

Q<sub>1</sub>:  $f(z) = \frac{z \log(z)}{(z+1+i)^2}$   $-\pi < \text{Arg} < \pi$  (20分)

a) 求留数 ( $z = -1-i$  处)

b) 问 如果 branch 不同, 留数是否改变

Q<sub>2</sub>: 10. 寻找下面函数的 Hadamard 乘积! (20分) a) 问 of ch5 10 原题.

Q a)  $e^z - 1$ ;

(b)  $\cos \pi z$ .

ps. 老师会给公式

Q<sub>3</sub>: 10. 令  $F: H \rightarrow \mathbb{C}$  是一个全纯函数, 它满足 (20分)

$|F(z)| \leq 1$  和  $F(i) = 0$ .

a. 证明  $\varphi: H \rightarrow D$  conformal  $\varphi(z) = \frac{i-z}{i+z}$  (Ch8 例 1 原题)

b. 证明:

$|F(z)| \leq \left| \frac{z-i}{z+i} \right|$  对于所有  $z \in H$ .

(Ch8 作业 10 题原题)

Q<sub>4</sub>:  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$   $\det(A) = 1$   $\varphi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$   $A: H \rightarrow H$  (20分)

a. 求  $A$ ; 使  $\varphi_A(z) = 1+2i$

b. 求所有  $A$ , 使  $\varphi_A(i) = i$

Q<sub>5</sub>  $f(z) = e^z + z^3$  (25分)

① 求 函数  $e^z$  在 unit disc  $\overline{D}$  上的最大模

② 用 Rouché 定理 说明 inside  $D$  有 3 个零点

(bonus 5分) ③ 判断 ② 中 零点 是否 distinct