数学分析II (MA102a)期中考试题(2024.04.20)

(要求：除第三题第1小题外所有题目均要给出详细计算步骤或论证依据)

一.(28分)

(1). 设$z = e^u \ln v$, $u = \dfrac{x}{y}$, $v = x + 4y$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(2). 求函数$f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$于点$\mathbf{p} = (\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2})$处，沿方向$\mathbf{u} = (\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2})$的方向导数$\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{p})$。

(3). 计算曲线$x = t^2, y = t^3$, $(0 \le t \le 1)$的弧长;

(4). 计算曲线$x = a\cos t, y = b\sin t, z = 0$的曲率,其中$0 < b < a$,$0 \le t \le 2\pi$,并指出曲率的最大值与最小值.

二.(12分) 讨论当实数α取何值时，以下极限存在：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f^{\alpha-1}(x,y)\sin\frac{1}{x^2+y^2},$$

其中$f(x,y) = \max\{|x|,|y|\}$. 若极限存在，求其值。

三.(10分)

(1). 选择填空：设$f(x)$是区间$[a,b]$上的函数，$D(f)$是f的所有间断点构成的集合，则$f(x)$于$[a,b]$上Riemann可积的充分必要条件是（ D ）。

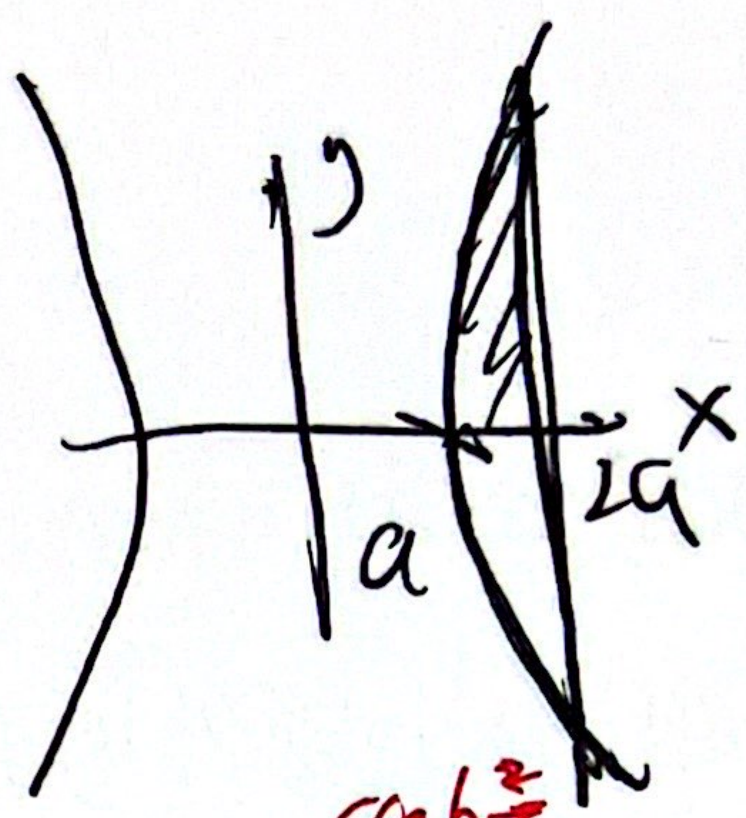
A. $D(f)$为空集; B. $D(f)$为有限集;

C. $D(f)$为可数集; D.$D(f)$为Lebesgue零测集。

(2). 设由函数$f(x) = (x - \dfrac{1}{2})^2 D(x)$, 其中$D(x)$为Dirichlet函数，即当$x$为有理数时取值为1，当$x$为无理数时取值为0.问$f(x)$于区间$[0,1]$上是否可积？给出理由。

四.(10分) 设$C_i \subset R^n$, $(i = 1, 2, \cdots, m)$均为紧致集（m为有限正整数），证明：这些点集的并集$C = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$为紧致集。

五.(14分) 计算由平面曲线



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$\frac{4ab^2}{3}$

位于$a\leq x\leq 2a$弧段绕x轴旋转一周所形成的旋转体体积与旋转面面积。
提示：可使用以下公式

$$\int\sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$$

六.(10分) 椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,(a,b,c>0)$,过点$(1,1,2)$,且该点处的切平面为$4x+2y+3z=12$, 求$a,b,c$的值。

七.(8分) 设由映射

$$\mathbf{f}(x,y,z)=\begin{pmatrix}x+y+z\\ xyz\end{pmatrix};\quad \mathbf{g}(u,v)=\begin{pmatrix}a\sin u\cos v\\ a\sin u\sin v\\ a\cos u\end{pmatrix},$$

求复合映射$\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$的Jacobi矩阵。

八.(8分) 设二元函数$f(x,y)$定义如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\[2ex] 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

证明：

(1). $f(x,y)$于$(0,0)$处沿任何方向的方向导数皆存在；

(2). $f(x,y)$于$(0,0)$处不可微。