

南方科技大学  
2023-2024 年春季学期 离散数学 期中试卷

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 使用移位加密法  $f(p) = (p+5) \bmod 26$  加密一段文字后的密文为 **djfw**，则原文为\_\_\_\_\_.
2. 用二分查找法在  $n$  个递增的实数中寻找指定的数，在最坏情况下的时间复杂度是  $\Theta(\quad)$ .
3. 中国二代身份证号码有 18 位，其中前 17 位均为数字，最后一位为校验码，可能是数字，也可能是字母  $X$ （代表 10）. 若某人的身份证号码为  $a_1a_2\dots a_{18}$ ，则  $7a_1+9a_2+10a_3+5a_4+8a_5+4a_6+2a_7+a_8+6a_9+3a_{10}+7a_{11}+9a_{12}+10a_{13}+5a_{14}+8a_{15}+4a_{16}+2a_{17}+a_{18}$  一定是 11 的倍数.  
假设有一对双胞胎，其中一人的身份证号码为 440305202404159814，另一人的身份证号码为 4403052024041598?0，则“?”处是\_\_\_\_\_.
4. 八进制数  $(3754)_8$  化成二进制数的结果为\_\_\_\_\_.
5. 满足  $81n \equiv 100 \pmod{2024}$  的最小的正整数  $n$  是\_\_\_\_\_.

二、（本题满分 15 分）设  $a, b, c$  是整数. 已知  $a+b+c, ab+bc+ca, abc$  都是偶数. 证明：  $a, b, c$  都是偶数.

三、（本题满分 15 分）请设计一个算法，该算法能够找出  $n$  个两两不同的整数中，第  $m$  大的那个（ $m, n$  是两个正整数， $m < n$ ），并且该算法的时间复杂度为  $O(mn)$ .

四、（本题满分 15 分）

- (1) 证明：对任意奇数  $n$ ，均有  $8 \mid n^2 - 1$ ；
- (2) 将 2024 分解为素数乘积的形式；
- (3) 证明：如果整数  $n$  与 2024 互素，那么  $2024 \mid n^{110} - 1$ .

五、（本题满分 15 分）设  $P(n)$  为命题：一个正方形可以分割成  $n$  个小正方形（小正方形的边长可以相同，也可以不同）.

- (1) 证明：若  $P(n)$  为真命题，则  $P(n+3)$  和  $P(n+8)$  均为真命题；
- (2) 证明：对任意整数  $n \geq 15$ ，  $P(n)$  均为真命题.

六、（本题满分 15 分）如果整数  $n$  满足  $n(n+1)(n+2)$  与 1001 互素，那么称  $n$  是“好数”.（已知  $1001 = 7 \times 11 \times 13$ ）

- (1) 请问  $1, 2, 3, \dots, 1001$  中有多少个“好数”？
- (2) 请问  $1, 2, 3, \dots, 10000$  中有多少个“好数”？

七、（本题满分 5 分）设  $p$  是一个素数，  $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$  是一些整数. 试构造一个各项系数均为整数的多项式  $f(x)$ ，使得  $f(k) \equiv a_k \pmod{p}$  对  $k = 0, 1, \dots, p-1$  均成立.