CURSUL 5: RELAŢII

G. MINCU

1. Corespondenţe

Definiţia 1. Numim **corespondenţă**[1] orice triplet de mulţimi $\alpha = (A, B, \rho)$ cu proprietatea $\rho \subset A \times B$.

Definiţia 2. Cu notaţiile din definiţia 1, ρ se numeşte **graficul** corespondenţei α.

Observaţia 3. Noţiunea de corespondenţă este o generalizare a noţiunii de funcţie.

Multe dintre noţiunile şi tehnicile pe care le-am întâlnit la studiul funcţiilor pot fi transpuse şi pentru cazul corespondenţelor. Este de aşteptat să întâlnim similitudini pronunţate cu chestiunile omoloage de la funcţii, dar nu trebuie să ne surprindă nici anumite diferenţe între situaţia corespondenţelor şi cea a funcţiilor, diferenţe ce decurg din faptul că funcţiile sunt corespondenţe de un tip foarte particular. Aceste consideraţii vor fi concretizate în următoarele două capitole.

2. Compunerea corespondenţelor

Definiţia 4. Considerăm corespondenţele $\alpha = (A, B, \rho)$ şi $\beta = (B, C, \sigma)$. Corespondenţa $\beta \circ \alpha = (A, C, \sigma \circ \rho)$, unde

$$\sigma \circ \rho = \{(x, z) \in A \times C : \exists y \in B \quad (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \sigma\},$$

se numeşte **compusa corespondenţelor** β **şi** α.

Propoziţia 5. Date fiind corespondenţele $\alpha = (A, B, \rho)$, $\beta = (B, C, \sigma)$ şi $\gamma = (C, D, \tau)$, are loc egalitatea

$$(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha).$$

Definiţia 6. Cu notaţiile din propoziţia 5,

$$\gamma \circ \beta \circ \alpha \overset{\text{def}}{=} (\gamma \circ \beta) \circ \alpha.$$

[1] În loc de „corespondenţă" unii autori folosesc în context noţiunea „relaţie binară". Noi vom prefera să folosim sintagma „relaţie binară" în accepţia din capitolul 4 al cursului. Utilizarea unui alt termen pentru situaţia de faţă are drept scop eliminarea anumitor ambiguităţi de exprimare în contextul din capitolul 4.

Definiţia 7. Date fiind $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, şi corespondenţele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pentru care expresiile de mai jos au sens, definim

$$\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_n \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_{n-1}) \circ \alpha_n.$$

Observaţia 8. Aplicând propoziţia 5, constatăm că că operaţile de compunere din expresia $\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_n$ pot fi făcute în orice ordine dorim[2].

Definiţia 9. Dată fiind corespondenţa $\alpha = (A, A, \rho)$,

(i) $\alpha^1 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha$ şi

(ii) Pentru $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\alpha^n \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \circ \alpha^{n-1}$.

Observaţia 10. $\alpha^2 = \alpha \circ \alpha$, iar $\alpha^3 = \alpha \circ \alpha^2$.

Definiţia 11. Dată fiind o mulţime A, corespondenţa $\mathrm{id}_A = (A, A, \Delta_A)$, unde $\Delta_A = \{(a, a) : a \in A\}$ se numeşte **corespondenţa identică** (sau **corespondenţa unitate**) a mulţimii A.

Propoziţia 12. Dată fiind corespondenţa $\alpha = (A, B, \rho)$, au loc egalităţile

$$\mathrm{id}_B \circ \alpha = \alpha \quad \text{şi} \quad \alpha \circ \mathrm{id}_A = \alpha.$$

3. Inversarea corespondenţelor

Definiţia 13. Numim **inversa** corespondenţei $\alpha = (A, B, \rho)$ corespondenţa $\alpha^{-1} = (B, A, \rho^{-1})$, unde $\rho^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in \rho\}$.

Observaţia 14. Spre deosebire de situaţia funcţiilor, orice corespondenţă admite inversă.

Observaţia 15. Aici poate apărea întrebarea: având în vedere că toate funcţiile sunt corespondenţe şi că toate corespondenţele admit inversă, de ce nu admit toate funcţiile inversă? Răspunsul este că orice funcţie admite într-adevăr o *corespondenţă* inversă, dar aceasta *nu este funcţie decât în situaţia în care funcţia de la care am pornit este inversabilă în sensul prezentat în cursul 3.*

O diferenţă remarcabilă faţă de situaţia întâlnită la funcţii este dată de

Observaţia 16. Dacă $\alpha = (A, B, \rho)$ este o corespondenţă, nu este obligatoriu ca $\alpha \circ \alpha^{-1} = \mathrm{id}_B$ sau ca $\alpha^{-1} \circ \alpha = \mathrm{id}_A$.

Chestiunea menţionată în observaţia 16 are de fapt o formă mult mai precisă:

[2] fără a modifica însă ordinea **termenilor**!

Propoziţia 17. Dată fiind corespondenţa $\alpha = (A, B, \rho)$, au loc egalităţile $\alpha \circ \alpha^{-1} = \mathrm{id}_B$ şi $\alpha^{-1} \circ \alpha = \mathrm{id}_A$ dacă şi numai dacă α este funcţie bijectivă.

Propoziţia 18. Date fiind corespondenţele $\alpha = (A, B, \rho)$ şi $\beta = (B, C, \sigma)$, au loc egalităţile:
(i) $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$
(ii) $((\beta \circ \alpha)^{-1}) = \alpha^{-1} \circ \beta^{-1}$.

4. relaţii pe o mulţime

În cele ce urmează, vom lua în discuţie numai corespondenţe (A, B, ρ) în care $A = B$. În situaţiile de acest tip, după precizarea iniţială a mulţimii A nu vom mai insista în a o include în notaţiile ulterioare ale corespondenţelor cu care lucrăm. În plus, singura corespondenţă de la mulţimea vidă la ea însăşi este cea vidă. Din acest motiv, noi vom studia în continuare doar corespondenţe pe mulţimi nevide. Această discuţie se concretizează în următoarea definiţie:

Definiţia 19. Numim **relaţie binară pe mulţimea nevidă** A orice submulţime a lui $A \times A$.

Observaţia 20. În acest curs vom lucra doar cu relaţii binare, motiv pentru care în cele ce urmează vom omite acest epitet.

Vom nota cu $\mathcal{R}(A)$ mulţimea relaţiilor pe mulţimea A.

Observaţia 21. $\mathcal{R}(A) = \mathcal{P}(A \times A)$.

Observaţia 22. Dacă ρ este o relaţie pe mulţimea A iar $a, b \in A$, vom utiliza frecvent notaţia $a \rho b$ pentru a desemna situaţia $(a, b) \in \rho$ şi notaţia $a \not\rho b$ pentru a desemna situaţia $(a, b) \notin \rho$.

Fiecărei relaţii ρ pe mulţimea A îi putem asocia corespondenţa (A, A, ρ) şi reciproc. Putem folosi această observaţie pentru a adapta la cazul relaţiilor anumite noţiuni pe care le-am definit pentru corespondenţe:

5. Compunerea relaţiilor

Definiţia 23. Considerăm o mulţime A şi relaţiile ρ şi σ pe A. Relaţia $\sigma \circ \rho = \{(x, z) \in A \times A : \exists y \in A \ (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \sigma\}$ se numeşte **compusa relaţiilor** σ **şi** ρ.

Propoziţia 24. Date fiind corespondenţele ρ, σ şi τ pe mulţimea A, are loc egalitatea
$$(\tau \circ \sigma) \circ \rho = \tau \circ (\sigma \circ \rho).$$

Demonstraţie: Afirmaţia este o consecinţă imediată a propoziţiei 5. $\square$

Definiţia 25. Cu notaţiile din propoziţia 5,

$$\tau \circ \sigma \circ \rho \stackrel{\text{def}}{=} (\tau \circ \sigma) \circ \rho.$$

Definiţia 26. Date fiind $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, şi relaţiile $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ pe mulţimea A, definim

$$\rho_1 \circ \rho_2 \circ \ldots \circ \rho_n \stackrel{\text{def}}{=} (\rho_1 \circ \rho_2 \circ \ldots \circ \rho_{n-1}) \circ \rho_n.$$

Observaţia 27. Propoziţia 5 ne arată că operaţile de compunere din expresia $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \ldots \circ \rho_n$ pot fi făcute în orice ordine dorim[3].

Definiţia 28. Dată fiind relaţia ρ pe mulţimea A, definim

(i) $\rho^1 \stackrel{\text{def}}{=} \rho$ şi

(ii) Pentru $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\rho^n \stackrel{\text{def}}{=} \rho \circ \rho^{n-1}$.

Observaţia 29. $\rho^2 = \rho \circ \rho$, iar $\rho^3 = \rho \circ \rho^2$.

Observaţia 30. Date fiind o relaţie ρ pe o mulţime A şi $m, n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea $\rho^{m+n} = \rho^m \circ \rho^n$.

Definiţia 31. Dată fiind o mulţime A, mulţimea $\Delta_A = \{(a,a) : a \in A\}$ se numeşte **diagonala** mulţimii $A \times A$.

Observaţia 32. În limbajul introdus în textul de faţă, Δ_A este relaţia de egalitate pe mulţimea A.

Propoziţia 33. Dată fiind relaţia ρ pe mulţimea A, au loc egalităţile

$$\Delta_A \circ \rho = \rho \ \text{ şi } \ \rho \circ \Delta_A = \rho.$$

Observaţia 34. Dacă pe mulţimea A sunt date relaţiile ρ, σ, τ şi φ astfel încât $\rho \subset \tau$ şi $\sigma \subset \varphi$, atunci $\sigma \circ \rho \subset \varphi \circ \tau$.

6. Inversarea relaţiilor

Definiţia 35. Numim **inversa** relaţiei ρ (dată pe mulţimea A) relaţia $\rho^{-1} = \{(b,a) \in A \times A : (a,b) \in \rho\}$.

Observaţia 36. Spre deosebire de situaţia funcţiilor, orice relaţie admite inversă.

Observaţia 37. Dacă ρ este o relaţie pe mulţimea A, nu este obligatoriu ca $\rho \circ \rho^{-1} = \Delta_A$ sau ca $\rho^{-1} \circ \rho = \Delta_A$.

Propoziţia 38. Date fiind relaţiile ρ şi σ pe mulţimea A, au loc egalităţile:

(i) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$

(ii) $((\sigma \circ \rho)^{-1}) = \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$.

[3] fără a modifica însă ordinea **termenilor**!

Demonstraţie: Afirmaţia este o consecinţă imediată a propoziţiei 18. □

Definiţia 39. Dată fiind relaţia ρ pe mulţimea A şi $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$,

$$\rho^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \rho^{-1} \circ \rho^{1-n}.$$

Observaţia 40. Dată fiind o relaţie ρ pe o mulţime A, au loc egalităţile:
(i) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \rho^{-n} = (\rho^n)^{-1}$
(ii) $\forall m, n \in \mathbb{N}^* \quad \rho^{-m-n} = \rho^{-m} \circ \rho^{-n}$

Observaţia 41. Dacă pe mulţimea A sunt date relaţiile ρ şi σ astfel încât $\rho \subset \sigma$, atunci $\rho^{-1} \subset \sigma^{-1}$.

7. Clase importante de relaţii

În tot acest capitol ρ va desemna o relaţie pe mulţimea A.

Definiţia 42. Spunem că ρ este **reflexivă** dacă $\forall a \in A \quad a \rho a$.

Observaţia 43. Relaţia ρ este reflexivă dacă şi numai dacă $\rho \supset \Delta_A$.

Definiţia 44. Spunem că ρ este **ireflexivă** dacă $\forall a \in A \quad a \not\rho a$.

Observaţia 45. Relaţia ρ este ireflexivă dacă şi numai dacă $\rho \cap \Delta_A = \emptyset$.

Definiţia 46. Spunem că ρ este **simetrică** dacă $\forall a, b \in A \quad a \rho b \Rightarrow b \rho a$.

Propoziţia 47. Dată fiind o relaţie ρ pe o mulţime A, următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) ρ este simetrică.
(ii) $\rho^{-1} \subset \rho$.
(iii) $\rho^{-1} = \rho$.

Definiţia 48. Spunem că ρ este **antisimetrică** dacă

$$\forall a, b \in A \quad a \rho b \wedge b \rho a \Rightarrow a = b.$$

Observaţia 49. Relaţia ρ este antisimetrică dacă şi numai dacă

$$\rho \cap \rho^{-1} \subset \Delta_A.$$

Definiţia 50. Spunem că ρ este **tranzitivă** dacă

$$\forall a, b, c \in A \quad a \rho b \wedge b \rho c \Rightarrow a \rho c.$$

Observaţia 51. Relaţia ρ este tranzitivă dacă şi numai dacă

$$\rho^2 \subset \rho.$$

Definiţia 52. Spunem că ρ este **totală** dacă $\rho \cup \rho^{-1} = A \times A$.

Observaţia 53. Relaţia $A \times A$ este reflexivă, simetrică, tranzitivă şi totală.

Propoziţia 54. Relaţia ρ este reflexivă (respectiv ireflexivă, simetrică, antisimetrică, tranzitivă, totală) dacă şi numai dacă ρ^{-1} este reflexivă (respectiv ireflexivă, simetrică, antisimetrică, tranzitivă, totală).

Propoziţia 55. Dată fiind o mulţime nevidă $\mathcal{M}$ de relaţii pe mulţimea A, $\bigcap_{\rho \in \mathcal{M}} \rho$ este o relaţie pe A. Dacă toate relaţiile din $\mathcal{M}$ sunt reflexive (respectiv ireflexive, simetrice, antisimetrice, tranzitive) atunci $\bigcap_{\rho \in \mathcal{M}} \rho$ este reflexivă (respectiv ireflexivă[4], simetrică, antisimetrică, tranzitivă).

Observaţia 56. Dacă relaţia ρ este ireflexivă şi dacă $\sigma \subset \rho$, atunci şi σ este ireflexivă.

8. Închideri ale relaţiilor

În lipsa vreunei menţiuni contrare, în acest capitol ρ va desemna o relaţie pe o mulţime nevidă A.

Propoziţia 57. Dată fiind o relaţie ρ pe mulţimea A, există o relaţie σ pe mulţimea A cu proprietăţile:
(i) $\rho \subset \sigma$
(ii) σ este reflexivă.
(iii) Dacă pentru o altă relaţie reflexivă $\tau \in \mathcal{R}(A)$ avem $\rho \subset \tau$, atunci[5] $\sigma \subset \tau$.
În plus, σ cu aceste proprietăţi este unic determinată.

Demonstraţie: Pentru partea de existenţă, definim $\sigma = \rho \cup \Delta_A$.
Evident, $\rho \subset \sigma$ şi σ este reflexivă.
Dacă $\tau \in \mathcal{R}(A)$ este reflexivă (adică, conţine Δ_A) şi conţine ρ, atunci τ va conţine şi $\Delta_A \cup \rho = \sigma$.
Pentru demonstrarea unicităţii lui σ, să considerăm σ_1 şi σ_2 cu proprietăţile din enunţ. Atunci, conform (iii), $\sigma_1 \subset \sigma_2$ şi $\sigma_2 \subset \sigma_1$, de unde $\sigma_1 = \sigma_2$. □

Definiţia 58. Relaţia a cărei existenţă este asigurată de propoziţia 57 se numeşte **închiderea reflexivă** a lui ρ.

Vom nota închiderea reflexivă a lui ρ cu $R(\rho)$.

---

[4]În cazul ireflexivităţii, deşi afirmaţia prezentei propoziţii este adevărată, ea nu dă foare multă informaţie. În această situaţie, informaţie mai relevantă ne oferă observaţia 56.

[5]În limbajul pe care îl vom introduce la relaţii de ordine, aceste condiţii spun că „σ este o relaţie reflexivă minimală care conţine ρ”.

Corolarul 59. $R(\rho) = \rho \cup \Delta_A$.

Propoziţia 60. $R(\rho) \bigcap_{\substack{\tau \in \mathcal{R}(A) \\ \tau \text{ e reflexivă}}} \tau$.

Propoziţia 61. Dată fiind o relaţie ρ pe mulţimea A, există o relaţie σ pe mulţimea A cu proprietăţile:
(i) $\rho \subset \sigma$
(ii) σ este simetrică.
(iii) Dacă pentru o altă relaţie simetrică $\tau \in \mathcal{R}(A)$ avem $\rho \subset \tau$, atunci $\sigma \subset \tau$.
În plus, σ cu aceste proprietăţi este unic determinată.

Demonstraţie: Pentru partea de existenţă, definim $\sigma = \rho \cup \rho^{-1}$.
Evident, $\rho \subset \sigma$ şi σ este simetrică.
Dacă $\tau \in \mathcal{R}(A)$ este simetrică (deci $\tau = \tau^{-1}$) şi conţine ρ, atunci, conform observaţiei 41, τ va conţine şi ρ^{-1}, de unde $\tau \supset \sigma$.
Pentru demonstrarea unicităţii lui σ, să considerăm σ_1 şi σ_2 cu proprietăţile din enunţ. Atunci, conform (iii), $\sigma_1 \subset \sigma_2$ şi $\sigma_2 \subset \sigma_1$, de unde $\sigma_1 = \sigma_2$. $\square$

Definiţia 62. Relaţia a cărei existenţă este asigurată de propoziţia 57 se numeşte **închiderea simetrică** a lui ρ.

Vom nota închiderea reflexivă a lui ρ cu $S(\rho)$.

Corolarul 63. $S(\rho) = \rho \cup \rho^{-1}$.

Propoziţia 64. $S(\rho) = \bigcap_{\substack{\tau \in \mathcal{R}(A) \\ \tau \text{ e simetrică}}} \tau$.

Propoziţia 65. Dată fiind o relaţie ρ pe mulţimea A, există o relaţie σ pe mulţimea A cu proprietăţile:
(i) $\rho \subset \sigma$
(ii) σ este tranzitivă.
(iii) Dacă pentru o altă relaţie tranzitivă $\tau \in \mathcal{R}(A)$ avem $\rho \subset \tau$, atunci $\sigma \subset \tau$.
În plus, σ cu aceste proprietăţi este unic determinată.

Demonstraţie: Pentru partea de existenţă, definim $\sigma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \rho^n$.
Evident, $\rho \subset \sigma$ şi σ este tranzitivă.
Dacă $\tau \in \mathcal{R}(A)$ este tranzitivă (deci $\tau^2 \subset \tau$) şi conţine ρ, atunci, conform observaţiei 34, τ va conţine şi ρ^2. Inductiv, obţinem $\tau \supset \rho^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, de unde $\tau \supset \sigma$.

Pentru demonstrarea unicităţii lui σ, să considerăm σ_1 şi σ_2 cu proprietăţile din enunţ. Atunci, conform (iii), $\sigma_1 \subset \sigma_2$ şi $\sigma_2 \subset \sigma_1$, de unde $\sigma_1 = \sigma_2$. $\square$

Definiţia 66. Relaţia a cărei existenţă este asigurată de propoziţia 57 se numeşte **închiderea tranzitivă** a lui ρ.

Vom nota închiderea reflexivă a lui ρ cu $T(\rho)$.

Corolarul 67. $T(\rho) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \rho^n$.

Propoziţia 68. $T(\rho) = \bigcap\limits_{\substack{\tau\in\mathcal{R}(A)\\ \tau \text{ e tranzitivă}}} \tau$.

Propoziţia 69. Fie ρ o relaţie pe mulţimea A. Atunci:
(i) $R(S(\rho)) = S(R(\rho))$.
(ii) $R(T(\rho)) = T(R(\rho))$.
(iii) $S(T(\rho)) \subset T(S(\rho))$.

Demonstraţie: (i): $R(S(\rho)) = R(\rho \cup \rho^{-1}) = \rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_A = \rho \cup \Delta_A \cup \rho^{-1} \cup \Delta_A = (\rho \cup \Delta_A) \cup (\rho \cup \Delta_A)^{-1} = S(\rho \cup \Delta_A) = S(R(\rho))$.
(ii): Inductiv, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} (\rho \cup \Delta_A)^k = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \rho^k \cup \Delta_A$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, $R(T(\rho)) = (\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \rho^n) \cup \Delta_A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (\rho^n \cup \Delta_A) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (\rho \cup \Delta_A)^n = T(R(\rho))$.
(iii): Fie $(a, b) \in S(T(\rho)) = \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \rho^n\right) \cup \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \rho^n\right)^{-1}$. Atunci există $n \in \mathbb{N}^*$ şi $c_0 = a, c_1, \ldots, c_n = b$ astfel încât $(c_{i-1}, c_i) \in \rho$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sau există $n \in \mathbb{N}^*$ şi $d_0 = b, d_1, \ldots, d_n = a$ astfel încât $(d_{i-1}, d_i) \in \rho$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Este însă clar că în oricare din aceste variante avem $(a, b) \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (\rho \cup \rho^{-1})^n = T(S(\rho))$. $\square$

Observaţia 70. Nu putem afirma că are loc relaţia $S(T(\rho)) = T(S(\rho))$: Dacă, de exemplu, definim pe $\{1, 2\}$ relaţia $\{(1, 2)\}$, constatăm că $(1, 1) \in T(S(\rho)) \setminus S(T(\rho))$.

9. Relaţii de echivalenţă. Mulţimi factor

Definiţia 71. Fie ρ o relaţie pe mulţimea nevidă A. ρ se numeşte **relaţie de echivalenţă** dacă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.

Propoziţia 72. Dată fiind o mulţime $\mathcal{M}$ de relaţii de echivalenţă pe mulţimea A, intersecţia lor este relaţie de echivalenţă pe A.

Demonstraţie: Afirmaţia este o consecinţă imediată a propoziţiei 55. $\square$

Definiţia 73. Dată fiind o relaţie ρ pe mulţimea A, intersecţia tuturor relaţiilor de echivalenţă pe A care conţin ρ se numeşte **relaţia de echivalenţă generată de** ρ.

Observaţia 74. Relaţia de echivalenţă generată de ρ este cea mai mică (în sensul incluziunii) relaţie de echivalenţă pe A care conţine ρ.

Propoziţia 75. Relaţia de echivalenţă generată de ρ este egală cu $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (\rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_A)^n$.

Demonstraţie: Notăm cu σ relaţia din enunţ. Întrucât $\sigma = T(R(S(\rho)))$, ea este tranzitivă. Cum $\Delta_A \subset \sigma$, σ este reflexivă. Definiţia lui σ arată clar şi simetria acesteia. Deci, σ este relaţie de echivalenţă. Evident, $\rho \subset \sigma$. Dacă considerăm o relaţie de echivalenţă τ pe A cu $\rho \subset \tau$, atunci τ, fiind reflexivă şi simetrică, conţine $R(S(\rho)) = \rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta$. Cum însă τ este şi tranzitivă, ea trebuie să conţină şi închiderea tranzitivă a acesteia, adică pe σ. $\square$

Definiţia 76. Fie ρ o relaţie de echivalenţă pe mulţimea nevidă A şi $a \in A$. Prin **clasa de echivalenţă a lui** a **în raport cu** ρ înţelegem mulţimea $\{b \in A : b\,\rho\, a\}$.

Vom nota clasa de echivalenţă a lui a în raport cu ρ prin $\dfrac{a}{\rho}$ sau $\hat{a}$. Vor exista de asemenea situaţii în care în locul acestor notaţii se vor folosi unele adaptate contextului.

Propoziţia 77. Dacă ρ este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea A, iar $a, b \in A$, atunci $\hat{a} = \hat{b}$ sau $\hat{a} \cap \hat{b} = \emptyset$.

Demonstraţie: Dacă $a\rho b$, atunci $c \in \hat{a} \Leftrightarrow c\rho a \overset{b\rho a}{\Leftrightarrow} c\rho b \Leftrightarrow c \in \hat{b}$. Prin urmare, $\hat{a} = \hat{b}$.
Dacă $a \not\rho b$, să presupunem că există $c \in \hat{a} \cap \hat{b}$. Atunci $a\rho c$ şi $c\rho b$, de unde $a\rho b$, contradicţie. Rămâne deci că $\hat{a} \cap \hat{b} = \emptyset$. $\square$

Definiţia 78. Numim **partiţie** a mulţimii nevide A orice mulţime $\mathcal{M}$ de submulţimi nevide ale lui A cu proprietăţile:
1. $A = \bigcup\limits_{B\in\mathcal{M}} B$.
2. Pentru orice $B, C \in \mathcal{M}$ cu $B \neq C$ avem $B \cap C = \emptyset$.

Observaţia 79. Propoziţia 77 se reformulează cu ajutorul noţiunii de partiţie astfel: „Mulţimea claselor de echivalenţă determinate de o relaţie de echivalenţă pe o mulţime A constituie o partiţie a lui A”.

Definiţia 80. Fie ρ o relaţie de echivalenţă pe mulţimea A. Notăm $\frac{A}{\rho}$ şi numim **mulţimea factor (cât)** a lui A în raport cu ρ mulţimea tuturor claselor de echivalenţă ale elementelor lui A în raport cu ρ.

Observaţia 81. Fie ρ o relaţie de echivalenţă pe mulţimea A. Funcţia $\pi : A \to \frac{A}{\rho}$, $\pi(a) = \hat{a}$ este surjectivă.

Definiţia 82. Fie ρ o relaţie de echivalenţă pe mulţimea A. Funcţia din observaţia 81 numeşte **surjecţia canonică** (sau **proiecţia canonică**) **a mulţimii factor** $\frac{A}{\rho}$.

Definiţia 83. Fie ρ o relaţie de echivalenţă pe mulţimea A. O submulţime $\mathcal{S}$ a lui A se numeşte **sistem complet şi independent de reprezentanţi (pentru elementele mulţimii A) relativ la relaţia** ρ dacă îndeplineşte condiţiile:
1. Pentru orice două elemente distincte $s, t \in \mathcal{S}$ avem $s \not\rho t$.
2. Orice element al lui A este echivalent cu un element al lui $\mathcal{S}$.

Observaţia 84. În cuvinte, dată fiind o relaţie de echivalenţă pe o mulţime A, un sistem complet şi independent de reprezentanţi relativ la ρ este o submulţime a lui A alcătuită cu câte exact un element din fiecare clasă de echivalenţă.

Observaţia 85. Dacă ρ este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea A iar $\mathcal{S}$ este un sistem complet şi independent de reprezentanţi relativ la ρ, atunci funcţia $f : \mathcal{S} \to \frac{A}{\rho}$, $f(s) = \hat{s}$ este bijectivă.

9.1. **Exemple importante de relaţii de echivalenţă.**

9.1.1. *Egalitatea.*

Exemplul 86. Dată fiind o mulţime nevidă, relaţia de egalitate pe aceasta este o relaţie de echivalenţă.

Observaţia 87. Unicul sistem complet şi independent de reprezentanţi pentru relaţia de egalitate pe mulţimea A este chiar A.

9.1.2. *Congruenţa modulo n.* Fie $n \in \mathbb{Z}$. Considerăm pe mulţimea $\mathbb{Z}$ relaţia ρ_n dată astfel: $a\rho_n b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} n|b-a$.

Definiţia 88. Relaţia ρ_n se numeşte relaţia de **congruenţă modulo** n.

Observaţia 89. Pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ avem $\rho_{-n} = \rho_n$.

Notaţie: În mod tradiţional faptul că numerele întregi a şi b sunt congruente modulo n se notează $a \equiv b \pmod{n}$. Începând din momentul de faţă vom folosi şi noi această notaţie, renunţând la provizoriul ρ_n.

Propoziţia 90. Pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ relaţia de congruenţă modulo n este o relaţie de echivalenţă.

Demonstraţie: Fie $n, a, b, c \in \mathbb{Z}$.
Evident, $n|0 = a-a$, de unde $a \equiv a \pmod{n}$, deci relaţia de congruenţă modulo n este reflexivă.
Dacă $a \equiv b \pmod{n}$, atunci $n|b-a$, de unde $n|-(b-a) = a-b$, deci $b \equiv a \pmod{n}$. Prin urmare, relaţia în discuţie este simetrică.
Dacă $a \equiv b \pmod{n}$ şi $b \equiv c \pmod{n}$, atunci $n|b-a$ şi $n|c-b$. De aici, $n|(b-a)+(c-b) = c-a$, deci $a \equiv c \pmod{n}$. Prin urmare, relaţia de congruenţă modulo n este tranzitivă. $\square$

Observaţia 91. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:
a) Clasa de congruenţă modulo n a elementului $a \in \mathbb{Z}$ este $a + n\mathbb{Z}$ (ea constă în elementele care dau acelaşi rest ca şi a la împărţirea prin n).
b) $\dfrac{\mathbb{Z}}{\equiv \pmod{n}} = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \ldots, \widehat{n-1}\} = \{n\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}+1, \ldots, n\mathbb{Z}+n-1\}$.
c) Sistemul complet şi independent de reprezentanţi cel mai frecvent folosit în context este $\{0, 1, \ldots, n-1\}$; el este alcătuit din resturile ce se pot obţine împărţind numerele întregi la n.

Observaţia 92. Congruenţa modulo 0 este de fapt egalitatea pe $\mathbb{Z}$. Prin urmare, conform observaţiilor 85 şi 87, $\dfrac{\mathbb{Z}}{\equiv \pmod{0}}$ este în bijecţie cu $\mathbb{Z}$.

Definiţia 93. Mulţimea factor a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu congruenţa modulo n se numeşte **mulţimea claselor de resturi modulo** n.

Vom folosi notaţia[6] $\mathbb{Z}_n$ pentru a desemna mulţimea claselor de resturi modulo n.

9.1.3. *Relaţia de echivalenţă asociată unei partiţii.* Fie $\mathcal{P}$ o partiţie a mulţimii nevide A. Definim pe A relaţia

$$a \sim_{\mathcal{P}} b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists B \in \mathcal{P} \;\; a, b \in B.$$

Propoziţia 94. Relaţia $\sim_{\mathcal{P}}$ este de echivalenţă pe A.

[6] În teoria numerelor, această notaţie este rezervată mulţimii întregilor n-adici (în situaţia în care n este număr prim). În acel context, inelul claselor de resturi modulo n se notează $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ sau $\dfrac{\mathbb{Z}}{(n)}$. Noi nu ne vom întâlni cu această situaţie la cursul de Algebră, deci notaţia este neechivocă.

Temă: Demonstraţi propoziţia 94!

Definiţia 95. Relaţia $\sim_{\mathcal{P}}$ se numeşte **relaţia de echivalenţă asociată partiţiei** $\mathcal{P}$.

Propoziţia 96. Dată fiind o mulţime nevidă A, mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe A şi mulţimea partiţiilor lui A sunt în corespondenţă bijectivă.

Demonstraţie: Considerăm funcţia Φ care asociază fiecărei relaţii de echivalenţă pe A partiţia lui A în clasele de echivalenţă relative la relaţia respectivă. Considerăm de asemenea funcţia Ψ care asociază fiecărei partiţii $\mathcal{P}$ a lui A relaţia $\sim_{\mathcal{P}}$. Atunci Φ şi Ψ sunt inverse una celeilalte (lăsăm detaliile în seama cititorului). $\square$

9.1.4. *Relaţia de echivalenţă asociată unei funcţii.* Considerăm mulţimile nevide A şi B şi funcţia $f : A \to B$. Definim în acest context relaţia

$$a_1 \rho_f a_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(a_1) = f(a_2).$$

Propoziţia 97. Relaţia ρ_f este de echivalenţă.

Temă: Demonstraţi propoziţia 97!

Relaţia ρ_f ne permite să prezentăm un rezultat foarte util pentru definirea de funcţii pe mulţimi factor:

Teorema 98. (Proprietatea de universalitate a mulţimii factor) Fie ρ o relaţie de echivalenţă pe mulţimea A, $\pi : A \to \dfrac{A}{\rho}$ surjecţia canonică, $f : A \to B$ o funcţie şi ρ_f relaţia de echivalenţă asociată acesteia.
i) Dacă $\rho \subset \rho_f$, atunci există $u : \dfrac{A}{\rho} \to B$ astfel încât $u \circ \pi = f$.
ii) u este injectivă dacă şi numai dacă $\rho = \rho_f$.
iii) u este surjectivă dacă şi numai dacă f este surjectivă.

10. Relaţii de ordine

Este imediat faptul că relaţia uzuală de ordine pe $\mathbb{R}$ este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă. Aceasta ne sugerează

Definiţia 99. Fie A o mulţime nevidă şi ρ o relaţie pe A. Spunem că ρ este o **relaţie de ordine** dacă ea este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă.

Definiţia 100. Numim **mulţime ordonată** orice pereche alcătuită dintr-o mulţime nevidă şi o relaţie de ordine pe aceasta.

Vom folosi în cele ce urmează, în acord cu uzanţele, semnul $\leq$ (sau semne asemănătoare, ca de pildă $\preceq$) pentru relaţiile de ordine (chiar dacă este vorba de alte relaţii decât cea de ordine naturală de pe $\mathbb{R}$).

Observaţia 101. Relaţia de ordine uzuală pe $\mathbb{R}$ este, desigur, o relaţie de ordine conform definiţiei 99. Pe de altă parte, vom constata în cele ce urmează că în categoria relaţiilor de ordine se vor încadra şi alte relaţii frecvent întâlnite (iar statutul de relaţie de ordine al unora dintre acestea va fi la o primă vedere chiar surprinzător).

Exemplul 102. Dată fiind o mulţime nevidă, relaţia de egalitate pe aceasta este o relaţie de ordine.

Exemplul 103. Dată fiind o mulţime nevidă, relaţia de incluziune pe $\mathcal{P}(A)$ este o relaţie de ordine.

Exemplul 104. Relaţia de divizibilitate pe $\mathbb{N}$ este o relaţie de ordine.

Exemplul 105. Relaţia de divizibilitate pe $\mathbb{Z}$ nu este o relaţie de ordine.

Exemplul 106. Relaţia definită pe $\mathbb{Z}$ prin $x < y$ nu este o relaţie de ordine.

Temă: Argumentaţi afirmaţiile de la exemplele 102, 103, 104, 105 şi 106!

Definiţia 107. Date fiind două mulţimi ordonate $(A, \leq)$ şi $(B, \preceq)$, o funcţie $f : A \to B$ se numeşte **morfism de mulţimi ordonate** dacă $\forall x, y \in A \;\; x \leq y \Rightarrow f(x) \preceq f(y)$. f se numeşte **antimorfism de mulţimi ordonate** dacă $\forall x, y \in A \;\; x \leq y \Rightarrow f(x) \succeq f(y)$.

Definiţia 108. Un (anti)morfism de mulţimi ordonate se numeşte **(anti)izomorfism de mulţimi ordonate** dacă este inversabil şi dacă inversul său este (anti)morfism de mulţimi ordonate.

Definiţia 109. Două mulţimi ordonate se numesc **(anti)izomorfe** dacă există un (anti)izomorfism între ele.

11. Relaţii înrudite cu relaţiile de ordine

Relaţiile de la exemplele 105 şi 106 sugerează următoarele definiţii:

Definiţia 110. Fie A o mulţime nevidă şi ρ o relaţie pe A. Spunem că ρ este o **relaţie de preordine** (sau **de cuasiordine**) dacă ea este reflexivă şi tranzitivă.

Observaţia 111. Orice relaţie de ordine este şi relaţie de preordine.

Observaţia 112. Relaţia de divizibilitate pe $\mathbb{Z}$ este o relaţie de preordine.

Definiţia 113. Numim **mulţime preordonată** orice pereche alcătuită dintr-o mulţime nevidă şi o relaţie de preordine pe aceasta.

Definiţia 114. Fie A o mulţime nevidă şi ρ o relaţie pe A. Spunem că ρ este o **relaţie de ordine strictă** dacă ea este ireflexivă şi tranzitivă.

Dată fiind o relaţie de preordine ρ pe mulţimea A, ei i se poate asocia o relaţie de ordine (definită pe o mulţime factor a lui A) în următorul mod:
Considerăm pe A relaţia $a\sigma b \overset{def}{\Leftrightarrow} a\rho b \wedge b\rho a$.
Este imediat faptul că σ este o relaţie de echivalenţă pe A.
Pe mulţimea A/σ definim relaţia $\hat{a}\tau\hat{b} \overset{def}{\Leftrightarrow} a\rho b$.
Se verifică (temă!) că τ este (corect definită şi) relaţie de ordine şi că proiecţia canonică $p : A \to A/\sigma$ are proprietatea $\forall a, b \in A$ $a\rho b \Rightarrow p(a)\tau p(b)$.

În ceea ce priveşte relaţiile de ordine strictă, avem:

Propoziţia 115. Dată fiind o mulţime nevidă A, există o bijecţie canonică între mulţimea relaţiilor de ordine pe A şi mulţimea relaţiilor de ordine strictă pe A.

Demonstraţie: Considerăm funcţia Φ ce asociază fiecărei relaţii de ordine ρ pe A relaţia $\rho \setminus \Delta_A$ şi funcţia Ψ ce asociază fiecărei relaţii de ordine strictă σ pe A relaţia $\sigma \cup \Delta_A$. Este imediat că Φ şi Ψ acţionează între mulţimile precizate în enunţ şi că sunt inverse una celeilalte. $\square$

12. Tipuri interesante de mulţimi ordonate

Fie $\leq$ o relaţie de ordine pe mulţimea A.

Definiţia 116. Numim **majorant** al submulţimii nevide B a lui A orice element $a \in A$ cu proprietatea $\forall b \in B$ $b \leq a$.

Definiţia 117. Submulţimea nevidă B a lui A se numeşte **majorată** dacă există în A cel puţin un majorant pentru B.

Definiţia 118. Numim **minorant** al submulţimii nevide B a lui A orice element $a \in A$ cu proprietatea $\forall b \in B$ $a \leq b$.

Definiţia 119. Submulţimea nevidă B a lui A se numeşte **minorată** dacă există în A cel puţin un minorant pentru B.

Definiţia 120. Numim **prim element** (sau **minimum**, sau **cel mai mic element**) al submulţimii nevide B a lui A orice element $a \in B$ cu proprietatea $\forall b \in B \ a \leq b$.

Observaţia 121. Este posibil ca anumite submulţimi ale lui A să nu admită prim element. Dacă însă o submulţime a lui A admite prim element, antisimetria relaţiei $\leq$ arată că acesta este unic.

Vom nota primul element al submulţimii B a lui A cu $\min B$.

Definiţia 122. Numim **ultim element** (sau **maximum**, sau încă **cel mai mare element**) al submulţimii nevide B a lui A orice element $a \in B$ cu proprietatea $\forall b \in B \ b \leq a$.

Observaţia 123. Este posibil ca anumite submulţimi ale lui A să nu admită ultim element. Dacă însă o submulţime a lui A admite ultim element, antisimetria relaţiei $\leq$ arată că acesta este unic.

Vom nota ultimul element al submulţimii B a lui A cu $\max B$.

Definiţia 124. Numim **element minimal** al mulţimii ordonate A orice element a al lui A cu proprieatea $\forall b \in A \ \ b \leq a \Rightarrow b = a$.

Definiţia 125. Numim **element maximal** al mulţimii ordonate A orice element a al lui A cu proprieatea $\forall b \in A \ \ b \geq a \Rightarrow b = a$.

Definiţia 126. Spunem că mulţimea ordonată $(A, \leq)$ este **total ordonată** dacă relaţia $\leq$ este totală.

Definiţia 127. Spunem că mulţimea ordonată $(A, \leq)$ este **bine ordonată** dacă orice submulţime nevidă a lui A admite prim element.

Definiţia 128. Spunem că mulţimea ordonată $(A, \leq)$ este **inductiv ordonată** dacă orice parte total ordonată a sa este majorată.

Definiţia 129. Numim **supremum** al submulţimii nevide şi majorate B a lui A cel mai mic majorant (din A) al lui B.

Observaţia 130. Este posibil ca anumite submulţimi ale lui A să nu admită supremum. Dacă însă o submulţime a lui A admite supremum, acesta este unic conform observaţiei 121.

Vom nota cu $\sup B$ supremumul submulţimii B a lui A.

Definiţia 131. Numim **infimum** al submulţimii nevide şi minorate B a lui A cel mai mare minorant (din A) al lui B.

Observaţia 132. Este posibil ca anumite submulţimi ale lui A să nu admită infimum. Dacă însă o submulţime a lui A admite infimum, acesta este unic conform observaţiei 123.

Vom nota cu $\inf B$ infimumul submulţimii B a lui A.

Definiţia 133. Mulţimea ordonată $(A, \leq)$ se numeşte **latice** dacă pentru orice $a, b \in A$ există $\inf\{a, b\}$ şi $\sup\{a, b\}$.

Definiţia 134. Mulţimea ordonată $(A, \leq)$ se numeşte **latice completă** dacă pentru orice submulţime nevidă B a lui A există $\inf B$ şi $\sup B$.

Bibliografie

[1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.
[2] P. Halmos, *Naive set theory*, Springer Verlag, 1960.
[3] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.
[4] C. Năstăsescu, *Introducere în teoria mulţimilor*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974.