

## SERII DE NUMERE

Studiați natura următoarelor serii:

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{3n}{3n+1} \right)^n$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n+1}{2n+3}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sin \frac{1}{n}}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{3n+1} \right)^n$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n + 3^n}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{(n+1)(n+2) \cdots (n+n)}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n$$

$$17. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n+1)}$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \right)$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{n^a}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{n^2+1} + a \cdot n - n \right)^n, \quad a \geq 0$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7n}}{n^2 + 3n + 5}$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \sin \frac{\pi}{n}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdots (5n-4)}{1 \cdot 7 \cdot 13 \cdots (6n-5)} \cdot a^n, \quad a > 0$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} n^a (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad a \in \mathbb{R}$$

$$4. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (\arctg 1)^n$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{n} - \frac{1}{2^n} \right)$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 3^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n + 5^n}{3^n}$$

$$14. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{3}{e} \right)^n$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(n!)^2} \left( \frac{n}{6} \right)^{n+a}, \quad a > 0$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \quad (\text{cu 2 criterii diferite})$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 3 + \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}}$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2n^3 - 1}$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} \right)$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{3^n}$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^b} \right), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$33. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a \cdot n + 1}{b \cdot n + 1} \right)^n, \quad a > 0, b > 0$$

$$35. \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2}$$

$$37. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n}$$

$$39. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \sin \left( \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \right)$$

$$41. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

$$43. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \ln n}$$

$$45. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1}$$

$$47. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 1}$$

$$49. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2^n}{n + 3^n}$$

$$51. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$$

$$34. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1 - \cos \frac{\pi}{n}}}{n \ln(n+1)}$$

$$36. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{2n}}$$

$$38. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log_a n}{n}, \quad a > 1$$

$$40. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2 + 1} \text{ (cu 2 criterii diferite)}$$

$$42. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

$$44. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin n}{n^2}$$

$$46. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n}$$

$$48. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}$$

$$50. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n)!}$$

$$52. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$$

▪ Să se studieze convergența și convergența absolută pentru seriile:

$$53. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

$$55. \sum_{n \geq 1} \sin \frac{1}{n^2} + i(-1)^n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$57. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$$

$$59. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + i(-1)^n}$$

$$61. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \sin n$$

$$54. \sum_{n \geq 1} \frac{a + (-1)^n \sqrt{n}}{n}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$56. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+i}$$

$$58. \sum_{n \geq 1} \frac{n(2+i)^n}{3^n}$$

$$60. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(-1)^n + i}$$

$$62. \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n+1}{n^3}$$

## INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. Criteriul necesar; divergentă.
2. Criteriul de comparație la limită; conv. pentru  $a < -\frac{1}{2}$ ; div. pentru  $a \geq -\frac{1}{2}$ .
3. Criteriul raportului; convergentă.
4. Criteriul de comparație la limită; convergentă.
5. Criteriul necesar; divergentă.
6. Convergentă (serie geometrică).
7. Criteriul necesar; divergentă.
8. Operații cu serii; divergentă.
9. Criteriul radicalului; convergentă.
10. Criteriul raportului; divergentă.
11. Criteriul de comparație cu inegalități; convergentă.
12. Operații cu serii; divergentă.
13. Criteriul necesar; divergentă.
14. Criteriul necesar; divergentă.
15. Criteriul necesar; divergentă.
16. Criteriul raportului; convergentă.
17. Criteriul integral; divergentă.
18. Criteriul de comparație la limită; divergentă.
19. Criteriul necesar; divergentă.
20. Seria este convergentă; Criteriul comparației la limită și criteriul integral.
21. Criteriul de comparație la limită; convergentă.
22. Criteriul necesar; divergentă.
23. Criteriul de comparație la limită; convergentă pentru  $a > \frac{1}{3}$ ; divergentă pentru  $a \leq \frac{1}{3}$ .
24. Criteriul de comparație; convergentă.
25. Criteriul radicalului; convergentă pentru  $a < 2$ ; divergentă pentru  $a \geq 2$ .
26. Criteriul de comparație; convergentă.
27. Criteriul de comparație la limită; convergentă.
28. Criteriul de comparație la limită; convergentă.
29. Criteriul de comparație la limită; convergentă pentru  $a > 0$ ; divergentă pentru  $a \leq 0$ .
30. Criteriul lui Leibniz; convergentă.
31. Criteriul raportului; convergentă pentru  $a < \frac{6}{5}$ ; divergentă pentru  $a \geq \frac{6}{5}$ .
32. Criteriul de comparație la limită; convergentă pentru  $a + b > 1$ ; divergentă pentru  $a + b \leq 1$ .
33. Criteriul radicalului; convergentă pentru  $a < b$ ; divergentă pentru  $a \geq b$ .
34. Criteriul de comparație cu inegalități; convergentă.
35. Criteriul radicalului; convergentă.
36. Criteriul raportului; convergentă.
37. Criteriul lui Leibniz; convergentă.
38. Criteriul lui Leibniz; convergentă.
39. Criteriul de comparație la limită; divergentă.
40. Seria este convergentă; Criteriul comparației la limită și criteriul integral.
41. Criteriul comparației cu inegalități; divergentă.
42. Criteriul integral; convergentă.

43. Criteriul de comparație la limită; divergentă.
44. Criteriul de comparație cu inegalități; convergentă.
45. Criteriul de comparație la limită; convergentă.
46. Criteriul de comparație cu inegalități; convergentă.
47. Criteriul de comparație cu inegalități; convergentă.
48. Criteriul de comparație la limită; divergentă.
49. Criteriul raportului; convergentă.
50. Criteriul lui Leibniz; convergentă.
51. Criteriul lui Leibniz; convergentă.
52. Criteriul lui Leibniz; convergentă.
53. Seria este divergentă (se scrie  $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1} - \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1}$  ; prima serie este convergentă conform criteriului lui Leibniz iar a doua este divergentă, conform criteriului de comparație cu inegalități).
54. Se consideră separat cazurile  $a = 0$  și  $a \neq 0$  ; Pentru  $a = 0$  seria NU este absolut convergentă (se obține seria armonică generalizată divergentă) dar este convergentă (se arată cu criteriul lui Leibniz). Pentru  $a \neq 0$  seria este o sumă dintre o serie divergentă și una convergentă, deci este divergentă.
55. Absolut convergența:  $\sum_{n \geq 2} |u_n| \geq \sum_{n \geq 2} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$  care este divergentă (se arată cu criteriul comparației la limită), deci seria NU este absolut convergentă; Seria este convergentă (se folosește criteriul comparației cu inegalități și criteriul lui Leibniz).
56. Seria este divergentă (se folosește criteriul comparației la limită), deci NU se mai pune problema absolut convergenței.
57. Seria este absolut convergentă (criteriul comparației la limită), deci este convergentă.
58. Seria este absolut convergentă (se folosește criteriul raportului), deci este convergentă.
59. Seria este divergentă (suma dintre o serie convergentă și una divergentă), deci NU se mai pune problema absolut convergenței.
60. Seria NU este absolut convergentă (criteriul comparației la limită). Seria este convergentă (se aplică criteriul lui Leibniz și criteriul comparației cu inegalități).
61. Seria este absolut convergentă, deci convergentă (criteriul comparației cu inegalități).
62. Seria este absolut convergentă, deci convergentă (criteriul comparației cu inegalități).