南方科技大学
SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

考试科目: 线 性 代 数　　　　开课单位: 数 学 系
考试时长: 120 分钟　　　　命题教师: 线性代数教学团队

题 号	1	2	3	4	5	6	7
分 值	15 分	20 分	20 分	10 分	10 分	15 分	10 分

本试卷共 （7）大题, 满分 （100）分. **请将所有答案写在答题本上.**

This exam includes **7** questions and the score is 100 in total. **Write all your answers on the examination book.**

本套试卷为 A 卷　Version A

1. (15 points, 3 points each) Multiple Choice. Only one choice is correct.

   (共 15 分, 每小题 3 分) 选择题. 每题只有一个选项是正确的.

   (1) Let A be an $m\times m$ real symmetric matrix. Which of the following assertions is **false**? ()

   (A) If v_1 and v_2 are two m-dimensional real column vectors which satisfy $Av_1 = v_1$ and $Av_2 = 0$, then v_1 and v_2 are orthogonal.

   (B) There exists a real invertible matrix P such that $P^{-1}AP$ is diagonal.

   (C) A has m distinct eigenvalues.

   (D) The sum of algebraic multiplicities of the distinct eigenvalues of A is m.

   设 A 为 m 阶实对称矩阵. 则下列说法**错误**的是 ( )

   (A) 如果 v_1 和 v_2 为满足 $Av_1 = v_1$ 以及 $Av_2 = 0$ 的 m 维实列向量，则 v_1 和 v_2 正交.

   (B) 存在可逆的实矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

   (C) A 有 m 个互不相同的特征值.

   (D) 矩阵 A 的所有互不相同特征值的代数重数之和为 m.

   (2) Let A be an $m\times n$ real matrix and $U\Sigma V^T$ be a singular value decomposition of A. Which of the following assertions is **false**? ( )

   (A) The columns of U are eigenvectors of AA^T.

   (B) The columns of V are eigenvectors of A^TA.

   (C) The eigenvalues of AA^T and A^TA are real and positive.

   (D) AA^T and A^TA have the same set of positive eigenvalues.

   设 A 为一个 $m\times n$ 实矩阵且 $U\Sigma V^T$ 为 A 的一个奇异值分解. 下列说法**错误**的是 ( )

   (A) U 的列向量为矩阵 AA^T 的特征向量.

(B) V 的列向量为矩阵 A^TA 的特征向量.

(C) 矩阵 AA^T 和 A^TA 的特征值都是正实数.

(D) AA^T 和 A^TA 具有相同的正特征值.

(3) Let A be an $n\times n$ real matrix. If for any $x\in\mathbb{R}^n$, we have $x^TAx=0$, then ( )

(A) $|A|=0$.

(B) $A^T=-A$.

(C) $A=O$. Where O denotes the $n\times n$ zero matrix.

(D) the eigenvalues of A are all zero.

设 A 为一个 n 阶实矩阵. 如果对任意 $x\in\mathbb{R}^n$, 都有 $x^TAx=0$, 则 ( )

(A) $|A|=0$.

(B) $A^T=-A$.

(C) $A=O$. 这里 O 表示 n 阶零矩阵.

(D) 矩阵 A 的所有特征值都为零.

(4) Which of the following matrices is **NOT** diagonalizable ? ( )

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

下列矩阵中不可以对角化的是 ( )

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(5) Let A be a 3×3 permutation matrix. Then $\det(-(A^T)^{2024})$ equals ( )

(A) 0.

(B) 2024.

(C) 1

(D) -1.

如果 A 为一个 3 阶置换矩阵, 则 $\det(-(A^T)^{2024})$ 等于

(A) 0.

(B) 2024.

(C) 1.

(D) -1.

2. (20 points, 5 points each) Fill in the blanks. (共 20 分, 每小题 5 分) 填空题.

(1) Suppose

$$A=\begin{bmatrix} a & b & -\frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & c & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & d & e \end{bmatrix}$$

is an orthogonal matrix. Then $a=$ ________, $e=$ ________.

如果

$$A=\begin{bmatrix} a & b & -\frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & c & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & d & e \end{bmatrix}$$

是正交矩阵, 则 $a=$ ________, $e=$ ________.

(2) Let A and B be two $n\times n$ real matrices $= 4, |B| = 3$ and $|A^{-1}+B| = 2$, then $|A+B^{-1}| =$ ________.

设 A 和 B 为两个 n 阶实矩阵. 若 $|A| = 4, |B| = 3$, 以及 $|A^{-1}+B| = 2$, 则 $|A+B^{-1}| =$ ________.

(3) Let A be a 3×3 matrix. Suppose $|A| = -5$ and $A^2+4A-5I = O$, then the three eigenvalues of A are ________. Where I denotes the 3×3 identity matrix and O denotes the 3×3 zero matrix.

设 A 为一个 3 阶矩阵. 假设 $|A| = -5$ 以及 $A^2+4A-5I = O$, 则矩阵 A 的三个特征值为 ________. 这里 I 表示 3 阶单位阵, O 表示 3 阶零矩阵.

(4) Suppose

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix} \text{ and } B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

are similar, then $a=$ ________.

如果

$$A=\begin{bmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{bmatrix} \text{ 和 } B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

相似, 则 $a=$ ______.

3. (20 points) Consider the following matrix

$$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{bmatrix}.$$

(a) Find all the eigenvalues of A.

(b) Find an orthogonal matrix Q such that $Q^{-1}AQ$ is diagonal.

(c) Compute A^k for any positive integer k.

(20 分) 考虑以下矩阵

$$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{bmatrix}.$$

(a) 求矩阵 A 的所有特征值.

(b) 求一个正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵.

(c) 求 A^k, 其中 k 为任意的正整数.

4. (10 points) Find the determinant of the following 7×7 matrix:

$$A=\begin{bmatrix}5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

(10 分) 求以下 7 阶矩阵的行列式:

$$A=\begin{pmatrix}5300000\\ 2230000\\ 0253000\\ 0025300\\ 0002530\\ 0000253\\ 0000025\end{pmatrix}$$

5. (10 points) Let

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Find all the eigenvalues and their corresponding linearly independent eigenvectors of $P = A(A^TA)^{-1}A^T$.

(b) Show that P is diagonalizable.

(10 分) 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) 求矩阵 $P = A(A^TA)^{-1}A^T$ 的所有特征值以及与之对应的线性无关的特征向量.

(b) 证明: P 是可对角化的.

6. (15 points) Consider the following quadratic form:

$$Q(x,y,z) = \lambda(x^2+y^2+z^2) + 2xy + 2xz - 2yz.$$

(a) For what values of λ is $Q(x,y,z)$ positive definite?

(b) For what values of λ is $Q(x,y,z)$ negative definite?

(c) Find the type of quadric surface defined by the following equation:

$$3(x^2+y^2+z^2) + 2xy + 2xz - 2yz = 1.$$

(15 分) 考虑以下二次型:

$$Q(x,y,z) = \lambda(x^2+y^2+z^2) + 2xy + 2xz - 2yz.$$

(a) λ 取何值时, $Q(x,y,z)$ 正定?

(b) λ 取何值时, $Q(x,y,z)$ 负定?

(c) 判断以下方程所对应的二次曲面的类型:

$$3(x^2+y^2+z^2) + 2xy + 2xz - 2yz = 1.$$

7. (10 points) Let A and B be $n \times n$ real matrices. *The trace of A is defined to be the sum of all of its diagonal entries:*

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

(a) Suppose A is similar to B, prove that

$$tr(A) = tr(B).$$

(b) Let A and B be real symmetric positive semidefinite matrices. Show that $tr(AB) \geq 0$.

(c) Suppose A and B are real symmetric positive semidefinite matrices and $tr(AB) = 0$. Show that $AB = O$. Where O denotes the $n \times n$ zero matrix.

(10 分) 设 A 和 B 为 n 阶实矩阵. 矩阵 A 的对角元之和称为它的迹:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

(a) 如果 A 和 B 相似, 证明:

$$tr(A) = tr(B).$$

(b) 设 A 和 B 为实对称半正定矩阵. 证明: $tr(AB) \geq 0$.

(c) 假定 A 和 B 为实对称半正定矩阵, 并且 $tr(AB) = 0$. 证明: $AB = O$. 这里 O 表示 n 阶零矩阵.