Convex Optimization-Convex Set

吴世广
山东大学-泰山学堂

更新：June 22, 2021

1 仿射集合

定义 1.1 (直线) 集合 $\{y|y=\theta x_1+(1-\theta)x_2,\theta\in\mathcal{R}\}$ 为一条**直线**

其中 $x_1\neq x_2$ 是 $\mathbf{R}$ 上的点，若 θ 在 0 到 1 之间变化，则形成（闭）线段。

另一种表示 $y=x_2+\theta(x_1-x2)$，具有一定的几何意义

定义 1.2 (仿射集合) $C\subseteq\mathcal{R}^n$ 若 C 中的任意两个点形成的直线在 C 中，则 C 是**仿射**的

定义即 $\forall x_1,x_2\in C,\theta\in\mathcal{R}$ 都有 $\theta x_1+(1-\theta)x_2\in C$

推论 仿射集合都可以表示成一个线性子空间加上一个元素的形式，即偏移

$$\mathcal{C}=\mathcal{V}+x_0$$

同时，我们定义 $\mathcal{C}$ 的维数为子空间 $\mathcal{V}$ 的维数

例 1.1 线性方程组的解集 $\{x|\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}\}$ 是仿射的, using the corollary1

定义 1.3 (仿射包) 集合 $\mathbf{C}\subseteq\mathbf{R}^n$ 中所有点的仿射组合组成的集合为**仿射包** 记为 **aff** C，即包含 C 的最小的仿射集合

定义 1.4 (仿射维数) 对任意的集合 **C** 的仿射包的维数为它的**仿射维数**

例 1.2 $\mathbf{R}^2$ 上的单位圆的仿射维数是 2

定义 1.5 (相对内部) 任意集合 **C** 的**相对内部**是集合 **C** 相对 **aff C** 的内部 (可以考虑一个拓扑的子集 (这里是 **aff C**) 的 neighborhood 和开集的定义)，记为 **relint C**。**相对边界**可以定义为 **cl C** $\setminus$ **relint C**

cl C 表示闭包，即包含 C 的最小闭集；相反的，内部为 C 的最大开子集

s

例 1.3 $\mathbf{R}^3$ 中的一个平面正方形

$$C=\{x\in\mathbf{R}^3|-1\le x_1\le 1,-1\le x_2\le 1,x_3=0\}$$

C 的内部为空，相对内部 **relint C** 是

$$\textbf{relint C}=\{x\in\mathbf{R}^3|-1\le x_1\le 1,-1\le x_2\le 1,x_3=0\}$$

2 凸集

凸集的定义与仿射集合的定义很相似，只是将直线换位线段，即 $0\le\theta\le 1$

凸包与仿射包定义类似，集合 C 的凸包记为 **conv C**

2.1 凸组合的扩展

以下 $\mathbf{C}\subseteq\mathbf{R}^n$ 是凸集

- 无穷级数形式

$$\theta_i\ge 0,\quad \sum_{i=1}^{\infty}\theta_i=1,\quad x_1,x_2,\cdots\in C$$

则

$$\sum_{i=1}^{\infty}\theta_i x_i\in C$$

- 积分形式

$$p:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R},\ p(x)\ge 0,\quad \int_C p(x)dx=1$$

若下述积分存在，则

$$\int_C p(x)xdx\in C$$

- 概率分布形式

$$\mathbf{P}(x\in C)=1$$

则

$$\mathbf{E}x\in C$$

2.2 锥

定义 2.1 (锥) 对 $\forall x\in C,\theta\ge 0$，都有 $\theta x\in C$，则称集合 C 为**锥**。

若是凸的，则称**凸锥**，即 $\forall x_1,x_2\in C,\quad \theta_1,\theta_2\ge 0$，都有 $\theta_1x_1+\theta_2x_2\in C$。

2.3 超平面与半空间

定义 2.2 (超平面) 集合 $\left\{x|a^Tx=b\right\}$

几何上，可以看作是法线方向为 **a** 的超平面，常数 **b** 决定了偏移.

超平面可以表达成 $\left\{x|a^T(x-x_0)=0\right\}=x_0+a^{\perp}$

定义 2.3 (半空间) 集合 $\left\{x|a^Tx\le b\right\}$, 其中 $a\ne 0$

类似, 半空间可以表达成 $\left\{x|a^T(x-x_0)\le 0\right\}$, $x-x_0$ 与 a 夹角为钝角.

2.4 Euclid 球和椭球

定义 2.4 (Euclid 球) $\mathbf{R}^n$ 空间内的球具有形式 $B(x_c,r)=\{x|\|x-x_c\|_2\le r\}$

Euclid 球可以表达成 $B(x_c,r)=\{x_c+ru|\ \|u\|_2\le 1\}$

定义 2.5 (椭球) 具有形式 $\mathcal{E}=\left\{x|(x-x_c)^TP^{-1}(x-x_c)\le 1\right\}$, 其中 P 是对称正定的.

P 决定了椭球向各个方向扩展的幅度. 具体的, $\mathcal{E}$ 的半轴长为 λ_i

椭球可以表达为 $\mathcal{E}=\{x_c+Au|\ \|u\|_2\le 1\}$, 其中 A 是非奇异的, 不失一般性的假设 A 是对称正定的. $A=P^{1/2}$

2.5 范数球和范数锥

$\|\cdot\|$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的范数.

定义 2.6 (范数球) $\|x-x_c\|\le r$

定义 2.7 (范数锥) $C=\{(x,t)|\ \|x\|\le t\}\subseteq\mathbf{R}^n$

由 Euclid 范数定义的范数锥称为**二阶锥**, 即

$$\begin{aligned}C&=\{(x,t)\in\mathbf{R}^n|\ \|\ x\ \|_2\le t\}\\&=\left\{\begin{bmatrix}x\\t\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}x\\t\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}I&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\t\end{bmatrix}\le 0,\ t\ge 0\right\}\end{aligned}$$