20.05.2020

Seminar 13.

Conice ca LG. Aducerea la formă canonică a conicelor cu centru unic ($\delta \neq 0$)

Ex1 Fie cercurile:

$\mathcal{C}_1(O_1, R_1): x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 = 3$

$\mathcal{C}_2(O_2, R_2): x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 + 6x_2 = -9$

Fie A, B punctele de intersecție ale celor 2 cercuri.

a) Să se determine coordonatele punctelor O_1 și O_2; să se afle razele R_1, R_2.

b) Să se determine ecuația dreptei AB. Să se arate că este perpendiculară pe linia centrelor

c) Să se scrie ecuațiile tg în A la $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$.

SOL

a) $\mathcal{C}(A(a,b), r): (x_1-a)^2 + (x_2-b)^2 = r^2$

• $\mathcal{C}_1: x_1^2 + 4x_1 + x_2^2 + 6x_2 = 3 \Rightarrow$

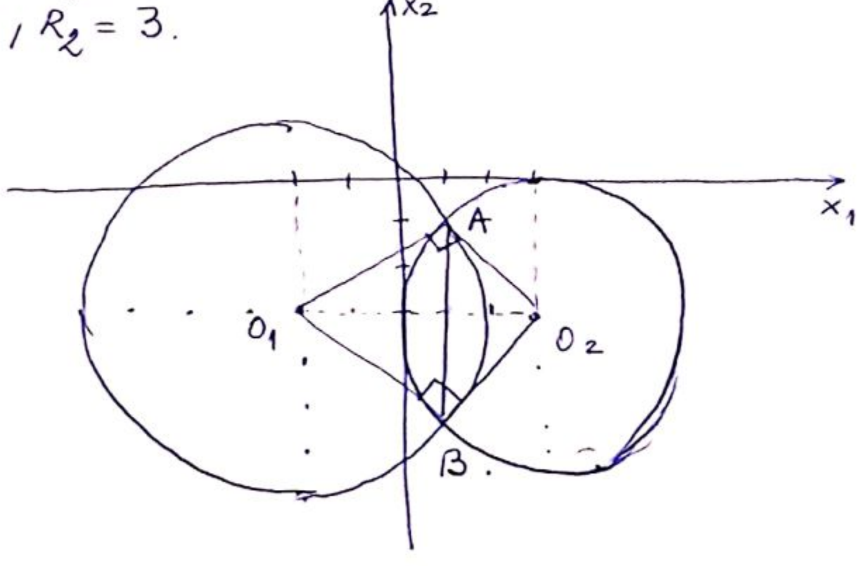
$(x_1+2)^2 + (x_2+3)^2 = 3+4+9 = 16.$

$O_1(-2,-3),\ R_1 = 4.$

• $\mathcal{C}_2: x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 + 6x_2 = -9.$

$(x_1-3)^2 + (x_2+3)^2 = -9+9+9 = 9$

$O_2(3,-3),\ R_2 = 3.$



b) $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ $\begin{cases} x_1^2+x_2^2+4x_1+6x_2=3 \\ x_1^2+x_2^2-6x_1+6x_2=-9 \end{cases}$ $\ominus$

$10x_1 = 12$

$AB: x_1 = \frac{6}{5}$

$O_1O_2: x_2 = -3$ $\Rightarrow AB \perp O_1O_2$.

c) $\{A,B\} = \mathcal{C}_1 \cap AB$: $\begin{cases} (x_1+2)^2+(x_2+3)^2=16 \\ x_1 = \frac{6}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow (x_2+3)^2 = 16 - \left(\frac{6}{5}+2\right)^2 = 16 - \left(\frac{16}{5}\right)^2$

$(x_2+3)^2 = \left(4-\frac{16}{5}\right)\left(4+\frac{16}{5}\right) = \frac{4\cdot 36}{25}$

$x_2+3 = \pm\frac{12}{5} \Rightarrow x_2 = -3-\frac{12}{5} = -\frac{27}{5}$

$x_2' = -3+\frac{12}{5} = -\frac{3}{5}$

$A\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$, $B\left(\frac{6}{5}, -\frac{27}{5}\right)$

$O_1(-2,-3)$, $O_2(3,-3)$.

$\overrightarrow{O_1A} = \left(\frac{6}{5}+2, -\frac{3}{5}+3\right) = \left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right) = \frac{4}{5}(4,3)$

$\overrightarrow{O_2A} = \left(\frac{6}{5}-3, -\frac{3}{5}+3\right) = \left(\frac{-9}{5}, \frac{12}{5}\right) = \frac{3}{5}(-3,4)$

$\langle \overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_2A} \rangle = 0 \Rightarrow$

O_1A tg în A la $\mathcal{C}_2$

O_2A tg în A la $\mathcal{C}_1$.

OBS. Ecuația tg. la o conică Γ într-un pct $P_0(x_1^0, x_2^0) \in \Gamma$.
(procedeul de dedublare)

1) $\mathcal{E}: \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$

Ec tg în P_0 la $\mathcal{E}$: $\frac{x_1 x_1^0}{a^2} + \frac{x_2 \cdot x_2^0}{b^2} = 1$.

2) $\mathcal{H}: \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$.

Ec tg în P_0 la $\mathcal{H}$: $\frac{x_1 x_1^0}{a^2} - \frac{x_2 x_2^0}{b^2} = 1$

3) $\mathcal{P}: x_2^2 = 2p x_1$

Ec tg în P_0 în $\mathcal{P}$: $x_2 \cdot x_2^0 = p(x_1 + x_1^0)$

• $\mathcal{C}_1 : (x_1+2)^2 + (x_2+3)^2 = 16$, $A\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

Ec tg în A la $\mathcal{C}_1$: $(x_1+2)\left(\frac{6}{5}+2\right) + (x_2+3)\left(-\frac{3}{5}+3\right) = 16$

$d_1 : (x_1+2)\cdot\frac{16}{5} + (x_2+3)\cdot\frac{12}{5} = 16 \quad \Big| \cdot \frac{5}{4}$

$d_1 : (x_1+2)\,4 + (x_2+3)\cdot 3 = 20$

$d_1 : 4x_1 + 3x_2 - 3 = 0.$ $(d_1 = AO_2)$

• $\mathcal{C}_2 : (x_1-3)^2 + (x_2+3)^2 = 9$, $A\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

Ec tg în A la $\mathcal{C}_1$: $(x_1-3)\left(\frac{6}{5}-3\right) + (x_2+3)\left(-\frac{3}{5}+3\right) = 9$

$d_2 : (x_1-3)\cdot\frac{-9}{5} + (x_2+3)\cdot\frac{12}{5} = 9 \quad \Big| \cdot \frac{5}{3}.$

$d_2 : -3(x_1-3) + 4(x_2+3) = 15$

$d_2 : -3x_1 + 4x_2 + 6 = 0.$ $(d_2 = AO_1)$

Ex2. Fie elipsele:

$\mathcal{E}_1 : \frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{9} = 1$

$\mathcal{E}_2 : \frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{4} = 1.$

a) Precizați coordonatele vârfurilor, focarelor, excentricitatea și ecuațiile directoarelor pentru $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$.

b) Să se scrie ecuațiile tangentelor la $\mathcal{E}_1$ și $\mathcal{E}_2$ în punctele de abscisă $x_1 = 2$ și ordonată pozitivă, situate pe $\mathcal{E}_1$ și $\mathcal{E}_2$.

c) Să se arate că cele două tangente, obținute la pct b, se intersectează într-un punct de pe axa Ox

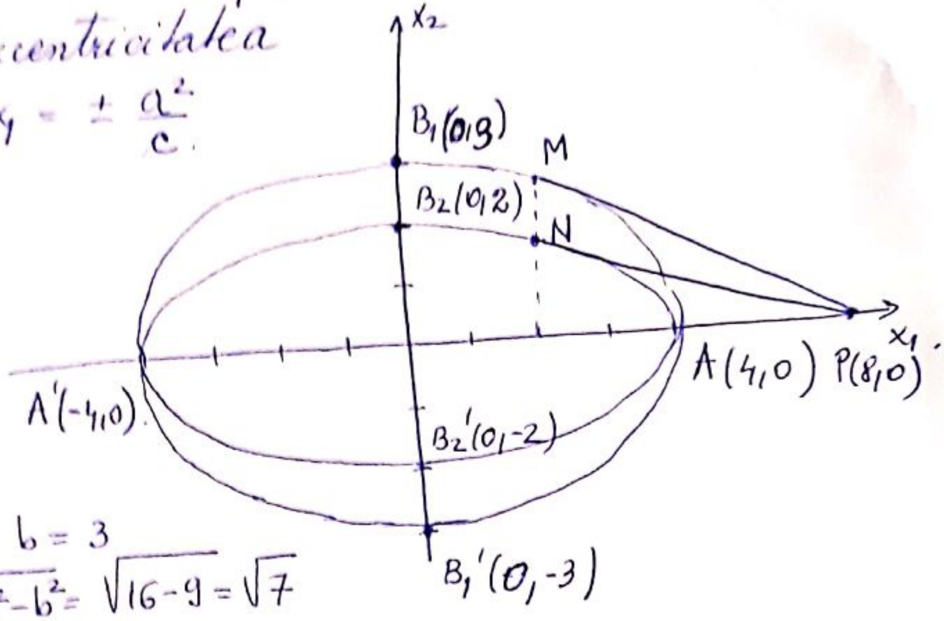
SOL $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\qquad a^2 = b^2 + c^2$

$A(a,0),\ A'(-a,0)$; $F(c,0)$

$B(0,b),\ B'(0,-b)$; $F'(-c,0)$

$e = \frac{c}{a}$ excentricitatea

$d \cup d' : x_1 = \pm \frac{a^2}{c}$



$\mathcal{E}_1 : \ a = 4, \ b = 3$

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$

$F_1(\sqrt{7}, 0) \ ; \ F_1'(-\sqrt{7}, 0)$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} < 1$

$d_1 \cup d_1' : x_1 = \pm \frac{16}{\sqrt{7}} = \pm \frac{16\sqrt{7}}{7}$

$\mathcal{E}_2 : \ a = 4 \ , b = 2.$

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}.$

$F_2(2\sqrt{3}, 0), \ F_2'(-2\sqrt{3}, 0)$

$e = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{c}{a}$

$d_2 \cup d_2' : x_1 = \pm \frac{16}{2\sqrt{3}} = \pm \frac{8\sqrt{3}}{3}.$

b) • $x_1 = 2$

$\mathcal{E}_1 : \frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x_2^2}{9} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow x_2^2 = \frac{27}{4}$

dar $x_2 > 0$

$x_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow M\left(2, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \in \mathcal{E}_1.$

• $x_1 = 2$

$\left.\mathcal{E}_2 : \frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x_2^2}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \atop x_2 > 0 \right\} \Rightarrow x_2 = \sqrt{3}$

$N(2, \sqrt{3}) \in \mathcal{E}_2.$

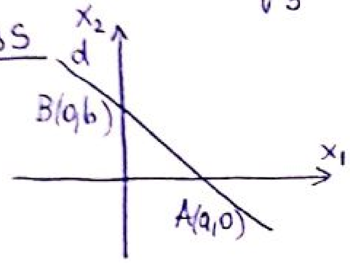
• Ec tg în M la $\mathcal{E}_1$: $\frac{x_1}{16}\cdot 2 + \frac{x_2}{9}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2} = 1$.

d_1: $\frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{\frac{6}{\sqrt{3}}} = 1$

• Ec tg în N la $\mathcal{E}_2$: $\frac{x_1}{16}\cdot 2 + \frac{x_2}{4}\cdot\sqrt{3} = 1$

d_2: $\frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = 1$

OBS



$d: \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 1$

Ec prin tăieturi

c) $d_1 \cap d_2 \cap OX = \{P(8,0)\}$.

Ex3 a) Să se scrie ecuația hiperbolei care trece prin A(1,0) și are asimptotele $d_1 \cup d_2$: $2x_1 \pm x_2 = 0$

b) Precizați coordonatele vârfurilor, focarelor, excentricitatea și ecuațiile directoarelor.

c) Să se scrie ec. tangentei în A la hiperbolă.

Sol

a) $\mathcal{H}: \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$, $a>0, b>0$

$A(1,0) \in \mathcal{H} \Rightarrow \frac{1}{a^2} = 1 \Rightarrow a = 1$

$d_1 \cup d_2$: $x_2 = \pm\frac{b}{a}x_1$ (ec asimptotelor)

$d_1 \cup d_2$: $x_2 = \pm 2x_1$

$\Rightarrow \frac{b}{a} = 2 \Rightarrow b = 2$

$\mathcal{H}: x_1^2 - \frac{x_2^2}{4} = 1$.

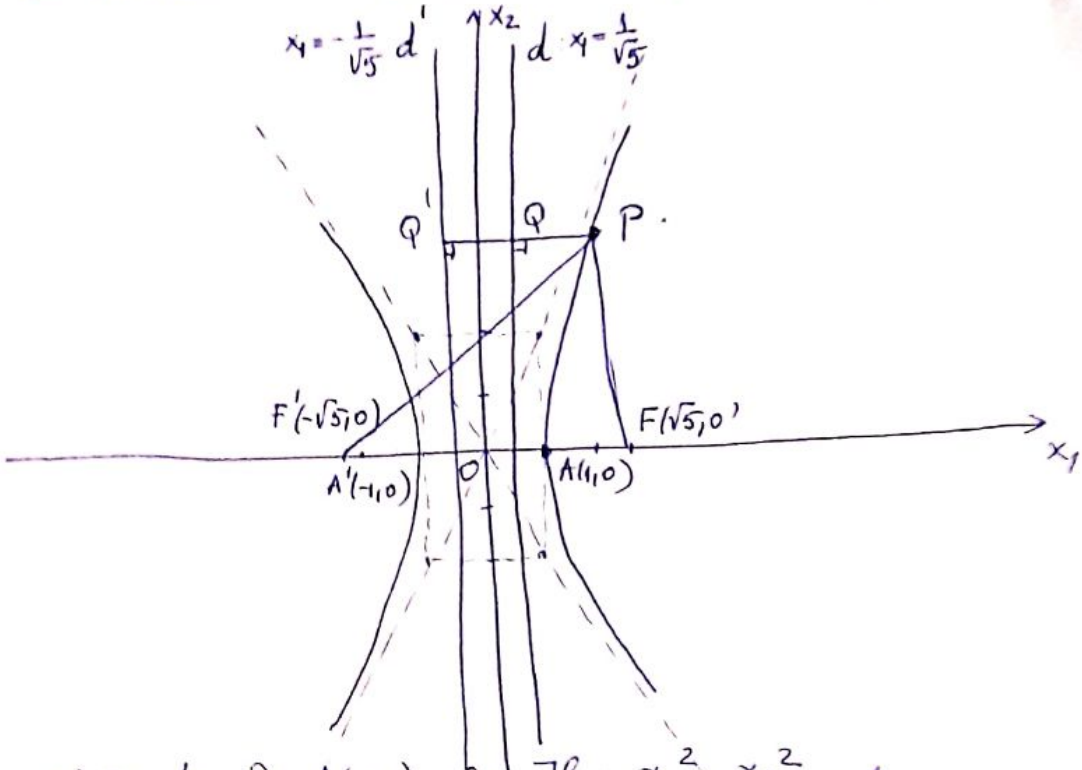
b) $c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

$A(1,0)$, $A'(-1,0)$

$F(\sqrt{5},0)$, $F'(-\sqrt{5},0)$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{1} > 1$

Ec. directoarelor $\overset{-6}{d} \cup \bar{d}'$: $x_1 = \pm\frac{a^2}{c} \Rightarrow x_1 = \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}$



c) Ec. tg. în $A(1,0)$ la $\mathcal{H}$: $x_1^2 - \frac{x_2^2}{4} = 1$.

$x_1 \cdot 1 - \frac{x_2}{4} \cdot 0 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$

Ex4 Fie parabola $\mathcal{P}$: $x_2^2 = 16x_1$ și dreapta d : $x_1 + x_2 - 5 = 0$.

a) Precizați coordonatele focarului și ecuația directoarei

b) Să se scrie ecuațiile tangentelor în A și B la $\mathcal{P}$, unde $\mathcal{P} \cap d = \{A, B\}$.

SOL

a) $\mathcal{P}$: $x_2^2 = 2px_1$, $p \neq 0$. $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$; d_1: $x_1 = -\frac{p}{2}$

$x_2^2 = 16x_1 \Rightarrow p = 8$.

$F(4, 0)$, d_1: $x_1 = -4$ ec. directoarei

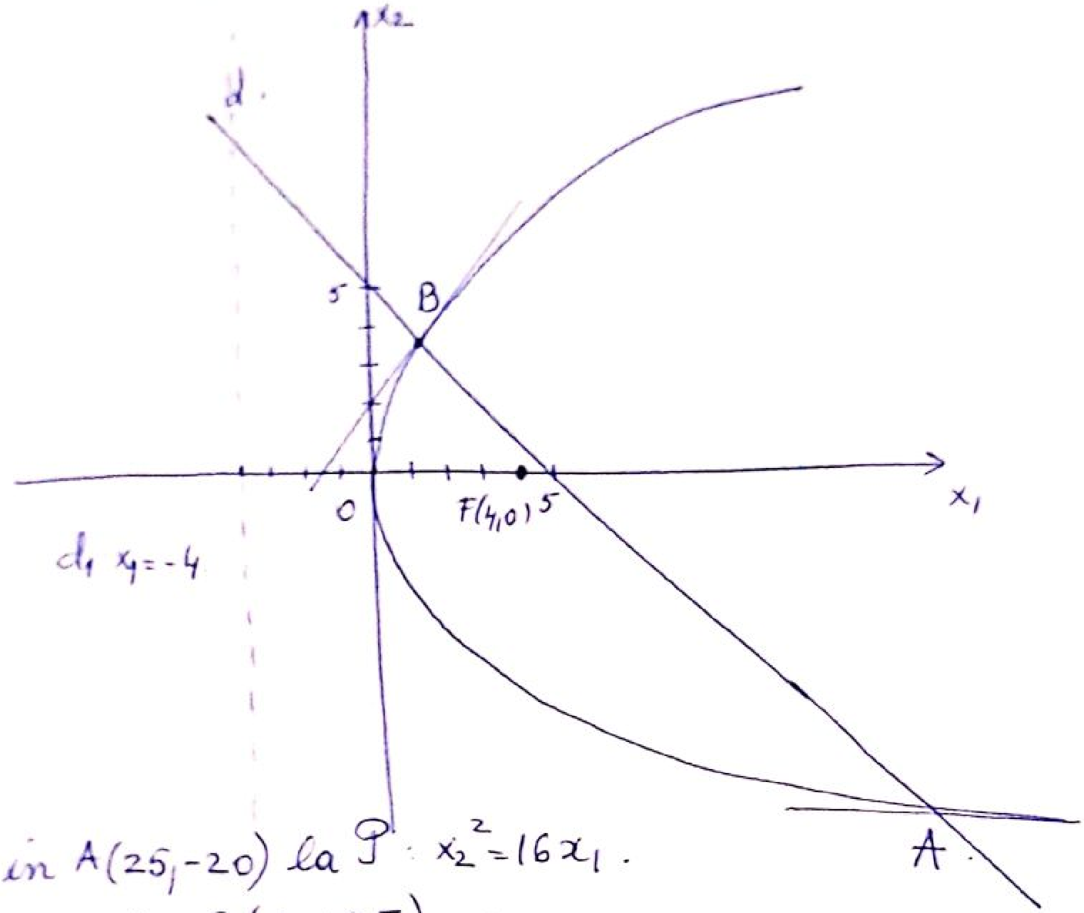
b) $d \cap \mathcal{P}$: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow x_1 = 5 - x_2 \\ x_2^2 = 16x_1 \Rightarrow x_2^2 = 16(5 - x_2) \Rightarrow \end{cases}$

$x_2^2 + 16x_2 - 80 = 0 \Rightarrow (x_2 + 20)(x_2 - 4) = 0$

1) $x_2 = -20 \Rightarrow x_1 = 5+20 = 25 \rightarrow A(25,-20)$

2) $x_2 = 4 \rightarrow x_1 = 5-4 = 1 \rightarrow B(1,4)$

$d: x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{5} = 1$



• Ec tg in $A(25,-20)$ la $\mathcal{P}: x_2^2 = 16x_1$.

$x_2(-20) = 8(x_1+25) \Rightarrow$

$$\boxed{2x_1 + 5x_2 + 50 = 0}$$

• Ec tg in $B(1,4)$ la $\mathcal{P}: x_2^2 = 16x_1$.

$x_2 \cdot 4 = 8(x_1+1) \Rightarrow \boxed{2x_1 - x_2 + 2 = 0}$

Ex5 $(\mathcal{E}_2, (E_2, \langle , \rangle), \varphi)$

Fie conica

Γ $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 18x_1 - 18x_2 + 9 = 0$

Să se aducă la o formă canonică, utilizând izometrii.

SOL $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \end{pmatrix}$

$\delta = \det A = 25 - 16 = 9 \neq 0$ ($\exists!$ centrul)

$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -9 \cdot 9 \neq 0$

(conică nedegenerată)

OBS $\delta > 0 \Rightarrow \Gamma$ elipsă.

Determinăm centrul conicei

$P_0 : \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x_1 + 8x_2 - 18 = 0 \\ 8x_1 + 10x_2 - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 9 \;|\; -5 \\ 4x_1 + 5x_2 = 9 \;|\; 4 \end{cases}$ $\oplus$

$-9x_1 \;/ = -9$

$\Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow P_0(1,1)$.

$\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2\} \xrightarrow[\text{translatie}]{\theta} \mathcal{R}' = \{P_0; e_1, e_2\} \xrightarrow[\text{rotatie}]{\tau} \mathcal{R}'' = \{P_0; e_1', e_2'\}$.

$\theta : X = X' + X_0$, $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\tau : X' = RX''$, $R \in SO(2)$

$\theta(\Gamma) : X'^T A X' + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \Rightarrow 5x_1'^2 + 8x_1'x_2' + 5x_2'^2 - 9 = 0$.

$Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 5x_1'^2 + 8x_1'x_2' + 5x_2'^2$

Aducem Q la o formă canonică, utilizând metoda valorilor proprii

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det A = 0$

$\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda - 9)(\lambda - 1) = 0$.

$\lambda_1 = 9, \ \lambda_2 = 1$

- $V_{\lambda_1} = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid AX = 9X \} = \{ x_1(1,1) \mid x_1 \in \mathbb{R} \}.$

$$(A - 9I_2)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = x_2$ $\quad e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ versor propriu al lui $\lambda_1 = 9$

- $V_{\lambda_2} = \{ x \in \mathbb{R}^2 / AX = X \} = \{ x_2(-1,1), \ x_2 \in \mathbb{R} \}$

$$(A - I_2)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -x_2$, $e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ versor propriu al lui $\lambda_1 = 1$.

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in SO(2), \ \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

$$\tau_0 \theta : X = RX'' + X_0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\tau_0\theta(\Gamma) = \Gamma' : \quad 9x_1''^2 + x_2''^2 - 9 = 0$

Γ, Γ' congruente metric

$$x_1''^2 + \frac{x_2''^2}{9} - 1 = 0 \quad (\text{elipsă}).$$

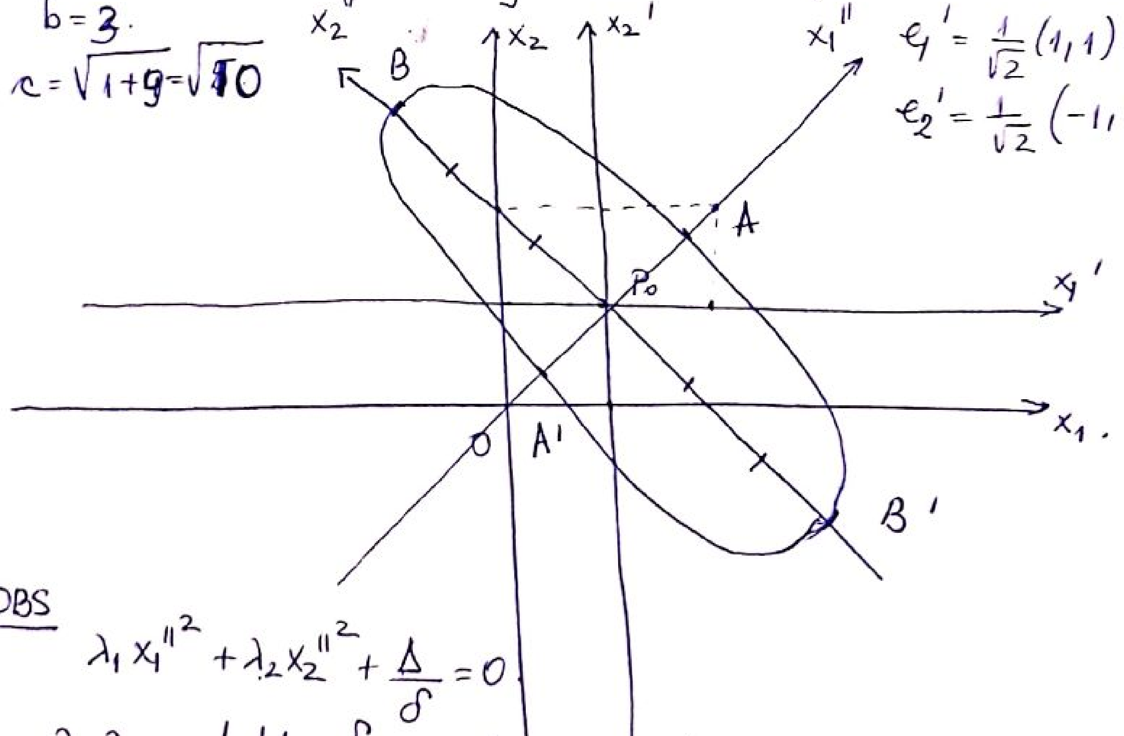
$a = 1$

$b = 3.$

$c = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$



OBS

$$\lambda_1 x_1''^2 + \lambda_2 x_2''^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

$\lambda_1 \lambda_2 = \det A = \delta > 0$ elipsă, $\emptyset$

$\lambda_1 \lambda_2 = \delta < 0$ hiperbolă

Ex Fie în $\mathcal{E}_2$ conica

$\Gamma: f(x_1,x_2) = 3x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_1 + 4x_2 + 4 = 0$

Să se aducă la o formă canonică, efectuând izometrii.

Sol

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -5 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\delta = \det A = 9 - 25 = -16 < 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -5 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-16) \neq 0$$

$\exists!$ centrul P_0, Γ = hiperbolă.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 - 10x_2 + 4 = 0 \\ -10x_1 + 6x_2 + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = -2 & \mid \cdot 3 \\ -5x_1 + 3x_2 = -2 & \mid \cdot 5 \end{cases}$$

$$-16x_1 \quad = -16$$

$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1.$

$P_0(1,1)$ centrul conicei

- $\theta: X = X' + X_0$, $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \theta$ = translație

$\theta(\Gamma): \ X'^T A X' + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \Rightarrow 3x_1'^2 - 10x_1'x_2' + 3x_2'^2 + 8 = 0$

$Q: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \ Q(x) = 3x_1'^2 - 10x_1'x_2' + 3x_2'^2$

$\lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det A = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0.$

$(\lambda - 8)(\lambda + 2) = 0.$

$\lambda_1 = 8, \ \lambda_2 = -2.$

$V_{\lambda_1} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid AX = 8X\} = \{x_1(1,-1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}.$

$$(A - 8I_2)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = -x_1.$ $\quad e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1).$

$V_{\lambda_2} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid AX = -2X\} = \{x_1(1,1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$

$$(A + 2I_2)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = x_2$ $\quad e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

- $\tau : X' = RX''$, $R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in SO(2)$

$\tau \circ \theta(\Gamma)$

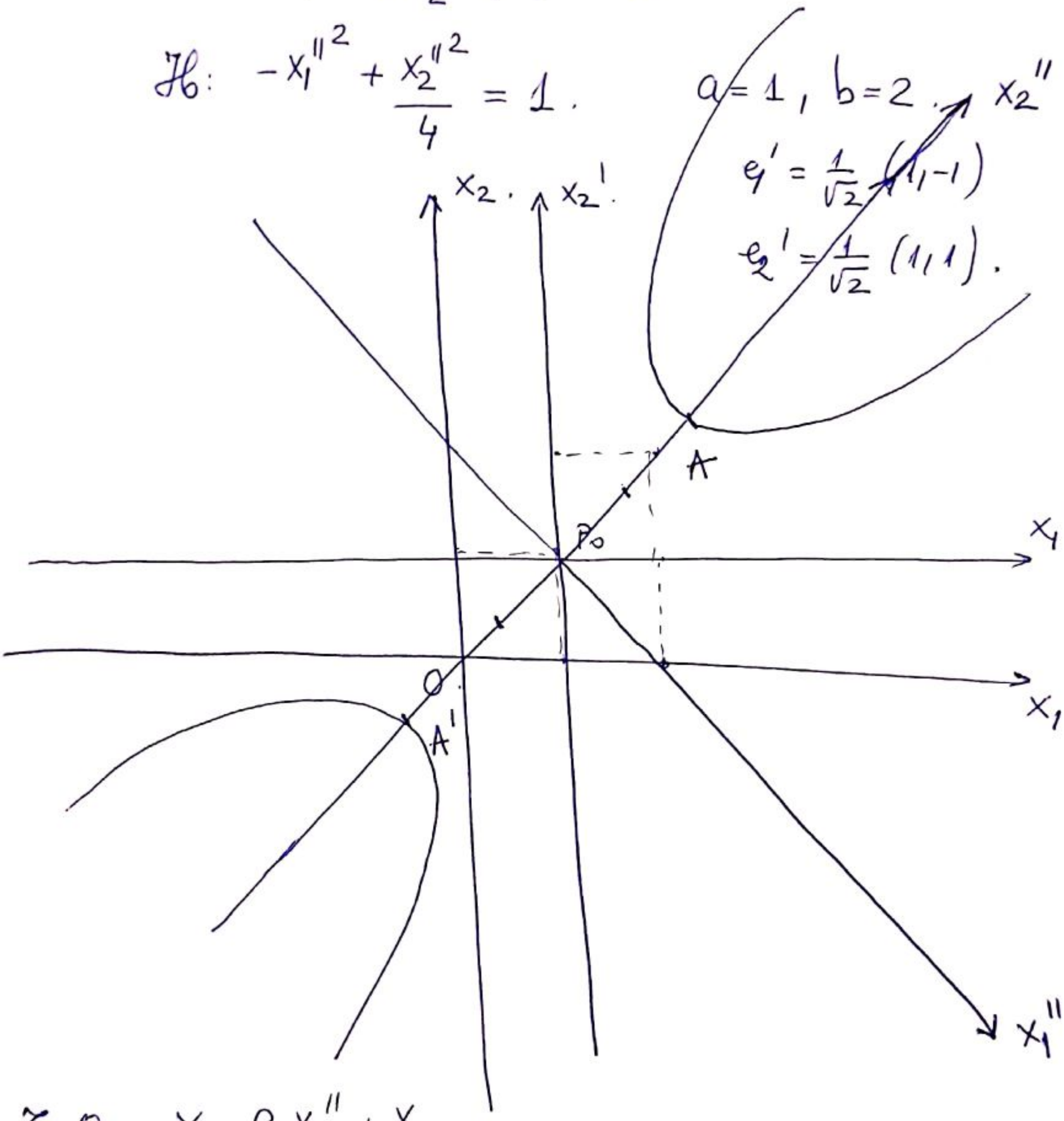
$$8x_1''^2 - 2x_2''^2 + 8 = 0$$

$$\mathcal{H}: \; -x_1''^2 + \frac{x_2''^2}{4} = 1.$$

$a = 1, \; b = 2.$

$e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$

$e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1).$



$\tau \circ \theta : \; X = RX'' + X_0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$