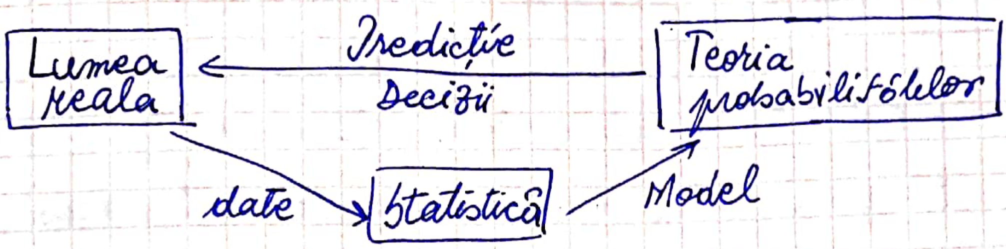
CURS 1

Introducere în Probabilități și Statistică

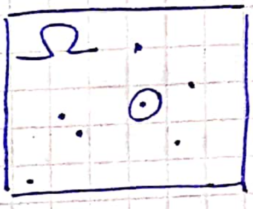


Câmp de probabilitate, operații cu evenimente

Def Experimentele al căror rezultat nu poate fi prezis cu exactitate înaintea realizării acestora se numesc <u>experimente aleatoare</u>.

Def Mulțimea tuturor rezultatelor posibile ale unui experiment aleator se numește <u>spațiul stărilor</u> (spațiul probelor) și se notează Ω.

Obs Elementele din Ω ($\omega \in \Omega$) s.n. <u>evenimente elementare</u>



- mutual exclusive (putem obține un singur din evenimentele aleatoare)

<u>Exp1</u> Aruncarea cu banul

$\Omega = \{H, T\}$ — H: head, T: tail

- colectiv exhaustive (se realizează cel puțin un ev. elementar)
- unul și doar unul dintre evenimentele elementare s-a realizat

- H și afară este senin
- H și afară nu este senin
- T și afară este senin
- T și afară nu este senin

<u>Exp2</u> Aruncarea unui zar

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

<u>Exp3</u> Măsurăm lungimea unei bare L. (presupunem că măsurăm cu o anumită eroare)

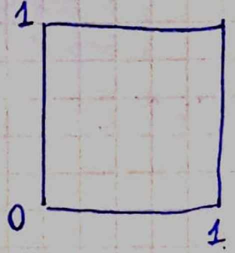
$\Omega = \mathbb{R}_+$, $\Omega = [a, b]$

<u>Exp4</u>: Durata de viață a aparatului.

$\Omega = [0, T]$, $(\Omega = \mathbb{R}_+)$

Scanned with CamScanner

Exp 5



$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x, y \le 1\}$$

Def Un eveniment este o submulțime de elemente din Ω.
Spunem că evenimentul $A \in \Omega$ s-a realizat dacă, în urma realizării experimentului aleator, rezultatul $\omega \in A$.

Exp Aruncăm cu zarul $\Omega = \{1, 2, .., 6\}$

a) $A = \{1\}$

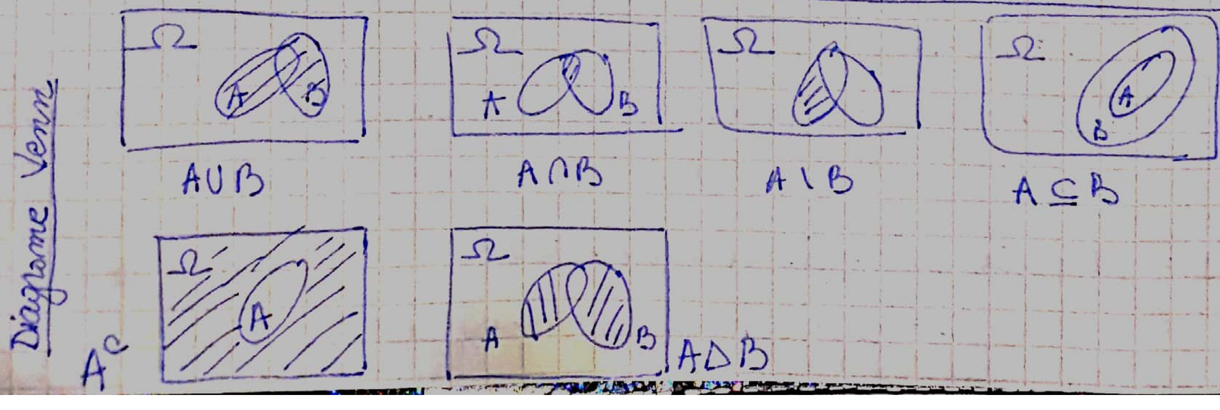
b) rezultatul este par : $A = \{2, 4, 6\}$

c) depășește valoarea 3 : $A = \{4, 5, 6\}$

Fie A și B două evenimente

Notație	Denumire în T. Mulțimilor	Denumire în T. Prob
Ω	mulțimea Ω	spațiul stărilor sau evenimentul sigur
ω	submulțimea cu un element	eveniment elementar
ϕ	mulțimea vidă	eveniment imposibil
A	mulțimea $A \subseteq \Omega$	evenimentul A se realizează
A^c $(C_A, \bar{A})$	mulțimea complementară a lui A	evenimentul contrar
$A \cup B$	reuniune	realizarea lui A sau B
$A \cap B$	intersecție	realizarea lui A și B
$A \setminus B$	diferența	realizarea lui A, dar nu și a lui B
$A \subseteq B$	incluziune	A implică B
$A \Delta B$	diferență simetrică	realizarea lui A sau B, dar nu a amândurora

Diagrame Venn



$P(\Omega) = \{A \mid A \subseteq \Omega\}$ - mulțimea tuturor evenimentelor posibile

In general, $\mathcal{F} \subseteq P(\Omega)$ - mulțimea evenimentelor posibile asociate experimentului aleator

Obs: De cele mai multe ori, $\mathcal{F} = P(\Omega)$.

a) $\emptyset \in \mathcal{F}$

b) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

c) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

Mulțimea $\mathcal{F}$ care verifică a), b), c) s.n. algebră.

CURS 2

Ω - spațiul stărilor

$\mathcal{F} \subseteq P(\Omega)$ mulțimea evenimentelor posibile asociate experimentului aleator

a) $\emptyset \in \mathcal{F}$

b) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

c) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$ - "reuniune finită"

} algebră peste Ω

Exp. Aruncăm o monedă până când obținem pentru prima oară cap și ne interesăm la nr de aruncări.

$\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$ (H, TH, TTH)

$A = \{$primul cap după un nr par de aruncări$\}$ (reuniune numărabilă)

$= \{2, 4, 6 \dots\} = \bigcup_{i \geq 1} \{2i\}$

c') dacă $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Def. O colecție de mulțimi $\mathcal{F} \in P(\Omega)$ care verifică proprietățile

a) $\emptyset \in \mathcal{F}$

b) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

c) $(A_n)_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

se numește σ - algebră peste Ω.

σ → face referire la numărabilitate.

Proprietăți: a) $\Omega \in \mathcal{F}$

b) $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_n \in \mathcal{F}$ și $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$

c) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$

$(\Omega, \mathcal{F})$ se numește spațiul probabilizabil.

Să presupunem că repetăm un experiment (în condiții identice) de N ori și considerăm A un eveniment de interes.

$N(A)$ numărul de apariții ale A în cele N repetări

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad A = \{2, 4, 6\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad \rightsquigarrow$ abordare frecvenționistă

Notăm cu $\mathbb{P}(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N(A)}{N} \in [0, 1]$

$A \in \phi \Rightarrow N(\phi) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 0$

$A = \Omega \Rightarrow N(\Omega) = N \Rightarrow \mathbb{P}(\Omega) = 1$

A, B disjuncte $A \cap B = \phi$

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \quad \text{(fin. aditivitate)}$$

Def O funcție $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ care satisface prop:

a) $\mathbb{P}(\phi) = 0$ și $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

b) dacă $A_1, A_2 \dots$ șir de evenimente disjuncte 2 câte 2 ($A_i \cap A_j = \phi$, $i \neq j$) atunci

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \quad (\sigma\text{ - aditivă})$$

s.n. $\boxed{\text{măsură de probabilitate}}$ pe $(\Omega, \mathcal{F})$

Def Tripletul $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s.n. câmp de probabilitate.

Exp 1) Aruncarea cu banul: $\Omega = \{H, T\}$

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\phi, \{H\}, \{T\}, \Omega\}$$

$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ $\quad \mathbb{P}(\phi) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

$$\mathbb{P}(H) = p \in [0, 1] \Rightarrow \mathbb{P}(T) = 1 - p$$

2) Aruncăm zar $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{0, 1\}^{\Omega}$

$A^B = \{\varphi : B \to A\}$ $\quad p_i = \mathbb{P}(\{i\})$, $i = \overline{1, 6}$

$A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = ? = \sum_{i \in A} p_i$ $\quad p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$

Scanned with CamScanner

$\mathbb{P}(\Omega) = 1$

1	2	3	4	5	6

$p_i = 1/6$, $i = \overline{1,6}$

$\Omega = \bigcup_{i=1}^{6} \{i\}$. zar perfect

Proprietăți: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de probabilitate. Atunci

a) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

b) $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (monotonie)

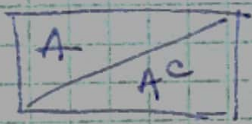
c) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

d) Formula lui Poincare

$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(\bigcup A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n)$$ (ex.)

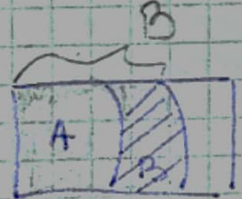
Dei

a) 

Ω

$A \cup A^c = \Omega$ $\qquad \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = 1$

$A \cap A^c = \emptyset$

b) 

Ω

$B = A \cup (B \cap A^c)$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(B \cap A^c)}_{\geq 0} \geq \mathbb{P}(A)}$$!

c) 

Ω

$A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$

$\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$\to \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

e) Inegalitatea lui Boole

$(A_n)_n \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Exp $\Omega = \{H, T\}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}(\{H\}) = p \in (0,1)$

$A_n = \{$în primele n aruncări am obținut $H\}$

? $A = \{$un cap apare mai devreme sau mai târziu$\}$

$P(A) = 1 \dots ??$

Modelul clasic de probabilitate (modelul lui Laplace)

Fie $N \geq 1$ un nr natural

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$$

Considerăm $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (-2^N elemente)

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$ definită prin $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N}$

echirepartiție (fiecare rez are aceeași șansă de apariție)

În acest caz, $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} \mathbb{P}(\omega_i) = \frac{1}{N} \sum_{\{i | \omega_i \in A\}} 1 = \frac{|A|}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$= \frac{\text{nr cazuri favorabile}}{\text{nr cazuri posibile}}$$

Elemente de algebră combinatorială

1) (Formula sumei) Dacă A și B sunt 2 mulțimi finite, $A \cap B = \emptyset$ atunci $|A \cup B| = |A| + |B|$

Reformulare: dacă un obiect a poate fi ales în n moduri și un obiect b poate fi ales în alte m moduri atunci avem $(m+n)$ moduri de a alege a sau b.

Principiul includerii - excluderii

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

Obs $\mathbb{P}$ echirep. $\Rightarrow |A| = \mathbb{P}(A) \underbrace{|\Omega|}_{\text{const}}$

CURS 3

Câmpul de probabilitate a lui Laplace

Ω - discretă, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ = echirepartiția

Pentru $A \in \mathcal{F}$, $\mathcal{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{nr caz favorabile}}{\text{nr caz posibile}}$

Formula sumei: A, B m finite, disjuncte

$$|A \cup B| = |A| + |B| \quad ; \quad A + B = A \cup B, \text{ unde } A \cap B = \emptyset$$

Principiul includerii - excluderii

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

$|A| = P(A)\,|\Omega|$

↳ fixat constant

Formula produsului:

Fie A, B două mulțimi finite, $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

atunci $A \times B$ este finit și

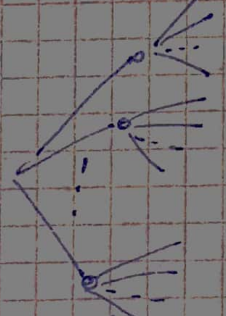
$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Obs ! Dacă un obiect a poate fi ales în n moduri și apoi un element b poate fi ales în m moduri atunci cuplul (a,b) scris în această ordine poate fi ales în $n \times m$ moduri.

Exp. 10 persoane participă la o cursă. Câte posibilități avem pentru 1, 2, 3 loc?

10 posibilități pentru a ocupa locul 1, apoi avem 9 posibilități pentru locul al 2-lea și 8 persoane pentru locul 3.

$10 \times 9 \times 8 = 790$



Experimentul $A \to a$

Experimentul $B \to b$

Cumpărăm înghețată
- 2 cornete
  - waffle
  - hârtie
- 3 arome
  - ciocolată
  - vanilie
  - fructe

$\Rightarrow 2 \times 3$ posibilități

Obs În cazul a n mulțimi finite avem

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1|\,|A_2| \dots |A_n|$$

Dacă $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = A^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A\}$$

$\Rightarrow |A^n| = |A|^n$

Exp nr. cuv. posibile formate cu 5 litere $\to 26^5$ (litere în alfabet)

Schema de extragere cu revenire

Pp că avem o urnă cu n bile numerotate de la 1 la n și efectuăm k extrageri cu revenire

$(x_1, x_2, \dots, x_k) \to n^k$

Același lucru obținem dacă avem k bile (numerotate de la 1 la k) și n urne numerotate 1 -- n

$(x_1, \dots, x_k)$ -- n^k

$a_i \to$ nr urnei în care a fost distribuită bila i

Exp $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

$|\mathcal{P}(\Omega)| = ? \to 2^n$

$\mathcal{P}(\Omega) = \{A \mid A \subseteq \Omega\} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \{0, 1\}\}$

$= \{0, 1\}^n$

$x_i = 1$ dacă $\omega_i \in A$

0, altfel

Schema de extragere fără revenire (fără întoarcere)

Pp că avem o urnă cu n bile numerotate de la 1 la n și efectuăm k extrageri fără revenire

$n = 5$ bile $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$k = 3$ $(x_1, x_2, x_3) \to 5 \times 4 \times 3$

$\Rightarrow n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-k+1)$

În particular, dacă $k = n$ avem $n!$ permutări.

Exp Ionel are 10 cărți: 4 de mate, 3 de chimie, 2 istorie, 1 biologie | Vrea să ordoneze a.î. cărțile de același subiect să fie unele lângă altele.

În câte moduri poate să aşeze cele 10 cărți?

A_1, A_2, A_3, A_4

M C I B (oricare ordine)

$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4)\}$

$= 4! \, 3! \, 2! \, 1! \cdot 4!$

(x_1, x_2, x_3, x_4) (y_1, y_2, y_3)

Exp (Problema aniversărilor)

Presupunem că avem n persoane prezente la o întâlnire și ne întrebăm care este prob ca cel puțin 2 să fie născute în aceeași zi.

Ipoteze - anul are 365 zile
- șansa ca o persoană să se nască într-o zi dată $\frac{1}{365}$

$\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \{1, 2, \ldots, 365\}\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$; $\mathbb{P}$ este echirepartiția $\mathbb{P}(\{w\}^{\in \Omega}) = \frac{1}{365^n}$

$|\Omega| = 365^n$

A - cel puțin 2 persoane sunt născute în aceeași zi

$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} =$

$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P} =$

$= 1 - \frac{365 \times 364 \times \ldots \times (365-n+1)}{365^n}$

n	10	15	22	23	55
$\mathbb{P}(A)$	0.12	0.25	0,46	0,51	

$\binom{23}{2} \to 253$

(P) Fie $0 \le k \le n$. Atunci nr de părți de ordinul k al unei mulțimi de cardinal n este $\frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k \; \binom{n}{k}$

Exp Nr mâini într-un joc de cărți $\binom{52}{5}$

Exp Câte mâini de 5 cărți conțin exact 2 ași, 2 popi și o damă?

Figuri $\to 2, 3, \ldots, Q, K, A$
Culori $\to 4$

A - mulțimea perechilor de ași
B - mulțimea perechilor de popi
C - mulțimea damelor

$|A \times B \times C| = |A|\,|B|\,|C| = \binom{4}{2}\binom{4}{2} 4$

(a, b, c) $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$

Exp MATEMATICA ← nr de anagrame

MATE → 4!

M → 2
A → 3
T → 2
E, I, C → 1

$$\binom{10}{3}\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}$$

litera A lit M lit T

$$= \frac{10!}{3!\cdot \cancel{7!}}\cdot\frac{\cancel{7!}}{2!\cdot \cancel{5!}}\cdot\frac{\cancel{5!}}{2!\cdot \cancel{3!}}\cdot\frac{\cancel{3!}}{1!\cdot \cancel{2!}}\cdot\frac{\cancel{2!}}{1\cdot 1!}\cdot\frac{1}{1\cdot 1}=\frac{10!}{3!\,2!\,2!}$$

Obs Nr de șiruri de lungime n care conțin n_1 elemente de tipul 1, n_2 elemente de tipul 2, ..., n_k elem de tipul k, a.î. $n_1+n_2+\dots+n_k=n$ este egal cu

coef multinomial

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!}=\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_k}$$

Exp (Prob să avem Full House) Care este probabilitatea să avem Full House?
(KK 666) (AA QQQ)

52 cărți de joc < 13 figuri, 4 culori

Ω = m. cărților de joc $=\{(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{56}) \mid \omega_i\neq\omega_j\}$

$|\Omega| = \binom{52}{5}$, $\mathcal{F}=\mathcal{P}(\Omega)$, P echip.

A = { să obținem Full House

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$$

|A|: putem alege figura pt cele 3 cărți (full) în 13 moduri și putem selecta culoarea $\binom{4}{3}$

- apoi din cele 12 figuri rămase putem alege figura pentru cele 2 cărți (full) în 12 moduri și putem selecta culoarea în $\binom{4}{2}$ moduri

Scanned with CamScanner

$|A| = A_3 \binom{4}{3} 12 \binom{9}{2}$

$P(A) = 13 \binom{4}{3} +$

b) Prob. să avem o pereche

B - la pinclet }

$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$

|B| : alegem figura cărților din pereche $\binom{13}{1}$

alegem culorile celor 2 cărți $\binom{4}{2}$

alegem alte 3 cărți

$|B| : \binom{13}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \binom{4}{1}^3$, $P(B) = \frac{|B|}{\binom{52}{5}}$

ex ~~Pb~~ lui Newton

Care din urm. evenimente are cea mai mare probabilitate

a) Cel puțin un 6 apare atunci când aruncăm 6 zaruri

b) cel puțin 2 valori de 6 apar atunci când aruncăm 12 zaruri

c) cel puțin 3 valori de 6 apar atunci când aruncăm 18 zaruri

a) Rez posibile 6^6, 6^{12}, 6^{18}

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$\{1,\dots,5\}$ $\{1,\dots,5\}$

$P(A) = P(\text{cel puțin un } 6) = 1 - P(\text{niciun } 6) = 1 - \frac{5^6}{6^6} \simeq 0,67$

b) $P(B) = P(\text{cel puțin 2 valori } 6) = 1 - P(\text{cel mult 1 val. de } 6)$

$= 1 - P(\text{nu avem nicio val } 6 \text{ sau exact o val de } 6)$

$= 1 - P(\text{nicio val } 6) - P(\text{exact o val } 6)$

$= 1 - \frac{5^{12}}{6^{12}} - \frac{\binom{12}{1} 5^{11}}{6^{12}} \simeq 0,62 < 0,67$

!

Scanned with CamScanner

LABORATOR

Formula lui Poincaré a) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

b) $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$

Principiul includerii-excluderii

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$$

Apl 1: Funcția lui Euler

$\varphi(n)$ - nr de nr prime cu n $(\le n)$, $n \ge 2$

$n = p_1^{\alpha_1} \times \ldots p_r^{\alpha_r}$ - descompunerea în factori primi

$A_k \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ elem divizibile cu p_k, $k \in \{1, \ldots, r\}$

$n = 50 = \underset{p_1}{2} \cdot \underset{p_2}{5}^2$ $\quad A_2 = \{5, 10, 15, 20, \ldots, 50\}$

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r \Rightarrow$ reprezintă toate nr $m \le n$ care sunt divizibile cu cel puțin un p_k, $k \in \{1, \ldots, r\}$

$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r)^c$ - m. nr prime cu n

$\varphi(n) = |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r)^c| = n - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r|$

$\boxed{|B^c| = |\Omega| - |B|}$ $\quad |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{k} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le r} |A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k}|$

$|A_i| = \frac{n}{p_i}$

dacă $d | n$ atunci nr întregilor din $\{1, \ldots, n\}$ divizibile cu d este $\frac{n}{d}$

$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i \cdot p_j}$

$|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = \frac{n}{p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_k}}$

$n - \varphi(n) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \frac{n}{p_{i_1} \ldots p_{i_k}} \quad / : n$

$$1-\frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{i} (-1)^{k-1} \sum_{i_1<\ldots<i_k} \frac{1}{p_{i_1}\ldots p_{i_k}}$$

$$\frac{\varphi(n)}{n} = 1 - \sum \frac{1}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{1}{p_i p_j} + \ldots + (-1)^r \frac{1}{p_1\ldots p_r}$$

$$= \left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$

$$\boxed{\varphi(n) = n \prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)}$$

<u>Aplicație 2</u> Problema întâlnirilor - de Montmort

n plicuri cu destinatari diferiți // oameni cu pălării

n scrisori corespunzătoare celor n destinatari

Se amestecă și ne întrebăm care este probabilitatea ca cel puțin un destinatar să primească scrisoarea corespunzătoare?

$\Omega = \{\sigma \mid \sigma:\{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}\} = S_n$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \quad |\Omega| = n!$$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ echiprop. $\mathbb{P}(\sigma) = \frac{1}{n!}$

A - cel puțin un destinatar a primit scrisoarea corespunzătoare

Fie E_i - destinatarul i a primit scris. coresp. adresele

$E_i = \{\sigma \in \Omega \mid \sigma(i) = i\}$ $n=4$

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & \boxed{} \end{pmatrix}$ $|E_1| = 3!$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\emptyset$

$E_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & n \\ & & & i & & \end{pmatrix}$ $|E_i| = (n-1)!$

$$\mathbb{P}(E_i) = \frac{|E_i|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$A = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(E_1\cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) \overset{\text{F. Poincaré}}{=} \sum_{k=1} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \mathbb{P}(E_{i_1}\cap E_{i_2} \cap \ldots E_{i_k})$$

$$|E_i \cap E_j| = (n-2)! \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & \end{pmatrix}$$

$$|E_{i_1} \cap .. \cap E_{i_k}| = (n-k)!$$

$$\mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap .. \cap E_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!} \quad k \in \{1, .., n\}$$

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap .. \cap E_n) = \frac{1}{n!}$$

A, B, C
$A \cap B$
$A \cap C$
$B \cap C$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \underbrace{\sum_{1 \le i_1 < .. < i_k \le n}}_{} \frac{(n-k)!}{n!}$$

→ în câte moduri putem alege k indici din n

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!}$$

$$= \sum (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{n!}$$

$$= \boxed{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{3!} + .. + \frac{x^n}{n!} .. = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$P(A) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = -\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - 1 \right] = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

$\simeq 0,63$

$B = A^c$ nicio întâlnire $\Rightarrow \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{e}$

Adăugare Curs 4

Probabilități condiționale, independență și formula lui Bayes

cum se schimbă (modifică) probabilitatea realizării unui eveniment atunci când avem info suplimentare

A - „zi ploioasă"

B - v.a. „afară este înnorat"

$\mathbb{P}(A)$ - probabilitatea inițială

$\mathbb{P}$(azi va ploua știind că e înnorat)

Exp Aruncăm cu banul (echilibrat) de 3 ori

a) Care e prob să obținem HHH?

$A = \{\text{am obținut } HHH\} = \{HHH\}$

$\Omega = \{H, T\}^3 \quad |\Omega| = 8 \quad \mathbb{P}(A) = \frac{1}{8}$

b) La prima aruncare am ob cap. Cât este $\mathbb{P}(A)$ având în vedere info suplimentare?

$\Omega' = \{HHH, HHT, HTH, HTT\} \quad \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A \mid B)$

știind că

eveniment s-a realizat

Probabilitatea realizării evenimentului A știind că evenimentul B s-a realizat

Din perspectivă frecvenționistă. Ip că repetăm experimentul de N ori și de fiecare dată înregistrăm dacă A și respectiv B s-au realizat. Ne uităm doar la experimentele în care B s-a realizat și vrem să calculăm frecvența de realizare a lui A.

$$\frac{N(A \cap B)}{N(B)}$$

$N(A \cap B) \to$ nr de exp în care și A și B s-au realizat

$N(B) \to$ nr de exp în care B s-a realizat

$$= \frac{\frac{N(A\cap B)}{N}}{\frac{N(B)}{N}} \sim \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Def Dacă A și B sunt evenimente a.î. $\mathbb{P}(B) > 0$ atunci probabilitatea condiționată a lui A la B se notează $\mathbb{P}(A|B)$ și este definită prin $\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$

Not: $\mathbb{P}(A)$ - prior (prob inițială)

$\mathbb{P}(A|B)$ -

"$A|B$" nu este un eveniment

Exp (continuare) B - la prima aruncare am obținut cap

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{4}$$ pentru că $A \cap B = A$

Exp2 Un pachet de cărți de joc și extragem (în mod aleator) două cărți de joc una după alta fără întoarcere.

A - "prima carte este de inimă roșie"

B - "a doua carte este de inimă roșie"

Vrem să calculăm $\mathbb{P}(B|A) = ?$ ("prob lui B știind că s-a realizat A")

Sol Avem 13 cărți de inimă roșie

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{12}{51}$$ ← am extras una

C - "a doua carte este de culoare roșie"

$$\mathbb{P}(C|A) = \frac{25}{51}$$

Scanned with CamScanner

Să calculăm $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$

$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$.

$\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{13 \times 12}{52 \times 51} = \frac{3}{51}$ → cazuri fav. să extragem prima carte

Putem evalua și prob. $\mathbb{P}(A|B) = ?$ $\quad \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{12}{51}$

$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$

În mod similar putem calcula $\mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(A\cap C)}{\mathbb{P}(C)}$

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{P}(A\cap C) &= \frac{13 \times 25}{52 \cdot 51} = \frac{25}{204} \\ \mathbb{P}(C) &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(A|C) = \frac{25}{102}$$

În general, $\mathbb{P}(A|B) \neq \mathbb{P}(B|A)$

Prin definiție, $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ pp că $P(B) > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B|A)$$

P: Pentru orice evenimente $A_1, A_2, \dots, A_n$ cu $\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{n-1})$ avem că:

$$\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2|A_1)\,\mathbb{P}(A_3|A_1\cap A_2)\times\dots\times\dots\times\mathbb{P}(A_n|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{n-1})$$

Obs

$$\mathbb{P}(\underbrace{A_1\cap A_2}_{B}\cap A_3) = \mathbb{P}(A_3|\underbrace{A_1\cap A_2}_{B})\cdot\mathbb{P}(A_1\cap A_2)$$
$$= \mathbb{P}(A_3|A_1\cap A_2)\cdot\mathbb{P}(A_2|A_1)\cdot\mathbb{P}(A_1)$$

Exp. O familie are 2 copii

a) care este prob ca cei 2 copii să fie de sex feminin știind că cel mai în vârstă este fată?

b) care este prob ca cei 2 copii să fie de sex feminin știind că cel puțin un copil este de sex feminin

Soluție Presupuneri: - nu putem avea decât sex fem și masc

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(F) = \frac{1}{2}$

- genul unui copil nu influențează genul celuilalt copil (nu luăm în calcul gemeni identici)

a) $\Omega = \{BB, BF, FB, FF\}$

A – {ambii copii sunt fete} $= \{FF\}$

B – {cel mai în vârstă este fată} $= \{FB, FF\}$

→ info suplimentară, nu copilul specific F

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$$

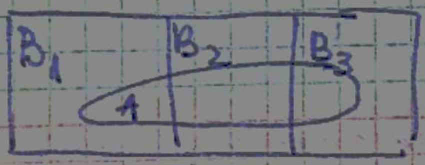
b) C = {cel puțin unul dintre copii este F} $= \{BF, FB, FF\}$

$$\mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(A\cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

c) Ne întâlnim în mod aleator cu unul dintre cei 2 copii și aflăm că este fată. Care este prob că cei 2 copii să fie F?

Formula probabilității totale

Să presupunem că Ω este divizat în B_1, B_2, B_3 evenimente disjuncte 2 câte 2.



partiție

$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$

$B_1 \cap B_2 = \emptyset$

$B_1 \cap B_3 = \emptyset$

$B_2 \cap B_3 = \emptyset$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap B_1) + \mathbb{P}(A\cap B_2) + \mathbb{P}(A\cap B_3)$$
$$= \mathbb{P}(A|B_1)\cdot\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\cdot\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\,\mathbb{P}(B_3)$$

Fie A un eveniment cu $\mathbb{P}(A) \geq 0$, $\mathbb{P}(A) < 1$.

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\,\mathbb{P}(A^c)$$

Prop Dacă A și B sunt evenimente cu $0 < \mathbb{P}(B) < 1$ atunci

F. prob. totale !

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\,\mathbb{P}(B^c)}$$!

Mai mult, dacă $B_1, B_2, \dots, B_n$ formează o partiție pe Ω cu $\mathbb{P}(B_i) > 0$, atunci

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}$$

Teoremă Formula lui Bayes.

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p., $A, B \in \mathcal{F}$ a.î. $\mathbb{P}(A) > 0$ și $\mathbb{P}(B) > 0$

Atunci $\boxed{\mathbb{P}(B/A) = \dfrac{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(A/B)\cdot\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A/B)\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)}}$

Mai mult, dacă $B_1, B_2, \dots, B_n$ formează partiție pe Ω, cu $\mathbb{P}(B_i)>0$ atunci

$$\boxed{\mathbb{P}(B_i/A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_j)\,\mathbb{P}(B_j)}}$$

Exp3 Avem o urnă în care sunt 5 bile roșii și 2 albastre. Extragem 2 bile una după cealaltă și vrem să calculăm probabilitatea ca a 2-a bilă să fie roșie?

Sol $\Omega = \{rr, ra, ar, aa\}$

R_1 = "prima bilă extrasă este roșie"
R_2 = "a doua bilă extrasă este roșie"
A_1 = "prima bilă extrasă este albastră"
A_2 = "a doua bilă extrasă este albastră"

$\mathbb{P}(R_2) = ?$

$\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_2|A_1)\mathbb{P}(A_1)$

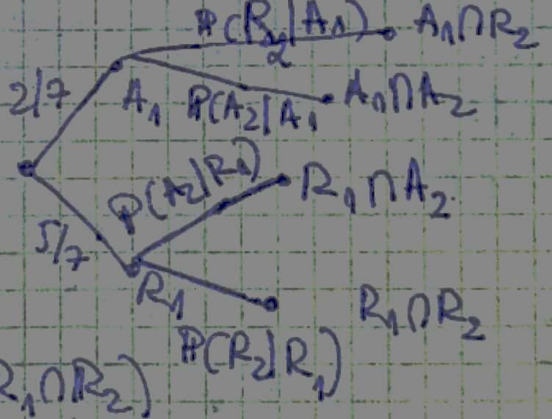
$\mathbb{P}(R_1) = \frac{5}{7}$

$\mathbb{P}(A_1) = \frac{2}{7}$

$\mathbb{P}(R_2|R_1) = \frac{4}{6}$

$\mathbb{P}(R_2|A_1) = \frac{5}{6}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(R_2) = \frac{4}{6}\times\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\times\frac{2}{7} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7}$



$\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(A_1\cap R_2) + \mathbb{P}(R_1\cap R_2)$

$\mathbb{P}(A_1\cap R_2) = \frac{5}{6}\times\frac{2}{7}$

$\mathbb{P}(R_1\cap R_2) = \frac{4}{6}\times\frac{5}{7}$

Exp (Testăm pt o boală/ afecțiune rară)
Să presupunem că frecvența afecțiunii (bolii) în populație este de 1‰.

Pp că efectuăm un test a cărui acuratețe este ridicată
(rata de "false pozitive" de 5%
"false negative" de 5%) $\nearrow 95\%$

D - "persoana are afecțiunea/boala" $\boxed{\begin{matrix} D+ \\ T+ \end{matrix}}$ senzitivitatea și specificitatea
T - "testul a ieșit pozitiv)

senzitivitatea (rata true positive) $P(T|D) = 0,95$
$P(T+|D+)$

specificitatea (rata true negative) $P(T^c|D^c) = 0,95$
$P(T-|D-)$

rata "false pozitive" $P(T|D^c) = 0,05$
"false negative" $P(T^c|D) = 0,05$

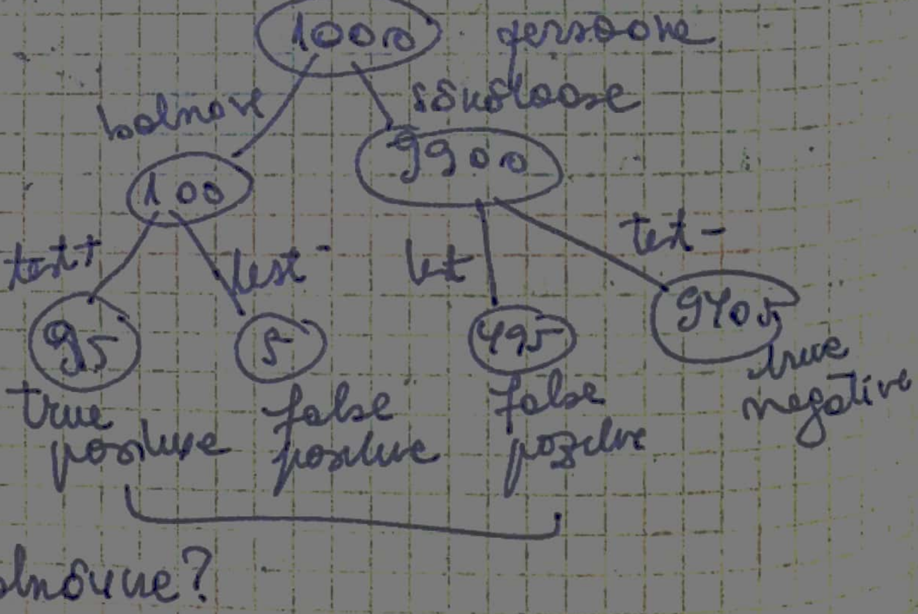
Pp că am efectuat testul și a ieșit pozitiv. Care este probabilitatea să avem boala?

$P(D|T) = ?$

$$P(D|T) = \frac{P(T|D)P(D)}{P(T)} = \frac{P(T|D)P(D)}{P(T|D)P(D) + P(T|D^c)P(D^c)}$$

Din ipoteză
$$\begin{cases} P(D) = 0,01 \\ P(T|D) = 0,95 \\ P(T|D^c) = 0,05 \end{cases}$$

$$P(D|T) = \frac{0,95 \times 0.01}{0,95 \times 0.01 + 0,05 \times 0,99} \approx 0.16$$



$$P(D|T) = \frac{95}{95+495} \simeq 0,16$$

b) Efectuăm testul a doua oară și avem tot un răsp pozitiv (+)
Care este șansa de îmbolnăvire?

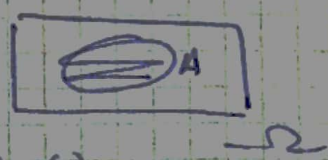
CURS 5 $Q : \mathcal{F} \to [0,1]$

$$Q(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega|A) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$$

ev. sigur

Mai mult, $Q(A) = 1$

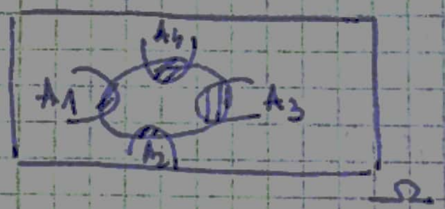
$$\overset{\shortparallel}{\mathbb{P}}(A|A) = 1$$



$$Q(\phi) = \mathbb{P}(\phi|A) = \frac{\mathbb{P}(\phi \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\phi)}{\mathbb{P}(A)} = 0$$

Dacă $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ disjuncte 2 câte 2 ($A_i \cap A_j = \phi$, $i \neq j$).

$$Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i)$$



$$Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \,\Big|\, A\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap A\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap A)\right)}{\mathbb{P}(A)}$$

Exp Formula lui Bayes în care condiționăm încă o dată

$A, B, C \in \mathcal{F}$ a.î. $\mathbb{P}(A \cap C) > 0$, $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$

$$\mathbb{P}(A|B, C) = \frac{\mathbb{P}(B|A, C) \cdot \mathbb{P}(A|C)}{\mathbb{P}(B|C)}$$

$Q(A|B) = \frac{Q(B|A)Q(\dots}{Q(B)}$

$Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|C)$

Exp Să presupunem că avem 2 monede - una echilibrată, una ..... cu șansa de apariție H de 3/4.

Alegem la întâmplare una dintre monede ($1/2$) și o aruncăm de 3 ori și obținem HHH.

a) Având această info, care e prob ca moneda aleasă să fie echilibrată

b) Aruncăm a 4-a oară. Care este probabilitatea să obținem H.

Sol:

a) A - am obținut HHH în cele 3 aruncări

B - moneda aleasă este echilibrată

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\,\mathbb{P}(B^c)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2^3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2^3} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \frac{1}{2}} = \text{ref}$$

Scanned with CamScanner

c) C – la a patra aruncare am obt H

$P(C|A)=?$ $Q(\cdot)=P(\cdot|A)$

Vrem să găsim $Q(C)=?$ / Q este probabilitate

Din formula probabilității totale:

$$Q(C)=Q(C|B)\,Q(B)+Q(C|B^c)\,Q(B^c)=\dots$$

$Q(B)=P(B|A)$ – ref

$Q(B^c)=1-Q(B)$

$Q(C|B)=1/2$

$Q(C|B^c)=\frac{3}{4}$

<u>Independență</u>

Intuitiv, 2 evenimente A și B sunt independente dacă realizarea uneia dintre ele nu influențează realizarea celeilalte.

$$P(A|B)=P(A) \iff \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A) \iff P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

1) <u>Def</u> Spunem că două evenimente A și B sunt independente dacă $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$.

<u>Obs</u> Independența este diferită de noțiunea de ev. disjuncte

Dacă $A\cap B=\emptyset \Rightarrow P(A\cap B)=0$.

<u>Exp</u> Aruncăm cu banul de 2 ori și A_1 – am obținut H la prima aruncare și A_2 – am obținut H la a doua aruncare

Sunt A_1 și A_2 independente? $\{HH, HT, TH, TT\}$

$A_1\cap A_2$ – am obținut H la ambele aruncări

$P(A_1\cap A_2)=\frac{1}{4}$

$P(A_1)=\frac{1}{2}$, $P(A_2)=\frac{1}{2}$ $\Bigg\}$ $P(A_1\cap A_2)=P(A_1)P(A_2)$

<u>Notație</u> A și B sunt independente scriem $A \perp\!\!\!\perp B$

<u>Obs</u> Dacă A și B sunt independente, atunci A și B^c indep, A^c și B sunt indep, A^c și B^c sunt indep.

<u>Def</u> a) Spunem că ev $A_1, A_2, .., A_n$ sunt indep dacă

$$P\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)=\prod_{i\in I}P(A_i),\ \forall I\subseteq\{1,2,..,n\}$$

Mai spunem că ev sunt mutual indep.

Exp A, B, C (mutual) indep.

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(A\cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C) \\ \mathbb{P}(B\cap C) = \mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C) \\ \mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C) \end{cases}$$

dat cele 3 relații implică faptul ca A, B și C sunt indep 2 câte 2

Câte egalități trb verificate?

$$\underbrace{C_n^0 + C_n^1}_{} + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n - C_n^0 + C_n^1$$

$$= 2^n - n - 1 \text{ verificări}$$

sub. cu 2 elem

cu 3 elem

Obs În contextul prob. condiționate putem vorbi despre independență condiționată:

Evenimentele A și B sunt indep. cond de ev. C dacă

$$\mathbb{P}(A\cap B|C) = \mathbb{P}(A|C) \times \mathbb{P}(B|C)$$

$$Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|C) \Rightarrow Q(A\cap B) = Q(A)\cdot Q(B)$$

Exp În contextul unei afecțiuni cu $\mathbb{P}(D) = 0{,}1\%$ și a unui test cu acuratețea de 95%. $\Rightarrow \mathbb{P}(T+|D+) = 95\%$

senzitivitatea = specificitatea = 0.95

$$\mathbb{P}(T+|D+) = \mathbb{P}(T-|D-)$$

Am văzut că $\mathbb{P}(D+|T+) \simeq 15\%$

Pp că efectuăm un nou test independent de primul test (independent dat fiind statusul bolii) și are aceeași acuratețe. Din nefericire am obținut tot un rez pozitiv. Care este prob. să avem afecțiunea?

Fie T_1 - ev. prin care primul test a ieșit pozitiv

T_2 - ev. prin care al doilea test a ieșit pozitiv

$$\mathbb{P}(D+|T_1\cap T_2) = ? \qquad \mathbb{P}(D+|T_2)$$

Scanned with CamScanner

Noul test este indep față de vechiul test în fcție de statusul bolii.

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid D+) = \mathbb{P}(T_1 \mid D+) \cdot \mathbb{P}(T_2 \mid D+)$$

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid D-) = \mathbb{P}(T_1 \mid D-) \times \mathbb{P}_2(T_2 \mid D-)$$

$$\mathbb{P}(D+ \mid T_1 \cap T_2) = \frac{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid D+)\,\mathbb{P}(D+)}{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2)}$$

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2) \underset{\uparrow}{=} \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid D+)\,\mathbb{P}(D+) + \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid D-)\,\mathbb{P}(D-)$$

teorema probabilității totale

$$= \mathbb{P}(T_1 \mid D+)\,\mathbb{P}(T_2 \mid D+)\,\mathbb{P}(D+) + \mathbb{P}(T_1 \mid D-) \cdot \mathbb{P}(T_2 \mid D-)\,\mathbb{P}(D-)$$

$$\mathbb{P}(D+ \mid T_1 \cap T_2) = \frac{0{,}95^2 \cdot \frac{1}{100}}{0{,}95^2 \cdot \frac{1}{10^2} + 0.05^2 \cdot \frac{99}{100}} \approx 0{,}784$$

Variabile aleatoare. Variabile aleatoare discrete

4) Aruncăm 2 zaruri

$$\Omega = \{(x,y) \mid x,y \in \{1,2,3,..,6\}\},\ \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

i) suma valorilor celor 2 zaruri să ca val 3

ii) nr de 6 în cele două aruncări

iii) valoarea celui de-al doilea zar la puterea a 7-a

5) Vrem să transmitem un bit $\{0,1\}$ printr-un canal codificator, transmiterea bitului de n ori și

$$n=5 \quad 00110 \to 0$$

Ideea de v.a (variabilă aleatoare) este de a asocia unui eveniment elementar $\omega \in \Omega$ o val numerică ($\mathbb{R}$)

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \in \quad X(\omega)$$

↑ experiment aleator

Def Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de probabilitate. O variabilă aleatoare este o funcție reală $X : \Omega \to \mathbb{R}$ care are prop că $\{\omega \mid X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F},\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Exp Aruncăm cu banul de 2 ori

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$$

și definim X - nr de H în cele 2 aruncări

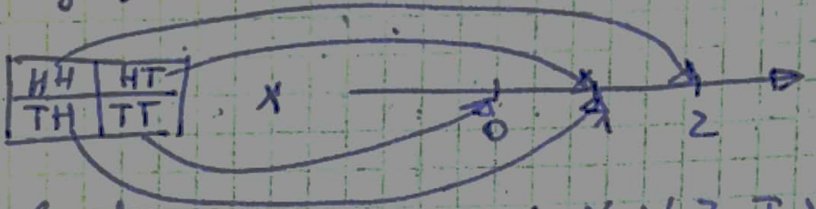
$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$X(HT) = X(TH) = 1 \qquad X(TT) = 0$$

$$X(HH) = 2$$

$x = 1{,}5 \in \mathbb{R}$

$\{X \le x\} = \{\omega \mid X(\omega) \le x\} = \{TT, HT, TH\} \subseteq \Omega$



Notație: Se folosesc litere mari $X, Y, Z, T, W, \dots$

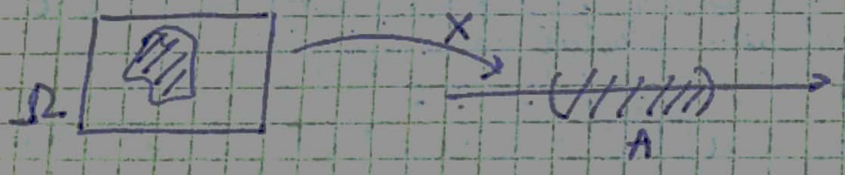
Def Spunem că o v.a. este <u>discretă</u> dacă $X(\Omega)$ (mulțimea valorilor pe care le poate lua X) este <u>cel mult numărabilă</u>. În caz contrar spunem că X este <u>continuă</u>.

Exp Să presupunem că alegem la întâmplare un punct din $[0,1]$. Atunci v.a. X care asociază punctului (a) valoarea $\arcsin(a)$ este continuă, iar var Y care asociază semnul

$$Y = \operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} -1, & a<0 \\ 0, & a=0 \\ 1, & a>0 \end{cases} \quad \text{este discretă}$$

În general, pentru o v.a $X: \Omega \to \mathbb{R}$ vrem să calculăm probabilități de tipul $\{X \in A\}$ $A \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \mid X(\omega) \in A\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = (\mathbb{P} \circ X^{-1})(A)$$



Mulțimea $\{\omega \mid X(\omega) \in A\} = X^{-1}(A)$ și s.n. preimaginea lui A

Exemple

① Într-o urnă sunt $\overset{\text{"24"}}{a}$ bile albe și $\overset{\text{"9"}}{n}$ bile negre. Extragem fără întoarcere 3 bile și ne întrebăm care este probabilitatea ca bilele extrase să fie în ordinea <u>alb, alb, negru</u>? dar alb, negru, alb? ca 2 din cele 3 bile să fie albe?

Sol Fie A_i - evenimentul ca la a i-a extragere să avem o bilă albă

Bilele sunt extrase în ordinea alb, alb, negru

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \underset{\text{formula produs}}{=} \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \times \mathbb{P}(A_3^c \mid A_1 \cap A_2)$$

$$= \frac{a}{a+n} \times \frac{a-1}{a+n-1} \times \frac{n}{a-2+n}$$

alb, negru, alb

$P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3)$

$\{$2 din cele 3 bile să fie albe$\} = \underbrace{(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c)}_{B_1} \cup \underbrace{(A_1 \cap A_2^c \cap A_3)}_{B_2}$
$\cup \underbrace{(A_1^c \cap A_2 \cap A_3)}_{B_3}$

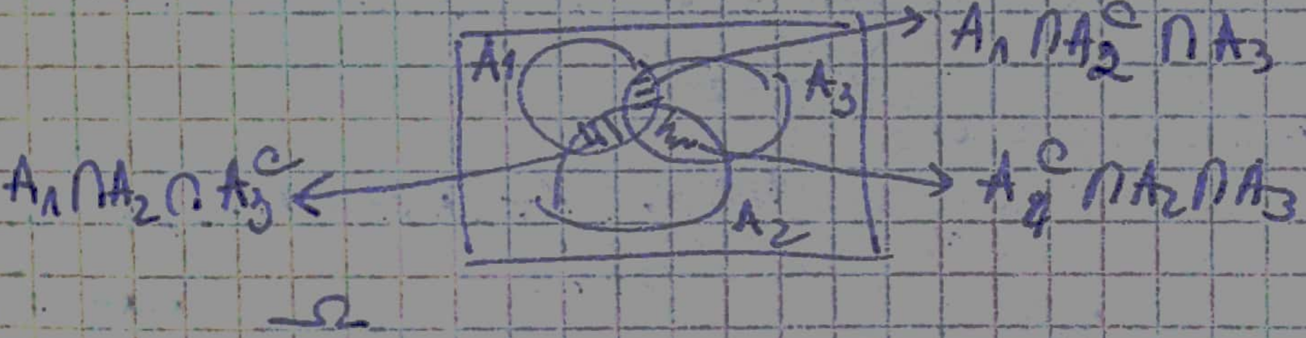
Am văzut că $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3)$

$B_1 \cap B_2 = \emptyset$; $B_1 \cap B_3 = \emptyset$

$B_2 \cap B_3 = \emptyset$

$P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 3 P(B_1)$

$\{$cel puțin 2 dintre cele 3 bile sunt albe$\} = (A_1 \cap \overbrace{A_2 \cap A_3}^{toate}) \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3$



(2) - - -

LABORATOR

① Într-o urnă sunt "$\overset{24}{a}$ bile albe și $\overset{9}{n}$ bile negre". Extragem fără întoarcere 3 bile și ne întrebăm care este probabilitatea ca bilele extrase să fie în ordinea albă, albă, negru? dar alb, negru, alb? ca 2 bile din cele 3 să fie albe?

Soluție

Fie A_i - evenimentul ca la a i-a extragere să avem o bilă albă

Bilele sunt extrase în ordinea alb, alb, negru

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3^c/A_1 \cap A_2)$$

formula produs

$= \frac{a}{a+n} \times \frac{a-1}{a-1+n} \times \frac{n}{a-2+n}$

$\overset{\text{alb}}{P(A_1} \cap \overset{\text{negru}}{A_2^c} \cap \overset{\text{alb}}{A_3)} = \dots$ (în acelaşi mod)

$\rightarrow$ {2 din cele 3 bile întoarse să fie albe} $= \overbrace{(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c)}^{B_1} \cup \underbrace{(A_1 \cap A_2^c \cap A_3)}_{B_2} \cup \underbrace{(A_1^c \cap A_2 \cap A_3)}_{B_3}$

Am văzut că $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3)$

$B_1 \cap B_2 = \emptyset$ $\quad P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 3P(B_1)$

$B_2 \cap B_3 = \emptyset$

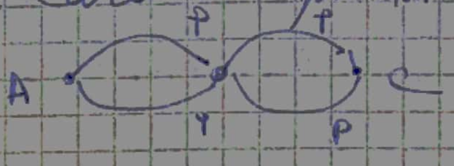
$B_1 \cap B_3 = \emptyset$

$\rightarrow$ {cel puţin 2 dintre cele 3 bile sunt albe} $= (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3$

② Să presupunem că avem 3 localităţi A, B, C.
Ip că avem 2 drumuri între A şi B şi 2 drumuri între B şi C
Fiecare dintre cele 4 drumuri are prob p să fie blocat de zăpadă, independent de celelalte.

a) Care este prob să avem un drum liber între A şi C

b) Să presupunem şi existenţa unui drum direct între A şi C şi acesta se blochează tot cu prob. p, independent de celelalte. Care este prob să ajungem de la A la C.



P(drum deschis între A şi C) = P(drum deschis între A şi B $\cap$ drum deschis între B şi C)

$\overset{\text{indep}}{=}$ P(drum deschis între A şi B

5a

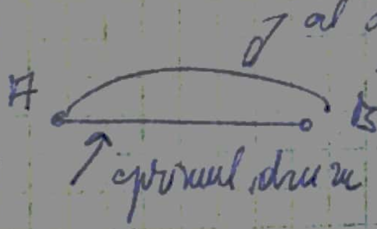
P(drum deschis între A şi B) = 1 − P(ambele drumuri A şi B sunt blocate)

= 1 − P(drumul de jos între A şi B blocat) × (drumul de sus între A şi B blocat)

$= 1 - p^2$

→ P(drumul deschis A la C) $=(1-p^2)^2$

P(drum deschis între A și B) $= P$(primul drum deschis $\cup$ al doilea drum deschis)



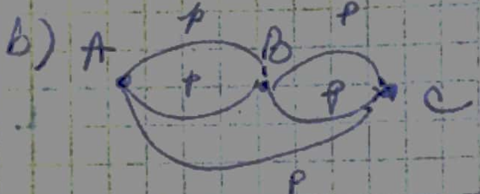
$= P(D_1 \cup D_2)$

$= P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2)$

$= (1-p) + (1-p) - \underbrace{P(D_1) \times P(D_2)}_{(1-p)^2}$

$= 1 - p^2$

b)



P(drum deschis A−C) =

P(dr deschis A−C) $= P$(dr deschis A−C / dr direct deschis) ×

× P(dr. direct deschis) +

formula

P(dr deschis A−C / dr direct blocat) ×

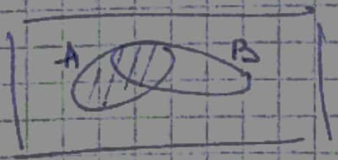
× P(dr direct blocat)

$P(A) = P(A|B)\,P(B) + P(A|B^c)\,P(B^c)$

P(dr deschis A−C) $= 1 \times (1-p) + (1-p^2)^2 \times p$

Fie A și B 2 evenimente cu $P(B) \in (0,1)$

$P(A) = ?$



$\Omega = B \cup B^c$

$P(A) = P(A \cup \Omega) = P(A \cap (B \cup B^c)) = P((A \cap B) \cup (A \cap B^c))$

$= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = P(A|B)\,P(B) + P(A|B^c)\,P(B^c)$

---

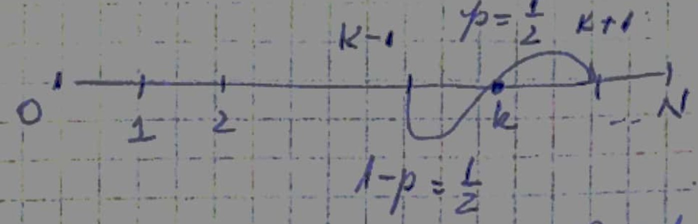
③ (Mersul la întâmplare)

Vrem să ne cumpărăm o casă care costă N unități monetare și avem la dispoziție k unități monetare, $0<k<N$.

Mongerul băncii aruncăm o monedă echilibrată în mod repetat; dacă moneda pică H atunci mongerul ne dă 1 unitate monetară; în caz contrar îi dăm noi 1 u.m.

Jocul continuă până când sau am câștigat suma necesară, sau am pierdut avansul (faliment).

Care este prob. să ajungem la faliment?



A - evenimentul prin care ajungem la faliment - ruină

B - evenimentul ca la prima aruncare să obținem H

$P(A / \text{am pornit cu } k) = ?$

Notăm $\mathbb{P}_k(A) = \mathbb{P}(A / \text{am pornit cu } k)$

$\downarrow$ formula prob. totale

$$\mathbb{P}_k(A) = \mathbb{P}_k(A \mid B)\,\mathbb{P}_k(B) + \mathbb{P}_k(A \mid B^c)\,\mathbb{P}_k(B^c)$$

$$= \mathbb{P}_{k+1}(A)\frac{1}{2} + \mathbb{P}_{k-1}(A)\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$\mathbb{P}_{k+1}(A) = \mathbb{P}_k(A \mid B)$

$\mathbb{P}_k(A \mid B^c) = \mathbb{P}_{k-1}(A)$ $\quad \boxed{p_k = \frac{1}{2} p_{k+1} + \frac{1}{2} p_{k-1}}$ $\quad k \in \{1, \dots, N-1\}$

Condiții inițiale

$\begin{cases} p_0 = 1 & \text{dacă am plecat cu 0 u.m. atunci sunt} \\ p_N = 1 & \text{dacă am toată suma nu joc} \end{cases}$

Vrem să găsim p_k din rel de recurență

$$p_k = \frac{1}{2} p_{k+1} + \frac{1}{2} p_{k-1}, \quad k \in \{1, \dots, N-1\}$$
$$p_0 = 1, \ p_N = 0$$

$$2 p_k = p_{k+1} + p_{k-1}$$

$$p_k - p_{k-1} = p_{k+1} - p_k$$

$a_k = p_k - p_{k-1}$, $k \geq 1 \Rightarrow a_{k+1} = a_k \Rightarrow a_k = a_1$

$p_k - p_{k-1} = p_1 - p_0 \Rightarrow p_k = p_{k-1} + (p_1 - p_0)$

$p_K = p_{K-1} + (p_1 - p_0)$

$p_{K-1} = p_{K-2} + a_1$

$p_{K-2} = p_{K-3} + a_1$

$\vdots$

$p_1 = p_0 + a_1$

$p_K = p_0 + k \cdot a_1$

$K = N \Rightarrow \quad p_N = p_0 + N a_1 \rightarrow a_1 = -\frac{1}{N}$

$\Rightarrow \boxed{p_K = 1 - \frac{K}{N}} \Rightarrow$ prob să câștigăm este $\frac{K}{N}$

Ex. Ce se întâmplă pentru pt $p \neq \frac{1}{2}$

CURS (28 octombrie) (cursul 6)

Variabile aleatoare – discrete
└ continue

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\{\omega \mid X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathbb{R}$

În general dorim să calculăm $\mathbb{P}(X \in A)$, $A \subseteq \mathbb{R}$

$\{X \in A\} \in \mathcal{F}$

$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$

Exp aruncăm o monedă (echilibrată) de două ori

$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

X – nr de capete în cele 2 aruncări

$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(TT) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\underbrace{HT}_{\omega_1} \cup TH) = \mathbb{P}(HT) + \mathbb{P}(TH) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(HH) = \frac{1}{4}$

$A = \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) = \frac{3}{4}$

Def (Repartiția cuiva)

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de probabilitate și $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

o variabilă aleatoare. Se numește repartiția lui X, probabilitatea

$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$, $\forall$ /

$X^{-1}(A)$ s.n. preimaginea lui A prin X

$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$

Repartiția lui X, $\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$

Def ~~(Funcția de repartiție)~~

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de probabilitate și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

Se numește funcția de repartiție a lui X, funcția $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ definită prin: $F(x) = \mathbb{P}(X \le x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Obs $A = (-\infty, x]$ atunci $F(x) = (\mathbb{P} \circ X^{-1})(A)$

Exp $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nr. de capete (H)

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{4} & , 0 \le x < 1 \\ \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) = \frac{3}{4} & , 1 \le x < 2 \\ 1 & , 2 \le x \end{cases}$$

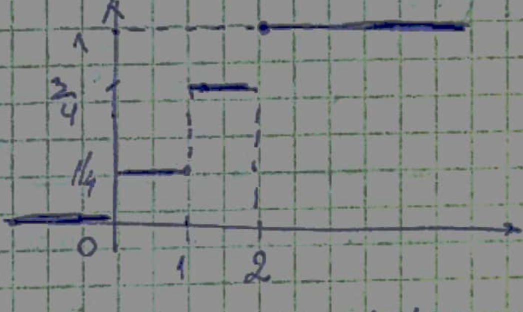
Dacă $x < 0 \Rightarrow \{X \le x\} = \{\omega \mid \underbrace{X(\omega)}_{\{0,1,2\}} \le x < 0\} = \emptyset$

$0 \le x \le 1 \Rightarrow \{X \le x\} = \{X = 0\} =$

$1 \le x < 2 \Rightarrow \{X \le x\} = \{X = 0\} \cup \{X = 1\}$

$2 \le x = \{X \le x\} = \{X \in \{0,1,2\}\} = \Omega$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{4} & , 0 \le x < 1 \\ \frac{3}{4} & , 1 \le x < 2 \\ 1 & , x \ge 2 \end{cases}$$



Proprietăți: Funcția de repartiție a unei v.a. X satisface urm. proprietăți

a) F este crescătoare

b) F este continuă la dreapta ($\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} F(x) = F(x_0)$)

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ și $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

Plecând de la a, b, c avem

d) $\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \le x) = 1 - F(x)$

e) $\mathbb{P}(x < X \leq y) = \mathbb{P}(X \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x) = F(y) - F(x)$

f) $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x) = F(x) - \lim\limits_{\substack{y \to x \\ y < x}} F(y)$

Variabile aleatoare discrete

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ este discretă $\Leftrightarrow X(\Omega)$ este cel mult numărabil

Fie $A \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\left(X \in \bigcup\limits_{x \in A \cap X(\Omega)} \{x\}\right) = \sum\limits_{x \in A \cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)$

→ Def (Funcția de masă asociată v.a. discretă)

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $X: \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. discretă. Se numește funcția de masă a lui X funcția $p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A \cap X(\Omega)} p_X(x)$$

În particular, $A = (-\infty, x]$ avem $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum\limits_{\substack{y \leq x \\ y \in X(\Omega)}} p_X(y)$

Notație: Daca X v.a. discretă,

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$

Modul în care v.a. X este reprezentată se mai notează

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots \\ \mathbb{P}(X = x_1) & \mathbb{P}(X = x_2) & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$ → tablou de repartiție || distribuție

$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \end{pmatrix}$$

Ce proprietăți trebuie să îndeplinească funcția de masă?

$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$, $x \in \mathbb{R}$

Proprietăți fcției de masă

1) $p_X(x) \geq 0$ – $\boxed{\text{nonnegativitate}}$

2) $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} p_X(x) = 1$ → $\boxed{\text{masa totală este 1}}$

$\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$, $\{X \in \mathbb{R}\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in \mathbb{R}\} = \Omega$

$\{x \in \mathbb{R}\} = \{X = X(\Omega)\} = \{X = \{x_1, x_2, \ldots\}\} =$

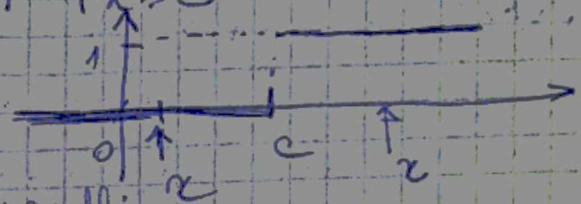
$= \{ X \in \bigcup_i \{x_i\} \} = \bigcup_i \{X = x_i\}$

Exemple de variabile aleatoare discrete

1) $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X = c$ (constantă)

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & x \neq c \\ 1, & x = c \end{cases}$$

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases}$$

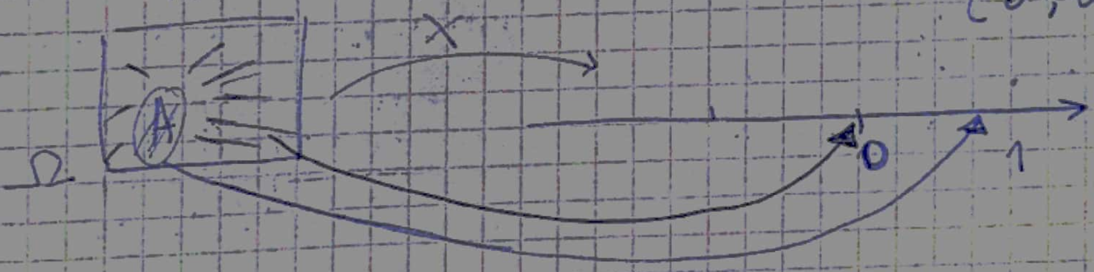


2) Variabile aleatoare Bernoulli

Pp că avem un experiment aleator și ne interesăm la realizarea sau nerealizarea unui eveniment A.

Considerăm că șansa de realizare a lui A este p $(\mathbb{P}(A) = p)$

Definim $X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\qquad X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

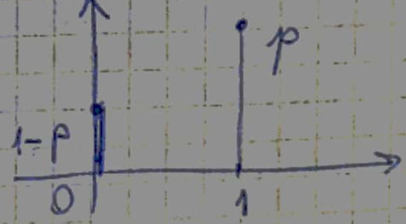


Exp. aruncăm cu $\qquad A = \{H\}$

$X : \Omega \to \{0, 1\}$

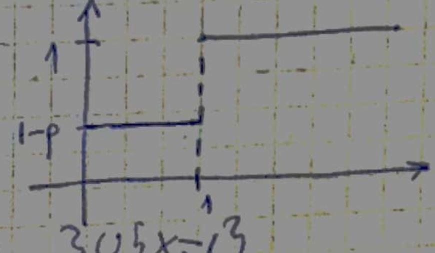
Funcția de masă

$$p_X(x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ 1 - p, & x = 0 \end{cases}$$



Funcția de repartiție

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - p, & 0 \leq x < 1 \\ , & x > 1 \end{cases}$$



Dacă $x \geq 1$, at $\{X \leq x\} = \{X \in \{0, 1\}\} = \{X = 0\} \cup \{X = 1\}$

Forma compactă $p_X(x) = p^x(1-p)^x$, $x \in \{0,1\}$

<u>Variabile indicator</u>: $A \in \mathcal{F}$

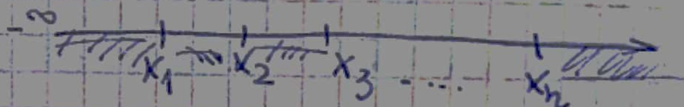
$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

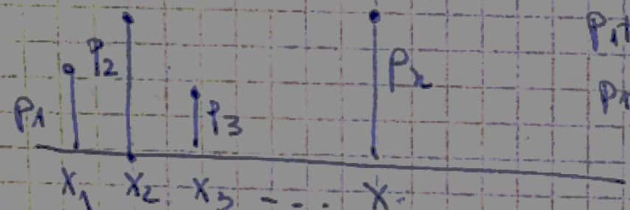
3) Variabile discrete cu suport finit

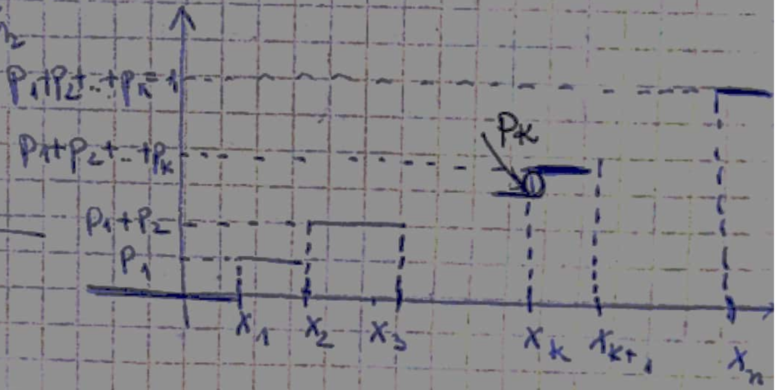
$X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ Pp $(x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n)$

$$p_X(x_i) = p_i, \quad i \in \{1, \dots\}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < x_1 \\ p_1 & , x_1 \le x < x_2 ; \quad \{X \le x\} = \{X = x_1\} \\ p_1 + p_2 & , x_2 \le x < x_3 ; \quad \{X \le x\} = \{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \\ \vdots & \\ p_1 + p_2 + \dots + p_k & x_k \le x \le x_{k+1} \\ 1 & , x \ge x_n \end{cases}$$







4) Variabile binomiale

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$$

Pp că avem n experimente aleatoare independente și în realizarea fiecărui experiment ne interesăm în realizarea sau nerealizarea unui eveniment A $(P(A) = p)$

V.a. X definită prin nr total de realizări ale lui A în cele n experimente este o v.a. de tip binomial cu parametrii n, p.

<u>Notație</u> $X \sim B(n, p)$ șansa de succes

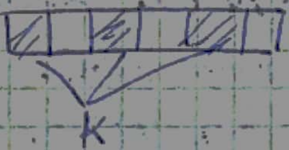
În particular, pentru $n=1$ avem că X este o v.a. Bernoulli de parametru p și notăm $B(p)$ (în loc de $B(1,p)$)

Ex Aruncăm cu o monedă de n ori și presupunem că șansa de apariție a lui H este p. Suntem interesați în v.a. X = nr de capete în cele n aruncări

$\Omega = \{H, T\}^n$ Avem să calculăm $p_X(k) = \mathbb{P}(X=k)$

$X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ $k = \{0, 1, \dots, n\}$

$n = 6$



$(1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0)$

$p^3(1-p)^3$

Prob să observ o secvență specifică în care avem k valori H și $(n-k)$ val de T $p^k(1-p)^{n-k}$

Cum avem $\binom{n}{k}$ astfel de secvențe de lungime n cu k valori de H deducem că

"din n încercări k reușite"

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1$$

(binomul lui Newton)

Ob Putem să ne gândim la v.a. $X \sim B(n,p)$ ca la o suma de n var. aleatoare de tip Bernoulli $B(p)$

$$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

Y_i = rezultatul celui de-al i-lea experiment

Ex7 Fie un bit (0 sau 1) care este transmis pe un canal bruiat și are prob. p să fie transmis.

Pentru a îmbunătăți fiabilitatea comunicării transmitem bit-ul de n ori (n impar).

Pp că avem un decodor care decide care bit este corect după nr majoritar de biți transmiși

Pp ca $n=5$ și $p=0,1$ și fie X - nr de biți transmiși cu eroare $X \sim B(n,p)$.

Care este prob. ca mesajul să fie corect

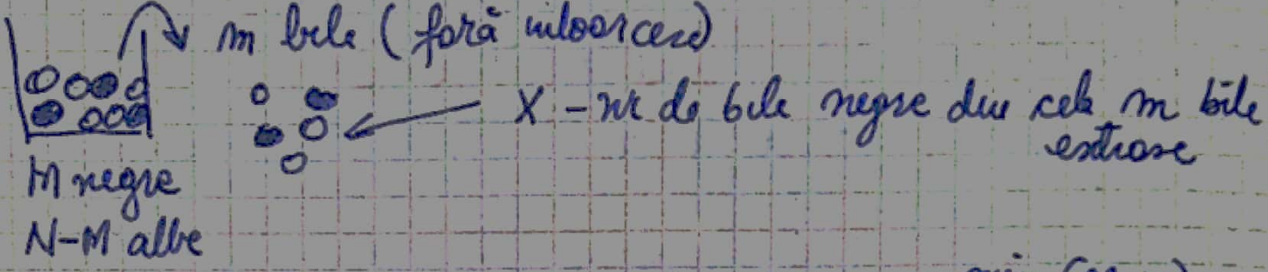
$$\mathbb{P}(X=0 \cup X=1 \cup X=2) = \mathbb{P}(X \le 2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Curs 7

a) var. aleatoare repartizate hipergeometric

Să presupunem că avem o urnă cu N bile dintre care M sunt de culoare neagră și celelalte $N-M$ sunt albe.

Considerăm v.a. X dată de nr de bile negre extrase atunci când din urnă am extras n bile fără întoarcere.



Notația: $X \sim HG(n, N, M)$

Vreau să determin $\mathbb{P}(X=k) = ?$ $\qquad k = \{0, 1, \dots, n\}$ ← $\min(M, n)$

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$\mathbb{P}(X=k) > 0$ ← pt a fi o fct de masă validă

$$\sum_{k=0}^{\min(M,n)} \mathbb{P}(X=k) = 1$$

Ip $n < M$, atunci $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = 1$ sau altfel scris

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} = \binom{N}{n} \leftarrow \text{identitatea Vandermonde}$$

Idee: ne uităm la ~~binomu~~ identitatea $(1+x)^M (1+x)^{N-M} = (1+x)^N$ și identificăm coeficientul lui x^n.

În cazul în care $Y \sim B(n, \frac{M}{N})$ și $Y \sim HG(n, N, M)$ diferența apare în modul de desf a experimentului, mai exact în modul în care extragem bilele din urnă:

a) binomial - extragem cu întoarcere

b) hipergeometric - extragem fără întoarcere

Exp: Să considerăm jocul de bile 6 din 49 și presupunem că oficialii loteriei extrag cele 6 nr câștigătoare în mod aleator. Definim X v.a care să includă nr de bile câștigătoare

atunci $P(X=k) = \dfrac{\binom{6}{k}\binom{49-6}{6-k}}{\binom{49}{6}} = \dfrac{\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$

$X \sim HG(\underset{m}{6}, \underset{N}{49}, \underset{M}{6})$

Dacă $k=6 \Rightarrow P(X=6) = \dfrac{1}{\binom{49}{6}}$

Exp 2 (cum să estimăm nr de pești dintr-un loc)

Un loc cu $N \geq 1$ pești, N - necunoscut. Mergem la pescuit și prindem $r \geq 1$ pești pe care îi marcăm și apoi îi eliberăm în loc. A doua zi mergem iar la pescuit și să presupunem că am prins n pești, dintre care $k \geq 1$ erau marcați.

$$P(X=k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Prin metoda verosimilității maxime, găsim că $\hat{N} = \left[\frac{nr}{k}\right]$

6) Repartiția discretă uniformă

$D = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $X: \Omega \to D \subseteq \mathbb{R}$.

Spunem că X este repartizată uniform pe D și scriem $X \sim \mathcal{U}(D)$,

dacă $P(X=x) = \dfrac{1}{|D|}$, $x \in D$

Pentru $A \subseteq D$, avem că $P(X \in A) = \dfrac{|A|}{|D|}$

exp să presupunem că avem o urnă cu bile numerotate de la 1 la 100. Extragem 5 bile, una după alta:

1) Extragere cu întoarcere

a) Care este rep. v.a. care ne dă nr bilelor ce au o val inscripționată ≥ 80.

b) Cum este repartizată v.a. care ne dă a j-a extragere $(1 \leq j \leq 5)$

c) Care este probabilitatea ca nr 100 să fie extras cel puțin o dată.

Sol a) Prob să extragem o bilă cu val ≥ 80 este $\dfrac{21}{100} = p$

v.a. $X \sim B(5, 0.21)$ // pt că extragerea se face cu întoarcere

b) X_j val la a j-a extragere

$X_i \sim \mathcal{U}(\{1,2,\dots 100\})$ $\quad \mathbb{P}(X_j = k) = \frac{1}{100}$

$X_j \sim \mathcal{U}(\{1,2,\dots,100\})$

a) $\mathbb{P}(\{X_1=100\}\cup\{X_2=100\}\cup\{X_3=100\}\cup\{X_4=100\}\cup\{X_5=100\}) =$

$= 1 - \mathbb{P}(\{X_1\neq 100\}\cap\{X_2\neq 100\}\cap\dots\cap\{X_5\neq 100\})$

$= 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^5$ extragem 5 bile în total

2) Extragerile se fac fără întoarcere — de interes (≥ 80)

a) $Y \sim HG(5, 100, 21)$

b) Y_j - val de la a j-a extragere

$Y_1 \sim \mathcal{U}(\{1,2,\dots,100\})$

$Y_j \sim \mathcal{U}(\{1,2,\dots,100\})$

c) $\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{5}\{Y_j=100\})$

Evenimentele $\{Y_1=100\}$ și $\{Y_2=100\}$ sunt disjuncte pt că extragerea se face fără întoarcere, prin urmare $\{Y_j=100\}$ sunt disjuncte 2 câte 2

$\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{5}\{Y_j=100\}) = \mathbb{P}(Y_1=100)+\dots+\mathbb{P}(Y_5=100) = \frac{5}{100}$

7) <u>V.a. repartizate geometric și negativ binomial</u>

Aruncăm în mod repetat cu o monedă și șansa de succes (să obținem cap) este p.

V.a. X să reprezinte nr de aruncări până obținem și incluzând, primul succes.

V.a. X este o var. aleatoare repartizată geometric de parametrul p și notăm $X \sim Geom(p)$

$X = \{1,2,3,\dots\} = \mathbb{N}^*$ (numărabil, dar infinit)

$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1}\cdot p$, $k\geq 1$ $\quad \underbrace{TTTT}_{(k-1)}\ \underset{k}{H}$

(fără de masă)

$\mathbb{P}(X=k)\geq 0$ și

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p = p\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i = p\,\frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

Obs Există și o versiune alternativă a acestei def. v.a Y reprezintă nr de eșecuri înaintea primului succes.

$$Y = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$Y = X - 1 \quad , \quad \mathbb{P}(Y = k) = (1-p)^k p \ , \ k \geq 0$$

Obs V.a. $X \sim Geom(p)$ verifică prop lipsei de memorie

$$\mathbb{P}(X = n + k \mid X \geq n) = \mathbb{P}(X = k)$$

Def V.a. X dată de nr de aruncări până obținem pt prima oară $r \geq 1$ succese este o var. aleatoare rep. negativ binomial și notăm $X \sim NB(r, p)$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} (1-p)^{k-r} p^r$$

prob să obs r secvențe dată de lungimea k în care avem r val de 1 și $k-r$ de 0

succese

$$\underbrace{0 \ 1 \ 0 \ 1 \ \dots \ 1}_{k}$$

(P) Dacă $X \sim NB(r, p)$ atunci putem scrie

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_r \ , \ X_i \sim Gem(p) \text{ indep}$$

X_1: nr eșecuri până la primul succes

X_2: nr suplimentar de eșecuri până la al doilea succes

8) V.a. Poisson

Spunem că v.a. X este rep Poisson de parametru $\lambda > 0$ și scriem $X \sim P(\lambda)$ (sau $X \sim Pois(\lambda)$) dacă

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Utilizare
- modelarea într-un timp specific a sosirilor clienților la ghișeul unui magazin
- nr de mașini într-o intersecție într-un anumit interval de timp
- nr de cazuri de boală dintr-o anumită regiune
- nr de cuvinte scrise eronat într-o carte
- nr de email-uri într-un minut

$$\mathbb{P}(X = k) \geq 0 \ , \ k \geq 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

<u>Aproximarea binomialei prin Poisson:</u>

Fie n, p sunt în așa fel încât $np \to \lambda$ și $X \sim B(n,p)$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$\frac{\lambda}{n} \to 0 \Rightarrow \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow[1^\infty]{} \left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\lambda} \to e^{-\lambda}$$

$$\frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{(n-k-n)\dots(n-1)n}{n^k} = e\ \frac{n-k-n}{n}\cdot\frac{n-k+2}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\frac{n}{n}$$

pt k fixat avem $\frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k} \to 1$

$$\frac{\lambda}{n} \to 0 \Rightarrow 1-\frac{\lambda}{n} \to 1 \Rightarrow \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \to 1$$

Prin urmare

$$\mathbb{P}(X=k) \underset{\substack{n\to\infty \\ np\to\infty}}{\simeq} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

<u>Obs</u> Folosim această aproximare atunci când n mare, p mic și $np \simeq \lambda$

Exp $n = 10^6$ potențiali clienți, $p = 2\times 10^{-6}$,

atunci probabilitatea să avem cel puțin 3 clienți

$\mathbb{P}(X \geq 3) = ?$ $\qquad X \sim B(n,p)$

$$\mathbb{P}(X\geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X<3)$$
$$\simeq 1-\mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) - \mathbb{P}(X=2)$$
$$\simeq 1-$$

<u>Funcții de v.a. discrete</u>

X v.a. poate suntem interesați de e^X sau $\sin(X)$

<u>Def</u> Considerăm $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de prob, $X: \Omega\to\mathbb{R}$ o v.a. (discretă) și $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție. Atunci $g(X): \Omega \to \mathbb{R}$ este v.a.

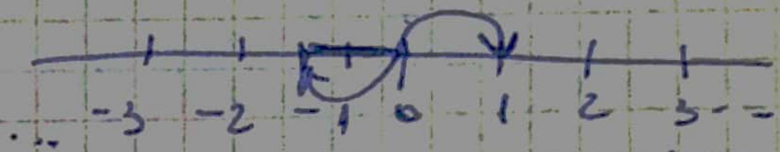
Scanned with CamScanner

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "g \circ X"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Dacă X este discretă atunci $g(X)$ este discretă.

Exp (Mersul la întâmplare)

O particulă se mișcă n pași pe dreapta numerelor începând din poziția 0.



La fiecare pas, particula se mișcă spre dreapta sau spre stânga cu prob $1/2$. Fie Y poziția după n pași.
Vrem să calculăm $P(Y=k)$

Sol Nr de pași, X, pozitivi (spre dreapta) este o var aleatoare rep $B(n, 1/2)$

Dacă $X=j$ atunci avem j pași spre dreapta și $n-j$ pași spre stânga!

$$\overbrace{\qquad\qquad}^{n-j}\ 0\ \underbrace{\qquad\qquad}_{j}$$

deci poziția este: $j-(n-j) = 2j-n \Rightarrow Y = 2X-n$:

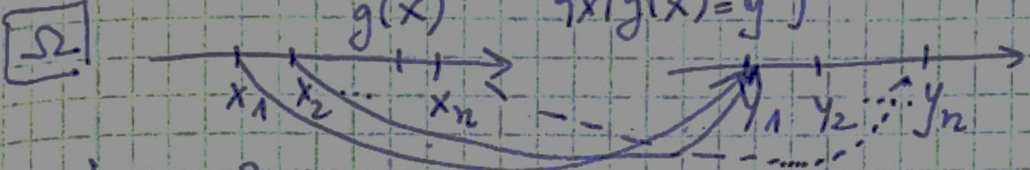
$$P(Y=k) = P(2X-n=k) = P\left(X = \frac{n+k}{2}\right)$$

CURS (8)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. (discretă) iar $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ atunci $g(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ este o v.a.

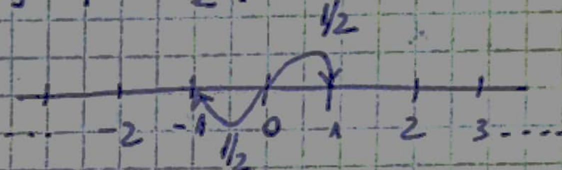
(P) Dacă X este o v.a. $\Omega \to \mathbb{R}$ discretă și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ atunci $Y = g(X)$ este o v.a. $\Omega \to \mathbb{R}$ discretă iar

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\{x \mid g(x) = y\}} \mathbb{P}(X = x)$$



$\{Y = y_1\} = \{g(X) = y_1\} = \{X = x_1\} \cup \{X = x_2\}$

Exp (Mersul la întâmplare)



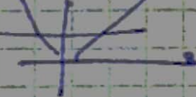
Y - poziția după n pași

$Y = 2X - n$ unde X v.a. care ne dă nr de pași spre dreapta

$$X \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$$

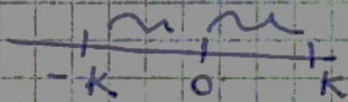
Ne interesăm la distanța față de origine după n pași, n par

Z - distanța căutată $\qquad g(y) = |y|$



$Z = |Y|$, $|\cdot|$ nu este bijectivă

Dacă $Y = 0 \Rightarrow Z = 0$



Pentru $k \in \{2, 4, \dots, n\}$ avem $\{Z = k\} = \{|Y| = k\}$

$= \{Y = k\} \cup \{Y = -k\}$

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Y = k) + \mathbb{P}(Y = -k)$$

$$= \binom{n}{\frac{n+k}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \binom{n}{\frac{n-k}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$= 2 \binom{n}{\frac{n+k}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{pt că} \quad \binom{n}{\frac{n+k}{2}} = \binom{n}{\frac{n-k}{2}}$$

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \binom{n}{n/2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Obs Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de prob. și $X_1, X_2, \dots, X_d$ v.a. discrete $: \Omega \to \mathbb{R}$, $d \geq 1$ și $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ o funcție.

Atunci $Y = g(X_1, X_2, \dots, X_d) : \Omega \to \mathbb{R}$ și este o v.a.

Scanned with CamScanner

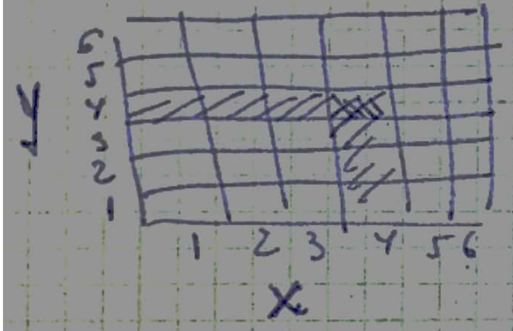
Exp Pt $d=2$ și X_1 și X_2 v.a. discrete atunci putem considera $g(u,v)=u+v$; $g(u,v)=u-v$, $g(v,u)=\max(v,u)$ etc

Exp Aruncăm cu 2 zaruri și fie X nr de puncte de pe primul zar și Y nr de puncte de pe al doilea zar.

$Z=\max(x,y)$. Avem funcția de masă a lui Z.

$\mathbb{P}(Z=k)=?$

$k=\{1,2,..,6\}$



$$\mathbb{P}(\max(X,Y)=4)=?$$
$$=\mathbb{P}(X=4,Y=4)+\mathbb{P}(X=4,Y\le 3)+\mathbb{P}(Y=4,X\le 3)$$
$$\frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{3}{36}=\frac{7}{36}$$

Independența v.a. (discrete)

Reamintim: spunem că două ev. A și B sunt independente dacă $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Intuitiv: două v.a. X și Y sunt independente dacă știind val uneia dintre ele nu avem nicio info suplimentară despre cealaltă.

Def Spunem că v.a ~~X și Y sunt independente~~ și notăm $\boxed{X \perp Y}$ dacă evenimentele $\{X=x\}$ și $\{Y=y\}$ sunt independente pt orice x,y.

Cu alte cuvinte,

$$\boxed{\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y)} \quad \text{pt } \forall x,y$$

Prop V.a X și Y (discrete) sunt independente dacă și numai dacă
$$\mathbb{P}(X\le x, Y\le y)=\mathbb{P}(X\le x)\mathbb{P}(Y\le y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Def: Spunem că v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sunt independente dacă
$$\mathbb{P}(X_1\le x_1,\dots,X_n\le x_n)=\mathbb{P}(X_1\le x_1)\times\dots\times\mathbb{P}(X_n\le x_n),\ \forall x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}$$

În cazul în care avem o infinitate de v.a. atunci spunem că acestea sunt independente dacă pt orice mulțime finită v.a. sunt indep:

$(X_i)_{i\in A}$ v.a. indep. dacă $\forall J\subset A$, $|J|<\infty$ avem

Scanned with CamScanner

că $(X_i)_{i\in J}$ sunt indep. în sensul $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J}\{X_i \le x_i\}\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(X_i \le x_i)$

Media și momentele v.a. discrete

Repetăm un experiment N ori și urmărim rezultatul unei v.a X de interes (e.g. experimentul → aruncarea cu banul de 10 ori și X să fie nr de succese (H) din cele $n=10$ aruncări)

Înregistrăm $x_1, x_2, \dots, x_N$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \text{ - media aritmetică}$$

Dacă v. a. X are funcția de masă $f(x) = \mathbb{P}(X=x)$ atunci avem că aproximativ $Nf(x)$ dintre valori să fie egale cu x.

$$m \simeq \frac{1}{N} \sum_x x \cdot \underbrace{N f(x)}_{\text{nr de ori în care obsv. val } x} = \sum_x x f(x) \leftarrow \text{sumă ponderată}$$

Def Definim media unei v.a. discrete X cu funcția de masă $f(x) = \mathbb{P}(X=x)$ prin $\mathbb{E}[X] = \sum_x x f(x)$, ori de câte ori seria $\sum_x |x| f(x) < \infty$

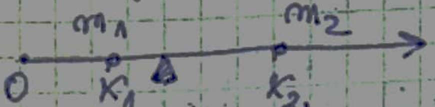
Dacă seria este divergentă $\| \sum_x |x| f(x) \|$ spunem că media nu este definită.

Exp X este rezultatul aruncării cu zarul, $X \in \{1, 2, \dots, 6\}$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{6} \cdot (1+2+3+4+5+6) = 3,5$$

Exp $X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$; $\mathbb{E}[X] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$

Obs Media poate fi interpretată ca centrul de greutate (masă) al unui sistem finit de corpuri.



$m_1 > m_2$

" o medie ponderată "

de la fizică $\overline{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$

Exp $X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 3 \\ 1/4 & 1/8 & 1/4 & 3/8 \end{pmatrix}$ atunci

$\mathbb{E}[X] = (-2) \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8}$

$\mathbb{E}[X] = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Prop a) Dacă $X = c$ a.s. (aproape sigur $\Rightarrow \mathbb{P}(X=c)=1$) atunci $\mathbb{E}[X] = c$

b) Dacă $X \geq 0$ a.s. $\Rightarrow \mathbb{E}[X] \geq 0$

b') Dacă $X \geq Y \Rightarrow \mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$

c) Dacă $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{E}[aX+bY] = a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y]$

Def c) X v.a. discretă, $X \in \{x_1, x_2, \dots\}$ x_n

Y v.a. discretă, $Y \in \{y_1, y_2, \dots\}$ y_m

Considerăm evenimentele $A_i = \{X = x_i\}$ $i \geq 1$

$B_j = \{Y = y_j\}$ $j \geq 1$

$$\mathbb{1}_A^{(\omega)} = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases} \Leftarrow \text{fcție indicator a mulțimii } A$$

$$X = \sum x_i \mathbb{1}_{A_i}, \quad Y = \sum y_j \mathbb{1}_{B_j}$$

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases} \quad \text{atunci } \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{1}_A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\mathbb{P}(A) & \mathbb{P}(A) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = 0 \times (1-\mathbb{P}(A)) + 1 \times \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)$$

$$aX + bY = a\sum x_i \mathbb{1}_{A_i} + b \sum y_j \mathbb{1}_{B_j} = \sum_{i,j} (a x_i + b y_j)\mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$$

$$\mathbb{E}(aX+bY) = \sum_{i,j} (a x_i + b y_j)\mathbb{P}(A_i \cap B_j) = \sum_i a x_i \sum_j b y_j \mathbb{P}(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_j \mathbb{P}(A_i \cap B_j) = \mathbb{P}(A_i \cap \bigcup_j B_j) = \mathbb{P}(A_i)$$

$$a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) = a\sum_i x_i \mathbb{P}(A_i) + b\sum_j y_j \mathbb{P}(B_j) =$$

$$= a\sum_i x_i \sum_j \mathbb{P}(A_i \cap B_j) + b\sum_j y_j \sum_i \mathbb{P}(A_i \cap B_j) =$$

$$= \sum_{i,j} (a x_i + b y_j)\mathbb{P}(A_i \cap B_j) = \mathbb{E}[aX + bY]$$

Obs În general $\mathbb{E}[XY] \neq \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

P Dacă $X \perp\!\!\!\perp Y$ atunci $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$!

Ex

(R) Dacă X este v.a discretă și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o fcție

$Y = g(X)$ are media $\boxed{\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[g(X)] = \sum_x g(x) \mathbb{P}(X = x)}$!

Exp $X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 3 \\ 1/4 & 1/8 & 1/4 & 3/8 \end{pmatrix}$ $Y = X^2$

$Y \in \{1, 4, 9\}$, $Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$

! $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = -1) + \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

$\mathbb{E}[Y] = 1 \times \frac{3}{8} + 4 \times \frac{1}{4} + 9 \times 3/8 = 1 + \frac{15}{4}$

Putem calcula și aplicând formula $\mathbb{E}[X^2] = \sum_x x^2 f(x)$

$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X^2] = (-2)^2 \times \frac{1}{4} + (-1)^2 \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{3}{8} = \frac{4}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{9}{8} = 1 + \frac{15}{4}$

Def Numim moment de ordin k ($k \geq 1$) al v.a X (discrete) $\mathbb{E}[X^k]$ și moment centrat în a de ordin k, $\mathbb{E}[(X-a)^k]$.

Dacă $a = \mathbb{E}[X]$ atunci $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k]$ s.n. momentul centrat de ordin k.

În particular, pentru $k = 2$, momentul centrat de ordin 2 se numește varianță și se notează cu

$\boxed{Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}$ ← măsură care prezintă gradul de împrăștiere a datelor în jurul mediei.

(N.B.) Obs Dacă X este măsurată în u.m. atunci Var(X) . . . . (of!)

Abaterea standard (s.d.) este definită prin

$SD(X) := \sigma = \sqrt{Var(X)}$

Exp $X_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$ repartizată uniform pe $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$X_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/10 & 2/10 & 4/10 & 2/10 & 1/10 \end{pmatrix}$ $X_4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

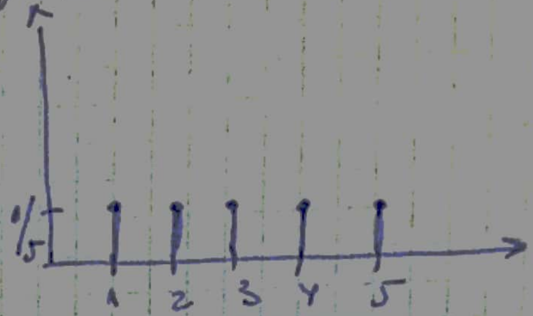
$X_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

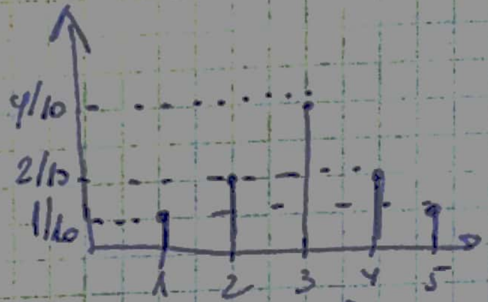
$\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3$

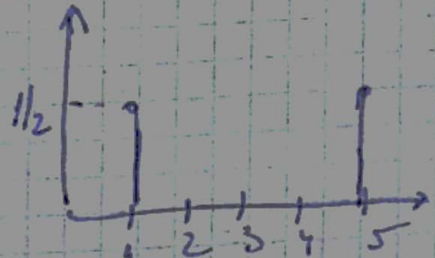
$\mathbb{E}[X_2] = 3$

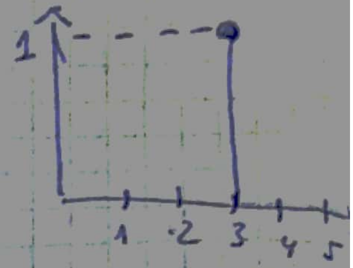
$\mathbb{E}[X_3] = 3$

$\mathbb{E}[X_4] = 3$









$Var(X_1) = \mathbb{E}[(X_1-3)^2] = 2$

$(X-1)^2 \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

$Var(X_2) = 1.2$

$Var(X_3) = 4$

$Var(X_4) = 0$

Prop

a) $Var(X+a) = Var X$

b) $Var(aX) = a^2 Var(X)$

c) Dacă X și Y sunt indep atunci $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

d) $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

Dem a) $Var(X+a) = \mathbb{E}[(X+a-\mathbb{E}[X+a])^2]$

$= \mathbb{E}[(X+a-\mathbb{E}[X]-\mathbb{E}[a])^2] =$

$= \mathbb{E}[(X+a-\mathbb{E}[X]-a)^2] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))^2]$

b) $Var(aX) = \mathbb{E}[(aX-\mathbb{E}[aX])^2]$

$= a^2\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = a^2 Var[X)$

$\boxed{Var(aX+b) = a^2 Var(X)}$

d) $Var(X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))^2]$

$= \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2]$

$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2$

$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X]^2$

c) $Var(X+Y) = \mathbb{E}[((X+Y) - \mathbb{E}(X+Y))^2]$

$= \mathbb{E}[(X+Y - E(X) - \mathbb{E}Y)^2] =$

$\Rightarrow Var(X+Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))^2 + 2(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y)) + (Y-\mathbb{E}Y)^2]$

$= Var(X) + 2\mathbb{E}[(X-E(X))(Y-E(Y))] + Var\,Y$

$X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow X - \mathbb{E}[X] \perp\!\!\!\perp Y - \mathbb{E}[Y]$

deci $\Rightarrow \mathbb{E}((X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])) = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}[X])\,\mathbb{E}[Y-\mathbb{E}[Y]] = 0$

$Var(X+Y) = Var(X) + Var\,Y$

LABORATOR

$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$

Rep. var aleatoare $5X-2, X^2, X^3, X+X^2$ și să calc mediile, variantele var aleatoare v.a. precum și $\mathbb{P}(X > -1/6)$ și $\mathbb{P}(X < 1/8 \mid X \geq -\frac{1}{8})$

Sol

$X^3 \in \{-1, 0, 1\}$

$X^3 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$

$\mathbb{E}(X^3) = (-1)\cdot 0{,}3 + 0\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}5 = 0.2$

$Var(X^3) = \mathbb{E}[(X^3 - \mathbb{E}[X^3])^2]$

$g(y) = (y-0.2)^2$

$Var(X^3) = \mathbb{E}[(X^3-0.2)^2]$

$Y = X^3$ atunci $Var(Y) = \mathbb{E}[(Y-0{,}2)^2] = (-1-0.2)^2 \times 0.3 + (0-0.2)^2 \times 0.2 + (1-0.2)^2 \times 0.5 = 0.7$

$Y - 0{,}2 \sim \begin{pmatrix} -1{,}2 & -0{,}2 & 0.8 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$

$(Y-0{,}2)^2 \sim \begin{pmatrix} (-1{,}2)^2 & (-0.2)^2 & (0.8)^2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.64 & 1.44 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$

$\mathbb{E}[(Y-0{,}2)^2] = 0.04 \times 0.2 + 0.64 \times 0.5 + 1.44 \times 0.3 = 0.76$

! Varianța trebuie să fie pozitivă

$Var(X^3) = \mathbb{E}[X^6] - \mathbb{E}[X^3]^2$

$Var(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2$

$X^6 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbb{E}[X^6] = 0.8$

$\mathbb{E}(X^6)$

$\mathbb{E}[X^6] = g(-1)\cdot 0.3 + g(0)\cdot 0,2 + g(1)\times 0,5 = 0,8$

$\hookrightarrow g(x) = x^6$

$\Rightarrow Var(x^3) = 0.8 - 0.04 = 0.76$

$\mathbb{E}(5X-2] = 5\,\mathbb{E}(x) - 2$

$= 5\times 0.2 - 2 = -1$

$\left.\begin{array}{l} Var(5X-2) = 25\,Var(x) \\ Var(x) = 0.76 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow Var(5X-2) = 19$

$\boxed{Var(aX+b) = a^2\,Var(x)}$

$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$

$5X-2 \in \{-7, -2, 3)$

$5X-2 \sim \begin{pmatrix} -7 & -2 & 3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$

$\mathbb{E}[5X-2] = (-7)\times 0.3 + (-2)\times 0.2 + 3\times 0.5 = -1$

$Var[5X-2] = \mathbb{E}\left[\left((5X-2) - \mathbb{E}[5X-2]\right)^2\right]$

$= \mathbb{E}\left[(5X-2+1)^2\right] = \mathbb{E}\left[(5X-1)^2\right]$

$= 0.3\times((5\cdot(-1)-1)^2) + 0.2\times(5\cdot 0-1)^2 + 0.5\cdot 4^2$

$= 0.3\times 36 + 0.2 + 0.5\cdot 16 = \underline{\underline{19}}$

$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$ $\quad X^2 \in \{0, 1)$

$X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$

$\mathbb{E}(X^2) = 0\cdot 0.2 + 1\cdot 0.8 = 0.8$

$Var(x^2) = \mathbb{E}(X^4) - \mathbb{E}(X^2)^2 = 0.8 - 0.64 = 0.16$

$X^4 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{E}(X^4) = \mathbb{E}(X^2) = 0.8$

$X + X^2 \in \{0, 2\}$

$X + X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow (X+X^2)^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$

$\mathbb{E}(x + x^2) = 0,5\times 2 = 1$

$Vr(x+X^2) = \mathbb{E}((x+x^2)^2) - \mathbb{E}(x+x^2)^2 = 2 - 1 = 1$

$P(X > -\frac{1}{6}) = P(\{X=0\} \cup \{X=1\}) = P(X=0) + P(X=1) = 0.2+0.5$
$= 0.7$

$P(\underbrace{X < 1/8}_{A} \mid \underbrace{x \geq -1/8}_{B}) = \frac{P(-\frac{1}{8} \leq X < \frac{1}{8})}{P(X \geq -1/8)} = \frac{0.2}{0.7} = \frac{2}{7}$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$A \cap B = \{X < \frac{1}{8}\} \cap \{X \geq -\frac{1}{8}\} = \{-1/8 \leq x \leq \frac{1}{8}\} = \{X=0\}$

ex2 Aruncăm repetat cu o monedă pt care $P(H) = p$

X - nr de succese înainte de al 2-lea eșec într-o secvență de aruncări repetate // nr de H până la a 2-a T

$\{X=3\} \Rightarrow \omega = \{HTHHT\}$

Vrem să determinăm prob $P(X=k) = ?$ $k \geq 0$

Ip $k=3$: _ _ T _ _ T

H

$\binom{4}{1}$

$P(HTHHT) = p(1-p)\,p\,p(1-p) = p^3(1-p)^2$

$P(X=3) = \binom{4}{1} p^3 (1-p)^2$ $\qquad \frac{k!}{k-2}$

$P(X=k) = \binom{k+1}{1} p^k (1-p)^2$

$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots \\ P(X=0) & P(X=1) & & \end{pmatrix}$

$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{k+1}\ T$

k - H
1 - T

Cât este $E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1) p^k (1-p)^2 =$

$= (1-p)^2 \sum \underbrace{k(k+1)}_{C^2_{k+1}} p^k$

$(p^{k+1})' = (k+1)p^k$

$(p^{k+1})'' = k(k+1)p^{k-1}$

$\sum_{k=0} k(k+1) p^k = \sum k(k+1) p^k$
$= p \sum k(k+1) p^{(k-1)}$
$= p \sum_{k=1}^{m} (p^{k+1})'' =$

$$= p \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} p^{k+1} \right)''$$

$$p^2 \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} = p^2 \sum_{k=0}^{\infty} p^k = p^2 \cdot \frac{1}{1-p}$$

$$p^2 + p^3 + p^4 + \dots = p^2 (1 + p + p^2 + \dots)$$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$!

$n \to \infty \quad 1 + x + x^2 + \dots$

$\frac{\partial}{\partial x} \quad \sum_{k=0}^{\infty} x^k$

$$\left(\frac{p^2}{1-p} \right)'' = \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{p^2}{1-p} \right) = \frac{d}{dp} \left(\frac{2p(1-p) - (-1)p^2}{(1-p)^2} \right) = \frac{d}{dp} \left(\frac{2p - 2p^2 + p^2}{(1-p)^2} \right)$$

$$= \frac{d}{dp} \left(\frac{2p - p^2}{(1-p)^2} \right) = \frac{(2-2p)(1-p)^2 - (2p - p^2) 2 (1-p)(-1)}{(1-p)^4}$$

$$= \frac{2(1-p)^2 + 2(2p - p^2)}{(1-p)^3} \qquad \frac{2p}{1-p}$$

$$\mathbb{E}[X] = (1-p)^2 p \frac{2(1-p)^2 + 2(2p-p^2)}{(1-p)^3} = p \frac{2 + 2p^2 - 4p + 4p - 2p^2}{1-p}$$

Ex 3 Varianta = dispersie

a) $X \sim B(p)$

$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix} \qquad \mathbb{E}[X] = p$

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}[X]^2 = p(1-p)$

$X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$

b) $X \sim B(n, p)$ – nr de succese în n experimente; prob succes

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n & \dots & n \\ & & \dots & \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \dots & & & \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \times \mathbb{P}[X=k] = \sum_{k=0}^{n} k (C_n^k) p^k (1-p)^{n-k} \dots$$

$$= \sum_{k=0} k \cdot \frac{n!}{n} = \sum_{k=1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)^n (n-k)!} p^k (1-p)'$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \frac{n (n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n \cdot p \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}}_{1 \cdot (p+1-p)^{n-1}}$$

$$= n \cdot p$$

rez la prima incercare

rez la a doua exp.

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $X_i \sim B(p)$

$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \dots + \mathbb{E}[X_n] = np$

(sunt independente)

$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}(X)^2 = n(n-1)p^2 + np$ (de încercat)!

$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \mathbb{P}(X=k)$

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $X_i \sim B(p)$ independ.

$Var\, X = Var(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \dots + Var(X_n)$

$= np(1-p)$

Temă: media / varianța pentru v. Poisson(λ), Geom(p), $NB(r, p)$

Scanned with CamScanner