数学分析II(H) (MA122)期末考试题(2024.06.14)

(要求：所有题目均要给出详细计算步骤或论证依据)

一.(10分) 设函数$y = y(x)$和$z = z(x)$由以下方程组确定：

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz, \\ x + y + z = a. \end{cases}$$

$y' = \frac{z-x}{y-z}$ $z' = \frac{x-y}{y-z}$

其中a为常数. 求$\frac{dy}{dx}$和$\frac{dz}{dx}$.

二.(15分)计算积分

$$\iiint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(2+x+y)^2},$$

$5\ln\frac{3}{2}-2$

$\cancel{\frac{\pi a^4}{6}\left(1-\frac{\sqrt{27}}{8}\right)}$

其中$D = \{(x, y, z); x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$.

三.(15分)

(1). 将如下累次积分换成其它不同次序的累次积分，其中$f(x, y)$为连续函数:

$$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{2-x}^{\sqrt{2x-1}} f(x, y)\mathrm{d}y.$$

$\int_0^1 dy \int_{2-y}^2 f\,dy + \int_1^{\sqrt{3}} dy \int_{\frac{y^2+1}{2}}^2 f\,dx$

(2). 将如下依z, y, x次序的累次积分换成依x, y, z次序的累次积分，其中$f(x, y, z)$为连续函数:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{x+y} f(x, y, z)\mathrm{d}z.$$

$\int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_0^{1-y} f\,dx$

四.(15分) 计算

$$\int_\Gamma x^2 \ln y\mathrm{d}x + \frac{x^3}{3y}\mathrm{d}y,$$

$+\int_0^1 dz \int_0^z dy \int_{z-y}^{1-y} f\,dx$

其中Γ为曲线$\sqrt{x^3} + \sqrt{y^3} = 9$从$(1, 4)$到$(4, 1)$的一段。

五.(15分)设实数x, y, z满足条件$x + y + z = 12$, $x^2 + y^2 + z^2 = 56$. 用Lagrange乘数法，求函数$f(x, y, z) = x + 3y + 5z$在前述条件下的最大值。

六.(10分) 设$P,Q,R\in C^1(\mathbf{R}^3)$，$f\in C(\mathbf{R}^3)$，且$\Omega$为$\mathbf{R}^3$中由正则封闭曲面$\partial\Omega$围成的区域，满足条件

$$\iint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

其中$\partial\Omega$的定向为区域Ω的外侧。试证明:存在点$(x_0,y_0,z_0)\in\overline{\Omega}$，使得

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)(x_0,y_0,z_0) = f(x_0,y_0,z_0) - M(f),$$

其中$M(f)$为函数f于Ω上的积分平均值

$$M(f) = \frac{1}{V(\Omega)}\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$V(\Omega)$是Ω的体积。

七.(10分) 设$\mathbf{f}$是$\mathbf{R}^n$到其自身的可微映射，满足条件:

$$<\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{y}),\mathbf{x}-\mathbf{y}>\geq \alpha\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2,\quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n,$$

其中$<\cdot,\cdot>$为$\mathbf{R}^n$中内积，$\alpha>0$为实数。试证明:

(1). $\det\mathbf{Jf}(\mathbf{x})\neq 0$, $\forall\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$,其中$\mathbf{Jf}(\mathbf{x})$为映射$\mathbf{f}$于$\mathbf{x}$处的Jacobi矩阵;

(2). $\mathbf{f}(\mathbf{R}^n)=\mathbf{R}^n$.

八.(10分) 设$f(x,y)$于闭区域$D=\{(x,y),x^2+y^2\leq 1\}$上连续，于$D$内部有连续偏导数。当$(x,y)\in\partial D$时，$f(x,y)=0$.试证明:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\iint_{\epsilon^2\leq x^2+y^2\leq 1}\frac{1}{x^2+y^2}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\pi f(0,0).$$