Projeto e Análise de Algoritmos

Recorrências
Teorema Mestre

Prof. Douglas Castilho
douglas.castilho@dcc.ufmg.br

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL DE MINAS GERAIS

Métodos gerais para resolver recorrências

Método de Expansão de Termos

Método de Substituição

Método de Árvore de Recursão

Teorema Mestre

Método geral para resolver recorrências

- **Método da Substituição**: estabelecemos um limite hipotético e depois empregamos a indução matemática para provar que nossa suposição era correta.

Método geral para resolver recorrências

- **Método da Substituição**: estabelecemos um limite hipotético e depois empregamos a indução matemática para provar que nossa suposição era correta.

- **Método de Árvore de Recursão**: converte a recorrência em uma árvore cujos **nós representam os custos envolvidos em diversos níveis** da recursão.

- Mais detalhes em Cormen (2002).

Método geral para resolver recorrências

- **Teorema mestre:**
  - O teorema mestre fornece um "livro de receitas" para resolver algumas equações de recorrência.

Método geral para resolver recorrências

- **Teorema mestre:**
  - O teorema mestre fornece um **“livro de receitas”** para resolver algumas equações de recorrência.
  - Resolve recorrências no formato $T(n) = aT\left(n/b\right) + f(n)$
    - onde $a >= 1$ e $b > 1$ são constantes e $f(n)$ é uma função assintoticamente positiva. Neste caso, as recorrências podem ser resolvidas usando o Teorema Mestre.

Método geral para resolver recorrências

- **Teorema mestre:** $T(n) = aT\left(n/b\right) + f(n)$

Método geral para resolver recorrências

- **Teorema mestre:** $T(n) = aT\left(n/b\right) + f(n)$

- Se $f(n) \in O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ para alguma constante $\varepsilon > 0$, então

  $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$

Método geral para resolver recorrências

- **Teorema mestre:** $$T(n) = aT\left(n/b\right) + f(n)$$

- Se $f(n) \in O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ para alguma constante $\varepsilon > 0$, então

  $$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$$

- Se $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$ então

  $$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$$

Método geral para resolver recorrências

- **Teorema mestre:** $T(n) = aT\left(n/b\right) + f(n)$

- Se $f(n) \in O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ para alguma constante ε > 0, então

  $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$

- Se $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$ então

  $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

- Se $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ para alguma constante ε > 0,

  e se $af(n/b) \le cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e para todo n suficientemente grande, então

  $T(n) \in \Theta(f(n))$

Método geral para resolver recorrências

- **Teorema mestre:** $$T(n) = aT\left(n/b\right) + f(n)$$
  - Exemplo 01

$$T(n) = 9T\left(n/3\right) + n$$

$$a = 9$$

$$b = 3$$

$$f(n) = n$$

  - Qual caso do Teorema mestre?

Método geral para resolver recorrências

- **Teorema mestre:**
  - Exemplo 01

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

$$a = 9$$

$$b = 3$$

$$f(n) = n$$

- Aplicando o caso 1 do teorema mestre:
  - Se $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ para alguma constante ε > 0, então

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$$

Método geral para resolver recorrências

- **Teorema mestre:** $$T(n) = aT\left(n/b\right) + f(n)$$
  - Exemplo 01

$$T(n) = 9T\left(n/3\right) + n$$

$$a = 9$$

$$b = 3$$

$$f(n) = n$$

- Aplicando o caso 1 do teorema mestre:
  - Se $f(n) \in O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ para alguma constante ε > 0, então

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$$

$$n \in O\left(n^{1,999}\right)$$

$$T(n) \in \Theta(n^2)$$

Método geral para resolver recorrências

- **Teorema mestre:**
  - Exemplo 02

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$$

$$a = 2$$

$$b = 4$$

$$f(n) = \sqrt{n}$$

  - Qual caso do Teorema mestre?

Método geral para resolver recorrências

- **Teorema mestre:**
  - Exemplo 02

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$$

$$a = 2$$

$$b = 4$$

$$f(n) = \sqrt{n}$$

- Aplicando o caso 2 do teorema mestre:
  - Se $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$ então

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$$

Método geral para resolver recorrências

- **Teorema mestre:**
  - Exemplo 02

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$$

$$a = 2$$

$$b = 4$$

$$f(n) = \sqrt{n}$$

- Aplicando o caso 2 do teorema mestre:
  - Se $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$ então

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \sqrt{n} \in \Theta\left(n^{\log_4 2}\right) \in \Theta\left(n^{1/2}\right) \\ T(n) \in \Theta(\sqrt{n} \log n) \end{array}}$$

Método geral para resolver recorrências

$$T(n) = 3T\left(n/4\right) + n\log n$$

$$a = 3$$

$$b = 4$$

$$f(n) = n\log n$$

- **Teorema mestre:**
  - Exemplo 03
  - Qual caso do Teorema mestre?

Método geral para resolver recorrências

$$T(n) = 3T\left(n/4\right) + n\log n$$

$$a = 3$$

$$b = 4$$

$$f(n) = n\log n$$

- **Teorema mestre:**
  - Exemplo 03

- Aplicando o caso 3 do teorema mestre:
  - Se $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a+\varepsilon}\right)$ para alguma constante $\varepsilon > 0$,

    e se $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e para todo n suficientemente grande, então

    $$T(n) \in \Theta(f(n))$$

Método geral para resolver recorrências

$$T(n) = 3T(n/4) + n\log n$$

$$a = 3$$

$$b = 4$$

$$f(n) = n\log n$$

- **Teorema mestre:**
  - Exemplo 03

- Aplicando o caso 3 do teorema mestre:

$$n\log n \in \Omega\left(n^{\log_b a+\varepsilon}\right) = \Omega(n^{0,7925})$$

Método geral para resolver recorrências

$$T(n) = 3T\left(n/4\right) + n\log n$$
$$a = 3$$
$$b = 4$$
$$f(n) = n\log n$$

- Aplicando o caso 3 do teorema mestre:
  - Precisamos mostrar também que a condição de regularidade é válida para *f(n)*.
  - ...e se $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e para todo n suficientemente grande, então $T(n) \in \Theta(f(n))$

Método geral para resolver recorrências

$$T(n) = 3T\left(n/4\right) + n\log n$$

$$a = 3$$

$$b = 4$$

$$f(n) = n\log n$$

$$af(n/b) \leq cf(n)$$

Método geral para resolver recorrências

$$T(n) = 3T\left(n/4\right) + n\log n$$

$$a = 3$$

$$b = 4$$

$$f(n) = n\log n$$

$$af(n/b) \le cf(n)$$

$$3f(n/4) \le cf(n)$$

Método geral para resolver recorrências

$$T(n) = 3T\left(n/4\right) + n\log n$$

$$a = 3$$

$$b = 4$$

$$f(n) = n\log n$$

$$af(n/b) \le cf(n)$$

$$3f(n/4) \le cf(n)$$

$$3\left[(n/4)\log(n/4)\right] \le cn\log n$$

Método geral para resolver recorrências

$$T(n) = 3T(n/4) + n\log n$$
$$a = 3$$
$$b = 4$$
$$f(n) = n\log n$$

$$af(n/b) \le cf(n)$$
$$3f(n/4) \le cf(n)$$
$$3\left[(n/4)\log(n/4)\right] \le cn\log n$$
$$\frac{3n}{4}\left(\log n - \log 4\right) \le cn\log n$$
$$\frac{3}{4}\left(n\log n - 2n\right) \le cn\log n$$
$$para\ c = 3/4$$

Portanto,

$$T(n) \in \Theta(n\log n)$$

Bibliografia

- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; (2002). Algoritmos – Teoria e Prática. Tradução da 2ª edição americana. Rio de Janeiro. Editora Campus.

- TAMASSIA, ROBERTO; GOODRICH, MICHAEL T. (2004). Projeto de Algoritmos - Fundamentos, Análise e Exemplos da Internet.