Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Partea a III-a

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Academiei 14, RO 010014, Bucureşti, România
Emailuri: c.muresan@yahoo.com, cmuresan11@gmail.com

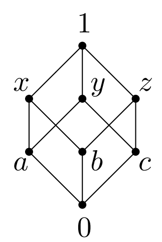
Abstract

Textul de faţă conţine o colecţie de probleme de diferite tipuri date de autoare la examenul aferent cursului de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti.

Peste tot în acest text, prescurtarea ddacă va semnifica "dacă şi numai dacă".

1 Lista 1 de subiecte

Exerciţiul 1.1. *Se consideră algebra Boole $\mathcal{L}_2^3$ (cubul), reprezentată prin diagrama Hasse de mai jos. Să se determine algebra Boole factor asociată filtrului generat de x, prin enumerarea elementelor ei. Să se demonstreze că această algebră Boole este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^2$ (rombul).*



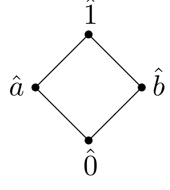
Amintim o proprietate importantă a algebrelor Boole, numită legea de reziduaţie *(a se vedea Observaţia 3.2 din Anexă): pentru orice algebră Boole B şi orice elemente $\alpha, \beta, \gamma \in B$, are loc echivalenţa: $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta \leq \gamma$.*

Rezolvare: Filtrul generat de x în $\mathcal{L}_2^3$ este $< x >= \{\alpha \in \mathcal{L}_2^3 | x \leq \alpha\} = \{x, 1\}$. Congruenţa asociată acestui filtru este $\sim_{<x>} \subseteq (\mathcal{L}_2^3)^2$, definită prin: pentru orice $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_2^3$, $\alpha \sim_{<x>} \beta$ ddacă, prin definiţie, $\alpha \leftrightarrow \beta \in < x >$, adică, explicitând definiţia operaţiei $\leftrightarrow$, $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \in < x >$, ceea ce, conform descrierii de mai sus a filtrului $< x >$, este echivalent cu $x \leq (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$, iar definiţia operaţiei $\wedge = \inf$ ne asigură de faptul că această inegalitate este echivalentă cu următoarele două: $x \leq \alpha \rightarrow \beta$ şi $x \leq \beta \rightarrow \alpha$. Conform echivalenţei amintite în enunţ şi demonstrate în Observaţia 3.2 din Anexă, aceste două inegalităţi sunt echivalente cu: $x \wedge \alpha \leq \beta$ şi $x \wedge \beta \leq \alpha$, iar acestea sunt echivalente cu: $x \wedge \alpha \leq x \wedge \beta$ şi $x \wedge \beta \leq x \wedge \alpha$, după cum se poate demonstra imediat prin dublă implicaţie. Aceste ultime două inegalităţi sunt echivalente cu egalitatea $x \wedge \alpha = x \wedge \beta$. Aşadar, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_2^3$, $\alpha \sim_{<x>} \beta$ ddacă $x \wedge \alpha = x \wedge \beta$.

Pentru orice $\alpha \in \mathcal{L}_2^3$, vom nota cu $\hat{\alpha}$ clasa de echivalenţă a elementului α în algebra Boole factor $\mathcal{L}_2^3 / < x >$, anume $\hat{\alpha} = \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | x \wedge \alpha = x \wedge \beta\}$. Aşadar, avem:

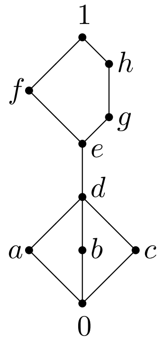
$\hat{0} = \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | x \wedge \beta = 0\} = \{0, c\} = \hat{c}$;
$\hat{a} = \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | x \wedge \beta = a\} = \{a, y\} = \hat{y}$;
$\hat{b} = \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | x \wedge \beta = b\} = \{b, z\} = \hat{z}$;
$\hat{x} = \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | x \wedge \beta = x\} = \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | x \leq \beta\} =< x >= \{x, 1\} = \hat{1}$.

Prin urmare, $\mathcal{L}_2^3 / < x > = \{\hat{0}, \hat{a}, \hat{b}, \hat{1}\}$, deci această algebră Boole are 4 elemente, şi teorema de reprezentare a lui Stone pentru cazul particular al algebrelor Boole finite ne asigură de faptul că $\mathcal{L}_2^3 / < x >$ este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^2$. Diagrama Hasse a acestei algebre Boole factor este următoarea:

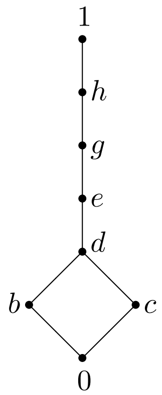


Exerciţiul 1.2. *Să se construiască o latice cu* 10 *elemente care să aibă ca sublatici disjuncte pentagonul şi diamantul şi să i se pună în evidenţă o sublatice distributivă cu* 8 *elemente.*

Rezolvare: Fie laticea $L = \{0, a, b, c, d, e, f, g, h, 1\}$, cu următoarea diagramă Hasse:

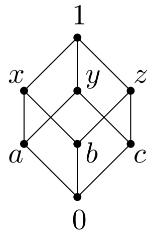


L are 10 elemente şi este chiar suma directă dintre diamant şi pentagon. Observăm că submulţimea cu 8 elemente $M = \{0, b, c, d, e, g, h, 1\} = L \setminus \{a, f\}$ a lui L este o sublatice a lui L, pentru că este închisă la supremumul şi infimumul de două elemente, adică, pentru orice $\alpha, \beta \in M$, au loc: $\alpha \vee \beta = \sup\{\alpha, \beta\} \in M$ şi $\alpha \wedge \beta = \inf\{\alpha, \beta\} \in M$. Iată diagrama Hasse a laticii M, din care se observă că nici diamantul, nici pentagonul nu sunt sublatici ale lui M, prin urmare un rezultat din curs ne asigură de faptul că M este latice distributivă:



2 Lista 2 de subiecte

Exerciţiul 2.1. *Se consideră algebra Boole $\mathcal{L}_2^3$ (cubul), reprezentată prin diagrama Hasse de mai jos. Să se determine algebra Boole factor asociată* *filtrului generat de a, prin enumerarea elementelor ei. Să se demonstreze că această algebră Boole este izomorfă cu $\mathcal{L}_2$ (algebra Boole standard).*



*Ca şi în Exerciţiul 1.1, facem trimitere la Observaţia 3.2 din Anexă (*legea de reziduaţie*).*

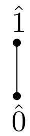
Rezolvare: Filtrul generat de a în $\mathcal{L}_2^3$ este $< a >= \{\alpha \in \mathcal{L}_2^3 | a \leq \alpha\} = \{a, x, y, 1\}$. Mai departe, rezolvarea decurge la fel ca aceea a Exerciţiului 1.1.

Pentru orice $\alpha \in \mathcal{L}_2^3$, vom nota cu $\hat{\alpha}$ clasa de echivalenţă a elementului α în algebra Boole factor $\mathcal{L}_2^3/{< a >}$. La fel ca în Exerciţiul 1.1, se arată că, pentru orice $\alpha \in \mathcal{L}_2^3$, $\hat{\alpha} = \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | a \wedge \alpha = a \wedge \beta\}$. Aşadar, avem:

$\hat{0} = \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | a \wedge \beta = 0\} = \{0, b, c, z\} = \hat{b} = \hat{c} = \hat{z} = \mathcal{L}_2^3 \setminus < a >$;

$\hat{a} = \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | a \wedge \beta = a\} = \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | a \leq \beta\} =< a >= \{a, x, y, 1\} = \hat{x} = \hat{y} = \hat{1}$.

Prin urmare, $\mathcal{L}_2^3/{< a >} = \{\hat{0}, \hat{1}\}$, deci această algebră Boole are 2 elemente, şi teorema de reprezentare a lui Stone pentru cazul particular al algebrelor Boole finite ne asigură de faptul că $\mathcal{L}_2^3/{< a >}$ este izomorfă cu $\mathcal{L}_2$. Diagrama Hasse a acestei algebre Boole factor este următoarea:



Exerciţiul 2.2. *Considerăm sistemul formal al calculului propoziţional clasic, în care notăm cu E mulţimea enunţurilor. Să se demonstreze semantic următoarea regulă de deducţie:*

$$\frac{\Sigma_1 \cup \{\varphi\} \vdash \psi \rightarrow \chi; \Sigma_2 \cup \{\psi\} \vdash \chi \rightarrow \varphi}{\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \vdash (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\chi \wedge \psi)},$$

pentru orice mulţimi de enunţuri $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq E$ şi pentru orice enunţuri $\varphi, \psi, \chi \in E$.

Rezolvare: Conform teoremei de completitudine tare, este suficient să demonstrăm că: dacă $\Sigma_1 \cup \{\varphi\} \vDash \psi \to \chi$ şi $\Sigma_2 \cup \{\psi\} \vDash \chi \to \varphi$, atunci $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \vDash (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\chi \wedge \psi)$.

Presupunem aşadar că $\Sigma_1 \cup \{\varphi\} \vDash \psi \to \chi$ şi $\Sigma_2 \cup \{\psi\} \vDash \chi \to \varphi$.

Fie V mulţimea variabilelor calculului propoziţional clasic, $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$ algebra Boole standard şi h o interpretare care este un model pentru mulţimea de enunţuri $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, adică o funcţie $h : V \to \mathcal{L}_2$ astfel încât $h \vDash \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Ştim că, dată h, există o unică funcţie $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ care restricţionată la V este egală cu h şi care comută cu $\neg$ şi $\to$, unde $\neg$ şi $\to$ pe E sunt conectori logici, iar $\neg$ şi $\to$ pe $\mathcal{L}_2$ sunt operaţii de algebră Boole. Faptul că $h \vDash \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, adică h este un model pentru mulţimea de enunţuri $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, adică h satisface $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, semnifică, prin definiţie, că $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Avem de demonstrat că $\tilde{h}((\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\chi \wedge \psi)) = 1$, ceea ce este echivalent cu faptul că $(\tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)) \leftrightarrow (\tilde{h}(\chi) \wedge \tilde{h}(\psi)) = 1$, egalitate care la rândul ei este echivalentă cu $\tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi) = \tilde{h}(\chi) \wedge \tilde{h}(\psi)$ (a se vedea proprietăţile algebrelor Boole pentru această ultimă echivalenţă).

Cazul 1: Dacă $\tilde{h}(\psi) = 0$, atunci $\tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi) = 0 = \tilde{h}(\chi) \wedge \tilde{h}(\psi)$.

Cazul 2: Dacă $\tilde{h}(\psi) = 1$, atunci, cum, prin alegerea lui h, avem că $h \vDash \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ şi deci în particular $h \vDash \Sigma_2$, rezultă că $h \vDash \Sigma_2 \cup \{\psi\}$. Prin ipoteză, $\Sigma_2 \cup \{\psi\} \vDash \chi \to \varphi$. În consecinţă, $\tilde{h}(\chi \to \varphi) = 1$, adică $\tilde{h}(\chi) \to \tilde{h}(\varphi) = 1$, ceea ce este echivalent cu $\tilde{h}(\chi) \leq \tilde{h}(\varphi)$, conform proprietăţilor algebrelor Boole.

Cazul 2.1: Dacă, în plus faţă de ipoteza $\tilde{h}(\psi) = 1$, avem că $\tilde{h}(\varphi) = 0$, atunci relaţia $\tilde{h}(\chi) \leq \tilde{h}(\varphi)$ de mai sus implică $\tilde{h}(\chi) = 0$ şi prin urmare $\tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi) = 0 = \tilde{h}(\chi) \wedge \tilde{h}(\psi)$.

Cazul 2.2: Dacă, în plus faţă de ipoteza $\tilde{h}(\psi) = 1$, avem că $\tilde{h}(\varphi) = 1$, atunci, cum $h \vDash \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ şi deci în particular $h \vDash \Sigma_1$, rezultă că $h \vDash \Sigma_1 \cup \{\varphi\}$. Prin ipoteză, $\Sigma_1 \cup \{\varphi\} \vDash \psi \to \chi$. În consecinţă, $\tilde{h}(\psi \to \chi) = 1$, adică $\tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\chi) = 1$, ceea ce este echivalent cu $\tilde{h}(\psi) \leq \tilde{h}(\chi)$, conform proprietăţilor algebrelor Boole. Dar $\tilde{h}(\psi) = 1$, conform ipotezei cazului 2. Rezultă că $\tilde{h}(\chi) = 1$ şi deci $\tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi) = 1 = \tilde{h}(\chi) \wedge \tilde{h}(\psi)$.

În concluzie, pentru orice interpretare h care este model pentru $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, are loc $\tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi) = \tilde{h}(\chi) \wedge \tilde{h}(\psi)$, ceea ce, precum am observat la începutul rezolvării, este echivalent cu $\tilde{h}((\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\chi \wedge \psi)) = 1$. Întrucât h a fost aleasă arbitrar dintre interpretările care satisfac $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, conchidem că $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \vDash (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\chi \wedge \psi)$, şi regula de deducţie din enunţ este demonstrată.

3 Anexă

Lema 3.1. *Fie L o latice şi $a, b, x \in L$ astfel încât $a \leq b$. Atunci: $a \vee x \leq b \vee x$ şi $a \wedge x \leq b \wedge x$.*

Demonstraţie: Din definiţia relaţiei de ordine într-o latice (a se vedea demonstraţia echivalenţei celor două definiţii ale laticii), avem echivalenţa: $a \leq b$ ddacă $a \vee b = b$. Rezultă că $(a \vee x) \vee (b \vee x) = a \vee x \vee b \vee x = a \vee b \vee x \vee x = a \vee b \vee x = (a \vee b) \vee x = b \vee x$. Am folosit asociativitatea, comutativitatea şi idempotenţa operaţiei $\vee$, precum şi egalitatea $a \vee b = b$ de mai sus. Aşadar, am obţinut egalitatea $(a \vee x) \vee (b \vee x) = b \vee x$, care, în conformitate cu definiţia relaţiei de ordine într-o latice, este echivalentă cu inegalitatea $a \vee x \leq b \vee x$.

Tot din definiţia relaţiei de ordine într-o latice, avem echivalenţa: $a \leq b$ ddacă $a \wedge b = a$. Rezultă că $(a \wedge x) \wedge (b \wedge x) = a \wedge x \wedge b \wedge x = a \wedge b \wedge x \wedge x = a \wedge b \wedge x = (a \wedge b) \wedge x = a \wedge x$. Am folosit asociativitatea, comutativitatea şi idempotenţa operaţiei $\wedge$, precum şi egalitatea $a \wedge b = a$ de mai sus. Aşadar, am obţinut egalitatea $(a \wedge x) \wedge (b \wedge x) = a \wedge x$, care, în conformitate cu definiţia relaţiei de ordine într-o latice, este echivalentă cu inegalitatea $a \wedge x \leq b \wedge x$.

Observaţia 3.2 (Legea de reziduaţie). *Fie B o algebră Boole. Atunci, pentru orice elemente $\alpha, \beta, \gamma \in B$, are loc echivalenţa: $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta \leq \gamma$.*

Demonstraţie: Vom demonstra echivalenţa din enunţ prin dublă implicaţie. A se vedea mai jos o a doua demonstraţie.
"$\Leftarrow$": Dacă $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$, atunci, conform Lemei 3.1, luând supremumul dintre fiecare membru al acestei inegalităţi şi $\overline{\beta}$, obţinem: $(\alpha \wedge \beta) \vee \overline{\beta} \leq \gamma \vee \overline{\beta}$. În această inegalitate aplicăm distributivitatea unei algebre Boole şi definiţia implicaţiei într-o algebră Boole, şi obţinem inegalitatea echivalentă: $(\alpha \vee \overline{\beta}) \wedge (\beta \vee \overline{\beta}) \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică $(\alpha \vee \overline{\beta}) \wedge 1 \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică $\alpha \vee \overline{\beta} \leq \beta \rightarrow \gamma$, de unde, întrucât $\alpha \leq \sup\{\alpha, \overline{\beta}\} = \alpha \vee \overline{\beta}$ şi aplicând tranzitivitatea unei relaţii de ordine, rezultă: $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$.
"$\Rightarrow$": Dacă $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică, explicitând definiţia implicaţiei într-o algebră Boole, $\alpha \leq \overline{\beta} \vee \gamma$, atunci, conform Lemei 3.1, luând infimumul dintre fiecare membru al acestei inegalităţi şi β, obţinem: $\alpha \wedge \beta \leq (\overline{\beta} \vee \gamma) \wedge \beta$, adică, aplicând distributivitatea unei algebre Boole, $\alpha \wedge \beta \leq (\overline{\beta} \wedge \beta) \vee (\gamma \wedge \beta)$, adică $\alpha \wedge \beta \leq 0 \vee (\gamma \wedge \beta)$, adică $\alpha \wedge \beta \leq \gamma \wedge \beta$. Aplicând în această ultimă inegalitate faptul că $\gamma \wedge \beta = \inf\{\gamma, \beta\} \leq \gamma$ şi tranzitivitatea unei relaţii de ordine, obţinem: $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$.

Lema 3.3. *Fie B o algebră Boole şi $x, y, z \in B$. Atunci:*

(i) $x = y$ *ddacă* $\overline{x} = \overline{y}$*;*

(ii) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ *şi* $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ *(*legile lui de Morgan*);*

(iii) $x \leq y$ *ddacă* $x \rightarrow y = 1$ *(de unde rezultă imediat că:* $x = y$ *ddacă* $x \leftrightarrow y = 1$*);*

(iv) $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \wedge y) \rightarrow z = y \rightarrow (x \rightarrow z)$*.*

Demonstraţie: Punctul (i) este imediat, echivalenţa fiind demonstrată prin dublă implicaţie astfel: $x = y$ implică $\overline{x} = \overline{y}$ implică $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}}$, ceea ce este echivalent cu $x = y$. Am folosit unicitatea complementului şi idempotenţa operaţiei de complementare, care rezultă tot din unicitatea complementului într-o algebră Boole (chiar în orice latice distributivă cu 0 şi 1, unde nu este asigurată existenţa complementului, însă).

Legile lui de Morgan (punctul (ii)) se demonstrează imediat aplicând definiţia complementului şi unicitatea lui pentru orice element al unei algebre Boole. Mai precis, prima relaţie se demonstrează arătând că elementul $\overline{x} \wedge \overline{y}$ satisface cele două relaţii care definesc complementul lui $x \vee y$ (anume disjuncţia lui cu $x \vee y$ este egală cu 1 şi conjuncţia lui cu $x \vee y$ este egală cu 0). Se procedează la fel pentru cealaltă relaţie.
(iii) Aplicând Lema 3.1, obţinem: dacă $x \leq y$, atunci $x \wedge \overline{y} \leq y \wedge \overline{y} = 0$, prin urmare $x \wedge \overline{y} = 0$; reciproc, folosind distributivitatea unei algebre Boole, obţinem: dacă $x \wedge \overline{y} = 0$, atunci $y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge \overline{y}) = (y \vee x) \wedge (y \vee \overline{y}) = (y \vee x) \wedge 1 = y \vee x$, aşadar $y = y \vee x$, adică $x \leq y$, conform definiţiei lui $\leq$. Am obţinut: $x \leq y$ ddacă $x \wedge \overline{y} = 0$. Acum aplicăm punctele (i) şi (ii) (legile lui de Morgan) şi obţinem: $x \leq y$ ddacă $x \wedge \overline{y} = 0$ ddacă $\overline{x \wedge \overline{y}} = \overline{0}$ ddacă $\overline{x} \vee \overline{\overline{y}} = 1$ ddacă $\overline{x} \vee y = 1$ ddacă $x \rightarrow y = 1$, conform definiţiei implicaţiei.
(iv) Aplicăm definiţia implicaţiei şi punctul (ii) (legile lui de Morgan): $x \rightarrow (y \rightarrow z) = \overline{x} \vee \overline{y} \vee z = \overline{x \wedge y} \vee z = (x \wedge y) \rightarrow z$, iar ultima egalitate din enunţ rezultă din comutativitatea lui $\wedge$ şi prima egalitate din enunţ.

Demonstraţia a doua pentru legea de reziduaţie (Observaţia 3.2): Fie $\alpha, \beta, \gamma \in B$. Conform Lemei 3.3, punctele (iii) şi (iv), avem: $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$ ddacă $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) = 1$ ddacă $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma = 1$ ddacă $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$.