

Nume și prenume:
Grupa: 241

Nota: _____

Examen

2 Iunie 2020

Timpul de rezolvare al problemelor este de 2h30. Pentru transmiterea soluțiilor în format PDF¹ în folderul vostru de pe Dropbox aveți 30 de minute timp suplimentar. Astfel, pentru dumneavoastră examenul începe la **ora 16 și 49 minute** și se termină la **ora 19 și 49 minute**.



Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Fiecare subiect valorează 10 puncte. Mult succes !

Exercițiul 1

10p

Se consideră variabilele aleatoare independente X și Y având repartițiile:

$$X \sim \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 0.04 & 0.36 & 0.6 \end{pmatrix}; \quad Y \sim \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0.44 & 0.02 & 0.54 \end{pmatrix}$$

Să se determine repartițiile variabilelor aleatoare $X + Y$, $X - Y$, $3X^2 + Y^2$ și să se afle $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $Var(X)$, $Var(Y)$, $Var(2X - 4Y + 1)$, $Var(5XY + 3)$, $Cov(X, Y)$ și $\rho(X, Y)$ (coeficientul de corelație).

Exercițiul 2

10p

Un număr este ales uniform din intervalul $[0, 1]$. Determinați probabilitatea ca cea de-a doua zecimală a radicalului numărului ales să fie egală cu 3.

Exercițiul 3

10p

Fie densitatea comună a variabilelor aleatoare (X, Y) :

$$f(x, y) = x(|a|y + |b|)\mathbf{1}_{[0,1]^2}(x, y), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

- Determinați a și b știind că $4a + 10b = 0$.
- Calculați media și varianța lui X și Y .
- Determinați repartițiile variabilelor aleatoare $\mathbb{E}[Y|X]$ și $Var(Y|X)$.
- Verificați dacă are loc relația: $Var(Y) = \mathbb{E}[Var(Y|X)] + Var(\mathbb{E}[Y|X])$.

Exercițiul 4

10p

Să presupunem că numărul persoanelor infectate cu noul COVID-19 care sunt depistate în spitalele din București pe parcursul unei săptămâni poate fi modelat cu ajutorul unei variabile aleatoare repartizate $Pois(\lambda)$ (de exemplu $\lambda = 139$) și că fiecare persoană infectată poate ajunge la terapie intensivă cu probabilitatea p (de exemplu $p = 0.14$), independent de celelalte persoane infectate. Fie X variabila aleatoare care descrie diferența dintre numărul persoanelor care nu au nevoie de terapie intensivă și numărul celor care au nevoie de terapie intensivă.

- Determinați repartiția cuplului variabilelor aleatoare care determină numărul de persoane care au nevoie de terapie intensivă și respectiv care nu au nevoie de terapie intensivă.
- Arătați că aceste variabilele aleatoare sunt independente.
- Calculați $\mathbb{E}[X]$ și $Var[X]$.

Exercițiul 5

10p

O instanță de judecată formată din trei judecători găsește că o persoană este vinovată atunci când cel puțin doi dintre cei trei judecători consideră că această decizie este fondată. Admitem faptul că în cazul în care acuzatul este în adevăr vinovat, fiecare judecător se va pronunța în acest sens cu probabilitatea 0.77, independent de ceilalți doi. Această probabilitate scade la 0.13 în cazul în care acuzatul este nevinovat. Știm că 74% dintre acuzați sunt vinovați. Determinați care este probabilitatea ca cel de-al treilea judecător să voteze vinovat în fiecare din situațiile următoare:

- primii doi judecători au făcut acest lucru
- cel puțin unul dintre primii doi judecători au votat vinovat
- primii doi judecători nu au votat vinovat.

¹Pentru a transforma pozele în format PDF puteți folosi, de exemplu, programul CamScanner