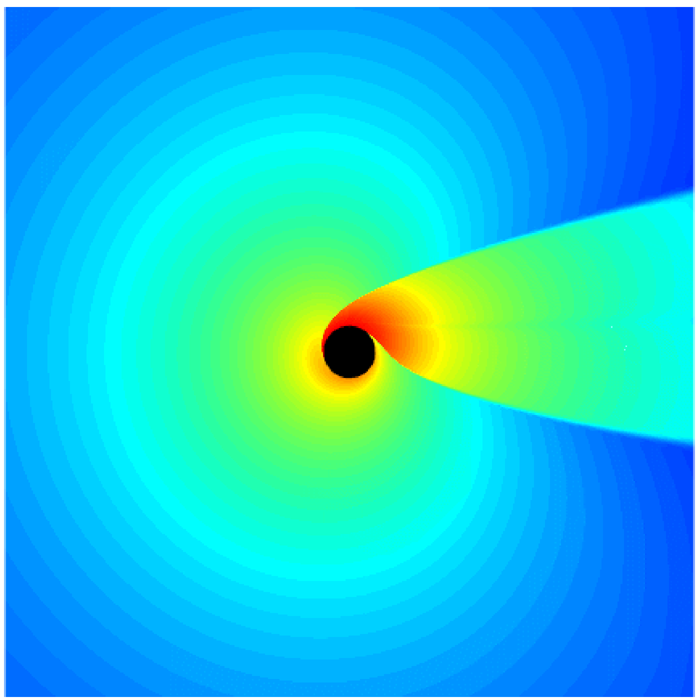
数学实验
Mathematical Experiments



实验四：
随机模拟实验
Stochastic Simulations

有关随机模拟的MATLAB指令

随机数生成

R=rand(m, n)　　　生成区间(0, 1)上均匀分布的m行n列随机矩阵

R=randn(m, n)　　　生成标准正态分布N(0, 1)的m行n列随机矩阵

P=randperm(N)　　　生成1, 2, …, N的一个随机排列

R=randi(N, m, n)　　生成1, 2, …, N的均匀分布的m行n列随机矩阵

rng(s)　　　　设定随机数种子s, 其中s是非负整数. rng（'default')使用默认随机数种子，rng('shuffle')根据当前时刻设定随机数种子

随机数生成

```
>>a=rand(1,1000);[mean(a),var(a)]%由于随机性，以下每次结果略有不同
ans=    0.5021    0.0837          %区间(0,1)上均匀分布均值0.5，方差1/12
>>b1=randn(1,1000);[mean(b1),var(b1)]
ans =   0.0455    1.0635          %标准正态分布均值0，方差1
>>b2=randn(1,1000);[mean(b2),var(b2)]
ans =   0.0177    1.0502    %由于随机性，尽管命令相同，b1与b2结果不同
>>corrcoef(b1,b2)
ans =   1.0000    0.0024
          0.0024    1.0000    %理论相关系数为0，这是由于b1与b2独立
>>randperm(5)
ans=   3    1    2    4    5
>>r=randi(5,1,10)
r=    5    4    2    3    3    1    2    1    1    2
```

随机数生成

由于随机性的本质，同样命令生成的随机结果会不同.实际上，计算机生成的是伪随机数，其生成机制由随机种子控制.MATLAB允许用户自己设置随机种子.若将随机种子设为特定值，则可以使随机模拟成为可再现的.例如

```
>>rng default;randperm(5)
```

总是产生排列35124.另一方面，若将种子设置为系统时间，

```
>>rng shuffle
```

则几乎得到不可再现的随机试验.

随机变量模拟

R=random(dist,p1,p2,…,m,n)　生成以p1,p2,…为参数的m行n列dist类分布随机数矩阵.dist是表示分布类型的字符串

R=unidrnd(N,m,n)　生成1,2,…,N的等概率m行n列随机矩阵（同randi）

R=binornd(k,p,m,n) 生成参数为k,p的m行n列二项分布随机数矩阵

R=unifrnd(a,b,m,n) 生成区间[a,b]上的连续型均匀分布m行n列随机数矩阵

R=normrnd(mu,sigma,m,n) 生成均值为μ,标准差为σ的m行n列正态分布随机数矩阵

R=mvnrnd(mu,sigma,m)　生成n维正态分布数据，这里μ为n维均值向量，σ为n阶协方差矩阵（它必须是正定的），R为m×n矩阵，每行代表一个随机数。

随机变量模拟

例如

```
>>c=normrnd(-5,6,1,1000);[mean(c),std(c)]%均值-5,标准差6
ans =
        -5.0679    6.0592
>>r=mvnrnd([0;0],[1,0.9;0.9,1],100); %二维正态，均值[0;0]，协方差矩阵[1,0.9;0.9,1]
>>plot(r(:,1),r(:,2),'o'); %由于相关系数为0.9，两个分量近似为正线性相关关系>>unidrnd(5.1.10)
ans =
        2    2    2    4    4    5    5    3    4    1
>>binornd(10,0.5,1,10)
ans =
        8    1    3    3    5    5    4    6    2    5
```

随机变量模拟

R=random(dist,p1,p2,…,m,n)

通用随机数生成函数random可适用的分布类型包括：

'discrete uniform'(离散均匀分布），'binomial'（二项分布），'uniform'（均匀分布）,'normal'（正态分布）,'poisson'（Poisson分布）,'chisquare'（χ^2分布）,'t'（t分布）,'f'（F分布）,'geometric'（几何分布），'hypergeometric'（超几何分布），'exponential'（指数分布），'gamma'（Γ分布）,'weibull'（Weibull分布）等.

随机变量模拟

例如

```
>>random('binomial',10,0.5,1,10)          %同binornd(10,0.5,1,10)
ans =
      6    4    2    8    6    6    3    6    7    5
>>random('uniform',1,2,2,5) %区间[1，2]上的均匀分布，同
unifrnd(1,2,2,5)
ans =
      1.4730    1.8926    1.1396    1.9192    1.9086
      1.7822    1.1017    1.2193    1.6982     1.1111
```

趣味性应用实验

一、问题背景

在生活实际中，大量问题包含着随机性因素。有些问题很难用数学模型来表示，也有些问题虽建立了数学模型，但其中的随机性因素较难处理，很难得到解析解，这时使用计算机进行随机模拟是一种比较有效的方式。

随机模拟方法是一种应用随机数来进行模拟实验的方法，也称为**蒙特卡罗（Monte Carlo）方法**。这种方法名称来源于世界著名的赌城——摩纳哥的蒙特卡罗，由第二次世界大战时期美国物理学家Metropolis执行曼哈顿计划的过程中提出。随机模拟方法以概率统计理论为基础，通过对研究的问题或系统进行随机抽样，然后对样本值进行统计分析，进而得到所研究问题或系统的某些具体参数、统计量等。

随着计算机技术的迅猛发展，蒙特卡罗方法越来越受到人们的重视。目前，该方法已经广泛应用于物理、生物、数学、金融、经济等领域。

二、实验目的

（1）理解蒙特卡罗方法原理，并利用计算机进行随机模拟。

（2）能够使用蒙特卡罗方法解决一些应用性问题。

实验4.1 生日问题

设某团体有n个人组成，试确定在一年中该团体至少有两个人生日相同的概率。

实验4.1 生日问题

设某团体有n个人组成，试确定在一年中该团体至少有两个人生日相同的概率。

随机模拟实验算法设计：设置一个生日向量（维数为1×365）表示一年365天中的任一天，向量分量的数值表示该天过生日的人数，在每次实验中，随机生成1~365的n个随机数分别表示n个人的生日，并改变相应生日向量分量的值。当生日向量中分量值≥2时，表示实验成功，不断进行实验，并记录实验成功次数与实验总次数，然后计算成功概率。

实验4.1 生日问题

设某团体有n个人组成，试确定在一年中该团体至少有两个人生日相同的概率。

随机模拟实验算法设计：设置一个生日向量（维数为1×365）表示一年365天中的任一天，向量分量的数值表示该天过生日的人数，在每次实验中，随机生成1~365的n个随机数分别表示n个人的生日，并改变相应生日向量分量的值。当生日向量中分量值≥2时，表示实验成功，不断进行实验，并记录实验成功次数与实验总次数，然后计算成功概率。

讲解程序 Exp4_1.m

实验4.1 生日问题

理论分析：设Ω="n个人的生日"，
则Ω中有365^n种可能情况。
定义： A="n个人中，至少有两个人的生日相同"，
B="n个人的生日互不相同"，
则A与B互逆，又B中具有P_{365}^n种情形，故

$$P(B) = \frac{P_{365}^n}{365^n}.$$

从而

$$1 - P(B) = 1 - \frac{P_{365}^n}{365^n}$$

- **1- nchoosek(365,n)*factorial(n)/365^n**

有没有更好的计算方法？请思考

实验4.1 生日问题

理论和实验结果的比较：

选取n=30,可以得到理论分析结果为0.7063；若执行实验程序Exp4_1(100000,30)5次，可分别得实验结果0.7080、0.7061、0.7045、0.7069、0.7078，实验结果与理论分析结果趋于一致。下表给出了九组不同团体人数随机实验模拟（m=100000）与理论分析计算结果。（思考：误差关于m的收敛率？）

人数n	15	20	25	30	35	40	50	60	80
实验	0.2532	0.4126	0.5679	0.7068	0.8140	0.8913	0.9702	0.9940	0.9999
理论	0.2529	0.4114	0.5687	0.7063	0.8144	0.8912	0.9704	0.9941	0.9999

实验4.2 会面问题

两人约定于0到T时在某地相见，先到者等t(t≤T)时离去，试求两人能够相见的概率。

实验4.2 会面问题

两人约定于0到T时在某地相见，先到者等t(t≤T)时离去，试求两人能够相见的概率。

随机模拟实验设计：在[0,T]×[0,T]区域内随机产生数据点$(x_i, y_i)(i=1,2,\cdots,m)$，当$|x_i - y_i| \le t$时表示两人能够会面，并记为实验成功，设m次实验中成功次数为k，则所求的概率为k/m。

实验4.2 会面问题

两人约定于0到T时在某地相见，先到者等t(t≤T)时离去，试求两人能够相见的概率。

随机模拟实验设计：在[0,T]×[0,T]区域内随机产生数据点$(x_i, y_i)(i=1,2,\cdots,m)$，当$|x_i - y_i| \le t$时表示两人能够会面，并记为实验成功，设m次实验中成功次数为k，则所求的概率为k/m。

实验4.2 会面问题

两人约定于0到T时在某地相见，先到者等t(t≤T)时离去，试求两人能够相见的概率。

随机模拟实验设计：在[0,T]×[0,T]区域内随机产生数据点$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,m)$，当$|x_i-y_i|\le t$时表示两人能够会面，并记为实验成功，设m次实验中成功次数为k，则所求的概率为k/m。

讲解MATLAB程序 Exp4_2.m

（思考：更高效的编程）

实验4.2 会面问题

理论分析：设x,y分别表示两人到达会面地点的时刻，Ω为样本空间，则

Ω={(x,y)|0≤x,y≤T};令A=“两人能够会面”,则

A={(x,y)|0≤x,y≤T且|x-y|≤t} ,从而

$$P(A)=\frac{\text{区域}_A\text{的面积}}{\text{区域}_\Omega\text{的面积}}=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-(1-\frac{t}{T})^2\text{。}$$

实验4.2 会面问题

实验结果与理论结果的比较：

取T=60,t=15,则$P(A)=\frac{7}{16}=0.4375$，与实验执行结果对比可知，随机模拟结果逼近于0.4375。

实验4.3 巴拿赫火柴问题

巴拿赫火柴盒问题（**Banach's matchbox problem**）波兰数学家巴拿赫随身带着两盒火柴，分别放在两个衣袋里，每盒有**n** 根火柴，每次使用时，任取一盒然后取一根，问他发现一盒空时，另一盒恰有**r**根的概率。

实验4.3 巴拿赫火柴问题

巴拿赫火柴盒问题（**Banach's matchbox problem**）波兰数学家巴拿赫随身带着两盒火柴，分别放在两个衣袋里，每盒有**n** 根火柴，每次使用时，任取一盒然后取一根，问他发现一盒空时，另一盒恰有**r**根的概率。

随机模拟实验设计：设置两个变量表示两个火柴盒的数目，每次随机的选取一盒，以变量数值减少**1**作为该盒火柴被取走一根，变量值为**-1**作为发现盒空，并结束该次实验，若另一盒的变量值为**k**，表示另一盒还剩**k**根，认为是实验成功，不断进行实验，并记录实验成功次数与总实验次数，然后计算成功概率。

实验4.3 巴拿赫火柴问题

巴拿赫火柴盒问题（Banach's matchbox problem）波兰数学家巴拿赫随身带着两盒火柴，分别放在两个衣袋里，每盒有n 根火柴，每次使用时，任取一盒然后取一根，问他发现一盒空时，另一盒恰有r根的概率。

随机模拟实验设计：设置两个变量表示两个火柴盒的数目，每次随机的选取一盒，以变量数值减少1作为该盒火柴被取走一根，变量值为-1作为发现盒空，并结束该次实验，若另一盒的变量值为k，表示另一盒还剩k根，认为是实验成功，不断进行实验，并记录实验成功次数与总实验次数，然后计算成功概率。

讲解MATLAB程序Exp4_3.m

实验4.3 巴拿赫火柴问题

理论分析：

将两盒火柴分别记为A、B盒，两盒火柴有一盒用完时，有两种情形，A盒空或者B盒空；对于第2n-r+1次取到A盒的概率为$\frac{1}{2}$；若他发现A盒被取空，B盒恰有r根，也就是前面已经进行了2n-r次，其中有n次取得A盒，根据伯努利原理，其对应概率为$C_{2n-r}^{n}(\frac{1}{2})^{n}(\frac{1}{2})^{n-r}$。

综上情况知所求问题的概率为$C_2^1 C_{2n-r}^{n}(\frac{1}{2})^{n}(\frac{1}{2})^{n-r}\frac{1}{2}$，即$C_{2n-r}^{n}(\frac{1}{2})^{2n-r}$。

- **nchoosek(2*n-r,n)/2^(2*n-r)**

实验4.3 巴拿赫火柴问题

实验结果与理论结果的比较：

选取n=10，r=5，计算可以得到理论分析结果0.0916；

若随机执行实验程序Exp4_2(1000000,10,5) 5次，可分别得实验结果0.0910、0.0915、0.0919、0.0918、0.0915；

仿真实验结果与理论分析结果趋于一致。

实验4.4 抓阄问题

某单位有n个职工，现有一公司赠送该单位a(a<n)份礼品，采用抓阄的办法进行礼品分配：箱子中装有n个纸条球，其中有a个做了红色标记，每人摸取一个纸条球（无放回），取得红色标记的纸条球发放礼品一份。问第r(1≤r≤n)个人获得礼品的概率为多大？

实验4.4 抓阄问题

某单位有n个职工，现有一公司赠送该单位a(a<n)份礼品，采用抓阄的办法进行礼品分配：箱子中装有n个纸条球，其中有a个做了红色标记，每人摸取一个纸条球（无放回），取得红色标记的纸条球发放礼品一份。问第r(1≤r≤n)个人获得礼品的概率为多大？是否公平？

随机模拟实验设计：设置一个抓阄向量（维数为1×n），向量分量的数值表示该纸条是否获得礼品，在每次实验中，使用随机数的办法分配a份奖品出现的位置，并改变相应抓阄向量分量的值，当抓阄向量中分量值等于1时，表示实验成功，不断进行实验，并记录实验成功次数与实验总次数，然后计算成功概率。

实验4.4 抓阄问题

某单位有n个职工，现有一公司赠送该单位a(a<n)份礼品，采用抓阄的办法进行礼品分配：箱子中装有n个纸条球，其中有a个做了红色标记，每人摸取一个纸条球（无放回），取得红色标记的纸条球发放礼品一份。问第r(1≤r≤n)个人获得礼品的概率为多大？是否公平？

随机模拟实验设计：设置一个抓阄向量（维数为1×n），向量分量的数值表示该纸条是否获得礼品，在每次实验中，使用随机数的办法分配a份奖品出现的位置，并改变相应抓阄向量分量的值，当抓阄向量中分量值等于1时，表示实验成功，不断进行实验，并记录实验成功次数与实验总次数，然后计算成功概率。

编写MATLAB程序Exp4_4.m

实验4.4 抓阄问题

理论分析：

把n个纸条认为相互可识别的，将n个纸条摆放在n个位置上，共有n！种方法；A=“第r个人获得礼品”，若将第r个位置摆放做红色标记纸条，共有a种方法，其余纸条摆放在剩余n-1个位置上，共有(n-1)！种方法，从而$P(A)=\frac{a(n-1)!}{n!}=\frac{a}{n}$。

实验4.4 抓阄问题

实验结果与理论结果的比较：

当n=10，a=3时$P(A)=\frac{3}{10}$，通过命令执行结果可以看出，随机模拟结果与理论分析结果相吻合。

这样的抓阄公平吗？

实验4.5 报童问题

报童每天清晨从报社购讲报纸零售晚上将没有卖掉的报纸退回。每份报纸的购进价为b元，零售价为a元，退回价为c元，满足a>b>c。报童卖出报纸的份数服从$N=(\mu,\sigma^2)$的正态分布。对以下三种情形，试问报童每天应购进报纸多少份可以使得收益最大?

(1) a=0.5,b=0.3,c=0.15,u=100,σ=20;

(2) a=0.8,b=0.45,c=0.2,μ=100,σ=20;

(3) a=1.0,b=0.55,c=0.21,μ=200,σ=30。

实验4.5 报童问题

报童每天清晨从报社购讲报纸零售晚上将没有卖掉的报纸退回。每份报纸的购进价为b元，零售价为a元，退回价为c元，满足a>b>c。报童卖出报纸的份数服从$N=(\mu,\sigma^2)$的正态分布。对以下三种情形，试问报童每天应购进报纸多少份可以使得收益最大?

(1) a=0.5,b=0.3,c=0.15,u=100,σ=20;

(2) a=0.8,b=0.45,c=0.2,μ=100,σ=20;

(3) a=1.0,b=0.55,c=0.21,μ=200,σ=30。

随机模拟实验设计：根据报童卖出报纸份数的分布类型生成随机向量，向量中的分量表示报童每天卖报份数（即需求量），取不同数值表示报童每天购进份数（数值大小介于μ－3σ与μ+3σ之间），根据已经生成随机向量，计算出平均收益，通过比较，找出最优数值。

实验4.5 报童问题

讲解程序Exp4_5.m

[x1,x2]=Exp4_5(0.5,0.3,0.15,100,20,1e5)

计算结果：

对于第一种情况，报童最优进购104份，平均获益17.2元；
对于第二种情况，报童最优进购107份，平均获益30.9元；
第三种情况，报童最优进购205份，平均获益80.6元。

实验4.6 矿工脱险问题

一个矿工在有三个门的矿井中迷了路，第一个门通到一坑道走3h可使他到达安全地点，第二个门通向使他走5h又回到原地点的坑道，第三个门通向使他走7h又回到原地点的坑道。如果他在任何时刻都等可能的选中其中一个门，问他到达安全地点平均需要花多少时间？

实验4.6 矿工脱险问题

一个矿工在有三个门的矿井中迷了路，第一个门通到一坑道走3h可使他到达安全地点，第二个门通向使他走5h又回到原地点的坑道，第三个门通向使他走7h又回到原地点的坑道。如果他在任何时刻都等可能的选中其中一个门，问他到达安全地点平均需要花多少时间？

随机模拟实验设计：设置一个变量表示该矿工走到安全地点所花时间，以随机取数的方式表示该矿工选择的坑道，若选择坑道能够到达安全地点，结束该次实验，并记录变量数值；若回到出发点，记录变量数值，再进行随机取数选择坑道，重复以上过程，直到该矿工到达安全地点结束该次实验。不断重复实验，在此过程中记录所走过总时间和与总实验次数，最后计算出平均花费时间。

编写并讲解程序Exp4_6.m

探索性实验

一、问题背景

在研究过程中，我们常常会做出猜测，再探索严格的数学证明。

如何从数值上快速地检验某个猜想的正确性呢？

为了遍历比较普遍的情况，我们常常会考虑用随机模拟方法，即**蒙特卡罗（Monte Carlo）方法**。

二、实验目的

通过蒙特卡罗方法，寻找数学规律、检验数学猜想。

实验4.6 不等式问题

有人曾提出以下猜想：

猜想 设 a, b, c $\in \mathbf{R}_+$，且 $a+b+c=1$，$n \in \mathbf{N}_+$，

则

$$\frac{a^{n+1}+b}{b+c}+\frac{b^{n+1}+c}{c+a}+\frac{c^{n+1}+a}{a+b} \geqslant \frac{1+3^n}{2 \cdot 3^{n-1}} \qquad ①$$

试讨论：如何初步检验该猜想的合理性呢？

实验4.7 可容许状态集的问题

Assume that the fluid density $\rho > 0$, pressure $p > 0$, velocity $|v| < c$. Define

$$D = \rho\gamma, \qquad m = \rho h \gamma^2 v, \qquad E = \rho h \gamma^2 c^2 - p$$

where $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, $h = 1 + \frac{\Gamma}{\Gamma-1}\frac{p}{\rho c^2}$, and Γ is a constant satisfying $1 < \Gamma \leq 2$.

Find an explicit description for the set of all physical admissible states $\{D, m, E\}$

10月18日实验课实验题

随机模拟实验
上交截止日期:
2023年10月18日23:00

随堂实验1（2.5分；第1问1.5分，第2问1分）：计算概率实验

N个人（包括张三和李四）参加圆桌会议，座位随机安排，求张三和李四相邻的概率？

（1）请使用蒙特卡罗方法计算并与理论解相对比。
（2）请探索蒙特卡罗方法的准确度随着模拟样本数的增加的数学关系。

随堂实验2：应用性实验（1.5分）

某超市通过进购协议每天清晨从某农业公司进购某种青菜零售，下午5点将没有卖掉的该青菜低价处理。每斤青菜的进购价为2.2元/斤，零售价为3.5元/斤，处理价为1.2元/斤。经过市场调研，每天卖出青菜斤数（近似）服从N(320, 28^2)的正态分布（期望为320，标准差为28）。假设你是该超市老板所聘请的市场分析专家，请你用所学的随机模拟方法，分析：每天应进购多少斤该青菜可以使得收益最大？