离散数学 (CS201) 2024 春期末考试

共 10 道大题，总分 100 分（无 bonus），时间 120 分钟

Q1. (10分，逻辑)

a) 已知 $\forall x(P(x) \to Q(x))$，$\forall x(Q(x) \to R(x))$，$\neg R(a)$，其中 a 是变量定义域内的一个元素，使用 rules of inference 证明 $\neg P(a)$ 是 $true$

b) 用逻辑语言翻译：“每一位在这个班上的学生都学习了离散数学”，其中变量定义域为所有学生

Q2. (10分，集合与函数) 证明或反证 $(-\infty, 1]$ 和 $(-1, 1]$ 的 cardinality 相等

Q3. (15分，数论)

a) 计算 $3^{644}\ mod\ 80$

b) p 是奇质数，整数 a 不能被 p 整除. 证明，如果同余方程 $x^2 \equiv a(mod\ p)$ 有解，那么一定有且仅有两个 $mod\ p$ 不同余的解

Q4. (5分，计数) $f : S \to T$ 是个函数，S 和 T 都是有限集，$m = \lceil |S|/|T| \rceil$，证明 S 中存在 $s_1, s_2, \ldots, s_m$，使得 $f(s_1) = f(s_2) = \ldots = f(s_m)$

Q5. (8分，计数) 要在自动售货机买 r \$ 的东西，现在有 1\$, 5\$, 10\$ 面值的钱，使用生成函数计算以下两问，直接写出答案，答案写出生成函数和项，比如 “ 本问的答案是生成函数 $G(x)$ 的 x^2 项的系数 ”

a) 往售货机中投入的钱的顺序无关，有多少种购买 r \$ 的东西的方法

b) 往售货机中投入的钱的顺序有关，有多少种购买 r \$ 的东西的方法

Q6. (12分，递归) R_n 表示 n 条直线把平面切割成的区域数，这些直线两两之间都不平行且没有任何三线共点

a) 初值 R_0 是多少

b) 写出 R_n 的递推式并说明理由

c) 使用解递推式通项的方法解出 R_n 的通项公式，注意不可以使用数学归纳法

Q7. (10分，关系) S 是一个集合，$R(S)$ 是 S 的所有子集构成的集合，对于 $R(S)$ 中的元素 R_1, R_2，定义偏序关系 $R_1 \preceq R_2$ 为 $R_1 \subseteq R_2$

a) 证明 $(R(S), \preceq)$ 是一个偏序集合 (poset)

b) $(R(S), \preceq)$ 是良序集吗，说明理由

Q8. (5分，关系) 关系 $R=\{(1,2),(1,4),(4,1),(3,3)\}$，以下两问直接写出答案即可

a) 写出 R 的传递闭包

b) 写出 R 的 connectivity relation R^*

Q9. (10分，图论) 证明 K_5 (点的个数为 5 的完全图) 不是平面图，提示：可以参考证明 $K_{3,3}$ 不是平面图的方法

Q10. (15分，图论) 定义集合 $S_1,\ldots,S_k$ 有 SDR： $\exists a_1\in S_1,\ldots,a_k\in S_k$，使得 $\forall i\neq j,a_i\neq a_j$. 证明，若 $|\bigcup_{i\in I}S_i|\geq|I|$ 对 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的任意子集 I 成立，那么 $S_1,\ldots,S_k$ 有 SDR. 请模仿霍尔结婚定律的证明，用数学归纳法证明此题，而不要将问题转化为图论问题而直接使用霍尔结婚定律.