Convex Optimization-Convex Set

吴世广
山东大学-泰山学堂

更新：June 20, 2021

1 仿射集合

定义 1.1 (直线) 集合 $\{y|y = \theta x_1 + (1-\theta)x_2, \theta \in \mathcal{R}\}$ 为一条**直线**

其中 $x_1 \neq x_2$ 是 **R** 上的点，若 θ 在 0 到 1 之间变化，则形成（闭）线段。

另一种表示 $y = x_2 + \theta(x_1 - x2)$，具有一定的几何意义

定义 1.2 (仿射集合) $C \subseteq \mathcal{R}^n$ 若 C 中的任意两个点形成的直线在 C 中，则 C 是**仿射**的

定义即 $\forall x_1, x_2 \in C, \theta \in \mathcal{R}$ 都有 $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$

推论 仿射集合都可以表示成一个线性子空间加上一个元素的形式，即偏移

$$\mathcal{C} = \mathcal{V} + x_0$$

同时，我们定义 $\mathcal{C}$ 的维数为子空间 $\mathcal{V}$ 的维数

例 1.1 线性方程组的解集 $\{x|\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ 是仿射的, using the corollary1

定义 1.3 (仿射包) 集合 $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{R}^n$ 中所有点的仿射组合组成的集合为**仿射包** 记为 **aff** C，即包含 C 的最小的仿射集合

定义 1.4 (仿射维数) 对任意的集合 **C** 的仿射包的维数为它的**仿射维数**

例 1.2 $\mathbf{R}^2$ 上的单位圆的仿射维数是 2

定义 1.5 (相对内部) 任意集合 **C** 的**相对内部**是集合 **C** 相对 **aff C** 的内部 (可以考虑一个拓扑的子集 (这里是 **aff C**) 的 neighborhood 和开集的定义)，记为 **relint C**。**相对边界**可以定义为 **cl C** $\setminus$ **relint C**

cl C 表示闭包，即包含 C 的最小闭集；相反的，内部为 C 的最大开子集

s

例 1.3 $\mathbf{R}^3$ 中的一个平面正方形

$$C = \{x \in \mathbf{R}^3 | -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1, x_3 = 0\}$$

C 的内部为空，相对内部 **relint C** 是

$$\textbf{relint C} = \{x \in \mathbf{R}^3 | -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1, x_3 = 0\}$$

2 凸集

凸集的定义与仿射集合的定义很相似，只是将直线换位线段，即 $0 \leq \theta \leq 1$

凸包与仿射包定义类似，集合 C 的凸包记为 **conv C**

2.1 凸组合的扩展

以下 $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{R}^n$ 是凸集

- 无穷级数形式

$$\theta_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i = 1, \quad x_1, x_2, \cdots \in C$$

  则

$$\sum_{i=1}^{\infty} \theta_i x_i \in C$$

- 积分形式

$$p : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R},\ p(x) \geq 0, \quad \int_C p(x) dx = 1$$

  若下述积分存在，则

$$\int_C p(x) x dx \in C$$

- 概率分布形式

$$\mathbf{P}(x \in C) = 1$$

  则

$$\mathbf{E}\, x \in C$$

2.2 锥