

Prelucrarea Semnalelor

Laboratorul 2.

Semnale limitate în bandă. Transformata Fourier

1 Semnale limitate în bandă

Semnalele ale căror componente de frecvență sunt 0 sau, mai general, nesemnificative, în afara intervalului $[-B(\text{Hz}), B(\text{Hz})]$ se numesc semnale trece-bandă. Dacă, în plus, frecvențele sunt centrate în jurul lui 0Hz, se numesc semnale trecejos. Limitarea la bandă implică existența unei frecvențe maxime, ceea ce face ca teorema de eșantionare prezentată în laboratorul precedent să se rescrie astfel: frecvența de eșantionare denumită frecvența Nyquist, pentru a evita fenomenul de aliere este $f_s \geq 2B$.

Semnalele centrate în $f_c \neq 0$ pot fi însă eșantionate corect și la frecvențe mai mici decât frecvența Nyquist prin centrarea unei replici în 0. Intervalul $[0, f_c]$ este astfel utilizat eficient. Procedura poartă numele de eșantionare trece-bandă (*bandpass sampling*). Ca orice eșantionare, și aceasta produce replici, iar pentru a evita alierea, este necesar ca acestea să nu se suprapună. Condițiile pentru o eșantionare eficientă sub-Nyquist, pentru un număr m de replici, sunt așadar

$$\frac{2f_c - B}{m} \geq f_s \geq \frac{2f_c + B}{m + 1} \quad (1)$$

$$f_s > 2B \quad (2)$$

2 Transformata Fourier

Transformata Fourier a unui semnal discret $x[n]$ este funcția $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (3)$$

Funcția este periodică de perioadă 2π , motiv pentru care de regulă se operează cu intervalul $\omega \in [-\pi, \pi]$. Alternativ, veți întâlni și notația $X(m)$, având aceeași semnificație.

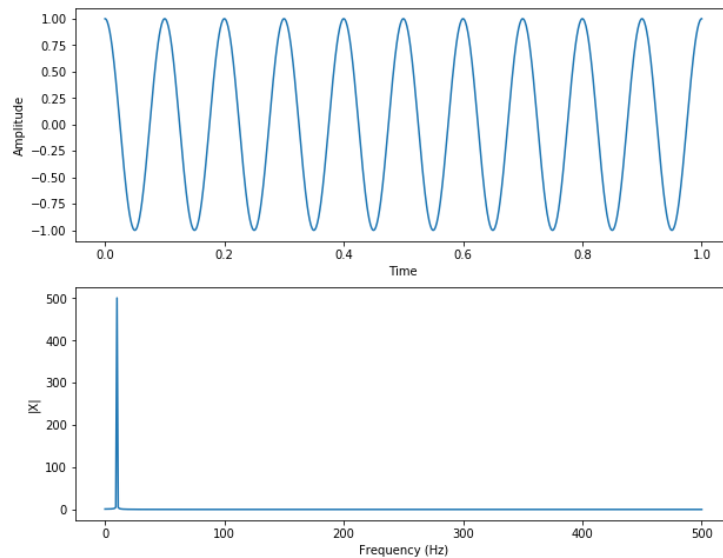


Figure 1: Transformata Fourier a unui semnal sinusoidal

Transformata Fourier este des utilizată pentru a identifica într-un semnal componentele de frecvență. Pentru început, putem inspecta vizual modulul transformatei.

Figura reprezintă un semnal periodic sinusoidal (sus) și transformata Fourier a acestuia (jos). Deoarece semnalul are o singură componentă de frecvență, cea caracteristică, f , funcția Fourier va avea o singură valoare semnificativă, pentru $\omega = f$.

3 Filtru medie alunecătoare

Una dintre cele mai simple metode de filtrare este netezirea semnalului utilizând o medie alunecătoare. Aceasta înlocuiește valorile instantanee ale semnalului cu media semnalului în jurul fiecărui moment de timp. Dimensiunea vecinătății pentru care se calculează media se numește fereastra filtrului.

4 Ghid Python

Pentru acest laborator sunt necesare bibliotecile `numpy`, `matplotlib.pyplot` și `csv`. Transformata fourier se poate obține utilizând funcția

```
X = np.fft.fft(x)
```

Datorită simetriei transformatei, este adesea util să utilizăm doar jumătate din spectru, respectiv $X = X[:N/2]$, unde N reprezintă lungimea semnalului.

Pentru a citi un fișier de tip `csv` și a-l salva într-o variabilă, utilizați secvența de cod

```
with open('file.csv', newline='') as f:
    reader = csv.reader(f)
    data = list(reader)
```

5 Exerciții

1. Frecvențele emise de un contrabas se încadrează între 40Hz și 200Hz. Care este frecvența minimă cu care trebuie eșantionat semnalul trece-bandă provenit din înregistrarea instrumentului, astfel încât semnalul discretizat să conțină toate componentele de frecvență pe care instrumentul le poate produce?
2. Calculați frecvența optimă de eșantionare sub-Nyquist pentru un semnal de bandă $B = 10\text{Hz}$ centrat în jurul lui $f_c = 90\text{Hz}$ pentru următoarele 3 valori posibile ale numărului de replici: a) $m = 1$, b) $m = 2$, c) $m = 4$.
3. Fie un semnal sinusoidal cu frecvență caracteristică $f = 10$, amplitudine unitară și fază nulă, eșantionat la o frecvență de 1000Hz. Considerând un orizont de timp de 1 secundă, utilizați funcția `np.fft.fft()` pentru a obține transformata Fourier a semnalului. Vizualizați grafic modulul transformatei pe o grilă de frecvențe $[0, 500]$, pentru a reproduce Figura 1. Nu uitați de proprietatea de simetrie a transformatei, $|X(\omega)| = |X(-\omega)|$, și utilizați instrucțiunile din Secțiunea 4 pentru a vizualiza doar o singură parte a spectrului.
4. (**Bonus**) Fișierul `trafic.csv` conține date de trafic înregistrate pe o perioadă de 1 săptămână. Frecvența de eșantionare este de 1 oră, iar valorile măsurate reprezintă numărul de vehicule ce trec printr-o anumită locație.
 - (a) Selectați din semnalul dat o porțiune corespunzătoare pentru 3 zile, pe care veți lucra în continuare.
 - (b) Utilizați funcția `np.convolve(x, np.ones(w), 'valid') / w` pentru a realiza un filtru de tip medie alunecătoare și neteziți semnalul obținut anterior. În expresia de mai sus x reprezintă semnalul de filtrat, iar w dimensiunea ferestrei. Legătura dintre operația de convoluție și media alunecătoare o veți întâlni în cursurile următoare.
 - (c) Calculați transformata Fourier a semnalului și, asemenea exercițiului anterior, vizualizați modulul acesteia.