• Seminarul 14 27.05.2020.

Aducerea la formă canonică a conicelor ($\delta=0$)
Cuadrice studiate pe ecuații reduse

EX1. În planul euclidian $\mathcal{E}_2$ se consideră conica:

$\Gamma: f(x) = 3x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 - 2 = 0$

Să se aducă la o formă canonică, utilizând izometrii.

SOL

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\delta = \det A = 0, \quad \Delta = -12 \neq 0$ (conică nedegenerată)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-6) = -12$$

$Q: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Q(x) = 3x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2$

Polinomul caracteristic: $\lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det A = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 6, \ \lambda_2 = 0$

• $V_{\lambda_1} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid AX = 6X\} = \{x_1(1,-1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$

$$(A - 6I_2)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1$

$e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$

• $V_{\lambda_2} = \{x \in \mathbb{R}^2 / AX = 0\} = \{x_1(1,1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ $\qquad e = \frac{c}{a}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = x_2$

$e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$\theta: X = RX', \quad R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in SO(2)$

rotație

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1' + x_2') \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1' + x_2') \end{cases}$$

$\theta(\Gamma): \quad 6x_1'^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}(x_1' + x_2') + \frac{2}{\sqrt{2}}(-x_1' + x_2') - 2 = 0$

$6x_1'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}x_2' - 2 = 0 \Rightarrow 3x_1'^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x_2' - 1 = 0$

$\theta(\Gamma)$ $\quad 3x_1'^2 + \sqrt{2}\left(x_2' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$

$$\begin{cases} x_1'' = x_1' \\ x_2'' = x_2' - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$\tau: \ X' = X'' + X_0 \ , \quad X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

translație.

$\tau\circ\theta(\Gamma): \ 3x_1''^2 + \sqrt{2}x_2'' = 0$. (parabolă).

$\tau\circ\theta: \ X = RX' = R(X'' + X_0) = RX'' + RX_0$

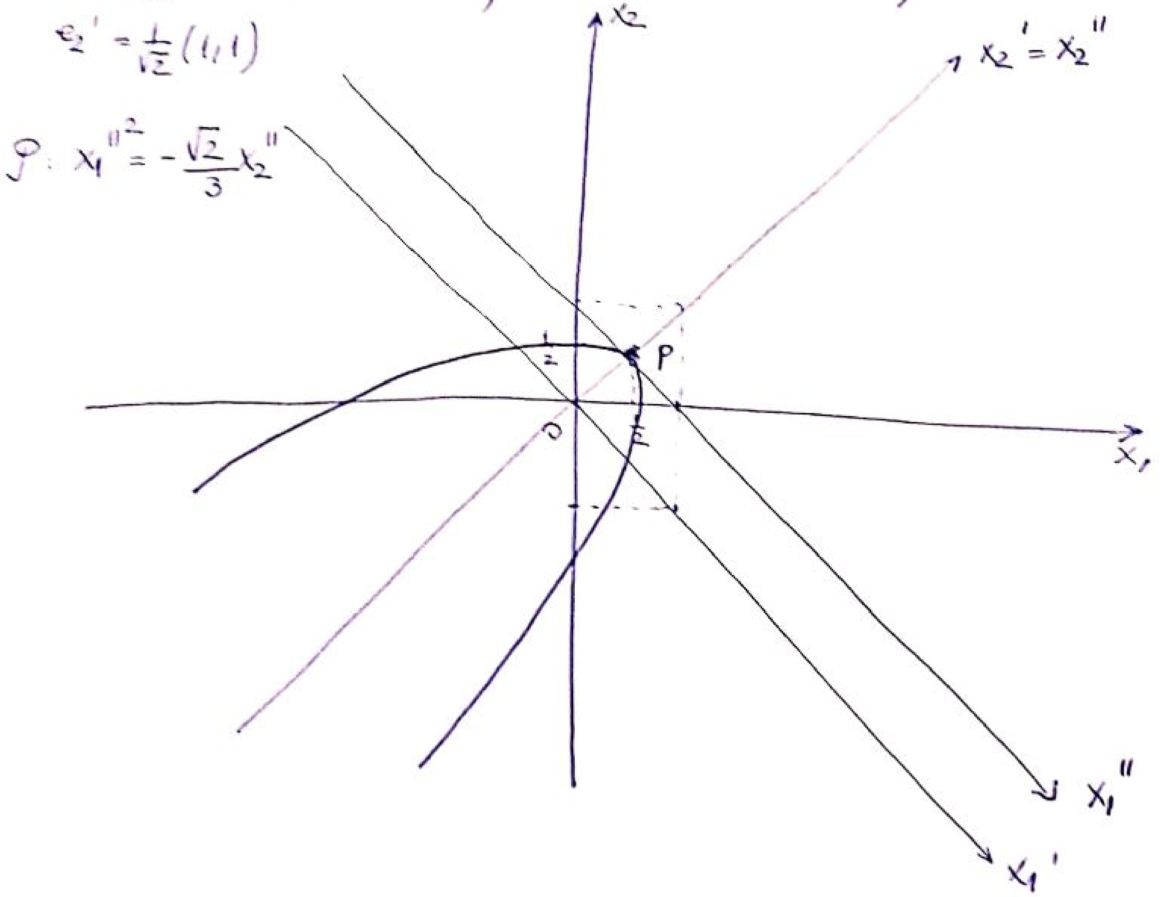
$RX_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (coord. în raport cu reperul $\mathcal{R}$).

$\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2\} \xrightarrow[\text{rotație}]{\theta} \mathcal{R}' = \{O; e_1', e_2'\} \xrightarrow[\text{translație}]{\tau} \mathcal{R}'' = \{P_0; e_1', e_2'\}$

$e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$

$e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$



2. În planul euclidian $\mathcal{E}_2$ se consideră conica

$\Gamma \;\; f(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 - 3 = 0$

Să se aducă la forma canonică, utilizând izometrii.

SOL

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$\delta = 0$, $\Delta = 0$ (conică degenerată).

$Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ (forma pătratică)

Polinomul caracteristic: $\lambda^2 - 2\lambda = 0$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$

- $V_{\lambda_1} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid AX = 2X\} = \{x_1(1,1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$

$$(A - 2I_2)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = x_2$

$e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$.

- $V_{\lambda_2} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid AX = 0\} = \{x_2(-1,1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -x_2$

$e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$

$\theta : X = RX'$, $R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SO(2)$.

rotație

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1' - x_2') \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1' + x_2') \end{cases}$$

$\theta(\Gamma) : \; 2x_1'^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}(x_1' - \cancel{x_2'}) + \frac{2}{\sqrt{2}}(x_1' + \cancel{x_2'}) - 3 = 0$.

$\theta(\Gamma) : \; 2x_1'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}x_1' - 3 = 0 \Rightarrow x_1'^2 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}x_1' - \frac{3}{2} = 0$

$\left(x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2 = 0$

$$\begin{cases} x_1'' = x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_2'' = x_2' \end{cases}$$

$\tau : X' = X'' + X_0$, $X_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\tau \circ \theta(\Gamma) : \; x_1''^2 - 2 = 0 \Rightarrow x_1'' = \pm\sqrt{2}$ (drepte paralele)

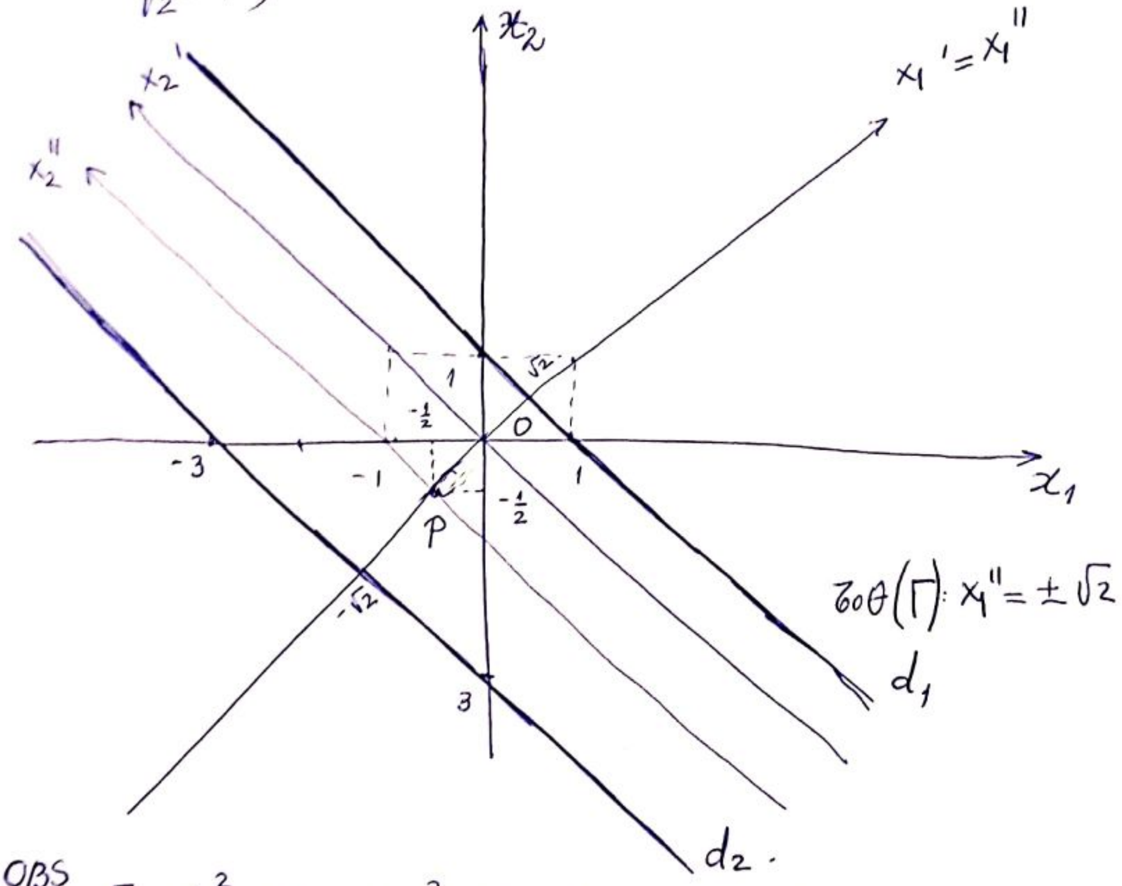
$\tau \circ \theta : \quad X = RX' = R(X'' + X_0) = RX'' + RX_0$

$RX_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} - \\ -1 \end{pmatrix}$

$P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (coord. în raport cu reperul $\mathcal{R}$)

$\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2\} \xrightarrow[\text{rotație}]{\theta} \mathcal{R}' = \{O; e_1', e_2'\} \xrightarrow[\text{translație}]{\tau} \mathcal{R}'' = \{P; e_1', e_2'\}$

$\begin{cases} e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \\ e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) \end{cases}$




OBS

a) $\Gamma : x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 - 3 = 0$

$\Gamma : (x_1 + x_2 + 3)(x_1 + x_2 - 1) = 0.$

$d_1 : \quad x_1 + x_2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{1} = 1$

$d_2 : \quad x_1 + x_2 + 3 = 0 \Rightarrow \frac{x_1}{-3} + \frac{x_2}{-3} = 1$

b) $\Gamma$, $\tau \circ \theta(\Gamma)$ conice congruente metric
$\tau \circ \theta =$ izometrie.

# Cuadrice studiate pe ecuații reduse.

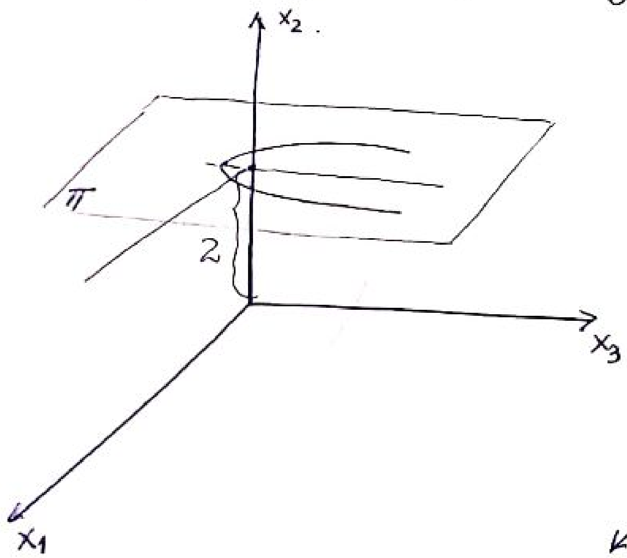
**Ex.** În spațiul euclidian $\mathcal{E}_3$ se consideră paraboloidul hiperbolic $\mathcal{P}_h: \frac{x_1^2}{6} - \frac{x_2^2}{4} = 3x_3$ și planul $\pi: x_2 = 2$.

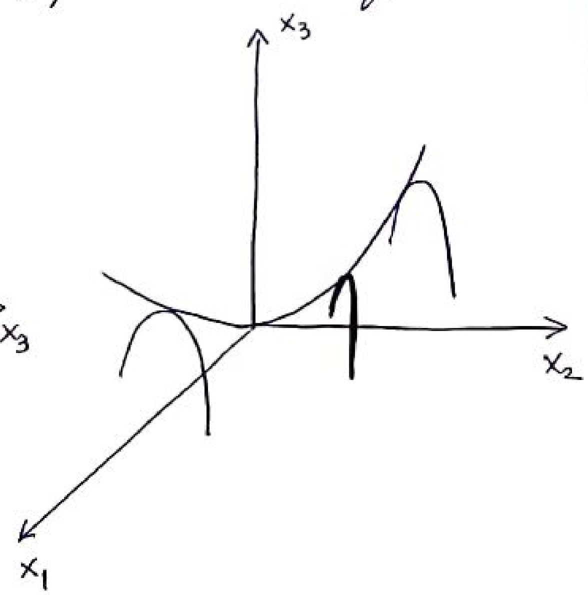
Să se afle intersecția dintre $\pi$ și $\mathcal{P}_h$.

**SOL**

$\mathcal{P}_h \cap \pi: \quad \frac{x_1^2}{6} - \frac{4}{4} = 3x_3 \Rightarrow \frac{x_1^2}{6} = 3x_3 + 1$

$x_1^2 = 6(3x_3 + 1) = 18\left(x_3 + \frac{1}{3}\right)$; Parabolă în planul $\pi$



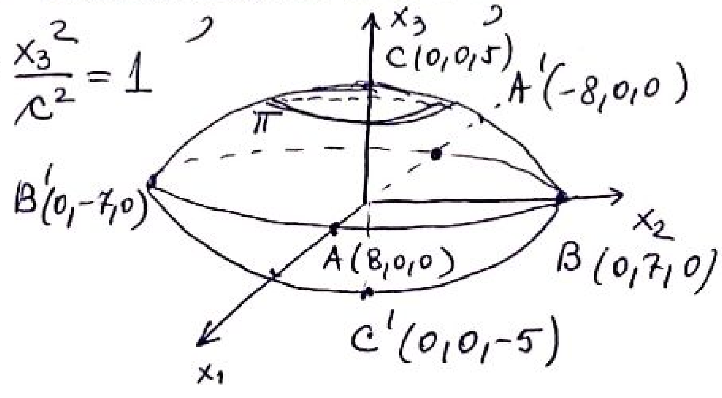




**Ex.** În spațiul euclidian $\mathcal{E}_3$ se consideră elipsoidul $\mathcal{E}: \frac{x_1^2}{64} + \frac{x_2^2}{49} + \frac{x_3^2}{25} - 1 = 0$ și planul $\pi: x_3 = 4$.

Să se determine intersecția dintre $\pi$ și $\mathcal{E}$.

**SOL** $\mathcal{E}: \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$

$a = 8, b = 7, c = 5$



$$\mathcal{E} \cap \pi \quad \frac{x_1^2}{64} + \frac{x_2^2}{49} + \underbrace{\frac{16}{25} - 1}_{-\frac{9}{25}} = 0 \Rightarrow$$

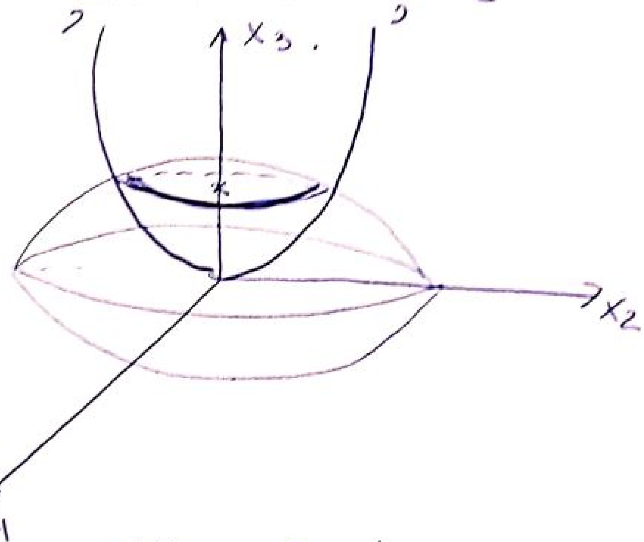
$$\frac{x_1^2}{64} + \frac{x_2^2}{49} = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{x_1^2}{\frac{64 \cdot 25}{9}} + \frac{x_2^2}{\frac{49 \cdot 25}{9}} = 1$$

(elipsă în planul $\pi$)

EX În spațiul euclidian $\mathcal{E}_3$ se consideră elipsoidul $\mathcal{E}: \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$, $a>0, b>0, c>0$ și paraboloidul eliptic $\mathcal{P}_e: \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3$.

Să se determine intersecția dintre $\mathcal{E}$ și $\mathcal{P}_e$.

SOL




$\mathcal{E} \cap \mathcal{P}_e$:

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \\ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x_3^2}{c^2} + 2x_3 = 1$$

$$x_3^2 + 2x_3 c^2 - c^2 = 0 \Rightarrow (x_3 + c^2)^2 = c^2 + c^4$$

$$\Rightarrow x_3 + c^2 = \pm c\sqrt{1+c^2} \Rightarrow x_3 = -c^2 \pm c\sqrt{1+c^2}$$

$$x_3 \in (-c, c) \Rightarrow \pi: x_3 = -c^2 + c\sqrt{1+c^2} > 0$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 2\left(-c^2 + c\sqrt{1+c^2}\right) \Rightarrow$$

Elipsă în planul $\pi$.

EX. În sp. euclidian $\mathcal{E}_3$ se consideră elipsoidul

$$\mathcal{E}: \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} + \frac{x_3^2}{16} - 1 = 0$$

și punctele $A(2,3,6)$, $B(2,\frac{1}{2},1)$.
Să se arate că dreapta AB este tg. la $\mathcal{E}$.

SOL

$$AB: \frac{x_1-2}{2-2} = \frac{x_2-3}{\frac{1}{2}-3} = \frac{x_3-6}{1-6} = t$$

$$AB: \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 - \frac{5}{2}t \\ x_3 = 6 - 5t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$ ec. parametrice

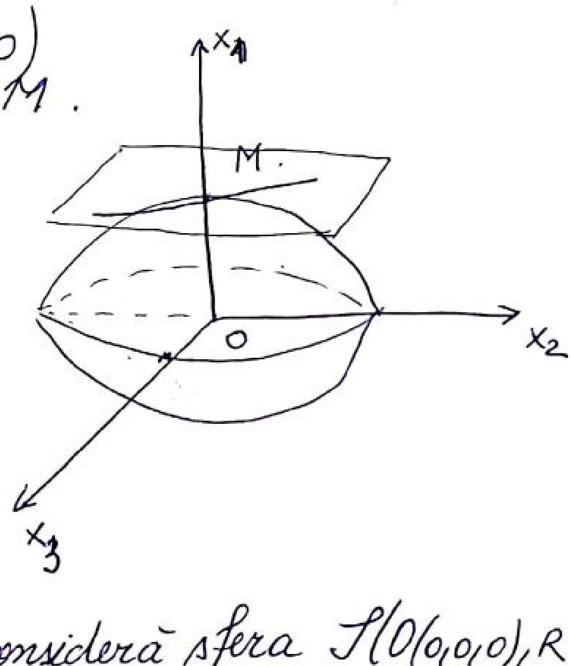
$$\mathcal{E} \cap AB: \cancel{\frac{4}{4}} + \frac{(3-\frac{5}{2}t)^2}{9} + \frac{(6-5t)^2}{16} - \cancel{1} = 0$$

$$\begin{cases} 3 - \frac{5}{2}t = 0 \\ 6 - 5t = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{6}{5}$$

$$AB \cap \mathcal{E} = \{M\}, \quad M\left(2, 3 - \frac{5}{2}\cdot\frac{6}{5}, 6 - 5\cdot\frac{6}{5}\right)$$

$$M(2,0,0)$$

AB este la elipsoid în M.




EX

În sp. euclidian $\mathcal{E}_3$ se consideră sfera $S(O(0,0,0),R)$ care este tangentă la planul

$$\pi: 16x_1 - 15x_2 - 12x_3 + 75 = 0$$

Să se determine ecuația sferei

SOL

2

$$R = dist(O,\pi) = \frac{|16\cdot 0 - 15\cdot 0 - 12\cdot 0 + 75|}{\sqrt{16^2+15^2+12^2}} = \frac{75}{\sqrt{625}} = \frac{75}{25}$$

$\mathcal{S}(A(a,b,c),R): (x_1-a)^2+(x_2-b)^2+(x_3-c)^2=R^2$

$\mathcal{S}(O(0,0,0),3): x_1^2+x_2^2+x_3^2=9$

Ex. În sp. euclidian $\mathcal{E}_3$ se consideră elipsoidul

$\mathcal{E}: \frac{x_1^2}{4}+\frac{x_2^2}{3}+\frac{x_3^2}{9}-1=0$ și

dreapta $d: x_1=x_2=x_3$.

Să se determine planele tg la elipsoid în $A$ și $B$, unde $d\cap\mathcal{E}=\{A,B\}$.

SOL!

$d: \begin{cases} x_1=t \\ x_2=t \\ x_3=t,\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$ ec. parametrice.

$d\cap\mathcal{E}: t^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)-1=0 \quad t^2\cdot\frac{25}{36}=1 \Rightarrow t=\pm\frac{6}{5}$

$A\left(\frac{6}{5},\frac{6}{5},\frac{6}{5}\right)$, $B\left(-\frac{6}{5},-\frac{6}{5},-\frac{6}{5}\right)$

OBS Ec. planului tg în $M_0(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$ la $\mathcal{E}$:

$\mathcal{E}: \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1$

$\pi_{tg}$ în $M_0$ la $\mathcal{E}$: $\frac{x_1\cdot x_1^0}{a^2}+\frac{x_2\cdot x_2^0}{b^2}+\frac{x_3\cdot x_3^0}{c^2}=1$.

$\pi_{tg}$ în $A$: $\frac{6}{5}\left(\frac{x_1}{4}+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{9}\right)-1=0$

$$\frac{x_1}{4}+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{9}-\frac{5}{6}=0$$

$\pi_{tg}$ în $B$ $\quad \frac{x_1}{4}+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{9}+\frac{5}{6}=0$.

**EX** În sp. euclidian $\mathcal{E}_3$ se consideră paraboloidul eliptic

$$\mathcal{P}_e \;/\; \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = 2x_3$$

Să se scrie ecuația planului tg la $\mathcal{P}_e$ în $M_0(2, 3, \frac{1}{2})$

**SOL**

$M_0 \in \mathcal{P}_e : \frac{4}{4} + \frac{9}{9} = 2 \cdot 1$ (A)

Ec planului tg în $M_0$: $\frac{x_1 \cdot 2}{4_2} + \frac{x_2 \cdot 3}{9_3} = x_3 + 1$.

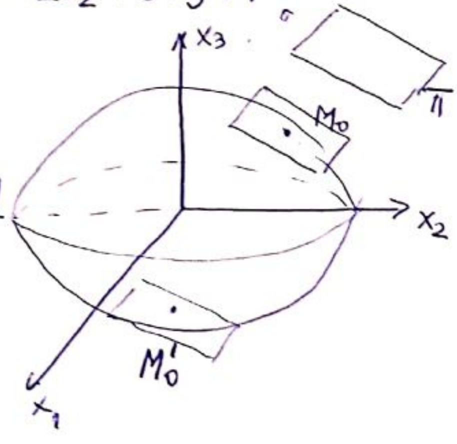
$$\pi : \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} - x_3 - 1 = 0.$$

**EX** În sp. euclidian $\mathcal{E}_3$ se consideră elipsoidul

$$\mathcal{E} \;/\; \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} + \frac{x_3^2}{8} - 1 = 0.$$

Să se determine planele tg la $\mathcal{E}$, care sunt paralele cu planul $\pi : 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 1 = 0$.

**SOL**




Fie $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \mathcal{E}$

$\pi$ tg în $M_0$: $\pi_1 : \frac{x_1 x_1^0}{4} + \frac{x_2 \cdot x_2^0}{9} + \frac{x_3 \cdot x_3^0}{8} = 1$

$\pi_1 \parallel \pi \iff N_{\pi_1} = k N_{\pi}$, $k \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{\frac{x_1^0}{4}}{3} = \frac{\frac{x_2^0}{9}}{-2} = \frac{\frac{x_3^0}{8}}{5} = k$$

$x_1^0 = 12k$; $x_2^0 = -18k$; $x_3^0 = 40k$.

$M_0 \in \mathcal{E} \implies k^2\left(\frac{12^2}{4} + \frac{18^2}{9} + \frac{40^2}{8}\right) - 1 = 0$

$k^2(12 \cdot 3 + 18 \cdot 2 + 40 \cdot 5) = 1 \implies k^2 = \frac{1}{272} \implies k = \pm \frac{1}{4\sqrt{17}}$.

$M_0\left(\frac{3}{\sqrt{17}}, \frac{-9}{2\sqrt{17}}, \frac{10}{\sqrt{17}}\right)$, $M_0'\left(-\frac{3}{\sqrt{17}}, \frac{9}{2\sqrt{17}}, \frac{-10}{\sqrt{17}}\right)$

Planele tg în $M_0$ și $M_0'$ sunt planele cerute.

Ex. În sp. euclidian $\mathcal{E}_3$ se consideră paraboloidul hiperbolic $\mathcal{P}_h: \frac{x_1^2}{8} - \frac{x_2^2}{2} = 2x_3$ și dreapta $d: \frac{x_1}{8} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{1}$.

Să se scrie ecuațiile generatoarelor care trec prin punctele de intersecție ale dreptei $d$ cu $\mathcal{P}_h$.

SOL

OBS $PQ = RS$

$$G_1: \begin{cases} P = \lambda R \\ \lambda Q = S \end{cases} ; \quad G_2: \begin{cases} P = \mu S \\ \mu Q = R \end{cases}$$

$$\mathcal{P}_h: \left(\frac{x_1}{2\sqrt{2}} - \frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x_1}{2\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) = 2\cdot x_3$$

$$G_1: d_\lambda: \begin{cases} \frac{x_1}{2\sqrt{2}} - \frac{x_2}{\sqrt{2}} = 2\cdot\lambda \\ \lambda\left(\frac{x_1}{2\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) = x_3 \end{cases} ; \quad G_2: d_\mu: \begin{cases} \frac{x_1}{2\sqrt{2}} - \frac{x_2}{\sqrt{2}} = x_3\mu \\ \mu\left(\frac{x_1}{2\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) = 2 \end{cases}$$

$\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{R}}$, $\mu \neq 0$

$$d: \frac{x_1}{8} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{1} = t \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$d \cap \mathcal{P}_h: \frac{8^2t^2}{8} - \frac{2^2t^2}{2} = 2\cdot t \Rightarrow$$

$$8t^2 - 2t^2 = 2t \Rightarrow 6t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t(3t-1) = 0$$

- $t_1 = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$
- $t_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow M\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

1) $O(0,0,0) \in d_\lambda \Rightarrow \lambda = 0$.

$$G_1: d_0: \begin{cases} \frac{x_1}{2\sqrt{2}} - \frac{x_2}{\sqrt{2}} = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$O \in d_\mu$.

$$G_2: \mu = \infty \quad d_\infty: \begin{cases} \frac{x_1}{2\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

2) $M\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$

- $G_1$ $\quad M \in d_\lambda \Rightarrow \frac{\cancel{8}^{4}}{3\cdot \cancel{2}\sqrt{2}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} = 2\lambda \Rightarrow \frac{2}{3\sqrt{2}} = 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$

$$d_{\frac{1}{3\sqrt{2}}} : \begin{cases} \frac{x_1}{2\sqrt{2}} - \frac{x_2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) = x_3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_1}{2} - x_2 = \frac{2}{3} \\ \frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{6} = x_3. \end{cases}$$

- $G_2$ $\quad M \in d_\mu \Rightarrow \frac{8}{3\cdot 2\sqrt{2}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\mu \Rightarrow \frac{2}{\cancel{3}\sqrt{2}} = \frac{1}{\cancel{3}}\mu$

$\Rightarrow \mu = \sqrt{2}$

$$d_{\sqrt{2}} : \begin{cases} \frac{x_1}{2\sqrt{2}} - \frac{x_2}{\sqrt{2}} = x_3 \cdot \sqrt{2} \\ \sqrt{2}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_1}{2} - x_2 = 2x_3 \\ \frac{x_1}{2} + x_2 = 2. \end{cases}$$