2 0 2 3春 数分I I期中(高清重置版)

一、(16 分)计算.

(1)设$z=x^y+\sin(x^2y)$，$x>0$，$y>0$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\mathrm{d}z$.

(2)设$f(x,y,z)=\ln(x+y^2+z^3)$，$x>0$，$z>0$，求$f(x,y,z)$在点$(1,1,1)$处沿方向$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4},\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)$的方向导数.

二、(16 分)计算.

(1)设$f(x,y,z)=\ln(1+x^2)+\mathrm{e}^y+\sin z$，$g(\theta,\varphi)=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$，求$h(\theta,\varphi)=f\circ g$的 Jacobi 矩阵.

(2)方程$x^3-7xy+y^3+5=0$在点$(1,1)$和$(1,2)$近旁分别确定了函数$y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$. 求$f_1{}'(1)$和$f_2{}'(1)$.

三、(10 分)设$f(x)$是$[a,b]$上可积的非负函数.

(1)试证明：$\sqrt{f(x)}$在$[a,b]$上可积.

(2)若$f>0$，问$\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$在$[a,b]$上是否必可积？若是，请证明；若否，请举例.

四、(16 分)设平面点集$D=\{(x,y)\colon y^2\le x\le 2-y,\ 0\le y\le 1\}$. 求$D$绕$x$轴旋转一周，在空间中形成的旋转体$\Omega$的体积和表面积.

五、(16 分)

(1)计算空间曲线$(a\mathrm{e}^{-t}\cos t,a\mathrm{e}^{-t}\sin t,bt),a>0,b>0$上每一点处的切向量和曲率.

(2)写出曲面$z=6-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$在点$(a,b,4)$处的切平面方程.

六、(10 分)证明以下命题：

(1)$\mathbb{R}^n\,(n\ge 2)$中以原点为心的单位球面S^{n-1}是紧致集.

(2)若f是S^{n-1}上的连续函数且不为常数，则存在实数$\alpha<\beta$，使得$f(S^{n-1})=[\alpha,\beta]$.

七、(8 分)设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2},\ (x,y)\ne(0,0)\\ 0,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$，试证明：$f(x,y)$在$(0,0)$处沿任何方向的方向导数均存在且相等，但在$(0,0)$处不连续.

八、(8 分)设D_1,D_2是$\mathbb{R}^n$中区域，$D_1\cap D_2\ne\varnothing$. 判断以下命题是否正确. 若是，请证明；若否，请举例.

(1)$D_1\cup D_2$是区域；

(2)$D_1\cap D_2$是区域；

(3)$D_1\setminus\overline{D_2}$是区域.