1.

南方科技大学
2021-2022 年春季学期 数学分析 II
参考答案与评分标准

一、（每小题 6 分，共 24 分）

（1）设 $z=xy+xf(\frac{y}{x})$，其中 f 为一元可微函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=y+f(\frac{y}{x})+x\cdot\frac{\partial(f(y/x))}{\partial x}=y+f(\frac{y}{x})+x\cdot f'(\frac{y}{x})\cdot(-\frac{y}{x^2})$

$=y+f(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}\cdot f'(\frac{y}{x})$；

$\frac{\partial z}{\partial y}=x+x\cdot\frac{\partial(f(y/x))}{\partial y}=x+x\cdot f'(\frac{y}{x})\cdot\frac{1}{x}=x+f'(\frac{y}{x})$.

（2）设 $u=xy^2e^{xy}$，求 u 于 $(1,1)$ 处沿方向 $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ 的方向导数.

解：注意 u 于 $(1,1)$ 处可微，而

$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2\cdot(\frac{\partial x}{\partial x}\cdot e^{xy}+x\cdot\frac{\partial(e^{xy})}{\partial x})=y^2(e^{xy}+xye^{xy})$，故 $\frac{\partial u}{\partial x}(1,1)=2e$；

$\frac{\partial u}{\partial y}=x\cdot(\frac{\partial(y^2)}{\partial y}\cdot e^{xy}+y^2\cdot\frac{\partial(e^{xy})}{\partial y})=x(2ye^{xy}+xy^2e^{xy})$，故 $\frac{\partial u}{\partial y}(1,1)=3e$.

因此 u 于 $(1,1)$ 处沿方向 $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ 的方向导数等于 $\frac{2e}{\sqrt{2}}+\frac{3e}{\sqrt{2}}=\frac{5e}{\sqrt{2}}$.

（3）设 u,v 是由方程组 $\begin{cases}xu-yv=1\\ yu+xv=0\end{cases}$ 所确定的 x,y 的可微函数，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$（设 $x^2+y^2\neq 0$）.

解：将已知式对 x 求偏导，得

$$u+x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-y\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0;\quad y\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v+x\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

解线性方程组，得 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$；$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{yu-xv}{x^2+y^2}$.

同理，将已知式对 y 求偏导，得

$$x\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-v-y\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0;\quad u+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+x\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

解线性方程组，得 $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2}$；$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$.

（4）计算曲线积分 $I=\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ 位于第一象限的部分.

解：在 L 上 $\sqrt{x^2+y^2}=|a|$，故 $I=e^{|a|}\int_L ds=\frac{\pi}{2}|a|\cdot e^{|a|}$.

注：默认 $a>0$ 而不写绝对值也算正确.

二、（12 分）设

$$f(x,y)=\frac{xy}{3x^2+2y^2}\quad ((x,y)\neq(0,0))；\quad f(0,0)=0.$$

（1）$f(x,y)$ 于 $(0,0)$ 处是否连续？给出理由；

（2）$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ 是否存在？如果存在，求出它们的值.

解：（1）由于 $\lim\limits_{h\to0}f(h,h)=\lim\limits_{h\to0}\frac{h^2}{5h^2}=\frac{1}{5}\neq f(0,0)$，但当 $h\to0$ 时 $(h,h)\to(0,0)$，故 $f(x,y)$ 于 $(0,0)$ 处不连续.

（2）注意当 $xy=0$ 时，必有 $f(x,y)=0$. 因此

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$. 同理，$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

三、（16 分）对以下 $\mathbb{R}^2$ 中的点集 E，求 E 的内部 E° 与闭包 $\overline{E}$，并指出哪个是区域？哪个是闭区域？（无需写出理由）

（1）$E=\{(x,y):\frac{x^2}{4}-1\le y\le 2-x\}$；

（2）$E=\{(x,y):x^2+y^2\neq1\}$；

（3）$E=\{(x,y):0<x^2+y^2<1\}$；

（4）$E=\{(x,y):xy=1\}$.

解：（1）$E^\circ=\{(x,y):\frac{x^2}{4}-1<y<2-x\}$，$\overline{E}=E$，$E$ 不是区域，E 是闭区域.

（2）$E^\circ=E$，$\overline{E}=\mathbb{R}^2$，$E$ 不是区域，E 不是闭区域.

（3）$E^\circ=E$，$\overline{E}=\{(x,y):x^2+y^2\le1\}$，$E$ 是区域，E 不是闭区域.

（4）$E^\circ=\varnothing$，$\overline{E}=E$，E 不是区域，E 不是闭区域.

四、（10 分）计算 $I=\iint\limits_D(x^2y^2+xy)dxdy$，其中 $D=\{(x,y):|x|+|y|\le1\}$.

解：注意被积区域关于 x 轴对称，且当 x 变为 $-x$ 时，xy 也变为其相反数，故 $\iint\limits_D xydxdy=0$，因此 $I=\iint\limits_D x^2y^2dxdy$.

由于 x,y 改变符号时，x^2y^2 不变，故令 $D_1=\{(x,y):x,y\ge0,x+y\le1\}$，有

$$I=4\iint\limits_{D_1}x^2y^2dxdy=4\int_0^1x^2dx\left(\int_0^{1-x}y^2dy\right)=\frac{4}{3}\int_0^1(1-x)^3x^2dx$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^1(x^2-3x^3+3x^4-x^5)dx=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{45}.$$

五、（10 分）设 $f(x,y)$ 是 $D=\{(x,y):x^2+y^2\le r^2\}$ 上的非负连续函数. 证明：若 $A=\sqrt{a^2+b^2}>r$，则有

$$\frac{m}{A+r}\pi r^2\le\iint\limits_D\frac{f(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}dxdy\le\frac{M}{A-r}\pi r^2,$$

其中 $M=\max\{f(x,y):(x,y)\in D\}$，$m=\min\{f(x,y):(x,y)\in D\}$.

证：当 $(x,y)\in D$ 时，$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 表示 (x,y) 与 (a,b) 的距离. 由于 (a,b) 与原点的距离为 A，而 (x,y) 与原点的距离不超过 r，故

$$A-r \le \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \le A+r.$$

因此，$\dfrac{1}{A+r} \le \dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \le \dfrac{1}{A-r}$.

又当$(x,y)\in D$时，$m \le f(x,y) \le M$，结合$m \ge 0$得

$$\frac{m}{A+r} \le \frac{f(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \le \frac{M}{A-r}$$

对$(x,y)\in D$成立.

由于$\sigma(D)=\pi r^2$，由积分平均值定理知

$$\frac{m}{A+r}\pi r^2 \le \iint_D \frac{f(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}dxdy \le \frac{M}{A-r}\pi r^2.$$

六、（10 分）计算$I=\iint_\Sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中$\Sigma$是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=1$围成的三维有界区域的表面外侧.

解：易知题述区域为$\Omega=\{(x,y,z):\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}$.

由 Gauss 公式得$I=\iiint_\Omega (\frac{\partial(x^2)}{\partial x}+\frac{\partial(y^2)}{\partial y}+\frac{\partial(z^2)}{\partial z})dxdydz = 2\iiint_\Omega (x+y+z)dxdydz$.

注意Ω关于yOz平面对称，故$\iiint_\Omega xdxdydz=0$，同理$\iiint_\Omega ydxdydz=0$，故

$$I=2\iiint_\Omega zdxdydz = 2\int_0^1 zdz(\iint_{x^2+y^2\le z^2} dxdy) = 2\int_0^1 z\cdot\pi z^2dz=\frac{\pi}{2}.$$

七、（10 分）计算曲线积分$\int_\Gamma \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$，其中$\Gamma$是平面上的闭曲线$x^2+4y^2-2\sqrt{3}x-1=0$，方向为逆时针方向.

解：易知$D=\{(x,y):x^2+4y^2-2\sqrt{3}x-1\le 0\}$是$\Gamma$围成的有界闭区域.

显然$(0,0)\in D^\circ$，故可以取$r>0$，使得以原点为圆心，r为半径的圆周落在D°里.

设Γ_1为以原点为圆心，r为半径的圆周，方向为顺时针方向，而

$$D_1=\{(x,y):x^2+y^2\ge r^2, x^2+4y^2-2\sqrt{3}x-1\le 0\},$$

由 Green 公式得

$$\int_\Gamma \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}+\int_{\Gamma_1}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2} = \iint_D (\frac{\partial(\frac{-x}{x^2+y^2})}{\partial x}-\frac{\partial(\frac{y}{x^2+y^2})}{\partial y})dxdy=0,$$

这是由于

$$\frac{\partial(\frac{-x}{x^2+y^2})}{\partial x} = -\frac{x^2+y^2-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2+y^2-2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial(\frac{y}{x^2+y^2})}{\partial y}.$$

因此$\int_\Gamma \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2} = -\int_{\Gamma_1}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$.

由于Γ_1可以表示为$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，其中$\theta$从$2\pi$连续递减到 0，故

$$\int_{\Gamma}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=-\int_{\Gamma_1}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=-\int_{2\pi}^{0}\frac{-r^2}{r^2}d\theta=-2\pi .$$

八、（8 分）用 Lagrange 乘数法求平面曲线 $ax^2+2bxy+cy^2=1$ 上的点到原点的最远距离和最近距离，其中 a,b,c 皆为正数，且 $ac-b^2>0$.

解：我们先求出当 $ax^2+2bxy+cy^2=1$ 时，x^2+y^2 的极值. 由于题述平面曲线是有界闭集，且 x^2+y^2 是连续函数，故最大最小值必然存在.

设 $f(x,y)=x^2+y^2+\lambda(ax^2+2bxy+cy^2-1)$，考虑 x^2+y^2 取极值时必然存在 λ 使得 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$.

由于 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x+\lambda(2ax+2by)=0$，故 $(1+\lambda a)x+\lambda by=0$；

由于 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y+\lambda(2bx+2cy)=0$，故 $\lambda bx+(1+\lambda c)y=0$.

注意 x,y 不能同时为 0，故 $(1+\lambda a)(1+\lambda c)=(\lambda b)^2$，因此 $(ac-b^2)\lambda^2+(a+c)\lambda+1=0$，此方程的 $\Delta=(a+c)^2-4(ac-b^2)=4b^2+(a-c)^2>0$，故有两个不同的根.

令 $p=ac-b^2,q=a+c$，则 $\lambda=\dfrac{-q\pm\sqrt{q^2-4p}}{2p}$.

若 λ 已确定，则 $\dfrac{y}{x}=-\dfrac{1+\lambda a}{\lambda b}$，$\dfrac{x}{y}=-\dfrac{1+\lambda c}{\lambda b}$，故

$$x^2+y^2=\frac{x^2+y^2}{ax^2+2bxy+cy^2}=\frac{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}{a\cdot\dfrac{x}{y}+2b+c\cdot\dfrac{y}{x}}=\frac{-\dfrac{1+\lambda c}{\lambda b}-\dfrac{1+\lambda a}{\lambda b}}{-a\cdot\dfrac{1+\lambda c}{\lambda b}+2b-c\cdot\dfrac{1+\lambda a}{\lambda b}}$$

$$=\frac{(a+c)\lambda+2}{(a+c)+2(ac-b^2)\lambda}=\frac{q\lambda+2}{2p\lambda+q}=\lambda\cdot\frac{q\lambda+2}{2p\lambda^2+q\lambda}=\lambda\cdot\frac{q\lambda+2}{-q\lambda-2}=-\lambda .$$

因此

$$x^2+y^2=\frac{q\pm\sqrt{q^2-4p}}{2p}=\frac{a+c\pm\sqrt{4b^2+(a-c)^2}}{2(ac-b^2)}.$$

故 x^2+y^2 的最大、最小值分别为 $\dfrac{a+c+\sqrt{4b^2+(a-c)^2}}{2(ac-b^2)}$ 和 $\dfrac{a+c-\sqrt{4b^2+(a-c)^2}}{2(ac-b^2)}$.

因此所求最远距离为 $\sqrt{\dfrac{a+c+\sqrt{4b^2+(a-c)^2}}{2(ac-b^2)}}$，最近距离为 $\sqrt{\dfrac{a+c-\sqrt{4b^2+(a-c)^2}}{2(ac-b^2)}}$.