Soluție ”Cadourile lui Moș Crăciun”

Ştefan Popescu

Cerință

(30p) O clasă de elevi este formată din m copii. La această clasă Moș Crăciun aduce n cadouri, fiecare dintre ele având o valoare notată $val_1, val_2, ..., val_n$. Moșul, grăbit fiind, lasă task-ul împărțirii cadourilor pe umerii profesorului de informatică. Acesta își alege următorul obiectiv pentru împărțirea cadourilor: sa maximizeze valoarea cadourilor primite de către copilul care primește cel mai puțin. (Altfel spus, copilul cel mai "vitregit" în urma împărțirii să primească totuși cadouri de o valoare cât mai bună / Să existe un "spread" cât mai bun al cadourilor). În timp ce se gândește la o soluție de implementare, profesorul își amintește de la cursurile de algoritmică din facultate că astfel de probleme de optim sunt NP-hard! Fiind cuprins de groază (dar și de o nostalgie pentru cursurile de algoritmică din facultate) el vă cere vouă ajutorul.

Exemplu: Pentru 3 copii și 6 cadouri cu valorile $3, 4, 12, 2, 4, 6$ o împărțire echitabilă arată astfel: primul copil primește cadourile $1, 2, 4$. Al doilea copil primește cadoul 3. Iar ultimul copil primește cadourile 5 și 6. În acest caz cel mai "vitregit" copil este cel dintâi, care primește cadouri în valoare totală de 9 unități, în timp ce ceilalți doi primesc cadouri în valoare totală de 12, respective 10 unități. Nu există nicio altă configurație mai reușită.

Notații:

OPT – soluția optimă care există: Valoarea totală a cadourilor primite de copilul cel mai "vitregit" în o configurație optima

ALG – soluția oferită de algoritmul vostru: Valoarea totală a cadourilor primite de copilul cel mai "vitregit" în urma algoritmului vostru

$C[k]$ - lista cadourilor primite de către copilul k la finalul algoritmului vostru

$W(K)$ – valoarea totala a cadourilor primite de către copilul k la finalul algoritmului vostru

$val(i)$ – valoarea cadoului i

$Val = \sum_{1 \leq i \leq n} val(i)$ – valoarea totală a cadourilor

Copiii vor fi indexați folosind variabile de forma k, q, k', q', etc... Cadourile vor fi indexate folosind variabile de forma i, j, i', j', etc....

Restricții: Considerăm că $n \geq m$ și că $val(i) \leq \frac{Val}{2m}$ pentru oricare cadou i.

Cerințe:

a) Descrieți un algoritm $\frac{1}{2}$ aproximativ pentru problema cadourilor in complexitate $\mathcal{O}(n \log m)$ **(10p)**

b) Fie k acel copil pentru care $ALG = W(K)$. Fie i ultimul cadou primit de un copil oarecare q $(q \neq k)$. Care este relația între $W(K)$ și $W(Q) - val(i)$? Justificaţi. **(5p)**

c) Pe baza punctului b) arătați că $ALG \geq \frac{Val}{2m}$ **(5p)**

d) Demonstrați că algoritmul descris la punctul a) este $\frac{1}{2}$ aproximativ **(5p)**

e) Dați un exemplu format din minimum 2 copii și 4 cadouri pentru care algoritmul vostru nu găsește soluția optima. Spuneți care este soluția optima. Spuneți care este soluția dată de algoritmul vostru. **(5p)**

Soluție

a) **for** $k \in [1:m]$ **do**: *// initializare*

   $C[k] \leftarrow \emptyset$; $W(K) \leftarrow 0$;

   for $i \in [1:n]$ **do**: *// pentru fiecare cadou* $'i'$; $\mathcal{O}(n)$

   $q \leftarrow k$ cu proprietatea ca W(K) - minima; *//alegem pe cel mai "vitregit" copil;* $\mathcal{O}(\log m)$ *cu minheap sau priority queue*

   $C[q] \leftarrow C[q] \cup \{i\}$ *//adaugam cadoul* $'i'$ *in lista de cadouri ale lui* $'q'$

   $W(Q) \leftarrow W(Q) + val(i)$ *//se actualizeaza valoarea totala a cadourilor lui* $'q'$.

b) Deoarece cadoul i este atribuit copilului q, înseamnă că, la acel moment, q avea cadourile de valoare totală cea mai mică, deci în mod evident mai mică decât cea a lui k. Deci avem relația $W(K) \geq W(Q) - val(i)$. Aceasta poate fi rescrisă ca $W(K) + val(i) \geq W(Q)$

c) Fie k acel copil pentru care $ALG = W(K)$. Vom presupune prin absurd că $W(K) < \frac{Val}{2m}$. Deoarece $W(K) + val(i) \geq W(Q)$ și $val(i) \leq \frac{Val}{2m}$ avem:

$$\begin{aligned}
Val = \sum_{1 \leq q \leq m} W(Q) &= W(K) + \sum_{1 \leq q \leq m}^{q \neq k} W(Q) \\
&\leq W(K) + (m-1)(W(K) + \frac{Val}{2m}) \\
&\leq m * W(K) + (m-1) * \frac{Val}{2m} \\
&< m * W(K) + \frac{Val}{2} \\
&< m * \frac{Val}{2m} + \frac{Val}{2} \\
&< \frac{Val}{2} + \frac{Val}{2} \\
&< Val(!)
\end{aligned}$$

d) Știm că $OPT \leq \frac{Val}{m}$ (cazul unei egalități ar implica un "spread" perfect). Am demonstrat la punctul *c*) că $ALG \geq \frac{Val}{2m}$. Rezultă deci că $2 * ALG \geq \frac{Val}{m} \geq OPT$; Iar în final avem relația dorită: $\mathbf{ALG \geq \frac{1}{2} * OPT}$

e) $m = 2$, $n = 4$; Cadourile au valorile: $2, 3, 1, 6$. Soluția optimă implică faptul că primul copil primește cadoul 4 iar cel de-al doilea cadourile $1, 2, 3$. În acest caz ambii copii primesc cadouri în valoare de 6 unități. Algoritmul nostru va rezulta în alocarea primului copil cadourile $1, 3$, celui de-al doilea copil cadoul 2 iar cadoul 4 oricăruia dintre cei doi. În orice caz, copilul cel mai vitregit primește cadouri în valoare de doar 3 unități.