Convex Optimization-Convex Set

吴世广
山东大学-泰山学堂

更新：July 13, 2021

1　仿射集合

定义 1.1 (直线) 集合 $\{y|y = \theta x_1 + (1-\theta)x_2, \theta \in \mathcal{R}\}$ 为一条**直线**

其中 $x_1 \neq x_2$ 是 $\mathbf{R}$ 上的点，若 θ 在 0 到 1 之间变化，则形成（闭）线段。

另一种表示 $y = x_2 + \theta(x_1 - x2)$，具有一定的几何意义

定义 1.2 (仿射集合) $C \subseteq \mathcal{R}^n$ 若 C 中的任意两个点形成的直线在 C 中，则 C 是**仿射**的

定义即 $\forall x_1, x_2 \in C, \theta \in \mathcal{R}$ 都有 $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$

推论 仿射集合都可以表示成一个线性子空间加上一个元素的形式，即偏移

$$\mathcal{C} = \mathcal{V} + x_0$$

同时，我们定义 $\mathcal{C}$ 的维数为子空间 $\mathcal{V}$ 的维数

例 1.1 线性方程组的解集 $\{x|\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ 是仿射的, using the corollary1

定义 1.3 (仿射包) 集合 $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{R}^n$ 中所有点的仿射组合组成的集合为**仿射包** 记为 **aff** C，即包含 C 的最小的仿射集合

定义 1.4 (仿射维数) 对任意的集合 **C** 的仿射包的维数为它的**仿射维数**

例 1.2 $\mathbf{R}^2$ 上的单位圆的仿射维数是 2

定义 1.5 (相对内部) 任意集合 **C** 的**相对内部**是集合 **C** 相对 **aff C** 的内部 (可以考虑一个拓扑的子集 (这里是 **aff C**) 的 neighborhood 和开集的定义)，记为 **relint C**。**相对边界**可以定义为 **cl C** $\setminus$ **relint C**

cl C 表示闭包，即包含 C 的最小闭集；相反的，内部为 C 的最大开子集

s

例 1.3 $\mathbf{R}^3$ 中的一个平面正方形

$$C = \{x \in \mathbf{R}^3 | -1 \le x_1 \le 1, -1 \le x_2 \le 1, x_3 = 0\}$$

C 的内部为空，相对内部 **relint C** 是

$$\textbf{relint C} = \{x \in \mathbf{R}^3 | -1 \le x_1 \le 1, -1 \le x_2 \le 1, x_3 = 0\}$$

2 凸集

凸集的定义与仿射集合的定义很相似，只是将直线换位线段，即 $0 \le \theta \le 1$

凸包与仿射包定义类似，集合 C 的凸包记为 **conv C**

2.1 凸组合的扩展

以下 $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{R}^n$ 是凸集

- 无穷级数形式

$$\theta_i \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i = 1, \quad x_1, x_2, \dots \in C$$

  则

$$\sum_{i=1}^{\infty} \theta_i x_i \in C$$

- 积分形式

$$p : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R},\ p(x) \ge 0, \quad \int_C p(x) dx = 1$$

  若下述积分存在，则

$$\int_C p(x) x dx \in C$$

- 概率分布形式

$$\mathbf{P}(x \in C) = 1$$

  则

$$\mathbf{E}\, x \in C$$

2.2 锥

定义 2.1 (锥) 对 $\forall x \in C, \theta \ge 0$，都有 $\theta x \in C$，则称集合 C 为**锥**。

若是凸的，则称**凸锥**，即 $\forall x_1, x_2 \in C, \quad \theta_1, \theta_2 \ge 0$，都有 $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C$。

2.3 超平面与半空间

定义 2.2 (超平面) 集合 $\{x|a^Tx = b\}$

几何上，可以看作是法线方向为 **a** 的超平面，常数 **b** 决定了偏移.

超平面可以表达成 $\{x|a^T(x - x_0) = 0\} = x_0 + a^\perp$

定义 2.3 (半空间) 集合 $\{x|a^Tx \leq b\}$, 其中 $a \neq 0$

类似, 半空间可以表达成 $\{x|a^T(x - x_0) \leq 0\}$, $x - x_0$ 与 a 夹角为钝角.

另：对于向量，$\forall\ z \neq 0$，z^TXz 是关于 X （不恒为零）的线性函数，因此 $\{X|z^TXz \geq b\}$ 是半空间。

2.4 Euclid 球和椭球

定义 2.4 (Euclid 球) $\mathbf{R}^n$ 空间内的球具有形式 $B(x_c, r) = \{x| \|x - x_c\|_2 \leq r\}$

Euclid 球可以表达成 $B(x_c, r) = \{x_c + ru|\ \|u\|_2 \leq 1\}$

定义 2.5 (椭球) 具有形式 $\mathcal{E} = \{x|(x - x_c)^TP^{-1}(x - x_c) \leq 1\}$, 其中 P 是对称正定的.

P 决定了椭球向各个方向扩展的幅度. 具体的, $\mathcal{E}$ 的半轴长为 λ_i

椭球可以表达为 $\mathcal{E} = \{x_c + Au|\ \|u\|_2 \leq 1\}$, 其中 A 是非奇异的, 不失一般性的假设 A 是对称正定的. $A = P^{1/2}$

2.5 范数球和范数锥

$\|\cdot\|$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的范数.

定义 2.6 (范数球) $\|x - x_c\| \leq r$

定义 2.7 (范数锥) $C = \{(x, t)|\ \|x\| \leq t\} \subseteq \mathbf{R}^n$

由 Euclid 范数定义的范数锥称为**二阶锥**, 即

$$
\begin{aligned}
C &= \{(x, t) \in \mathbf{R}^n|\ \| x \|_2 \leq t\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \leq 0, t \geq 0 \right\}
\end{aligned}
$$

2.6 多面体

定义 2.8 (多面体) $\mathcal{P} = \{x|Ax \preceq b,\ Cx = d\}$

一类重要多面体

定义 2.9 (单纯形) 由 $k+1$ 个仿射独立的点形成的闭包

$$C = \textbf{conv}\left\{v_0, \ldots, v_k\right\} = \left\{\theta_0 v_0 + \cdots + \theta_k v_k | \theta \succeq 0,\ \mathbf{1}^T \theta = 1\right\}$$

单纯形和多面体的定义形式上有很大区别，但实质上可以相互转化。另：这种用闭包形式表达多面体的方式可以推广到任意多面体。

定义 2.10 (半正定锥) S^n 表示对称 n 阶方阵的集合，S_+^n 表示对称半正定矩阵集合，S_{++}^n 表示正定。

易知 S_+^n 是一个凸锥，因而称半正定锥。

半正定锥中的元素不再是欧氏空间中的点

3 保凸运算

我认为比较重要的一节，通过各种运算可以判断或者构造出凸集，乃至后面的凸函数。

- **任意**交运算如：半正定锥；闭的凸集都是半空间的交集
- 仿射函数，即线性函数加一个常数。它和它的逆都是保凸的