deci $\sum_{n=1} \sin(\pi \cdot \sqrt{n^2+1})$ este conv.

CURS 7

15.11.2018

Exemple de serii

$$\sum_{n\geq 1} x^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad x>0,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n\geq 1} x^n \cdot \left(\frac{a(a+1)\cdot \ldots \cdot (a+n)}{b\cdot(b+1)\cdot \ldots \cdot (b+n)}\right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{n^{\beta}} \qquad x\in \mathbb{R},\ a,b>0$$

$$\sum_{n\geq 1} x^n \cdot (2-\sqrt{a})\cdot(2-\sqrt[3]{a})\cdot \ldots \cdot (2-\sqrt[n]{a}), \quad x\in\mathbb{R},\ a>0$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n \cdot n!}{n^{n+\alpha}} \qquad x\in\mathbb{R} \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\left[\frac{1}{x}\right]^2}, & x>0 \\ x^2, & x<0,\ x\in\mathbb{Q} \\ x^4 & x<0,\ x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

$f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} f_1(x) & x\in A \\ f_2(x) & x\notin A \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x\in\mathbb{Q} \\ x^3 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases} \qquad A=\mathbb{Q}$$

RECAP. DE DATA TRECUTĂ

Def: Fie X o mulțime. O mulțime $\tau \subset P(X)$ s.n. topologie dacă:

1) $\emptyset, X \in \tau$
2) $D_1, D_2 \in \tau \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \tau$
3) $(D_i)_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} D_i \in \tau$

$D \in \tau$ s.n. deschisă, F s.n. închisă dacă $X \setminus F \in \tau$

$V \subset X$ s.n. vecinătate a lui $a \in X$ dacă $\exists D \in \tau$ a.î. $a \in D \subset \tau$

$\mathcal{V}_a = \{V \subset X \mid V \text{ vec. pt. } a\}$

Def. $A \subset X$

$A' = \{a \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}_a \Rightarrow V \cap A \setminus \{a\} = \emptyset\}$ puncte de acumulare

$\bar{A} = \{a \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}_a \Rightarrow V \cap A = \emptyset\} = A \cup A'$ - închiderea lui A

$\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ închise} \\ A \subset F}} F$ - închisă

$\mathring{A} = Int(A) = \{a \in X \mid A \in \mathcal{V}_a\} = \bigcup_{\substack{D \in \tau \\ D \in A}} D \in \tau$ interiorul lui A

$\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$

$Fr(A) = \partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$ - închisă

$Iz(A) = A \setminus A'$

$f : y \to x$
$\emptyset$
A

Prop: Fie $(X, \mathcal{T})$ sp. topologic și A și $B \subset X$

1) $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$
2) $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$, $\bar{A} \subset \bar{B}$ și $A' \subset B'$
3) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $(A \cup B)' = A' \cup B'$, $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$
4) $\overline{X \setminus A} = X \setminus \mathring{A}$, $\overset{\circ}{\widehat{X \setminus A}} = X \setminus \bar{A}$
5) $Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \bar{A} \cap (X \setminus \mathring{A}) = \bar{A} \cap (\overline{X \setminus A})$

Dem pt. „3)" $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$\bar{A} = \{a \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}_a \Rightarrow V \cap A = \emptyset\}$

$A \subset C$ $a \in \bar{A} \Rightarrow \emptyset \neq V \cap A \subset V \subset C$ $\forall V \in \mathcal{V}_a$

$\Rightarrow a \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow \bar{A} \subset \bar{C}$

$A, B \subset A \cup B \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$

Vrem să ar. că $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$, $a \in \overline{A \cup B} \Rightarrow a \in \bar{A}$ sau $a \in \bar{B}$

$a \in \overline{A \cup B}$ $\forall W \in \mathcal{V}_a \Rightarrow W \cap (A \cup B) \neq \emptyset$

Pp. prin red. la absurd că $a \notin \bar{A}$ și $a \notin \bar{B} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists V_1, V_2 \in \mathcal{V}_a$ a. î. $V_1 \cap A = \emptyset$ și $V_2 \cap A = \emptyset$

$W = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_a$

$\emptyset = W \cap A \subset V_1 \cap A = \emptyset$
$W \cap B = \emptyset$

$W \cap (A \cup B) = (W \cap A) \cup (W \cap B) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

contradicție

) d

$A \, f(a)$

(X, d)

$A' = \{ a \in X \mid \exists (x_n)_n \subset A \quad x_n \to a$ şi $x_n \neq a \}$, A' [illegible]

$\bar{A} = \{ a \in X \mid \exists (x_n)_n \subset A$ a.î. $x_n \to a \}$

$\mathring{A} = \{ a \in X \mid \forall x_n \to a \Rightarrow \exists n_0$ a.î. pt $\forall n > n_0 \to x_n \in A \}$

$Fr(A) = \{ a \in X \mid \exists (x_n)_n \subset A$ şi $(y_n)_n \subset \overline{X \setminus A}$ a.î. $x_n \to a$ şi $y_n \to a \}$

<u>ex.</u> $A = [1, 2]$

$A' = [1, 2]$

$\mathring{A} = (1, 2)$

$\bar{A} = A \cup A' = [1.2]$

$Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \{1, 2\}$

$iz(A) = A \setminus A' = \emptyset$

$A' = [1, 2]$

$[1, 2] \subset A'$

$1 < 1 + \frac{1}{n} = [1.2] = A \Rightarrow 1 \in A'$

$\underset{\in A}{2 - \frac{1}{n}} \nearrow 2 \quad \Rightarrow 2 \in A'$

$\frac{3}{2} + \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{1}{2} < 2$

$x \in (1, 2)$

$x < x_n = x + \frac{1}{(n+1)} \cdot (2 - x)$

$x_n \in A$

$\downarrow$

x

$\Rightarrow x \in A'$

$a \in A' \Rightarrow \exists (x_n)_n \subset A$ a.î. $x_n \to a$

$1 \le x_n \le 2$

$\downarrow$

$1 \le n \le 2$

$\Rightarrow A' \subset [1,2]$

$(1,2) \subset A \Rightarrow (1,2) \subset \mathring{A}$

m deschisă

$\mathring{A} \subset A \quad a \in \underset{\{1,2\}}{\underbrace{A \setminus (1,2)}} \Rightarrow a \notin \mathring{A} \Rightarrow \mathring{A} \subset (1,2)$

$1 - \frac{1}{n} \nearrow 1 \Rightarrow 1 \notin \mathring{A}$

$\notin A$

$2 + \frac{1}{n} \searrow 2 \Rightarrow 2 \notin \mathring{A}$

<u>Exemple</u>

- $A = \{ \frac{1}{n} \mid n \ge 1 \} \cup (2,4) \cup (5,6]$

$B \subset C \Rightarrow B' \subset C'$

$\mathring{A} = (2,4) \cup (5,6)$

$A = [2,4] \cup [5,6] \cup \{0\}$

$\bar{A} = A' \cup A = [2,4] \cup [5,6] \cup \{0\} \cup \{ \frac{1}{n} \mid n \ge 1 \}$

$Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \{ \frac{1}{n} \mid n \ge 1 \} \cup \{0, 2, 4, 5, 6\}$

$Iz(A) = \{ \frac{1}{n} \mid n \ge 1 \}$

- $A = (2,3) \cup ([4,5] \cap \mathbb{Q})$

$\mathring{A} = (2,3)$

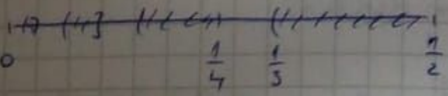
$A' = [2,3] \cup [4,5] \supset A$

$\bar{A} = A'$

$Fr(A) = \{2,3\} \cup [4,5]$

$iz(A) = \emptyset$

$A = \bigcup_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2n+1} ; \frac{1}{2n} \right]$



$\mathring{A} = \bigcup_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \right)$ $\quad \frac{1}{4} \notin \mathring{A}$ $\quad \frac{1}{4} + \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{3}$

$\frac{1}{n}$ $\quad \notin A$

$A \subset A' = \bigcup_{n \geq 1} \left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \right] \cup \{0\}$

$\bar{A} = A'$

$Fr(A) = \{0\} \cup \{ \frac{1}{n} \mid n \geq 2 \}$

$iz(A) = \emptyset$

Def. Fie (X, τ_X) și (Y, τ_Y) două spații topologice

$f: X \to Y$

$a \in X$

Spunem că f este continuă în a dacă pt $\forall V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a$

($\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_{f(a)}\ \exists W \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(W) \subset V \Leftrightarrow W \subset f^{-1}(V)$)

Propoziție Fie (X, τ_X), (Y, τ_Y) și (Z, τ_Z) sp. topologice.

$f: X \to Y$

$g: Y \to Z$

$a \in X$

Dacă f este cont. în a și g este cont. în $f(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow g \circ f$ este cont. în a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Dem: f cont. în $a \Rightarrow$ pt. $\forall V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a$ (1)

g cont. în $f(a) \Rightarrow$ pt. $\forall V \in \mathcal{V}_{g \circ f(a)} \Rightarrow g^{-1}(V) \in \mathcal{V}_{f(a)}$ (2)

$V \in \mathcal{V}_{g \circ f(a)} \overset{(2)}{\Rightarrow} g^{-1}(V) \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \mathcal{V}_a$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| \quad (g \circ f)^{-1}(V)$

Prop. Fie (X, τ) un sp topologic, $f, g: X \to \mathbb{R}$ și $a \in X$.

Dacă f și g sunt continue în $a \Rightarrow$

1) f este local mărginită
2) $|f|$ este continuă în a
3) $f+g$ și $f \cdot g$ sunt continue în a

Dem. $(f(a)-1, f(a)+1) \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow W = f^{-1}(f(a)-1, f(a)+1) \in \mathcal{V}_a$

pt. $\forall\, x \in W \Rightarrow f(x) = (f(a)-1, f(a)+1) \Rightarrow |f(x)| \leq |f(a)|+1$

2) $|f|$ este cont în $a \Rightarrow$ pt. $\forall >0\ \exists\, \mathcal{V}^1_\varepsilon \in \mathcal{V}_a$ a. î.

$x \in \mathcal{V}^1_a \Rightarrow |f(x)| - f(a) < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow f(x) = \underbrace{\left(f(a)-\frac{\varepsilon}{2}, f(a)+\frac{\varepsilon}{2}\right)}_{\mathrm{I}}$

g cont. în $a \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \mathcal{V}^2_\varepsilon \in \mathcal{V}_a$ a. î. $\forall\, x \in \mathcal{V}^2_\varepsilon$

$\Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$x \in V^1_\varepsilon \cap V^2_\varepsilon \Rightarrow |(f+g)(x) - (f+g)(a)| \leq$

$\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Teoremă. Fie (X_1, d_1) și (X_2, d_2) două spații metrice.
O fct. $f : X_1 \to X_2$ și $a \in X_1$.
Atunci urm. afirmații sunt echivalente
1) f este cont. în a
2) pt $\forall\, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ a. î. $d_1(x,a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$
3) $\forall\, (x_n)_n \in X$ a. î. $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$

(X, d) $a \in D$ $V \in \mathcal{V}_a \Leftrightarrow r > 0$ a. î. $B(a, r) \subset V$

1) $\Rightarrow$ 2) Fie $\varepsilon > 0 \Rightarrow B(f(a), \varepsilon) \in \mathcal{V}_a \Rightarrow$

$\xRightarrow[f \text{ cont}]{} f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \in \mathcal{V}_a \Rightarrow \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ a. î.

a. î. $B(a, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \forall\, x \in \underbrace{B(x, \delta_\varepsilon)}_{d(x,a) < \delta_\varepsilon \Leftrightarrow} \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \Leftrightarrow d_2(f(a), f(x)) < \varepsilon$