T(n/3) + n, \ caso\, contrário \end{cases}$$

$$T(n) = n + n/3 + n/3/3 + \ldots + n/3/3/3\ldots/3 + 1$$

$$T(n) = n \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i + 1$$

Recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1, \ se\, n \leq 1 \\ T(n/3) + n, \ caso\, contrário \end{cases}$$

$$T(n) = n + n/3 + n/3/3 + \ldots + n/3/3/3\ldots/3 + 1$$

$$T(n) = n \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i + 1 \rightarrow usando: \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1, \ se\, n \leq 1 \\ T(n/3) + n, \ caso\, contrário \end{cases}$$

$$T(n) = n + n/3 + n/3/3 + \ldots + n/3/3/3\ldots/3 + 1$$

$$T(n) = n \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i + 1 \rightarrow usando: \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

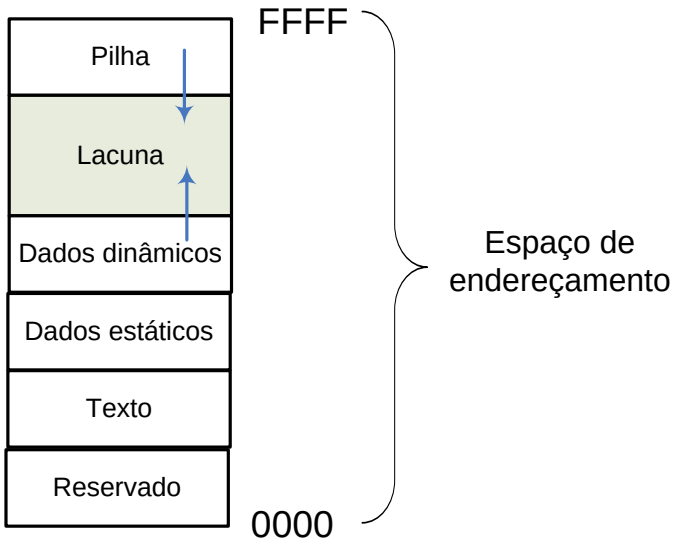
$$T(n) = n\left(\frac{1}{1-1/3}\right) + 1 = \frac{3n}{2} + 1$$

portanto

$$T(n) \in \Theta(n)$$

Recursividade

- Com as arquiteturas atuais, devemos evitar o uso de recursividade quando a solução iterativa é óbvia;
- Exemplos:
  - Fatorial;
  - Fibonacci;
- Lembrem-se do crescimento da pilha de execução nos algoritmos recursivos;



Exercício 1

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL DE MINAS GERAIS

- Faça a análise de recorrência do algoritmo que calcula o fatorial de um número

```
L1: Algoritmo Fatorial(n)
L2:     if n ≤ 1 then
L3:         retorne 1;
L4:     else
L5:         retorne n · fatorial(n − 1)
L6:     end if
L7: end.
```

Exercício 2

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL DE MINAS GERAIS

- Implemente os algoritmos de fatorial e fibonacci nas versões:
  - Iterativa;
  - Recursiva.

  - Apresente suas curvas de crescimento em função do tamanho do problema (análise experimental).

  - Faça uma análise sobre os resultados.

Análise do Fatorial

```
int Fat (int n) {
  if (n<=0)
    return 1;
  else
    return n * Fat(n-1);
}
```

$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + c & p/\ n>0 \\ T(n) = d & p/\ n \leq 0 \end{cases}$$

Análise do Fatorial

```
int Fat (int n) {
  if (n<=0)
    return 1;
  else
    return n * Fat(n-1);
}
```

$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + c & p/\ n>0 \\ T(n) = d & p/\ n\leq 0 \end{cases}$$

Expansão de termos:

$T(n) = T(n-1) + c$

$T(n-1) = T(n-2) + c$

...

$T(2) = T(1) + c$

$T(1) = d$

$T(n) = c+c+...+c+d$

$T(n) = (n-1).c + d$

$T(n) = \Theta(n)$

Análise do Mergesort

```
MERGE-SORT(A, p, r)
1  if p < r
2      q = ⌊(p + r)/2⌋
3      MERGE-SORT(A, p, q)
4      MERGE-SORT(A, q + 1, r)
5      MERGE(A, p, q, r)
```

$$\begin{cases} T(n) = 2*T(n/2) + n & \text{p/ } n>1 \\ T(n) = 1 & \text{p/ } n=1 \end{cases}$$

Alguns Detalhes:

- N potência de 2
- Algumas vezes caso base é omitido

Resolvendo por Expansão

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$T(1) = 1$$

Resolvendo por Expansão

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$T(1) = 1$$

Expandindo a equação

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$2T(n/2) = 4T(n/4) + n$$

$$4T(n/4) = 8T(n/8) + n$$

$$\vdots$$

Resolvendo por Expansão

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$T(1) = 1$$

Expandindo a equação

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$2T(n/2) = 4T(n/4) + n$$

$$4T(n/4) = 8T(n/8) + n$$

$$\vdots$$

$$2^{i-1}T(n/2^{i-1}) =$$

$$= 2^{i}T(n/2^{i}) + n$$

Resolvendo por Expansão

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$T(1) = 1$$

Expandindo a equação :

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$2T(n/2) = 4T(n/4) + n$$

$$4T(n/4) = 8T(n/8) + n$$

$$\vdots$$

$$2^{i-1}T(n/2^{i-1}) =$$

$$= 2^{i}T(n/2^{i}) + n$$

Substituindo os termos :

$$T(n) = 2^{i}T(n/2^{i}) + i.n$$

Resolvendo por Expansão

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$T(1) = 1$$

Expandindo a equação :

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$2T(n/2) = 4T(n/4) + n$$

$$4T(n/4) = 8T(n/8) + n$$

$$\vdots$$

$$2^{i-1}T(n/2^{i-1}) =$$

$$= 2^{i}T(n/2^{i}) + n$$

Substituindo os termos :

$$T(n) = 2^{i}T(n/2^{i}) + i.n$$

Caso base :

$$T(n/2^{i}) \rightarrow T(1)$$

$$n/2^{i} = 1 \rightarrow i = \log_2 n$$

Resolvendo por Expansão

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$T(1) = 1$$

Expandindo a equação :

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$2T(n/2) = 4T(n/4) + n$$

$$4T(n/4) = 8T(n/8) + n$$

$$\vdots$$

$$2^{i-1}T(n/2^{i-1}) =$$

$$= 2^{i}T(n/2^{i}) + n$$

Substituindo os termos :

$$T(n) = 2^{i}T(n/2^{i}) + i.n$$

Caso base :

$$T(n/2^{i}) \rightarrow T(1)$$

$$n/2^{i} = 1 \rightarrow i = \log_2 n$$

Substituir *i* na equação

Resolvendo por Expansão

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$T(1) = 1$$

Expandindo a equação :

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$2T(n/2) = 4T(n/4) + n$$

$$4T(n/4) = 8T(n/8) + n$$

$$\vdots$$

$$2^{i-1}T(n/2^{i-1}) =$$

$$= 2^{i}T(n/2^{i}) + n$$

Substituindo os termos :

$$T(n) = 2^{i}T(n/2^{i}) + i.n$$

Caso base :

$$T(n/2^{i}) \rightarrow T(1)$$

$$n/2^{i} = 1 \rightarrow i = \log_2 n$$

Logo :

$$T(n) = 2^{i}T(n/2^{i}) + i.n$$

$$= 2^{\log_2 n}.1 + (\log_2 n).n$$

$$= n + n.\log_2 n = \Theta(n.\log_2 n)$$

Resolvendo por Expansão

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$T(1) = 1$$

Expandindo a equação :

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$2T(n/2) = 4T(n/4) + n$$

$$4T(n/4) = 8T(n/8) + n$$

$$\vdots$$

$$2^{i-1}T(n/2^{i-1}) =$$

$$= 2^{i}T(n/2^{i}) + n$$

Substituindo os termos :

$$T(n) = 2^{i}T(n/2^{i}) + i.n$$

Caso base :

$$T(n/2^{i}) \rightarrow T(1)$$

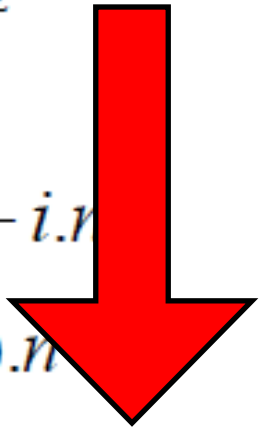
$$n/2^{i} = 1 \rightarrow i = \log_2 n$$

Logo :

$$T(n) = 2^{i}T(n/2^{i}) + i.n$$

$$= 2^{\log_2 n}.1 + (\log_2 n).n$$

$$= n + n.\log_2 n = \Theta(n.\log_2 n)$$



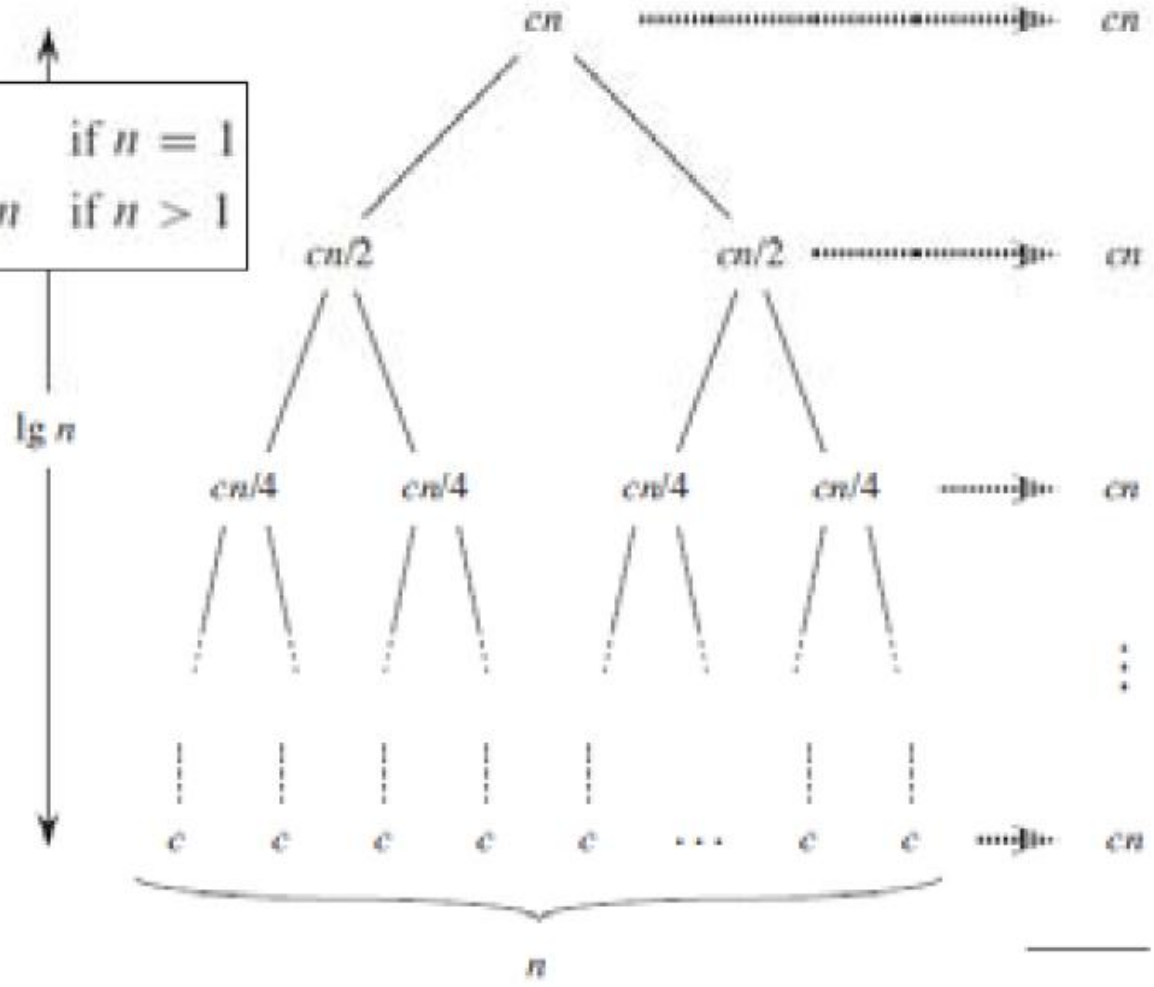
ÁRVORE DE RECURSÃO

Método da Árvore de Recursão

- Aplicando-se a recursão, monta-se uma árvore onde cada nó representa o custo de um subproblema.
- Expandindo-se a árvore, pode-se obter a soma de todos os custos de cada nível e depois do problema como um todo.
- De certa forma funciona como uma visualização do método da “expansão de termos” apresentado inicialmente.

Árvore de Recursão - Exemplo

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{if } n = 1 \\ 2T(n/2) + cn & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

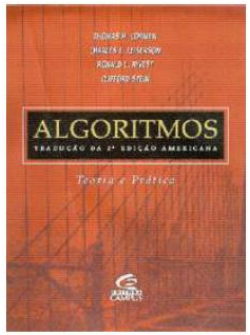


$\Theta(n.lg(n))$

Leitura para a próxima aula

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL DE MINAS GERAIS

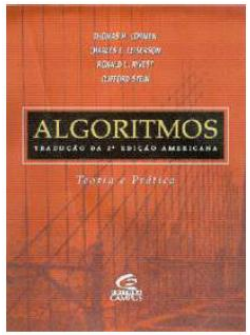
- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; (2002). Algoritmos – Teoria e Prática. Tradução da 2ª edição americana. Rio de Janeiro. Editora Campus.
  - Seção 4.3 – O método mestre (teorema mestre)



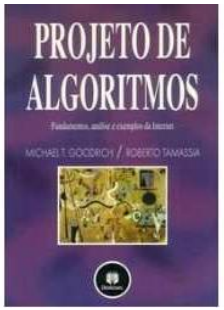
Bibliografia

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL DE MINAS GERAIS

- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; (2002). Algoritmos – Teoria e Prática. Tradução da 2ª edição americana. Rio de Janeiro. Editora Campus.



- TAMASSIA, ROBERTO; GOODRICH, MICHAEL T. (2004). Projeto de Algoritmos - Fundamentos, Análise e Exemplos da Internet.



- ZIVIANI, N. (2007). Projeto e Algoritmos com implementações em Java e C++. São Paulo. Editora Thomson;