南方科技大学
SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

考试科目：高等数学(下)　　开课单位：数学系

考试时长：120 分钟　　命题教师：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
分值	20 分	20 分	10 分	10 分	10 分	10 分	10 分	10 分

本试卷共 8 道大题, 满分 100 分. (考试结束后请将试卷、答题本、草稿纸一起交给监考老师)

注意：本试卷里的中文为直译（即完全按英文字面意思直接翻译），所有数学词汇的定义请参照教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义。如果其中有些数学词汇的定义不同于中文书籍（比方说同济大学的高等数学教材）里的定义，以教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义为准。

1. (20pts) **Multiple Choice Questions:** (only one correct answer for each of the following questions.)

(1) The distance from the point $(1,1,1)$ to the plane $x+2y+2z=1$ is

(A) $\frac{4}{3}$.　　(B) 1.

(C) $\frac{2}{3}$.　　(D) 2.

(2) Identify the surface defined by $x^2+y^2-z^2=1$.

(A) Hyperboloid of two sheets.　　(B) Elliptical Cone.

(C) Hyperboloid of one sheet.　　(D) Elliptical paraboloid.

(3) A plane is through the point $(1,0,-1)$, and parallel to the vectors $\langle 2,1,1\rangle$ and $\langle 1,-1,0\rangle$. The equation of the plane is

(A) $x-y-3z=4$.　　(B) $x+y-3z=4$.

(C) $x+y+3z=-2$.　　(D) $x-y+3z=-2$.

(4) Consider the series $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin^p n}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ $(p>0)$. which of the following statements must be **true**?

(A) It converges absolutely.　　(B) It converges conditionally.

(C) It diverges.　　(D) Its convergence depends on p.

(5) If $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ converges, consider the following series

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(u_n)^2}{n}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(u_n\times u_{n+1})^2,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n}),\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(u_n+2u_{n+1}).$$

扫描全能王 创建

How many series must converge among the above 4 series?

(A) 1. (B) 2.

(C) 3. (D) 4.

2. (20 pts) Fill in the blanks.

(1) The helix $\mathbf{r}_1(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ intersects the curve $\mathbf{r}_2(t) = (1+t)\,\mathbf{i} + 8t^2\,\mathbf{j} + 7t^3\,\mathbf{k}$ at the point $(1,0,0)$, the angle of intersection is _____.

(2) The distance from the point $(3,2,1)$ to the line $x = 1+t$, $y = 2+2t$, $z = 3-2t$ is _____.

(3) If $x = t^3 + 4t$, $y = t^2 - 3t$, then $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} =$ _____.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} =$ _____.

(5) If $f(x) = \frac{x^{10}}{1+2x}$, then $f^{(15)}(0) =$ _____.

3. (10 pts) Find the coordinates of a point in the parameterized curve

$$\{x(t) = \sin t,\, y(t) = \cos^2 t,\, z(t) = \cos t\}, \quad 0 \le t \le \pi/2,$$

such that its tangent line is parallel to the plane $x + z = 0$.

4. (10 pts) Find an equation for the circle of curvature of the graph of $y = \cos x$ at $x = 0$.

5. (10 pts) Find the area of the surface generated by revolving the curve $r = 1 - \cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi$ about the x-axis.

6. (10 pts) Calculate the following limits. (L'Hopital's Rule is not allowed to be used.)

(1) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{e^{1/x} - 1} - x\right)$.

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - e^x + 2\ln(\cos x)}{x^3}$.

7. (10 pts) Does the following series converge absolutely, converge conditionally, or diverge? Give reasons for your answer.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n^2}$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n + \sin^2 n}$.

8. (10 pts) Find the interval of convergence for $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \frac{x^n}{n}$.

扫描全能王 创建

一、（20分）单项选择题：

(1) 从点 $(1,1,1)$ 到平面 $x+2y+2z=1$ 的距离是

(A) $\frac{4}{3}$.　　(B) 1.

(C) $\frac{2}{3}$.　　(D) 2.

(2) 曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 是一个

(A) 双叶双曲面.　　(B) 椭圆锥.

(C) 单叶双曲面.　　(D) 椭圆抛物面.

(3) 一平面过点 $(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\langle 2,1,1\rangle$ 和 $\langle 1,-1,0\rangle$，则该平面方程是

(A) $x-y-3z=4$.　　(B) $x+y-3z=4$.

(C) $x+y+3z=-2$.　　(D) $x-y+3z=-2$.

(4) 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin^p n}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ $(p>0)$. 下列叙述中哪一个一定是正确的?

(A) 该级数绝对收敛.　　(B) 该级数条件收敛.

(C) 该级数发散.　　(D) 该级数的敛散性依赖于 p 的值.

(5) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，考虑下列4个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(u_n)^2}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})^2,\quad \sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}u_{2n}),\quad \sum_{n=1}^{\infty}(u_n+2u_{n+1}).$$

在以上4个级数中总共有几个级数一定收敛?

(A) 1.　　(B) 2.

(C) 3.　　(D) 4.

二、（20分）填空题：

(1) 螺旋线 $\mathbf{r}_1(t)=\cos t\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}+t\,\mathbf{k}$ 与曲线 $\mathbf{r}_2(t)=(1+t)\,\mathbf{i}+8t^2\,\mathbf{j}+7t^3\,\mathbf{k}$ 相交于点 $(1,0,0)$，则在交点处的夹角为 ____.

(2) 从点 $(3,2,1)$ 到直线 $x=1+t,\ y=2+2t,\ z=3-2t$ 的距离是 ____.

(3) 设 $x=t^3+4t,\ y=t^2-3t$, 则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$ ____.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=$ ____

(5) 设 $f(x)=\frac{x^{10}}{1+2x}$, 则 $f^{(15)}(0)=$ ____.

三、（10分）求参数曲线

$$\{x(t)=\sin t,\ y(t)=\cos^2 t,\ z(t)=\cos t\},\quad 0\le t\le \pi/2,$$

上的一个点的坐标，使得在此点的切线与平面 $x+z=0$ 平行.

四、（10分）求 $y=\cos x$ 的函数图像在 $x=0$ 处的曲率圆的方程.

扫描全能王 创建

五、（10分）把曲线 $r=1-\cos\theta, 0\le\theta\le\pi$ 绕 x 轴旋转得到一个旋转面 S，求此旋转面 S 的面积.

六、（10分）计算下列极限(不允许使用洛必达法则).

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{e^{1/x}-1}-x\right)$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2+x}-e^x+2\ln(\cos x)}{x^3}$.

七、（10分）下列级数是否绝对收敛、条件收敛或者发散？请说明理由.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n^2}$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+\sin^2 n}$.

八、（10分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+(-2)^n}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛域.

扫描全能王 创建