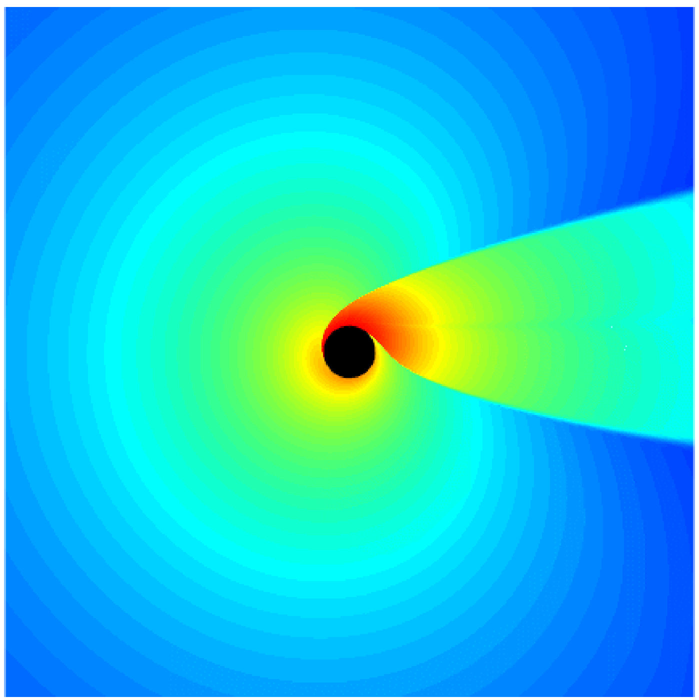
数学实验

Mathematical Experiments



实验五：π的计算实验
Calculate π

<u>实验5.1</u>泰勒级数(Taylor series)法

思考:

如何利用反正切函数的泰勒级数

$$a\mathrm{rc}\tan x = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^5}{3} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \cdots \qquad (1)$$

计算π.

实验5.1泰勒级数法

实验(1)

将x=1代入上面的级数得到

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}. \qquad (2)$$

在上面的级数中取n=20000计算元的近似值.观察所得的结果和所花的时间.

实验5.1泰勒级数法

思考：

- 发现花费的时间很长，所得的结果的准确度却很差.其原因是由于当**x=1**时得到的**arctan1**的展开式**(2)**收敛得太慢.

- 怎样才能使泰勒级数

$$arc\tan x = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^5}{3} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \cdots$$

收敛得快?

实验5.1泰勒级数法

思考：

· 发现花费的时间很长，所得的结果的准确度却很差.其原因是由于当**x=1**时得到的**arctan1**的展开式**(2)**收敛得太慢.

· 怎样才能使泰勒级数

$$arc\tan x = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^5}{3} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \cdots$$

收敛得快?

容易想到，应当使**x**的绝对值小于**1**，最好是远比**1**小，这样，随着指数的增加，**x**的幂快速接近于**0**，泰勒级数就会快速收敛。比如，取$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$得到的$\mathbf{arctan}\,\boldsymbol{\frac{1}{2}}$就收敛得快.

插个小故事

同学们大概听说过国际象棋发明者向印度国王要求奖赏的故事.

在古印度有个大臣，他聪明过人，发明了一种棋，国王百玩不厌，于是决定重赏他。他说：“陛下，我只要一点麦子。请您让人将麦子放在我发明的棋盘的六十四个格子内，第一格放一粒，第二格放二粒，第三格放四粒，第四格放八粒，第五格放十六粒……照这样放下去，每格比前一格多放一倍麦粒，直到把六十四个棋格放满就行了。”

插个小故事

这表面上看起来不多，实际上所要的麦粒数 2^{64} - 1 是一个天文数字，无比巨大，国王根本不可能给出这么多麦子.

其中的原因在于：随着指数的增加，2的幂上升得越来越快，2^{64}就已经是一个巨大的天文数字.

将这个故事反其意而用之，就可以想像2^{64}的倒数$(\frac{1}{2})^{64}$是一个非常微小的正数，在

$$arc\tan\frac{1}{2}\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}(\frac{1}{2})^{2n-1}$$

中取2n-1=63得到的$arc\tan\frac{1}{2}$的近似值的误差就小于$\frac{1}{2^{65}}$，准确度已经非常非常高.

实验5.1泰勒级数法

思考：

但是，得到的$arc\tan\frac{1}{2}$与π有什么关系？对于计算π有何帮助？

实验5.1泰勒级数法

思考：

但是，得到的$arc\tan\frac{1}{2}$与π有什么关系？对于计算π有何帮助？

我们并不知道$arc\tan\frac{1}{2}$是π的多少倍，但是却能计算出$\alpha=arc\tan\frac{1}{2}$与$\frac{\pi}{4}$相差多少.记$\alpha=arc\tan\frac{1}{2}$，$\beta=\frac{\pi}{4}-\alpha$，则

$$\tan\beta=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+1\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{3},$$

因此，$\beta=arc\tan\frac{1}{3}$，即$\frac{\pi}{4}-arc\tan\frac{1}{2}=arc\tan\frac{1}{3}$，从而得到

$$\frac{\pi}{4}=arc\tan\frac{1}{2}+arc\tan\frac{1}{3}.$$

实验5.1泰勒级数法

分析：

$$\frac{\pi}{4} = arc\tan\frac{1}{2} + arc\tan\frac{1}{3}.$$

$\arctan\frac{1}{3}$比$\arctan\frac{1}{2}$收敛得更快.利用泰勒级数计算出$\arctan\frac{1}{2}$与$\arctan\frac{1}{3}$的近似值再相加，然后再乘以4，就得到π的近似值.

编写程序实现

实验5.1泰勒级数法

还可以考虑用$\alpha = arc\tan\frac{1}{5}$来计算π，它收敛得更快.由

$\tan\alpha = \frac{1}{5}$易算出

$\tan 2\alpha = \frac{5}{12}$,$\tan 4\alpha = \frac{120}{119}$,

$$tan(4\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{tan\ 4\alpha - an\frac{\pi}{4}}{1 + tan\frac{\pi}{4}\ tan\ 4\alpha} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = arc\tan\frac{1}{239}.$$

从而得到

$$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - arc\tan\frac{1}{239} = 4arc\tan\frac{1}{5} - arc\tan\frac{1}{239}.$$

即

$$\pi = 16arc\tan\frac{1}{5} - 4arc\tan\frac{1}{239}. \qquad (4)$$

称为Maqin公式.

实验5.1泰勒级数法

我们是通过计算

$$T_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

来得到$arc\tan x$的近似值的.当0≤x≤1时，这个近似值的误差

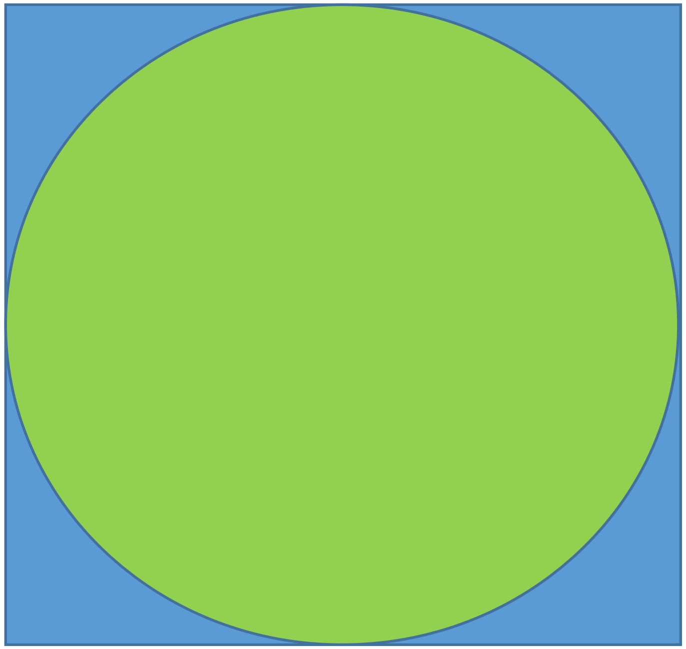
$$e = |arc\tan x - T_n(x)| < \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

由此可以估算出，对于$x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{239}$，为了使$arc\tan x$的近似值$T_n(x)$达到所需的精确度，n至少应当取到多大.

实验5.2 圆内随机投点法

思考：

能否通过蒙特卡罗方法计算π？

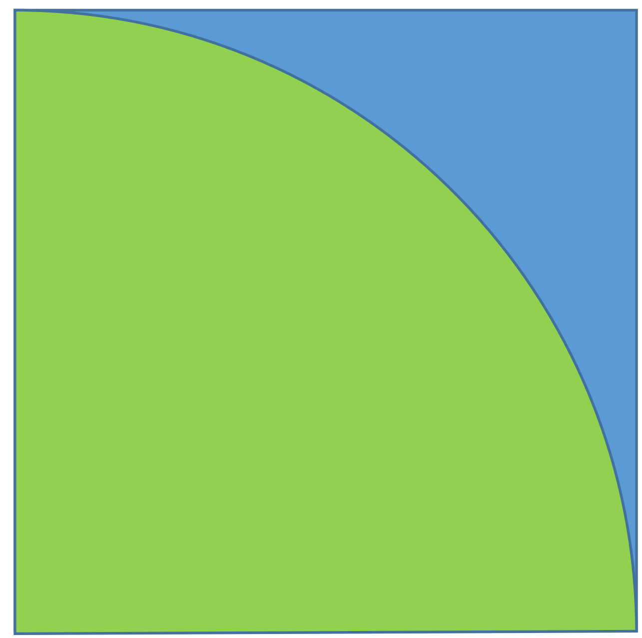


实验5.2 圆内随机投点法

思考：

能否通过蒙特卡罗方法计算π？

利用求单位圆的$\frac{1}{4}$的面积来得到$\frac{\pi}{4}$，从而得到π.单位圆的一是一个扇形G，它是边长为1的单位正方形G_1的一部分，如图??.单位正方形G_1的面积$S_1 = 1$.只要能够求出扇形G的面积S在正方形G_1的面积S_1中所占的比例$k = \frac{S}{S_1}$，就能立即得到S，从而得到π的值.

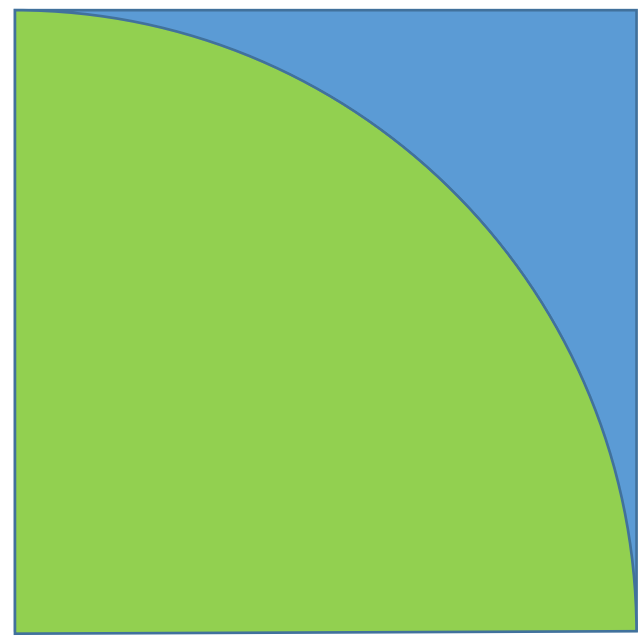


实验5.2 圆内随机投点法

思考：

能否通过蒙特卡罗方法计算π？

怎样求出扇形面积在正方形面积中所占的比例k？一个办法是在正方形中随机地投入很多点，使所投的每个点落在正方形中每一个位置的机会均等，看其中有多少个点落在扇形内.将落在扇形内的点的个数m与所投点的总数n的比$\frac{m}{n}$可以作为k的近似值.



实验5.2 圆内随机投点法

随机模拟实验设计：产生随机数$(x_i, y_i)(i = 1,2,\cdots,m)$,其中$\boldsymbol{0 \le x_i \le 1, 0 \le y_i \le 1}$（正方形，记为$\boldsymbol{\Omega}$），当$\boldsymbol{\sqrt{{x_i}^2 + {y_i}^2} \le 1}$时表示落入单位圆的第一象限部分（扇形，记为A），此时记为实验成功，统计实验成功次数m与实验总次数n，则$\boldsymbol{\pi \approx \frac{4m}{n}}$。

编写并讲解MATLAB程序Exp5_2.m

演示动画程序

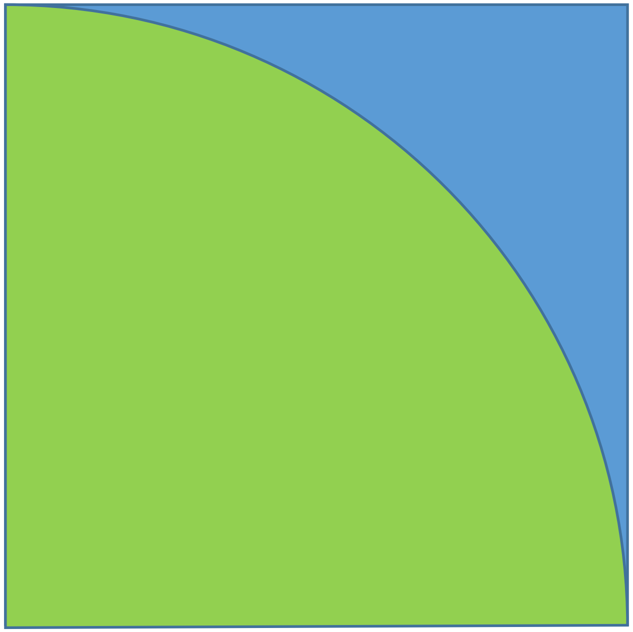
实验5.2 圆内随机投点法

编程实验：

(1)取n=1000，10000，50000，按上面所说的随机投点的方法来计算π的近似值。

(2)对不同的n，观察所得结果的精确度.你发现什么规律？

(3)将这个方法的精确度与泰勒级数法相比较。



实验5.2 圆内随机投点法

总结与思考：

通过上面的实验，我们发现：当n=1000时精确度很低.取更大的n，精确度会高一些.但总的来说，蒙特卡罗法的精确度比泰勒级数法低.

既然如此，为什么还要用蒙特卡罗法呢？

实验5.2 圆内随机投点法

总结与思考：

如果只是为了计算π，当然可以不用它。

但是，假如不是求一个扇形的面积，而是求100个已知圆 $G_i: (x-a_i)^2+(y-b_i)^2=r_i^2 (1 \le i \le 100)$ 的公共部分*G*的面积，

你怎么办？用定积分吗？

我们会发现要确定公共部分*G*的边界就是一个很困难的问题，很难用定积分或数值积分法计算.

实验5.2 圆内随机投点法

总结与思考:

但用蒙特卡罗法就没有多大困难：仍然可以用一个正方形(或长方形)Q将图形G包含在内，仍然可以通过产生随机数在Q内随机投点P(x,y).怎样判断每一点P(x,y)是否落在G内部？不需知道G的边界，只要对每一个圆G_i判断P(x,y)是否落在G_i内,也就是判断$(x-a_i)^2+(y-b_i)^2=r_i^2$是否成立.

如果P落在每一个圆G_i的内部，那么它就落在所有这些圆的公共部分G的内部.而让计算机作100次这样的判断是轻而易举的事情.

因此，蒙特卡罗法在很多场合下，特别是在对精确度要求不太高的情况下是大有用武之地的.

实验5.2 圆内随机投点法

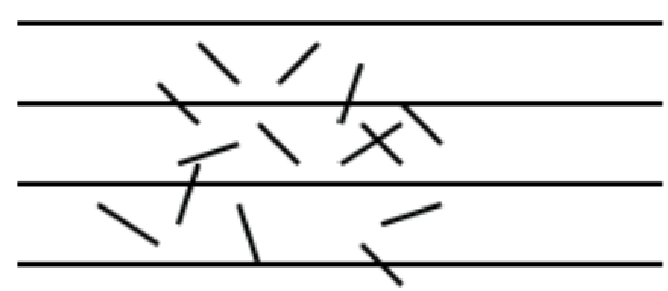
练习：

在三维空间中，由三个圆柱面$x^2+y^2=1, x^2+z^2=1, y^2+z^2=1$ 围成一个立体，利用蒙特卡罗法求它的体积。（试与理论值进行比较？）

实验5.3 蒲丰投针实验

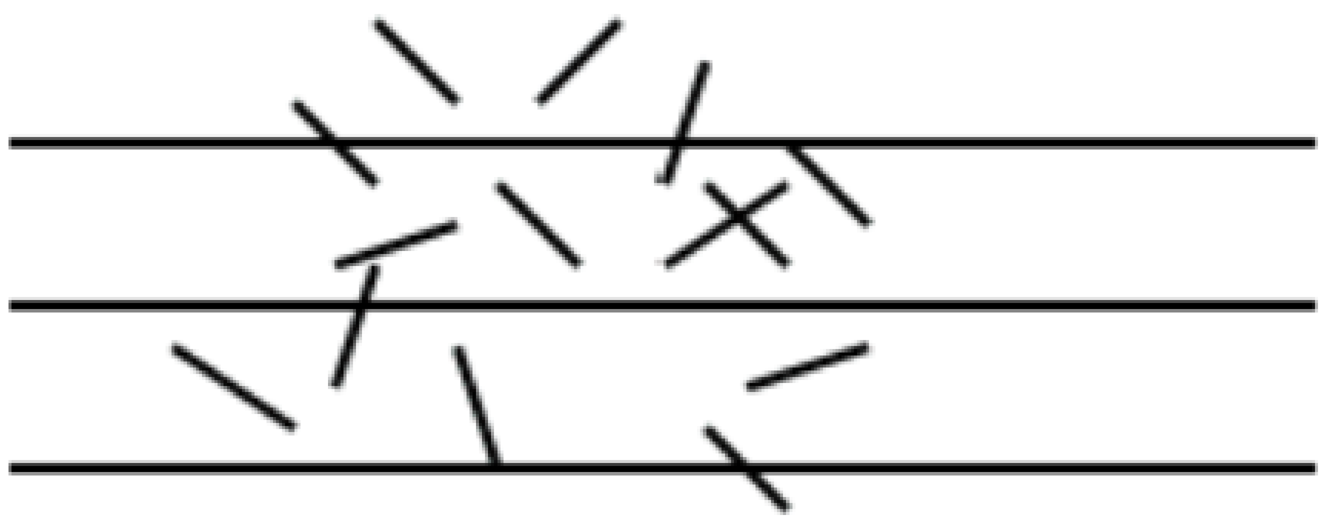
Buffon's Needle Problem

- **1777**年法国数学家蒲丰**(Buffon)**，在晚年的时候，他又一次举行了一个家庭宴会，邀请了一大推他的朋友来他家，干啥呢？**---**“做实验”！
- 一共投了**n=2212**次，与平行线相交的有多少呢？ 数了一下共**m=704**次。
- 然后他说：“我现在就可以计算圆周率了”



实验5.3 蒲丰投针实验

- 取一张白纸，在上面画许多间距为d的等距平行线；
- 取一根长度为$l(l<d)$的均匀直针，随机地向画有平行线的纸上投去；
- 试分析针和直线相交的概率



实验5.3 蒲丰投针实验

- 由于投针是随机的，所以用二维随机变量（X,Y）来确定它在桌上的具体位置。设X表示针的中点到平行线的距离，Y表示针与平行线的夹角，满足：

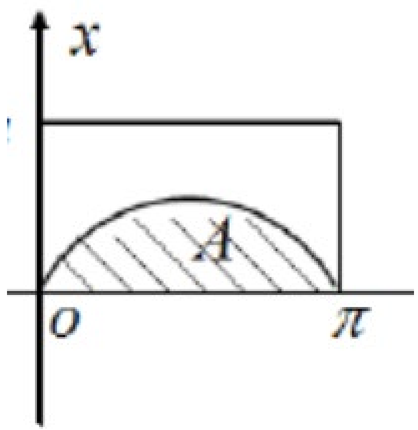
$$0 \le X \le \frac{d}{2}, \quad 0 \le Y \le \pi$$

- 如果

$$X \le \frac{l}{2}\sin Y$$

则针和直线相交。

$$p = \frac{2l}{\pi d}$$



实验5.3 蒲丰投针实验

一种用蒙特卡罗法来计算π的方法是1777年法国数学家蒲丰(Buffon)提出的随机掷针实验.其步骤如下：

(1)取一张白纸，在上面画许多间距为d的等距平行线；

(2)取一根长度为l(l<d)的均匀直针，随机地向画有平行线的纸上掷去，一共投掷n次(n是一个很大的整数).观察针和直线相交的次数m；

(3)由分析知道针和直线相交的概率p=2/πd.取m/n为p的近似值，则$\pi \approx 2l/md$.

特别取针的长度l=d/2时，$\pi \approx n/m$

实验5.3 蒲丰投针实验

下面是利用这个公式，用概率的方法得到圆周率的近似值的一些资料。

试验者	时间	投掷次数	相交次数	圆周率估计值
Wolf	1850年	5000	2532	3.1596
Smith	1855年	3204	1218.5	3.1554
C.De Morgan	1860年	600	382.5	3.137
Fox	1884年	1030	489	3.1595
Lazzerini	1901年	3408	1808	3.1415929
Reina	1925年	2520	859	3.1795

公元1901年，意大利数学家拉兹瑞尼宣称进行了多次的投针试验，每次投针数为3408次，平均相交数为1808次，给出π的值为3.1415929——准确到小数后6位。

实验5.3 蒲丰投针实验

真正去做大量掷针的实验是很费时间的.请尝试设计一个方案，用计算机模拟蒲丰掷针实验，得出π的近似值.

随机模拟实验设计：设定针的长度$\boldsymbol{l}$与平行线间的距离$\boldsymbol{d}$，产生随机数$(x_i,\alpha_i)(i=1,2,\cdots,m)$,其中$\boldsymbol{0 \le x_i \le \frac{d}{2}, 0 \le \alpha_i \le \pi}$，在每次实验中若$\boldsymbol{x_i \le \frac{l}{2}\sin\alpha_i}$，记为实验成功，统计实验成功次数k与实验总次数m，则$\boldsymbol{\pi \approx \frac{2lm}{kd}}$。

讲解MATLAB程序Exp5_3.m

演示动画程序

实验5.4 随机整数互素实验

随机整数互素的概率：
取一个大的整数*N*.在1到*N*之间随机地取一对整数a,b，找出它们的最大公约数(a,b).当(a,b)=1时称a,b互素.做n次这样的实验，记录其中(a,b)=1的情况出现的次数m.算出p=m/n的值.

实验5.4 随机整数互素实验

随机整数互素的概率：
取一个大的整数*N*.在1到*N*之间随机地取一对整数a,b，找出它们的最大公约数(a,b).当(a,b)=1时称a,b互素.做n次这样的实验，记录其中(a,b)=1的情况出现的次数m.算出p=m/n的值.

可证明：当N充分大时，随机整数互素的概率接近

$$p=\frac{1}{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots}=\frac{6}{\pi^2}$$

实验5.4 随机整数互素实验

随机整数互素的概率：
取一个大的整数*N*.在1到*N*之间随机地取一对整数a,b，找出它们的最大公约数(a,b).当(a,b)=1时称a,b互素.做n次这样的实验，记录其中(a,b)=1的情况出现的次数m.算出p=m/n的值.

思考：如何用MATLAB判断两个正整数是否互素?

编写MATLAB程序Exp5_4.m

实验5.4 随机整数互素实验

随机整数互素的概率：
取一个大的整数*N*.在1到*N*之间随机地取一对整数a,b，找出它们的最大公约数(a,b).当(a,b)=1时称a,b互素.做n次这样的实验，记录其中(a,b)=1的情况出现的次数m.算出p=m/n的值.

思考：如何证明当N充分大时，随机整数互素的概率接近

$$p=\frac{1}{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots}=\frac{6}{\pi^2}$$

10月25日实验课实验题

随机模拟实验
上交截止日期:
2023年10月25日23:00

实验课实验1：限定区域的随机投点实验

问题1（2分）：

- (0.5分)请在矩形区域$U=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant e,0\leqslant y\leqslant 1\}$中随机产生10000个点

的坐标，仅绘制落在区域D内的点。D为曲线$y=x/e$, $y=\ln x$, $y=0$所围区域。

- （0.5分）通过实验，统计点落在D中的个数，从而计算点落在区域D中的频率P。

- (1分)探索如何利用本实验估算区域D的面积、并将实验估算结果和理论推导的结果进行比较。

实验课实验2

问题2（4分）：小明通过理论分析作出以下猜想：

猜想　在单位圆内以**均匀分布**随机（独立地）生成3个点，这3个点所形成的三角形的面积的期望值为：

$$S = \frac{35}{48\pi}$$

- 试通过随机模拟实验（蒙特卡洛方法）检验小明的猜想是否合理？1.5分
- 能否由此猜想设计一种计算 π 的随机模拟方法、用动画展示实验过程？（2分）
- 请尝试证明上述猜想，可查阅资料，但需注明参考文献来源（0.5分）