一、（20分）单项选择题：

(1) 若 $f'(1)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1+x)}{x}=$

(A) 2.　　(B) -2.

(C) 4.　　(D) -4.

(2) 若函数$f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+c$，这里 $c>0$，则方程 $f(x)=0$ 的实根的数目是

(A) 3.　　(B) 2.

(C) 1.　　(D) 0.

(3) 曲线 $e^{x-y}+x(x+2y)=x+\sin x+1$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程是

(A) $x+y=0$.　　(B) $x-y=0$.

(C) $x+2y=0$.　　(D) $x-2y=0$.

(4) 若反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\tan^{-1}x}{x^{k+\frac{1}{2}}\left(1+x^{k-\frac{1}{2}}\right)}\,dx$ 收敛，则常数 k 必满足

(A) $\frac{1}{2}<k<\frac{3}{2}$.　　(B) $k>\frac{1}{2}$.

(C) $k<\frac{1}{2}$.　　(D) $1<k<\frac{3}{2}$.

(5) 函数 $f(x)$ 满足 $xf''(x)+3x\left(f'(x)\right)^2=e^{-x}-1$，$\forall x\in(-\infty,\infty)$，且有 $f'(x_0)=0\,(x_0\neq 0)$. 下列叙述中哪一个一定是正确的？

(A) f 在 x_0 处取到局部极大值.

(B) f 在 x_0 处取到局部极小值.

(C) $(x_0,f(x_0))$ 是一个拐点.

(D) 上述的 (A), (B) 和 (C) 都不对.

二、（20分）填空题：

(1) 设区域 D 是由如下曲线和直线

$$y=x^2,\quad y=0,\quad x=2,$$

所围成的区域. 则把区域 D 绕x-轴旋转所得到的旋转体的体积为 ______.

(2) 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to+\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3tx}$，则 $f'(1)=$ ______.

(3) 若一条通过原点的直线与曲线 $y=a^x\,(a\neq 1)$ 相切，则该直线的斜率是 ______.

(4) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$ ______.

(5) 若 $f(x)=\displaystyle\int_{\pi/2}^{x}e^{\sin t}\,dt$. 则 $\left(f^{-1}\right)'(0)=$ ______.

三、（8分）求第一象限内由曲线 $y=\sqrt{x}$、x 轴及直线 $y=x-2$ 所围成的平面区域的面积.

四、（10分）考虑函数

$$y=\frac{x^2+4}{2x}.$$

(1) 求f在哪些点取局部极值，并求函数的局部极值.

(2) 求f上凹和下凹的开区间.

(3) 画出 $f(x)$的简略图.

五、 （8分）求解一阶线性常微分方程

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3, \qquad y(0) = -6.$$

六、 （10分）求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$.

七、 （16分）计算积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \, dx$.

(3) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2x + 5}{(x^2+1)(x-1)^2} \, dx$.

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|x|}{1 + \sin x} \, dx$.

八、 （8分）若函数 f 在 $(-\infty, \infty)$ 上连续, 且满足

$$f(x) \left(\int_0^x f(t) \, dt + 1 \right) = \tan^{-1} x.$$

求 $f(x)$.