Instituto Federal do Sul de Minas Gerais

Projeto e Análise de Algoritmos

Aula 03 – Fundamentos Matemáticos para PAA

humberto@bcc.unifal-mg.edu.br
douglas.braz@ifsuldeminas.edu.br

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL DE MINAS GERAIS

Fundamentos de Matemática

- Nesta aula, revisaremos alguns conceitos fundamentais de matemática discreta que irão surgir em várias de nossas discussões;
  - Somatórios;
  - Logaritmos e expoentes;

Somatórios

Somatórios

- Uma notação que surge com freqüência na análise de algoritmos e de estrutura de dados é o somatório, definido a seguir:

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) = f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots + f(b)$$

- Por que os somatórios são tão importantes na análise de algoritmos?

Somatórios

- Por que os somatórios são tão importantes na análise de algoritmos?
  - Somatórios surgem na análise de algoritmos e estrutura de dados porque o tempo de execução de laços pode ser representado naturalmente com somas.
  - Por exemplo, uma soma que surge freqüentemente na analise de algoritmos e estrutura de dados é a progressão geométrica.

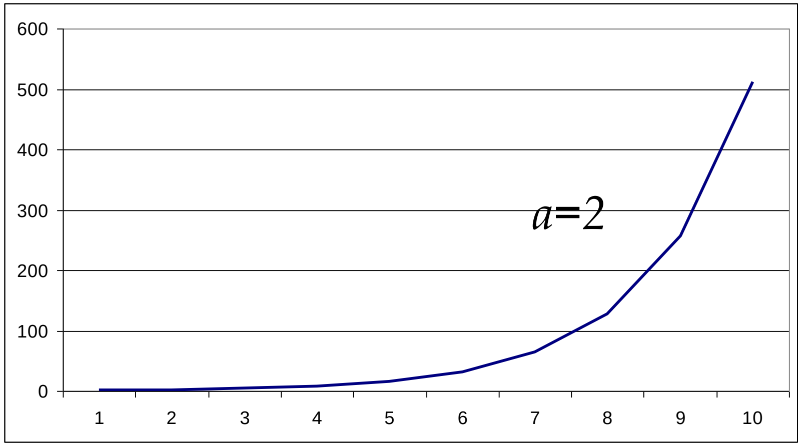
$$\sum_{i=0}^{n} a^i = a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \ldots + a^n$$

Somatórios

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \ldots + a^n$$

- O somatório acima é chamado uma soma geométrica, porque cada termo é geometricamente maior do que o anterior se $a > 1$;

- Ou seja, os termos em uma soma geométrica exibem crescimento exponencial.



Somatórios

- Outra soma que surge em vários contextos é:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n$$

- Esta soma surge na análise de laços em casos em que o número de operações efetuadas dentro do laço aumenta em um valor fixo a cada iteração.

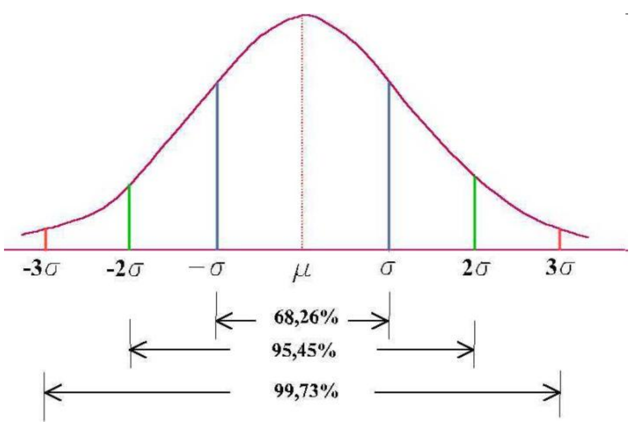
- Caso freqüente em algoritmos...

Somatórios

Curiosidade

$$\sum_{i=1}^{100} i$$

- Essa soma possui uma história interessante. Em 1787, um professor alemão da escola primária passou um exercício para seus alunos de 10 anos de idade. Uma das criança afirmou ter a resposta. O professor não acreditou pois o aluno tinha a resposta em suas anotações sem nenhum calculo. A resposta estava correta: 5050. Aquele estudante era Carl Friedrich Gauss, que cresceria para ser um dos mais importantes matemáticos do século XIX.



Somatórios

- Acredita-se que Gauss obteve a resposta para a série utilizando a seguinte identidade:

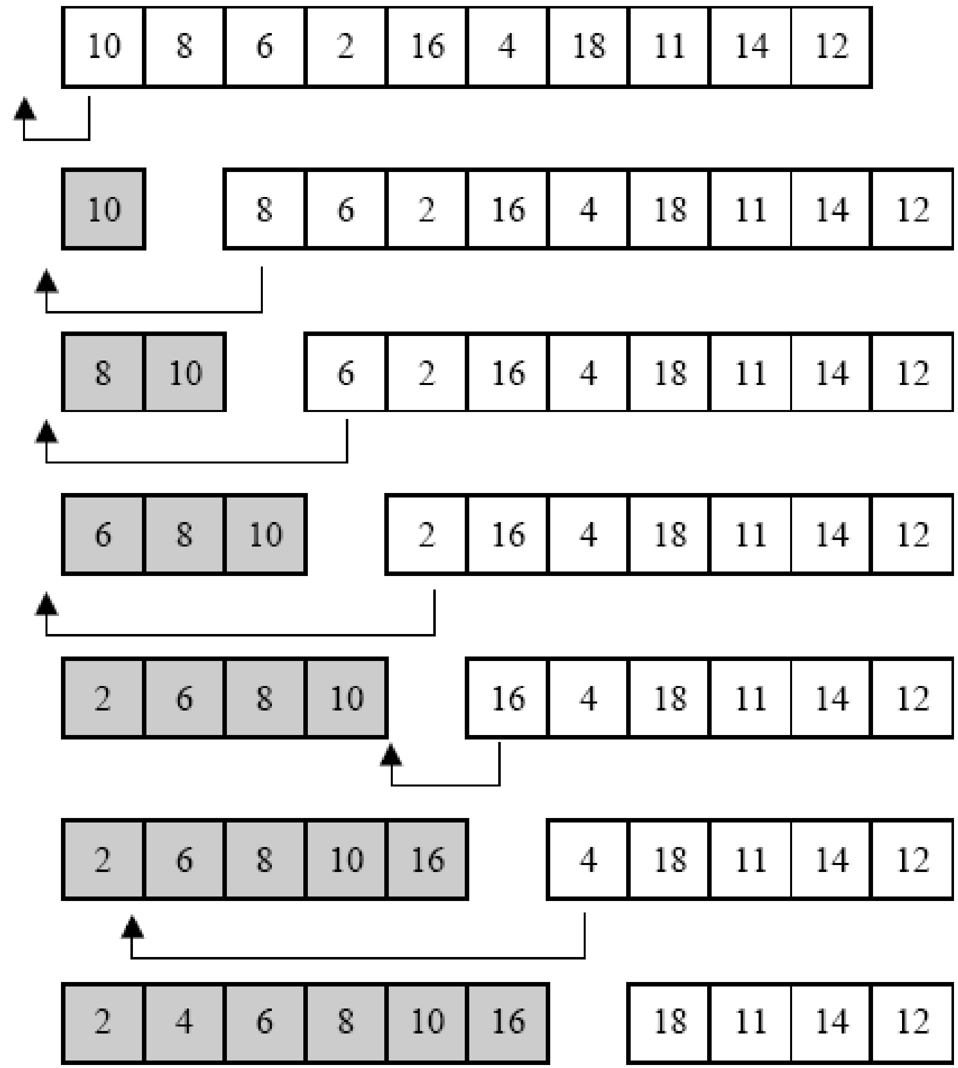
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n$$

Somatórios

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Exemplo desta soma presente na complexidade de algoritmos:
  - Algoritmo de ordenação por inserção:



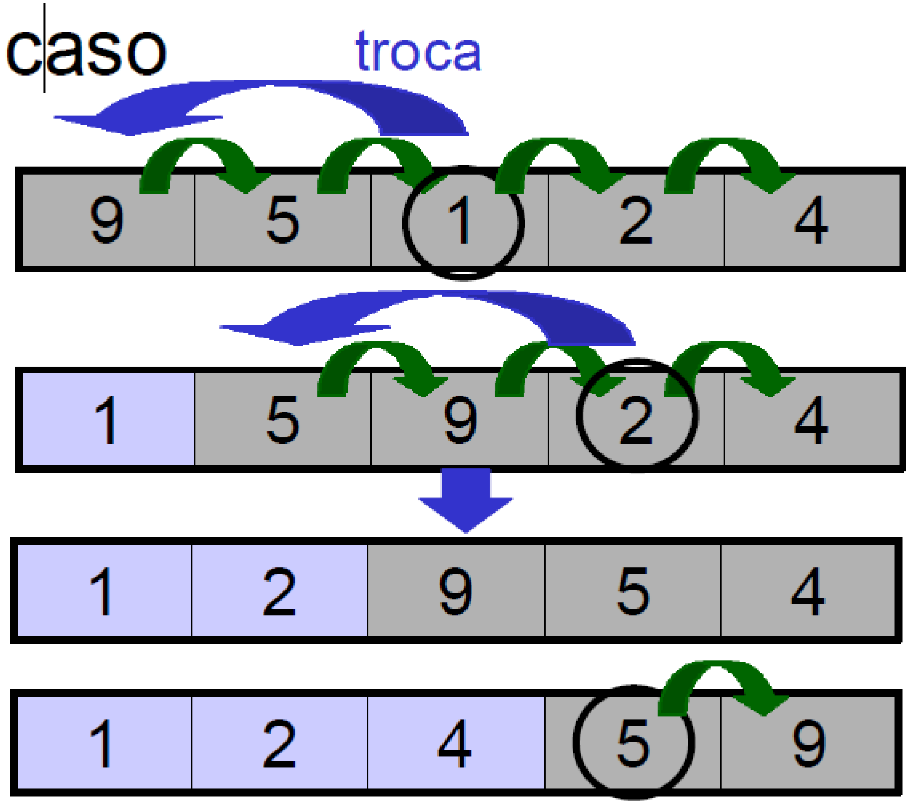
Para entender, considere o pior caso

Somatórios

- E no algoritmo de seleção? Existe alguma relação semelhante?

Somatórios

- Para qualquer caso



1ª V: n-1 comparações

2ª V: n-2 comparações

. . .

(n-1)ª V: 1 comparação

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)\,n}{2} \Rightarrow O(n^2)$$

Somatórios

- Propriedade da Linearidade:
  - Para qualquer número real *c* e quaisquer seqüências finitas
    a1, a2, .. an e
    b1, b2, ... bn,

$$\sum_{k=1}^{n}(c \cdot a_k + b_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

  - Esta propriedade de linearidade pode também ser explorada pra manipular somatórios que incorporam notação assintótica.

$$\sum_{k=1}^{n}\Theta(f(k)) = \Theta\left(\sum_{k=1}^{n}(f(k))\right)$$

Somatórios clássicos

- Série aritmética: $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
- Soma dos quadrados: $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
- Soma dos cubos $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Somatórios

- Soma geométrica ou exponencial: $$\sum_{i=1}^{n} x^i = 1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

- Série harmônica: $$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$
$$= \ln n + O(1)$$

Logaritmos e expoentes

Logaritmos e expoentes

- Um dos interessantes aspectos da análise de algoritmos é a freqüente presença de logaritmos e expoentes, onde dizemos:

$$\log_b a = c \quad se \quad a = b^c$$

- É uma prática entre as pessoas da área da computação omitir a base, quando $b=2$:

$$\log_2(1024) = 10$$

Logaritmos e expoentes

- Existem regras importantes para os logaritmos: sejam *a*, *b* e *c* números positivos reais...

$$1.\ \log_b ac = \log_b a + \log_b c$$

$$2.\ \log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$$

$$3.\ \log_b a^c = c \cdot \log_b a$$

$$4.\ \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$5.\ b^{\log_c a} = a^{\log_c b}$$

Logaritmos e expoentes

- Expoentes:
  sejam a, b e c números positivos reais...

$$6.\ \left(b^{a}\right)^{c} = b^{ac}$$

$$7.\ b^{a}b^{c} = b^{(a+b)}$$

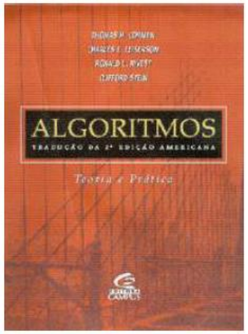
$$8.\ \frac{b^{a}}{b^{c}} = b^{(a-c)}$$

Exercícios:

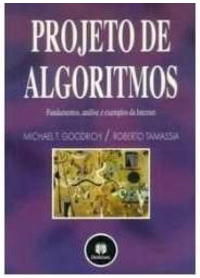
- Lista de exercícios no Moodle

Bibliografia

- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; (2002). Algoritmos – Teoria e Prática. Tradução da 2ª edição americana. Rio de Janeiro. Editora Campus.



- TAMASSIA, ROBERTO; GOODRICH, MICHAEL T. (2004). Projeto de Algoritmos - Fundamentos, Análise e Exemplos da Internet.



- ZIVIANI, N. (2007). Projeto e Algoritmos com implementações em Java e C++. São Paulo. Editora Thomson;