

Titanic Espacial

Exploración del Lanzamiento de Satélites Terrestres

Practica 1

Modelado y simulación

Josué Francisco Soto Cortez

Samuel Salas Meza

Tomás Tavera Mejía

ENES Unidad Morelia, UNAM

Introducción

Un poco de historia:

El 4 de octubre de 1957 se lanzó exitosamente el primer satélite artificial de la historia, el Sputnik I, primero de varios satélites lanzados por la Unión Soviética en su programa Sputnik. Fue lanzado desde Kazajistán, antes parte de la URSS. Su nombre, en ruso, significa “compañero de viaje”.

Este satélite fue el primero en orbitar a Tierra a una distancia de 938 kilómetros y surgió de la carrera espacial que tenían entre Estados Unidos y la Unión Soviética durante la Guerra Fría. La tecnología espacial se convirtió en una arena particularmente importante en este conflicto, tanto por sus potenciales aplicaciones militares como por sus efectos psicológicos sobre la moral de la población.

Este logro de la humanidad lo predijo una propuesta de Isaac Newton que después de la publicación de su teoría sobre la ley de la gravitación Universal en 1687, propone visualizar un proyectil disparado desde una montaña muy alta, con dirección paralela a la superficie de la Tierra, con poca pólvora este caería y conforme se aumenta la pólvora caería más lejos hasta pegarle al cañón después de dar la vuelta a la Tierra, y si se sigue aumentando la pólvora, el proyectil alcanza una velocidad que haría que este termine alejándose de la Tierra.

Descripción general:

Para esta práctica decidimos hacer una simulación de un cohete que despegue de la superficie de la Tierra de tal manera que la orbite. A continuación presentamos el contexto sobre el cual se realiza esa simulación:

Reconocemos aquí sólo dos cuerpos relevantes: la Tierra y el cohete. Cada objeto tiene una masa, una posición y una velocidad.

Limitaciones

- De la Tierra ignoramos su atmósfera y establecemos su masa $6e24\text{kg}$ ([véase la referencia](#)) en el origen con un vector de velocidad $[0,0,0]$.
- Del cohete, usamos la masa de un Ariane 5 lleno de combustible con peso de $75e4\text{kg}$ ([véase la referencia](#)) e ignoramos la pérdida de masa al hacer combustión.
- Las velocidades tomadas en cuenta variarán desde 7977m/s a 11000m/s y también cero.
- Los ángulos utilizados serán de cero a 60 grados respecto a la superficie de la tierra.

Su posición será sobre la superficie de la Tierra en el eje Y $[0\text{mts}, 6371e3\text{mts}, 0\text{mts}]$ y variamos su vector de velocidad inicial para obtener diferentes órbitas. Es

importante reconocer que aquí se obtiene una velocidad instantánea, no se parte desde el reposo con una aceleración.

Los dos cuerpos interactúan con cambios en sus vectores de velocidad a causa de la gravedad. Para hacer esa actualización se tomará una medición discreta cada dt tiempo con la ecuación:

$$V = \frac{GxMxdt}{r^3}x\hat{U}$$

Entonces cada dt tiempo, durante cierta cantidad de T tiempo hallaremos la distancia entre los puntos con la norma del vector dado por la diferencia entre las posiciones. Así obtenemos r . Después multiplicaremos cada componente (x,y,z) en U (la dirección del vector de cambio) por su vector de dirección de dirección de fuerza. Para terminar actualizaremos las velocidades que lleva cada objeto y las posiciones con el vector que obtuvimos.

Los resultados los presentamos en gráficas tridimensionales. Colocaremos una esfera azul denotando la Tierra y puntos verdes que marcan la trayectoria del cohete en los diagramas.

Objetivos

Nuestro objetivo es obtener una órbita de excentricidad 0 a la Tierra. La motivación de ese modelo es que presenta la menor variabilidad en cuanto a la distancia a nuestro planeta desde cualquier punto de la órbita. Es decir que del centro de la Tierra hay un radio. Así se puede tener una constancia en el tiempo que tardan en llegar señales y es probable que los cálculos para comunicarse con el satélite sean reducidos en un escenario hipotético.

Metodología

Para encontrar la trayectoria que queremos en el modelo que describimos todas las condiciones iniciales, excepto el vector de velocidad del cohete, están fijas. De este vector es relevante la magnitud y el ángulo de lanzamiento. Nuestra estrategia es tomar diferentes combinaciones de valores para obtener diferentes trayectorias y así aprender qué condiciones propician el modelo que estamos buscando. Afortunadamente existen algunos límites dados por la naturaleza del problema.

El primero es que la fuerza gravitatoria que ejerce un cuerpo sobre otro depende de la distancia que hay entre los cuerpos. Como la Tierra es esférica, la distancia del centro a cualquier punto de la superficie es constante. Por lo tanto no importa desde

qué punto de la superficie se lance el objeto. Entonces podemos seleccionar un punto y hacer todas las pruebas desde ahí. Elegimos el [0mts,6371e3mts,0mts].

La segunda es que existe una infinidad de vectores con un ángulo W entre el vector de velocidad y la superficie de la Tierra, con origen en la posición P que fijamos. Encontramos que las trayectorias que se producen son rotaciones de las otras; para nuestros fines son equivalentes. Entonces tomaremos sólo una. Esto limita el lanzamiento de velocidad inicial a dos ejes $[X,Y]$ y el ángulo desde cero hasta noventa.

La tercera es la velocidad de escape. Si se lanza un cohete verticalmente a 11200 m/s escapará de la Tierra. Entonces tenemos un límite superior de velocidad inicial.

La cuarta es el límite inferior de la velocidad. Una manera de frasear este problema es: qué tan rápido debería ir un objeto para quedarse en órbita al raz de la Tierra si se le aplica una fuerza perpendicular al vector de fuerza de gravedad. Su solución está dada probablemente por una ecuación diferencial. Nosotros decidimos hacer una aproximación y ajustarla con la simulación. Para explicarlo establecemos las siguientes ideas contextuales:

Gravedad con centro de gravedad

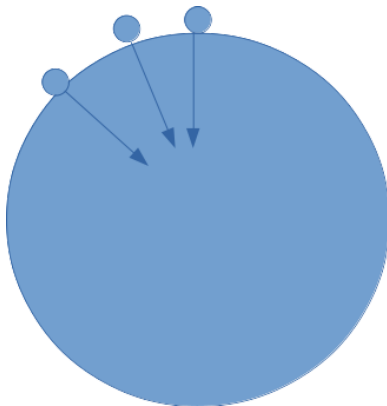


figura 1.1 "Representación de Gravedad con centro de gravedad"

Gravedad Vertical

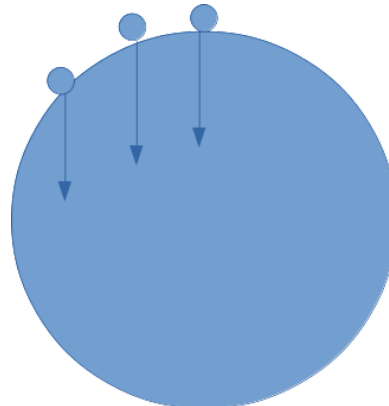


figura 2.2 "Representación de Gravedad en vertical"

Aunque claramente la gravedad vertical no refleja exactamente el comportamiento de los cuerpos de masa, en distancias relativamente cortas los vectores de gravedad son lo suficientemente parecidos para poder hacer la aproximación.

Sabemos que un objeto en un segundo se desplaza $D=at^2/2$. Entonces para $a=\text{gravedad}$ tenemos que: $D=(1s)^2*(9.807m/s^2)/2 \rightarrow 4.9035m/s$

¡Ahora podemos hacer una aproximación y comprobarla con el modelo!

Para calcularla hacemos este método:

1. Sabemos que la ecuación de un círculo es $(x-k)^2+(y-h)^2=r^2$
2. Entonces si colocamos el centro del círculo en las coordenadas [0mts,6371000mts], podemos encontrar el punto en X para una Y= 4.9035m/s
3. Así sólo tenemos que sustituir en la ecuación:

$$x^2+(4.9035\text{m/s}-6371000\text{m/s})^2=(6371000)^2\text{m/s}$$

Resulta ser que $x=7904.4527295142325 \text{ m/s} \rightarrow 7904.452 \text{ m/s}$ es nuestra velocidad mínima para hacer una órbita al raz de la Tierra.

Encontramos algo similar en el modelo:

Haciendo un barrido desde 7904 aumentando un m/s cada paso. El valor real debe de ser aproximadamente 7977 m/s a 0 grados porque ahí está la primera una misión exitosa.

Estas son las trayectorias que sigue el cohete vistas desde arriba y desde un lado (figuras 2.1 y 2.2).

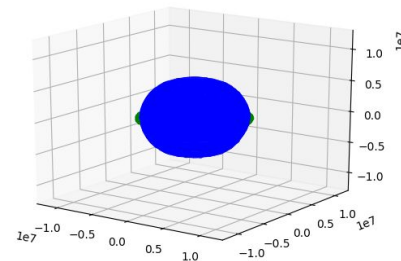
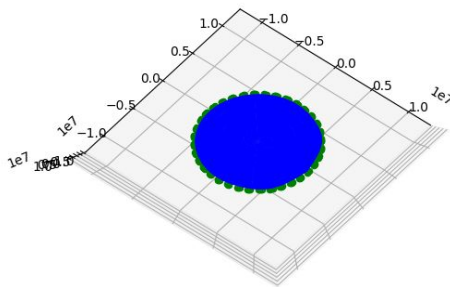


Figura 2.1 y 2.2 "Representación de trayectorias de órbita del cohete"

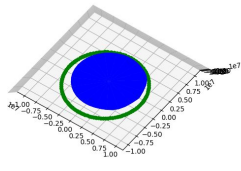
Finalmente, si una órbita choca contra la Tierra a X grados, chocará para Y grados siempre y cuando $X \leq Y \leq 90^\circ$.

¡Dentro de estos límites podemos iterar para encontrar nuestra órbita!

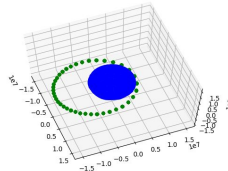
Elegimos tomar saltos de 500 m/s desde su límite inferior y con saltos de 3 grados desde 0° hasta 90° , ignorando los resultados una vez choque el cohete por primera vez.

Resultados

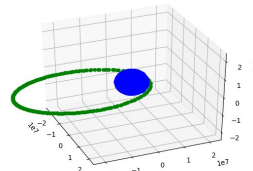
Con esta estrategia encontramos que la trayectoria que seguían los cohetes se elonga entre más aumenta la fuerza, pero no se acercan más a nuestra trayectoria deseada (figuras 3.1 a la 3.4).



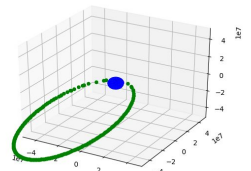
8477 m/s 0°



9477 m/s 0°

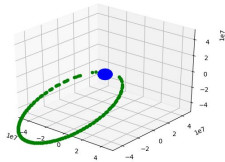


10477 m/s 0°

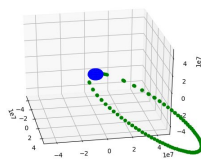


10977 m/s 0°

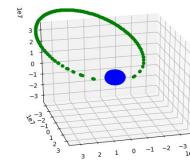
Figuras 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 "Representación de trayectorias con diferentes velocidades a 0° "



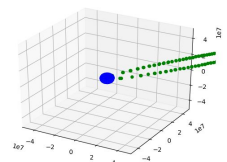
10977 m/s 9°



11000 m/s 51°



10977 m/s 0°



11000m/s 73°

Figuras 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 "Representación de trayectorias con diferentes velocidades y grados"

Aumentar el ángulo (figuras 3.5-3.8) no parece tener una incidencia en una trayectoria más circular. Las órbitas más lentas prueban ser inútiles con cualquier grado de inclinación (Tabla 1).

Angulo	Vel. Inicial (m/s)	Vel en X (m/s)	Vel en Y (m/s)	Resultado Exito/Choque
0°	7977	7977	0	Exito
3°	7977	7966.06	417.48	Choque
0°	8477	8477	0	Exito
3°	8477	8465.38	443.65	Choque
0°	8977	8977	0	Exito
3°	8977	8964.69	469.81	Choque
0°	9477	9477	0	Exito
3°	9477	9464.02	495.98	Choque
0°	9977	9977	0	Exito
3°	9977	9963.32	522.15	Choque
0°	10477	10477	0	Exito
3°	10477	10462.64	548.32	Choque
0°	10977	10977	0	Exito
3°	10977	10961.95	574.49	Exito
6°	10977	10916.86	1147.4	Exito
9°	10977	10841.85	1717.18	Exito
12°	10977	10737.12	2282.24	Choque

Tabla 1. Resultados del barrido de 7977 m/s a 10977m/s

Y la tabla 2 es un ejemplo de barrido a bajas velocidades:

Angulo	Vel. Inicial (m/s)	Vel en X (m/s)	Vel en Y (m/s)	Resultado Exito/Choque
0°	9000	9000	0	Exito
10°	9000	8863.26	1562.83	Choque
20°	9000	8457.23	3078.18	Choque
30°	9000	7794.22	4499.99	Choque
40°	9000	6894.39	5785.08	Choque
50°	9000	5785.08	6894.39	Choque
60°	9000	4500	7794.22	Choque
70°	9000	3078.18	8457.23	Choque
80°	9000	1562.83	8863.26	Choque

Tabla 2. Resultados del barrido de barrido a bajas velocidades

Cuando aumentamos la velocidad (tabla 3), obtenemos comportamiento extraño. Algunos ángulos chocan y otros no. Hecho que contradice nuestra lógica inicial:

Aumentamos la velocidad				
Angulo	Vel. Inicial (m/s)	Vel en X (m/s)	Vel en Y (m/s)	Resultado Exito/Choque
6°	11000	10939.74	1149.81	Exito
9°	11000	10864.57	1720.77	Choque
12°	11000	10759.62	2287.02	Choque
15°	11000	10625.18	2847	Choque
18°	11000	10461.62	3399.18	Exito
21°	11000	10269.38	3942.04	Choque
24°	11000	10049	4474.1	Exito
27°	11000	9801.07	4993.89	Exito
30°	11000	9526.27	5499.99	Choque
33°	11000	9225.37	5991.022	Choque
36°	11000	8899.18	6465.63	Exito
39°	11000	8548.6	6922.52	Choque
42°	11000	8174.59	7360.43	Choque
45°	11000	778.17	7778.17	Choque
48°	11000	7360.43	8174.59	Choque
51°	11000	6922.52	8548.6	Exito
54°	11000	6465.63	8899.18	Exito
57°	11000	5991.02	9225.37	Exito
60°	11000	5500	9526.27	Exito

Tabla 3 resultados de barrido a 11 mil metros por segundo con distintos angulos

Conclusiones

Las órbitas de un lanzamiento desde la Tierra parecen no poder generar un sistema como el que originalmente habíamos planteado. Nosotros atribuimos este comportamiento al hecho de que el cohete se lanza desde la Tierra con únicamente una perturbación externa, entonces la fuerza que adquiere durante el regreso es mitigada por la fuerza de mayor magnitud que se le aplica cuando está extremadamente cerca al centro de gravedad. Pensamos que es un comportamiento similar al de un péndulo, que no puede aumentar su altura máxima después de su primer ciclo a menos de que una fuerza, diferente de la gravedad, actúe sobre el. En este caso el cohete se encuentra en balance igual que un péndulo y de la misma manera, no puede orbitar como buscábamos porque no hay fuerza que lo empuje en esa dirección. Así el vector de inicio desplazado unos cuantos metros tiene comportamiento asintótico.

En cuanto a las trayectorias creemos que todas las que funcionaron y que no tenían ángulo 0 están erróneamente admitidas como misiones completadas. El comportamiento en la vida real es más técnico que lo que describimos aquí, pero para fines prácticos, imaginamos a la Tierra con un centro de gravedad puntual. Entonces, siguiendo la lógica del ejercicio anterior creemos que la trayectoria del cohete, si no se pierde energía **debería de pasar en la misma dirección y posición del vector inicial:**

Cohete 1

Centro de gravedad

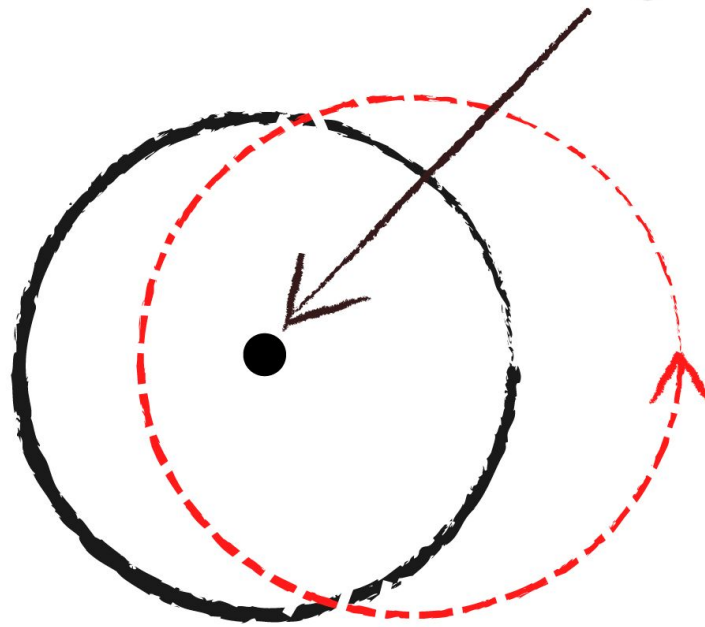


Figura 4.1 "Representación de trayectoria de órbita fuera de su centro de gravedad"

Cohete 2

Centro de gravedad

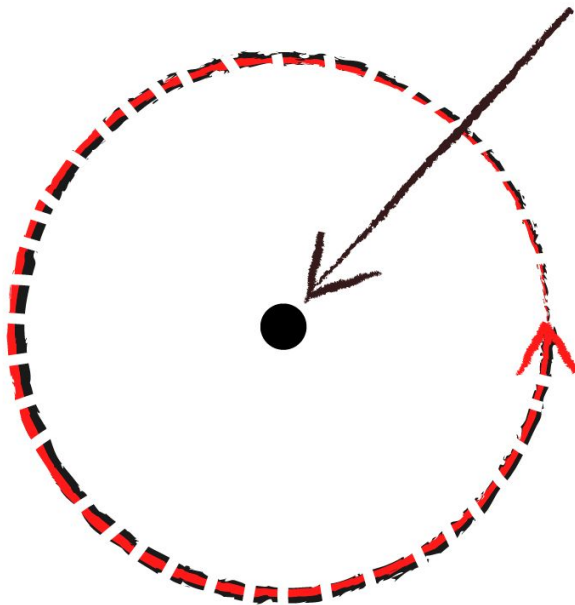


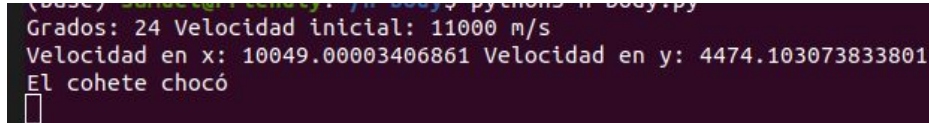
Figura 4.2 "Representación de trayectoria de órbita dentro de su centro de gravedad"

Entonces, ningún cohete con un ángulo debería de ser exitoso.

¡Pero el modelo las está aceptando! Eso puede estar pasando porque, para no saturar el plot, guardamos una medición cada mil pasos. Además hacemos el plot de una fracción de esos puntos. Entonces, como cuando está más cerca de la Tierra va más rápido, los puntos donde el cohete choca son más escasos. Por mero azar,

estos puntos quedan descartados de las muestras y no los encuentra el modelo al momento de evaluar si en la trayectoria hubieron choques. Es por eso que probablemente está aceptandolos el modelo y lo podemos poner a prueba tomando más puntos de la trayectoria:

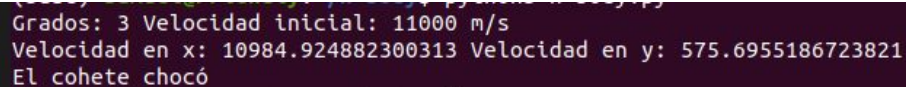
Para 11000 con 24 grados guardando todos los puntos por ejemplo (imagen 4.3):



```
(0050) [C:\Users\user\Documents\Python\11000\11000.py]
Grados: 24 Velocidad inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 10049.00003406861 Velocidad en y: 4474.103073833801
El cohete chocó
```

Imagen 4.3 "Para 11000 m/s con 24° el cohete choca"

Y ahora con un ángulo más tenue el cohete choca (fig 4.4).



```
(0050) [C:\Users\user\Documents\Python\11000\11000.py]
Grados: 3 Velocidad inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 10984.924882300313 Velocidad en y: 575.6955186723821
El cohete chocó
```

Imagen 4.4 "Para velocidad de 11000 m/s con 3° También choca"

Esta información soporta a nuestra conclusión. Investigando un poco, encontramos que el protocolo para poner en órbita a un satélite es primero propulsarlos verticalmente y una vez ganada la altura, darles velocidad horizontal para que tomen órbita. Aunque eso puede deberse a otras razones, puede ser explicado por nuestros resultados.

Para hacer los lanzamientos Espaciales se debe elegir los lugares más cercanos al ecuador ya que el sol genera una atracción gravitacional hacia sí, disminuyendo el peso de la carga a lanzar y por lo tanto la energía necesaria.

Por último con base a los resultados de las figuras 3, con esta práctica hemos redescubierto las leyes de Kepler:

La primera dice que los planetas se desplazan alrededor del sol describiendo órbitas elípticas, y el sol se encuentra en uno de los focos de la elipse, lo mismo ocurre con la Tierra que sería un foco de la elipse y un planeta sería el cohete aquí.

La Segunda ley dice "La recta que une el planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales", lo que también aplica ya que cuando está el cohete está más cerca de la tierra va más rápido que cuando está más lejos.

Otros experimentos extraños:

Aquí tiramos un objeto como proceso de rutina, así comprobamos que el modelo sea fiable y que tarda en caer 1 segundo desde 4.9035m de altura (Imagen 4.5).

```
Grados: 0 Velocidad inicial: 0 m/s
Velocidad en x: 0.0 Velocidad en y: 0.0
El cohete chocó en 1.0 segundos
```

Imagen 4.5 “El cohete se estrella partiendo de su estado en reposo desde 4.9 metros”

Todo es normal hasta ahora, pero si mostramos el resto de la simulación encontramos que la velocidad toma un comportamiento extraño (imagen 4.6):

[illegible]

Imagen 4.6, la velocidad no varía

Y como la velocidad queda constante en esa misma dirección, la partícula sale disparada (Imagen 4.7):

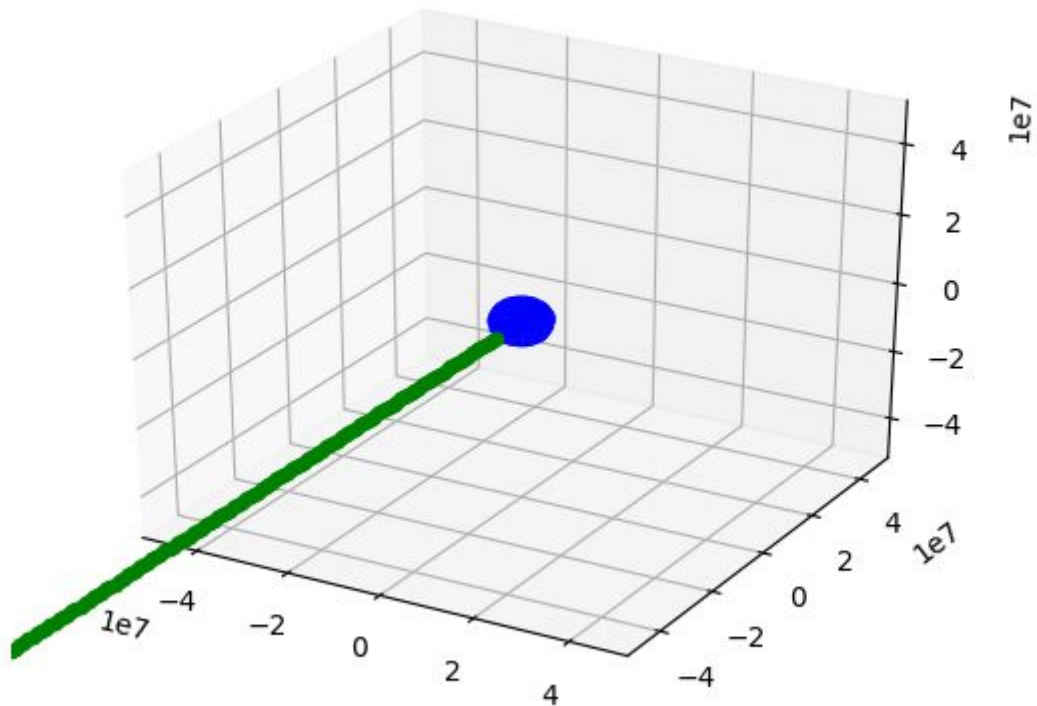


Imagen 4.7 Comportamiento Extraño

El resultado de este comportamiento queda inconcluso para esta práctica. Es comportamiento que atribuimos a algún error en la simulación.

Referencias:

Pagina de este proyecto:

Obreros-del-codigo. (2019, 10 octubre). Titanic_espacial. Recuperado 22 octubre, 2019, de https://github.com/obrerros-del-codigo/titanic_espacial

n-Body: Victor de la Luz. (2019, 11 octubre). Implementation of n-body system. Recuperado 20 octubre, 2019, de <https://github.com/itztli/n-body>

Cohete espacial. (2019, 13 junio). Recuperado 22 octubre, 2019, de https://es.wikipedia.org/wiki/Cohete_espacial

Satelites: Brown Gary, & Harris William. (s.f.). How Satellites Work. Recuperado 22 octubre, 2019, de <https://science.howstuffworks.com/satellite5.htm>

Historia del Sputnik: La Unión Soviética lanza el Sputnik I, el primer satélite artificial de la historia [Publicación en un blog]. (s.f.). Recuperado 8 noviembre, 2019, de <https://latam.historyplay.tv/hoy-en-la-historia/la-union-sovietica-lanza-el-sputnik-i-el-primer-satelite-artificial-de-la>

Masa de la tierra: Colaboradores de Wikipedia. (2019, 3 noviembre). Masa de la Tierra. Recuperado 11 octubre, 2019, de https://es.wikipedia.org/wiki/Masa_de_la_Tierra

Ariane 5: Marin, Daniel. (2014, 7 febrero). Lanzamiento de la misión VA217 del Ariane 5. Recuperado 9 octubre, 2019, de <https://danielmarin.naukas.com/2014/02/07/lanzamiento-de-la-mision-va217-del-ariane-5/>

Cañón de Newton: Shoot a cannonball into orbit! | NASA Space Place – NASA Science for Kids. (2013, 13 febrero). Recuperado 13 noviembre, 2019, de <https://spaceplace.nasa.gov/how-orbits-work/sp/>

Leyes de Kepler. (s.f.). Recuperado 11 octubre, 2019, de <https://www.fisicalab.com/apartado/leyes-kepler>