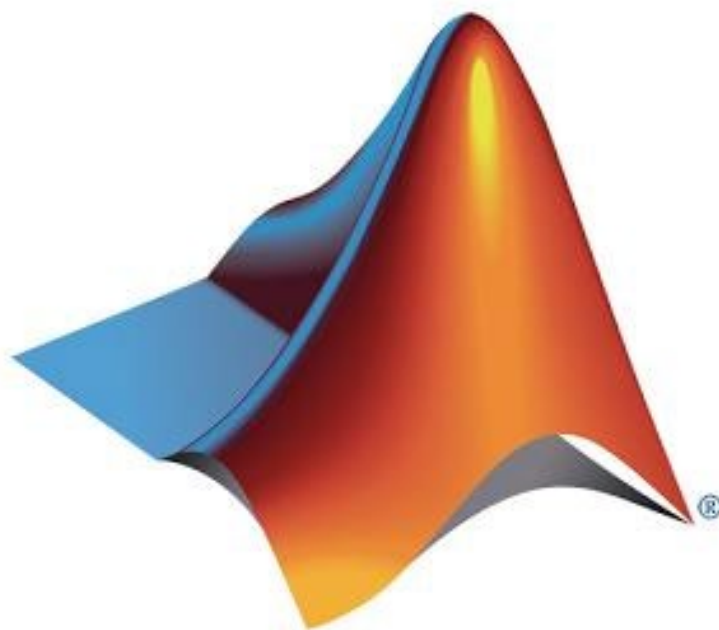
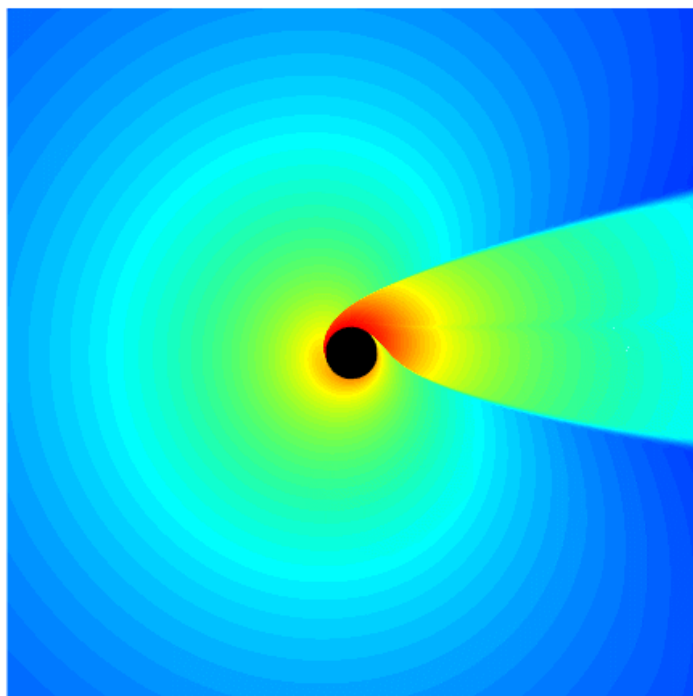


# 数学实验

# Mathematical Experiments



**实验三：**  
**矩阵代数实验**  
**Algebra of Matrix**

# 回顾MATLAB矩阵基本操作

# 矩阵的创建和运算

## 数组运算符

| 运算   | 符号   | 说明   |
|--|--|--|
| 数组加与减<br>数组乘数组<br>数组乘方<br>数组除法<br><br>数与数组混合运算 | $A+B$ 与 $A-B$<br>$A.*B$<br>$A.^B$<br>左除 $A.\backslash B$ , 右除 $B./A$<br><br>$k+A$ , $k-A$ , $k*A$ ,<br>$A*k$ ,<br>$A.^k$ , $k.^A$ , $k./A$ | 对应元素之间加减, 不加点<br><br>点运算只有点乘、点乘方、点除三个, 表示对应元素之间的运算. “ $.*$ ” 是一个整体, 点 “ $.$ ” 不能漏掉, “ $.$ ” 和 “ $*$ ” 之间也不能有空格. “ $.$ ” 和 “ $./$ ” 类似<br><br>将数 $k$ 当作与 $A$ 同阶的矩阵来做相应的数组运算. 如 $k+A=k*\text{ones}(\text{size}(A))+A$ ,<br>$k./A=k*\text{ones}(\text{size}(A))./A$ , 其他的数与数组混合运算以此类推 |

# 矩阵变换函数

| 名称                  | 含义          | 名称                | 含义       |
|---------------------|-------------|-------------------|----------|
| <code>fiplr</code>  | 矩阵左右翻转      | <code>diag</code> | 产生或提取对角阵 |
| <code>fipud</code>  | 矩阵上下翻转      | <code>tril</code> | 产生下三角    |
| <code>fipdim</code> | 矩阵特定维翻转     | <code>triu</code> | 产生上三角    |
| <code>Rot90</code>  | 矩阵反时针 90 翻转 | <code>det</code>  | 行列式的计算   |

## 与矩阵有关的常用内置函数：

- $\det(A)$  : 方阵的行列式(determinant)
- $\text{rank}(A)$ : 矩阵的秩(rank)
- $\text{eig}(A)$ : 方阵的特征值和特征向量(eigenvalue and eigenvector)
- $\text{trace}(A)$ : 矩阵的迹(trace)
- $\text{rref}(A)$ : 初等变换阶梯化矩阵A
- $\text{svd}(A)$ : 矩阵奇异值分解(singular value decomposition)
- $\text{cond}(A)$ : 矩阵的条件数(condition number)

# 应用性实验

# 实验3.1 小行星轨道问题

某天文学家要确定一颗小行星绕太阳运行的轨道，他在轨道平面内建立以太阳为原点的直角坐标系，在两坐标轴上取天文测量单位(一天文单位为地球到太阳的平均距离，即  $1.496 \times 10^{11} \text{m}$ )。在5个不同的时间点对小行星作了观察，得到轨道上5个点的坐标数据。

|   |        |        |        |        |        |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|
| x | 4.5596 | 5.0816 | 5.5546 | 5.9636 | 6.2756 |
| y | 0.8145 | 1.3686 | 1.9895 | 2.6925 | 3.5265 |

由开普勒第一定律知，小行星的轨道为一椭圆。试确定椭圆的方程，并在轨道的平面内以太阳为原点绘出椭圆曲线。



# 实验3.1 小行星轨道问题

建模：设椭圆的方程为：

$$a_1x^2 + 2a_2xy + a_3y^2 + 2a_4x + 2a_5y + 1 = 0$$

设天文学家测的轨道上5个点的坐标 $(x_i, y_i)$ ( $i = 1, 2, \dots, 5$ )，将各个点的坐标代入条件方程，得

$$\begin{cases} a_1x_1^2 + 2a_2x_1y_1 + a_3y_1^2 + 2a_4x_1 + 2a_5y_1 + 1 = 0 \\ a_1x_2^2 + 2a_2x_2y_2 + a_3y_2^2 + 2a_4x_2 + 2a_5y_2 + 1 = 0 \\ a_1x_3^2 + 2a_2x_3y_3 + a_3y_3^2 + 2a_4x_3 + 2a_5y_3 + 1 = 0 \\ a_1x_4^2 + 2a_2x_4y_4 + a_3y_4^2 + 2a_4x_4 + 2a_5y_4 + 1 = 0 \\ a_1x_5^2 + 2a_2x_5y_5 + a_3y_5^2 + 2a_4x_5 + 2a_5y_5 + 1 = 0 \end{cases}$$

# 实验3.1 小行星轨道问题

设椭圆的方程为：

$$a_1x^2 + 2a_2xy + a_3y^2 + 2a_4x + 2a_5y + 1 = 0$$

从而有

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & 2x_1y_1 & y_1^2 & 2x_1 & 2y_1 \\ x_2^2 & 2x_2y_2 & y_2^2 & 2x_2 & 2y_2 \\ x_3^2 & 2x_3y_3 & y_3^2 & 2x_3 & 2y_3 \\ x_4^2 & 2x_4y_4 & y_4^2 & 2x_4 & 2y_4 \\ x_5^2 & 2x_5y_5 & y_5^2 & 2x_5 & 2y_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

# 实验3.1 小行星轨道问题

某天文学家要确定一颗小行星绕太阳运行的轨道，他在轨道平面内建立以太阳为原点的直角坐标系，在两坐标轴上取天文测量单位(一天文单位为地球到太阳的平均距离，即  $1.496 \times 10^{11}\text{m}$ )。在5个不同的时间点对小行星作了观察，得到轨道上5个点的坐标数据。

|   |        |        |        |        |        |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|
| x | 4.5596 | 5.0816 | 5.5546 | 5.9636 | 6.2756 |
| y | 0.8145 | 1.3686 | 1.9895 | 2.6925 | 3.5265 |

思考：如果数据不精确，结果会如何？如果分析其影响？

灵敏度分析（如何判断两个椭圆的接近程度？）

## 实验3.2 市场占有率问题

现有A、B、C三家公司经营同类产品，相互竞争。每年A公司有  $\frac{1}{2}$  的顾客保留下来，分别有  $\frac{1}{4}$  的客户转向B、C公司；B公司有  $\frac{1}{2}$  的顾客保留下来，有  $\frac{1}{3}$  的客户转向A公司，有  $\frac{1}{6}$  的客户转向C公司；C公司有  $\frac{2}{5}$  的顾客保留下来，有  $\frac{2}{5}$  的客户转向A公司，有  $\frac{1}{5}$  的客户转向B公司。当产品开始制造时，A、B、C三公司的市场份额分别为 $\frac{2}{15}$ 、 $\frac{6}{15}$ 、 $\frac{7}{15}$ 。试问，两年后三家公司的市场份额各为多少？五年后又如何？十年后是什么结果？

# 实验3.2 市场占有率问题

建模:

令  $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})^T$ , 其中  $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$  分别表示k年后A、B、C公司产品所占市场份额, 则

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}x_1^{(k)} + \frac{1}{3}x_2^{(k)} + \frac{2}{5}x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_1^{(k)} + \frac{1}{2}x_2^{(k)} + \frac{1}{5}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_1^{(k)} + \frac{1}{6}x_2^{(k)} + \frac{2}{5}x_3^{(k)} \end{cases}$$

# 实验3.2 市场占有率问题

建模:

上式的矩阵方程形式为

$$X^{(k+1)} = HX^{(k)}, k = 0, 1, 2 \dots$$

式中

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

# 探索性实验

# 回顾：矩阵相似对角化

线性代数的一个重要内容是方阵的对角化问题。这个问题与方阵的特征值、特征向量这些非常重要的概念是紧密相连的。

$n$ 阶方阵 $A$ 、 $B$ 是相似的，记做 $A \sim B$ ，若存在 $n$ 阶可逆阵 $P$ ，使 $P^{-1}AP = B$ 。与 $A$ 相似的矩阵有无穷多个，如果 $A$ 能够与一个对角矩阵 $D$ 相似，则称 $A$ 是可对角化的。这时有

$$P^{-1}AP = D,$$

或者写成方阵 $A$ 的分解形式：

$$A = PDP^{-1}.$$



# 回顾：矩阵相似对角化

对角矩阵是一种非常简单的矩阵，如果 $A$ 可对角化为 $D$ ，则 $A$ 的许多性质就被这种简单的矩阵 $D$ 所决定了(在下面的实验中请注意这一点)，所以 $D$ 被称为方阵 $A$ 的标准形.

# 回顾：矩阵相似对角化

将P按列进行分块， $P = [x_1, x_2, \dots, x_n]_{n \times n}$ 并定义对角阵

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \text{ 则有}$$

$$\begin{aligned} A[x_1, x_2, \dots, x_n] &= [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= [\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n] \end{aligned}$$

即可逆阵P的各列满足

$$Ax_i = \lambda_i x_i, i = 1, 2, \dots, n$$

因此方阵可对角化问题转化为求特征值和特征向量问题。

# 回顾：矩阵相似对角化

将判定一个方阵A是否可以对角化以及找出相应的相似标准形的步骤为：

(1)求A的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , (重根按重数记入根，例如3重根认为是三个根)；

(2)求A的特征向量，如果存在n个线性无关的特征向量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，则A是可对角化的.这时令 $P = [x_1, x_2, \dots, x_n]_{n \times n}$ .

(3)如果A的线性无关特征向量的个数 $< n$ ，则A不能对角化，即这时A不能简化为对角矩阵的形式.但是可以进一步简化成一种准对角的形式：若当标准形.对角矩阵是一种特殊的若当标准形，这里不详细介绍这一概念.在Matlab中有计算若当标准形的指令(jordan(A)，位于符号演算工具箱Symbolic Math Toolbox)，可以应用这些指令，取代繁琐手工计算.

## 实验3.3

实验内容：选择若干方阵A，例如二阶方阵

$$A = \begin{bmatrix} 1/5 & 99/100 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 又选择一个初始}$$

点 $x_0$ (二维列向量)，按下面的公式进行迭代：

$$x_{k+1} = AX_k, k = 0, 1, 2, \dots$$

观察这些迭代点位置和趋向，讨论它们与标准形或特征值、特征向量的关系。

# 实验3.3

## 1、逼近直线的迭代点列

步骤1. 观察程序Exp3\_3a结果，在出现图形窗口后，可在适当位置按下鼠标左键选择初始点 $x_0$ ，这时程序将进行 $n(=100)$ 次迭代，并画出这 $n$ 个迭代点.同时，将向量 $U_k = X_{k+1} - X_k$ 标在点 $X_k$ 处指明迭代点的运动趋势.

对于所选的矩阵 $A$ ，不论初始点怎样选择，迭代序列最终好像是逼近一条直线.迭代点列在迭代过程中向平面上的一条直线运动并且在该直线上离原点而远去，好像每次迭代都是乘以一个稍大于1的常数 $\lambda$ .这种现象是偶然的还是一种内在的规律?如果是后者，如何确定这条直线?它和前面提到的相似标准形又有什么关系呢?

# 实验3.3

## 2.估计直线——特征值、特征向量

步骤2.目测这条直线L的斜率,它看起来经过原点.与横轴的夹角大约在 $42^\circ \sim 43^\circ$ 左右.用指令 $[P, D]=\text{eig}(A)$ 计算A的特征值和特征向量.观察这些特征向量是否能够构成直线L的方向矢量,在图中画出这条直线L.

根据已经观察到的结果,迭代点列 $\{X_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ 沿着这条直线L向远离原点的方向运动.这意味着当k充分大时,由二维向量 $X_k$ 出发得到的迭代向量 $X_{k+1} = AX_k$ 与 $X_k$ 是近似共线的,也就是二者是近似成比例的.因此存在着常数 $\lambda$ ,使得 $X_{k+1} = AX_k = \lambda X_k$ .根据特征值和特征向量的含义, $\lambda$ 为A的一个特征值,而直线L看来应与矩阵A的特征值和特征向量有关.

# 实验3.3

## 3.特征值和特征向量决定迭代性质?

迭代点列的性质实际上取决于矩阵A的特征值和特征向量的特性(所以“特征”是一个十分贴切的关键词): 从某个初始点 $X_0$ 出发(例如让 $X_0 = [1,1]^T$ ), 迭代得到的点列可以写为:

$$X_k = A^k X_0, k = 1, 2 \dots$$

由于 $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}$ , 所以有 $A =$

$P \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix} P^{-1}$ , 其中 $P = \begin{bmatrix} 0.7399 & -0.6690 \\ 0.6727 & 0.7433 \end{bmatrix}$ . 故迭代点为

$$X_k = P \begin{bmatrix} 1.1^k & 0 \\ 0 & (-0.9)^k \end{bmatrix} P^{-1} X_0,$$

$$\text{或写成 } P^{-1} X_k = \begin{bmatrix} 1.1^k & 0 \\ 0 & (-0.9)^k \end{bmatrix} P^{-1} X_0.$$

## 实验3.3

令  $y_k = P^{-1}X_k$ ，则  $X_k = Py_k$ ，从初始点  $y_0 = P^{-1}X_0$  出发，观察迭代序列  $y_k$  以及对应的原迭代序列  $X_k = Py_k$  的运动趋向，用 Matlab 画出两者的迭代图，比较他们的异同。迭代点  $X_k$  可由  $y_k$  的可逆变换  $X_k = Py_k$  得到，而  $y_k$  的迭代性质是容易把握的，由(8.12)有

$$y_k \triangleq \begin{bmatrix} y_k(1) \\ y_k(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1^k & 0 \\ 0 & (-0.9)^k \end{bmatrix} y_0 = \begin{bmatrix} 1.1^k & y_0(1) \\ (-0.9)^k & y_0(2) \end{bmatrix}$$

其中  $y_0 = \begin{bmatrix} y_0(1) \\ y_0(2) \end{bmatrix} = P^{-1}X_0$ 。运行程序显示了两者的迭代结果，水平的 '+' 点是迭代点  $\{y_k\}$ 。



思考：

能否总结出一般规律和方法？

# 幂法

迭代公式:  $X_k = AX_{k-1}, k = 1, 2 \dots$

幂法主要用于求矩阵按模最大的特征值和对应的特征向量。

设矩阵 $A$ 具有 $n$ 个线性无关向量 $v_1, \dots, v_n$ , 且其相应的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 满足

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|, (\text{幂法应用条件})$$

称 $\lambda_1$ 为 $A$ 的按模最大的特征值（主特征值）。

现任取一非零向 $X_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ ,  
假设 $\alpha_1 \neq 0$ , 令

$$X_k = AX_{k-1}, k = 1, 2 \dots$$

得向量序列 $\{X_k\}, k = 0, 1, 2, \dots$

# 幂法

$$\begin{aligned}X_k &= AX_{k-1} = A^2 X_{k-2} = \cdots = A^k X_0 \\&= \alpha_1 A^k v_1 + \alpha_2 A^k v_2 + \cdots + \alpha_n A^k v_n \\&= \alpha_1 \lambda_1^k v_1 + \alpha_2 \lambda_2^k v_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^k v_n \\&= \lambda_1^k \left[ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k v_2 + \cdots + \alpha_n \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k v_n \right]\end{aligned}$$

当 $k$ 充分大时, 由于 $\alpha_1 \neq 0$ ,  $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1, \cdots, \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right| < 1$ ,

$$X_k \approx \lambda_1^k \alpha_1 v_1$$

$AX_k \approx \lambda_1^{k+1} \alpha_1 v_1 = \lambda_1 (\lambda_1^k \alpha_1 v_1) = \lambda_1 X_k$  即 $X_k$ 为特征值 $\lambda_1$ 的近似的特征向量。

因此,

$$\begin{cases} \lambda_1 \approx (X_{k+1})_i / (X_k)_i \\ v_1 \approx X_k \end{cases},$$

其中  $(X)_i$  表示向量 $X$  的第 $i$ 个分量

# 幂法

实际计算时，为防止 $X_k$ 的模过大或过小，以致产生计算机运算的上下溢出，通常每次迭代都对 $X_k$ 进行归一化，使 $\|X_k\|_\infty=1$ ，因此幂法公式改进为

$$\begin{cases} y_k = AX_{k-1} \\ m_k = \max(X_{k-1}), k = 1, 2 \dots \\ X_k = y_k / m_k \end{cases}$$

其中， $\max(X_{k-1})$ 是向量 $X_{k-1}$ 中绝对值最大的一个分量。

当 $k$ 充分大时，

$$\begin{cases} \lambda_1 \approx \max(X_k) = m_k \\ v_1 \approx X_k \end{cases}$$

# 反幂法

由  $Av_i = \lambda_i v_i$  易推得  $A^{-1}v_i = \frac{1}{\lambda_i} v_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ,

若有  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots > |\lambda_n|$ , 则  $\frac{1}{\lambda_n}$  是  $A^{-1}$  的按模最大的特征值, 同时也是矩阵  $A$  的按模最小的特征值, 其公式为

$$\begin{cases} y_k = A^{-1}X_{k-1} \\ m_k = \max(y_k), k = 1, 2, \dots \\ X_k = y_k/m_k \end{cases}$$

为避免求逆矩阵, 用解方程组的方法构造算法:  
对任意初始向量  $X_0$  作

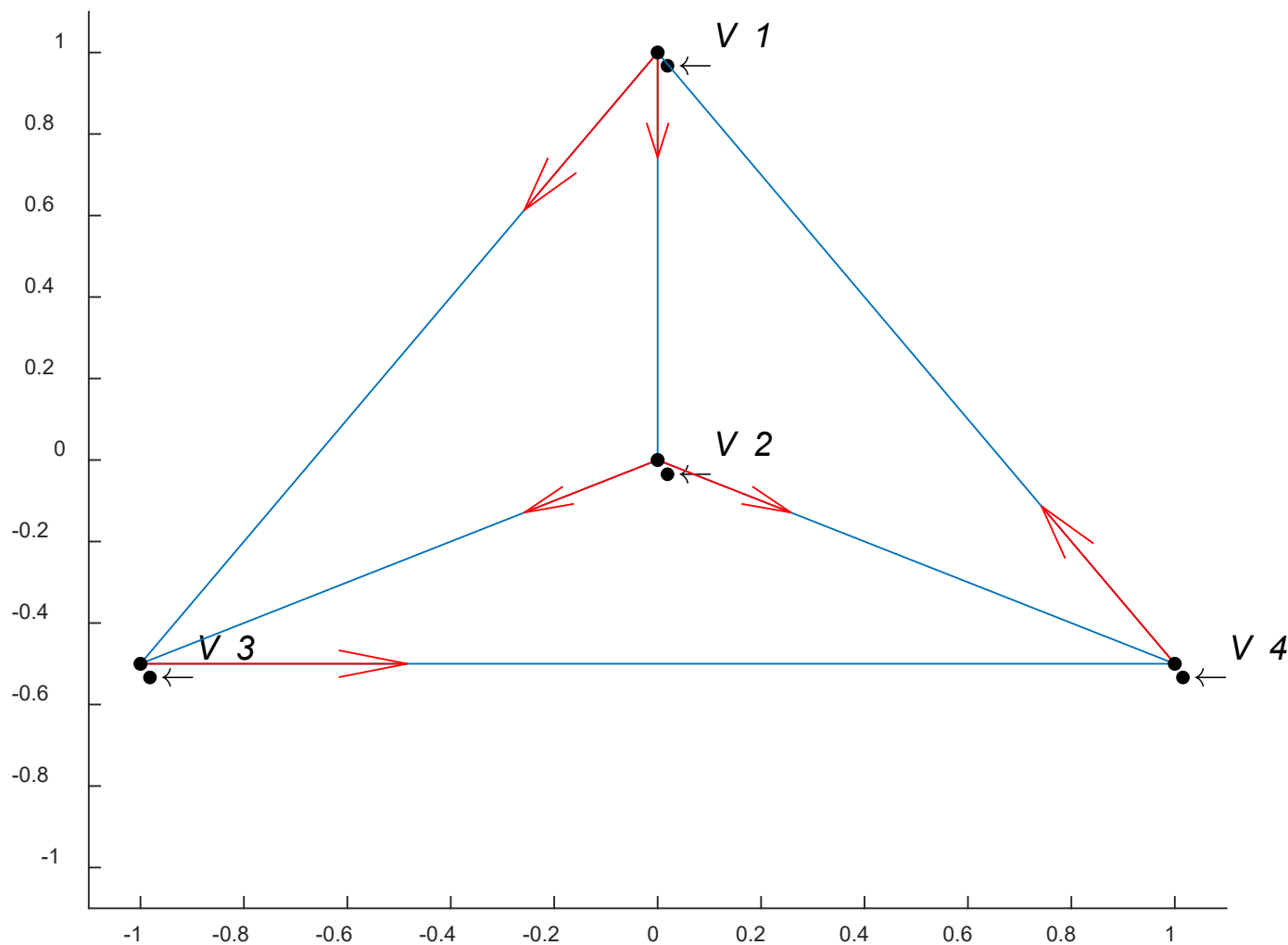
$$\begin{cases} Ay_k = X_{k-1} \\ m_k = \max(y_k), k = 1, 2, \dots, \\ X_k = y_k/m_k \end{cases} \quad \text{解方程求出 } y_k.$$

## 实验3.4 循环比赛的名次问题

把球队看成点，在每两个点之间用直线连接，表示球队进行了两两交锋.比赛结果用箭头标出：例如  $V1 \rightarrow V2$  表示  $V1$  在比赛中赢了  $V2$  队，得分为1.这样就将上面循环赛的名次问题表示为图论中的有向图，表示球队的点在图论中被称为顶点，表示比赛情况的线段或有向线段称为边或有向边.

实验(1) 编写程序，用Matlab绘制的四个队循环赛的有向图，它清楚地表现了循环赛的全部结果，提供了比得分更多的信息，根据这些信息你可以给出一种合理的排序吗？

# 实验3.4 循环比赛的名次问题



## 实验3.4 循环比赛的名次问题

有向图可以用一个 $n \times n$ 矩阵 $A$ 来表现，这个矩阵的元素定义为：

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{存在从顶点 } V_i \text{ 指向顶点 } V_j \text{ 的有向边,} \\ 0, & \text{不存在从顶点 } V_i \text{ 到顶点 } V_j \text{ 的有向边,} \end{cases}$$

$A$ 被称为有向图的邻接矩阵.

实验(2)观察下面的程序，其中 $A$ 为图的邻接矩阵， $e = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ .对照图，理解邻接矩阵的意义，想一想为什么 $Ae$ 恰为得分向量 $s$ ?



# 实验3.4 循环比赛的名次问题

思考：

记 $s_1 = Ae$ ，称为1级得分向量；进一步可计算 $s_2 = As_1$ ，称为2级得分向量（它的意义是什么？）

继续这个程序，可以得到k级得分向量 $s_k = As_{k-1}$ 。

为了不使它们无限变大，可将它们归一化。

如果k趋向无穷大时 $s_k$ 有极限存在，则这个极限值就可以作为排名的依据。

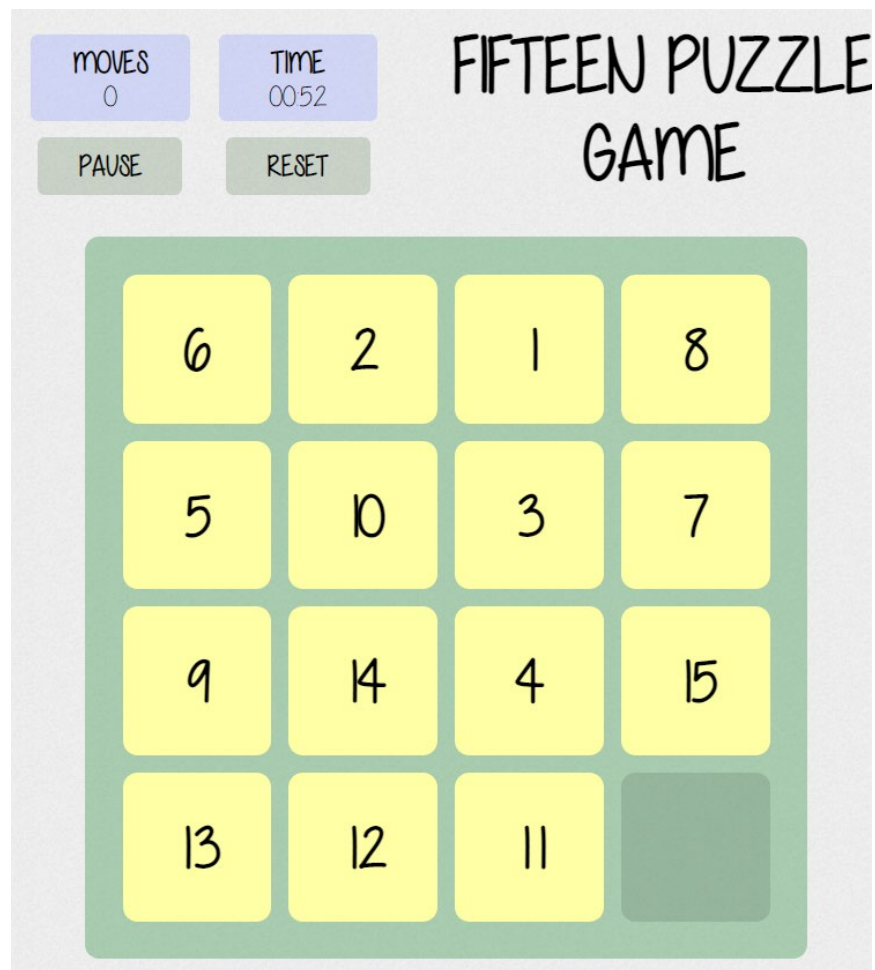
这种方法是合理的吗？为什么？

# 趣味性实验

# 实验3.5 fifteen-puzzle

15格点的拼图

15个格点的拼图本身是个智力趣味题，需要在棋盘上移动棋子使之按照1到15的顺序回归初始位置。

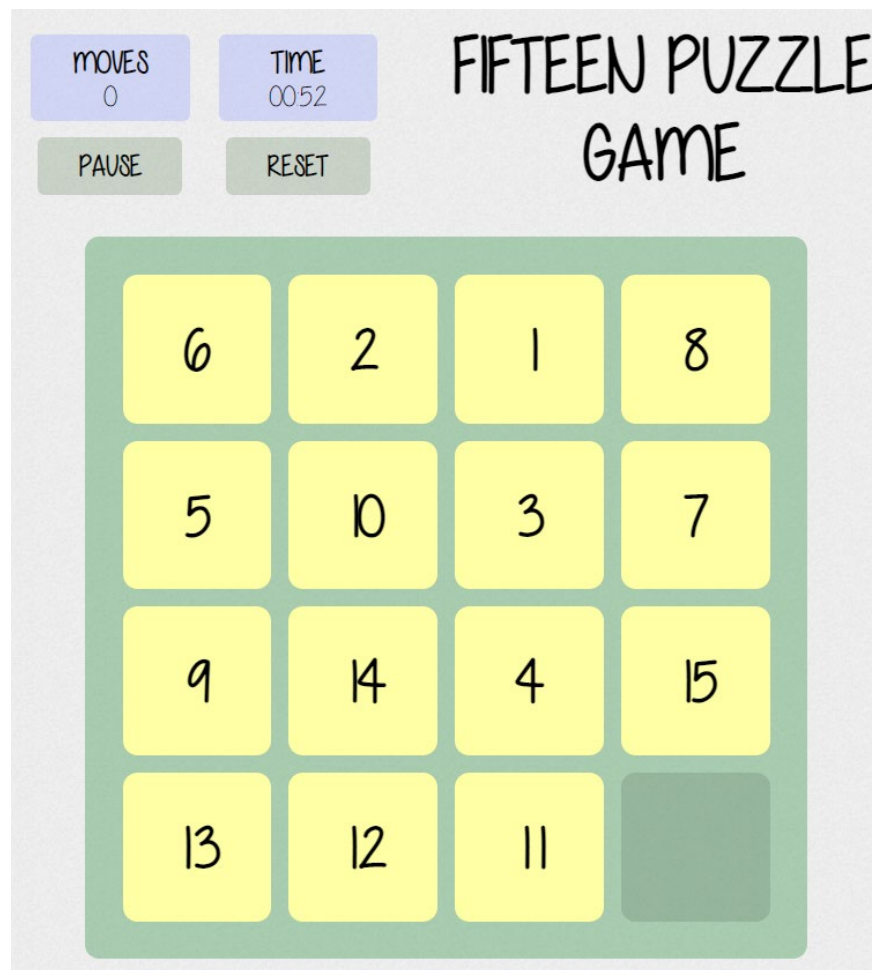


<https://lorecioni.github.io/fifteen-puzzle-game/>

# 实验3.5 fifteen-puzzle

15格点的拼图

15个格点的拼图本身是个智力趣味题，需要在棋盘上移动棋子使之按照1到15的顺序回归初始位置。



<https://lorecioni.github.io/fifteen-puzzle-game/>

# 实验3.5 fifteen-puzzle

19世纪末，这个谜题在山姆·洛伊德(Sam Loyd)提出的十年前就被提出了，但是，当洛伊德提出要提供1000美元作为奖金给解出15拼图之后，这个游戏才迅速在世界上传播开来。



山姆·洛伊德最后两块交换后的拼图（图源 Wikimedia）

山姆·洛伊德的版本有所不同，他从初始版本的拼图开始，把14和15互换了位置。

# 回顾：排列的逆序数

The inversion number of a permutation

## 定义逆序

**定义** 对于 $n$ 个不同的元素，我们**规定**各元素之间有一个标准次序，于是在这些元素的任一排列中，某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有1个**逆序**。

一般地， $n$ 个不同的**自然数**，规定由小到大为**标准次序**。

于是在一个排列  $i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$  中，若数  $i_t > i_s$  则这两个数组成一个逆序。

例如 排列32514

# 回顾：排列的逆序数

**定义** 一个排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**.

**问题** 如何计算排列逆序数？

**例如** 排列**32514** 的逆序数是多少？

设 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是元素为自然数1至n的一个排列，如果比 $p_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 大的且排在 $p_i$ 前面的元素有 $t_i$ 个，就说 $p_i$ 这个元素的逆序数为 $t_i$ .

**于是全体元素的逆序数之和就是**

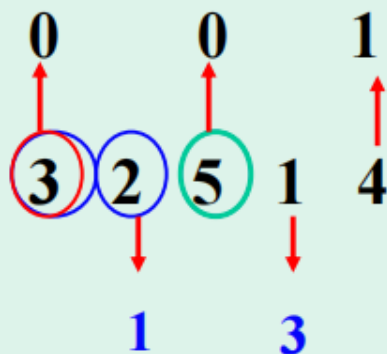
$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$$

# 回顾：排列的逆序数

## 逆序数计算方法

分别计算出排列中每个元素前面比它大的数码个数之和，即算出排列中每个元素的逆序数，这每个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数.

例如 排列32514 中，



故此排列的逆序数为 $0+1+0+3+1=5$ .



# 回顾：排列的逆序数

**MATLAB 实验：**

写一个函数，实现计算任何排列的逆序数。

# 回顾：排列的逆序数

## 排列的奇偶性

逆序数为奇数的排列称为奇排列;  
逆序数为偶数的排列称为偶排列.

## 实验探索:

通过MATLAB实验，观察对换对排列奇偶性的影响

# 回顾：排列的逆序数

**定义** 在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，这种作出新排列的手续叫做对换。

将相邻两个元素对调，叫做**相邻对换**。

例如

$$\begin{array}{ll} a_1 \cdots a_l \textcolor{blue}{a} \textcolor{blue}{b} b_1 \cdots b_m & a_1 \cdots a_l \textcolor{blue}{a} b_1 \cdots b_m \textcolor{blue}{b} c_1 \cdots c_n \\ \downarrow & \downarrow \\ a_1 \cdots a_l \textcolor{blue}{b} \textcolor{blue}{a} b_1 \cdots b_m & a_1 \cdots a_l \textcolor{blue}{b} b_1 \cdots b_m \textcolor{blue}{a} c_1 \cdots c_n \end{array}$$

# 回顾：排列的逆序数

## 对换与排列的奇偶性的关系

**定理1** 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

**证明** 首先考虑相邻对换的情况。

设排列为

$$a_1 \cdots a_l \textcolor{blue}{ab} b_1 \cdots b_m \xrightarrow{\text{对换 } a \text{ 与 } b} a_1 \cdots a_l \textcolor{blue}{ba} b_1 \cdots b_m$$

除  $a, b$  外，其它元素的逆序数不改变.

# 回顾：排列的逆序数

当  $a < b$  时，

经对换后  $a$  的逆序数增加1，  $b$  的逆序数不变；

当  $a > b$  时，

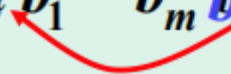
经对换后  $a$  的逆序数不变，  $b$  的逆序数减少1.

因此对换相邻两个元素，排列改变奇偶性.


设排列为  $a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$

现来对换  $a$  与  $b$ .

# 回顾：排列的逆序数

$$a_1 \cdots a_l \textcolor{blue}{a} b_1 \cdots b_m \textcolor{blue}{b} c_1 \cdots c_n$$


$m$  次相邻对换

$$\xrightarrow{\hspace{1cm}} a_1 \cdots a_l \textcolor{blue}{ab} b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$$


$m+1$  次相邻对换

$$\xrightarrow{\hspace{1cm}} a_1 \cdots a_l \textcolor{blue}{b} b_1 \cdots b_m \textcolor{blue}{a} c_1 \cdots c_n$$

$$\therefore a_1 \cdots a_l \textcolor{blue}{ab} b_1 \cdots b_m \textcolor{blue}{b} c_1 \cdots c_n,$$

$2m+1$  次相邻对换

$$\xrightarrow{\hspace{1cm}} a_1 \cdots a_l \textcolor{blue}{bb} b_1 \cdots b_m \textcolor{blue}{a} c_1 \cdots c_n,$$

所以一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

# 实验3.5 fifteen-puzzle

这个谜题在山姆·洛伊德(Sam Loyd)提出的十年前就被提出了，但是，当洛伊德提出要提供1000美元作为奖金给解出15拼图之后，这个游戏才迅速在世界上传播开来。

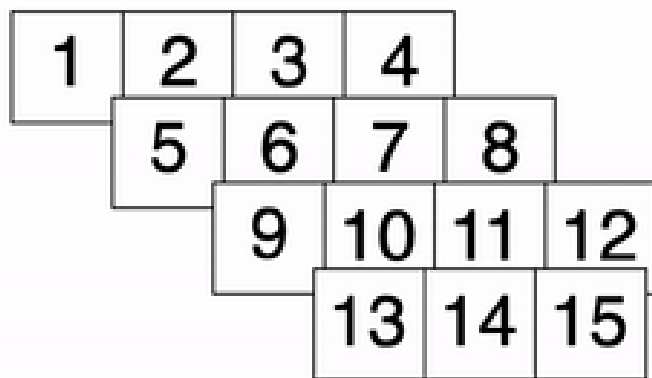


山姆·洛伊德最后两块交换后的拼图（图源 Wikimedia）

山姆·洛伊德的版本有所不同，他从初始版本的拼图开始，把14和15互换了位置。

# 实验3.5 fifteen-puzzle

我们先将拼图排成一排：





# 实验3.5 fifteen-puzzle

将原始拼图中格点的移动映射到这条线上：

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |  |    |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|--|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |  | 13 | 14 | 15 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|--|----|----|----|----|

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  |
| 5  | 6  | 7  | 8  |
| 9  | 10 | 11 |    |
| 13 | 14 | 15 | 12 |

# 实验3.5 fifteen-puzzle

将原始拼图中格点的移动映射到这条线上点的重排：

---

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |  |    |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|--|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |  | 13 | 14 | 15 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|--|----|----|----|----|

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  |
| 5  | 6  | 7  | 8  |
| 9  | 10 | 11 |    |
| 13 | 14 | 15 | 12 |

观察移动过程中，排列的奇偶性的影响。

# 实验3.5 fifteen-puzzle

MATLAB模拟:

<https://ww2.mathworks.cn/matlabcentral/fileexchange/13900-n-puzzle-dynamic-size-and-solver>

N-Puzzle (dynamic size and solver)

程序文件: npuzzle.m by Per-Anders Ekstrom

# 随堂实验1

编写幂法的程序，求矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ 的主特征值和其对应的特征向量。

取 $x_0 = (0,0,1)^T$

# 随堂实验2

- 不同类型的住房对人际关系的影响是不同，例如，住在较封闭的住宅里的居民很少往来，反之则不同.在某项住房建筑设计规划中希望考虑这一因素，为此一位社会学家设计了一张表格，询问每个居民你认为哪些邻居是你最好的朋友.在此我们仅考虑5个居民，他们的答案可用矩阵A概括：

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

上面矩阵 $A$ 的每一行表示该行左边所示居民的选择，例如，居民1认为居民2和4是他最好的朋友，而居民2则认为1和3是他最好的朋友。

- 请参考课上的实验，画图表示展示 $A$ 的结构关系（即，以 $A$ 作为图的邻接矩阵）；计算矩阵 $AA^T$ 并解释每个分量的意义；再计算 $A^T A$ 并解释每个分量的意义。

# 随堂实验3

运行15格点拼图的代码：

(1)成功拼出正确的结果，截图上交。

(2)代码里有哪些值得你学习的地方？至少说一个方面，并简述理由。

(2)学习代码中的课上没有教过的内置函数，至少对其中5个内置函数学习帮助和示例，截图上交。