

# 11月1日实验课实验题

上交截止日期:2023年11月8日下午4点

- 实验课实验题1 (1分) :

借助MATLAB，设法检验并证明以下不等式

$$\frac{(1+a_1)^2(1-b_1^2-b_2^2)}{(1+b_1)^2(1-a_1^2-a_2^2)} \leq 2 \frac{(1-a_1b_1-a_2b_2)(1+a_1)}{(1+b_1)(1-a_1^2-a_2^2)} - 1$$

其中 $a_1, a_2, b_1, b_2$ 为实数且满足

$$a_1^2+a_2^2<1, \quad b_1^2+b_2^2<1.$$

## 实验课实验题2 （6分）：

设  $\rho > 0$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$  且  $|\mathbf{v}| < 1$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$  为常数。定义：

$$\mathbf{U} = (D, \mathbf{m}, \mathbf{B}, E)$$

$$D = \frac{\rho}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2}},$$

$$\mathbf{m} = \frac{\rho \mathbf{v}}{1 - |\mathbf{v}|^2} + |\mathbf{B}|^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B},$$

$$E = \frac{\rho}{1 - |\mathbf{v}|^2} + \frac{1 + |\mathbf{v}|^2}{2} |\mathbf{B}|^2 - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})^2}{2}.$$

设  $\rho_* > 0$ ,  $\mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^d$  且  $|\mathbf{v}_*| < 1$ ,  $\mathbf{B}_* \in \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$  为常数。定义：

$$\mathbf{U}_* = (D_*, \mathbf{m}_*, \mathbf{B}_*, E_*),$$

$$\mathbf{n}_* = (-\sqrt{1 - |\mathbf{v}_*|^2}, -\mathbf{v}_*, -(1 - |\mathbf{v}_*|^2)\mathbf{B}_* - (\mathbf{v}_* \cdot \mathbf{B}_*)\mathbf{v}_*, 1),$$

$$D_* = \frac{\rho_*}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}_*|^2}},$$

$$\mathbf{m}_* = \frac{\rho_* \mathbf{v}_*}{1 - |\mathbf{v}_*|^2} + |\mathbf{B}_*|^2 \mathbf{v}_* - (\mathbf{v}_* \cdot \mathbf{B}_*) \mathbf{B}_*,$$

$$E_* = \frac{\rho_*}{1 - |\mathbf{v}_*|^2} + \frac{1 + |\mathbf{v}_*|^2}{2} |\mathbf{B}_*|^2 - \frac{(\mathbf{v}_* \cdot \mathbf{B}_*)^2}{2}.$$

## 实验课实验题2 （6分）：

令  $F = (\mathbf{U} - \mathbf{U}_*) \cdot \mathbf{n}_*$ .

(1) (0.5 分) 若  $d = 1$ , 证明  $\frac{\partial F}{\partial \rho} > 0$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} = 0$ .

(2) (1 分) 若  $d = 1$ , 证明  $F|_{\rho=0} \geq 0$ .

(3) (0.5 分) 若  $d = 1$ , 证明  $F \geq 0$ .

(4) (4 分) 若  $d = 3$ , 尝试证明 (1)、(2) 和 (3). (建议先使用随机模拟进行检验, 再通过符号计算观察, 最后给出严格证明)