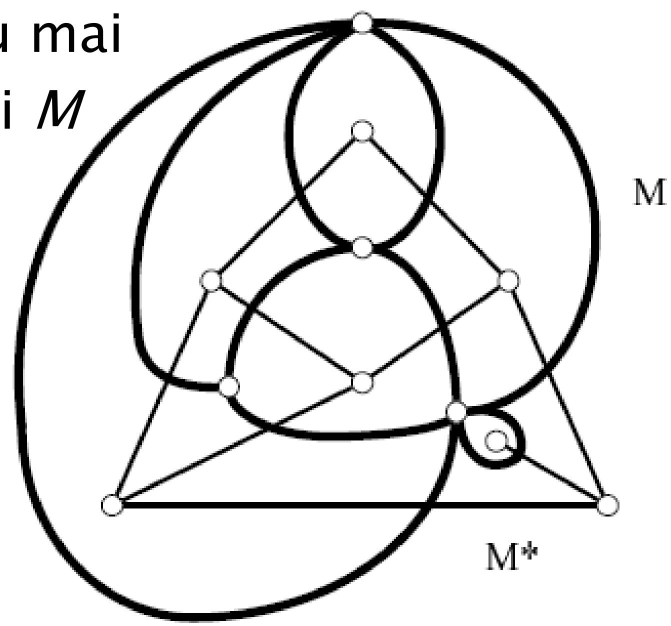
Graf planar

- **Harta duală**
- M=(V,E,F) -> **harta duală** M*=(V*, E*, F*)
  - V* <= se consideră câte un punct f* în interiorul fiecărei fețe f din M
  - E* <= pentru fiecare muchie *e* a lui M comună la două fețe *f′* și *f′′* se construiește un segment de curbă continuă e* cu capetele în vârfurile *f′** și *f′′** asociate fețelor *f′* și *f′′* astfel încât să intersecteze în interior muchia *e* și să nu mai intersecteze astfel nicio altă muchie a lui *M*



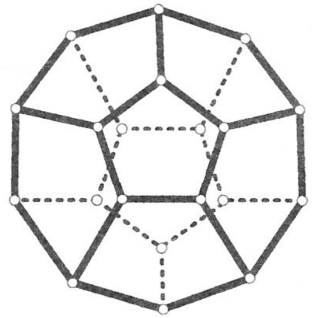
Graf planar

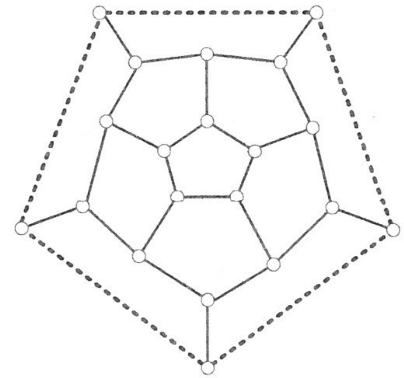
- **Harta duală**
- $M=(V,E,F)$ -> **harta duală** $M^*=(V^*, E^*, F^*)$
    - $(M^*)^*$ este izomorf cu M
    - $d_{M^*}(f^*) = d_M(f)$

(gradul vârfului corespunzător feței în dual = gradul feței în M)

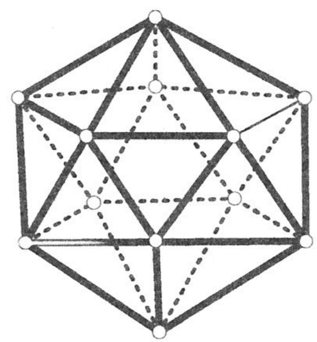
Graf planar

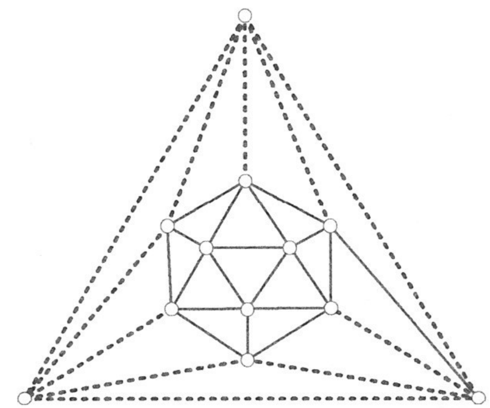
Dodecaedru:





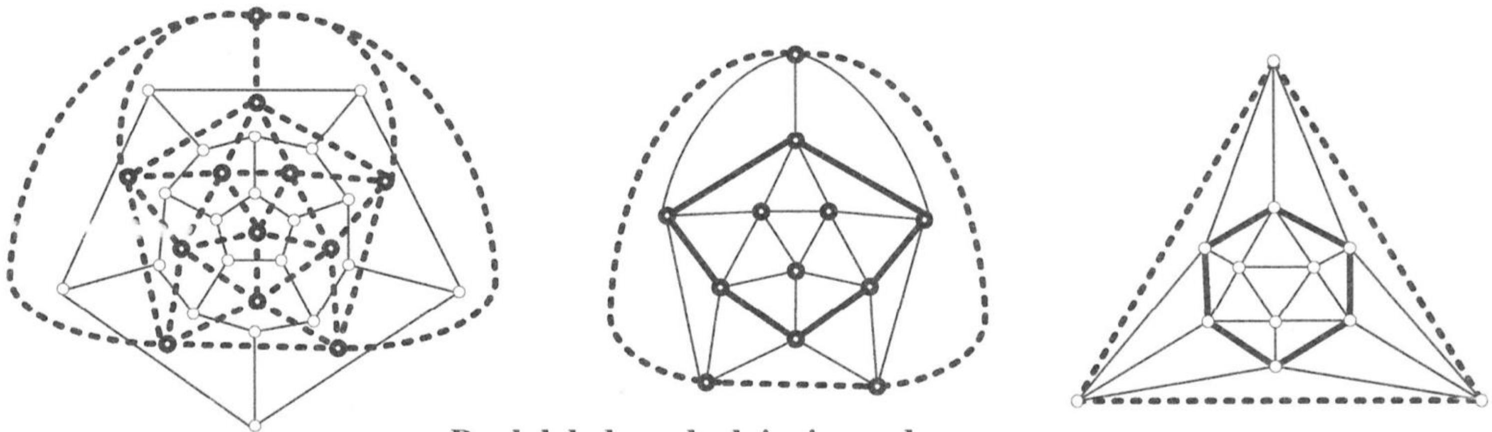
Icosaedru:



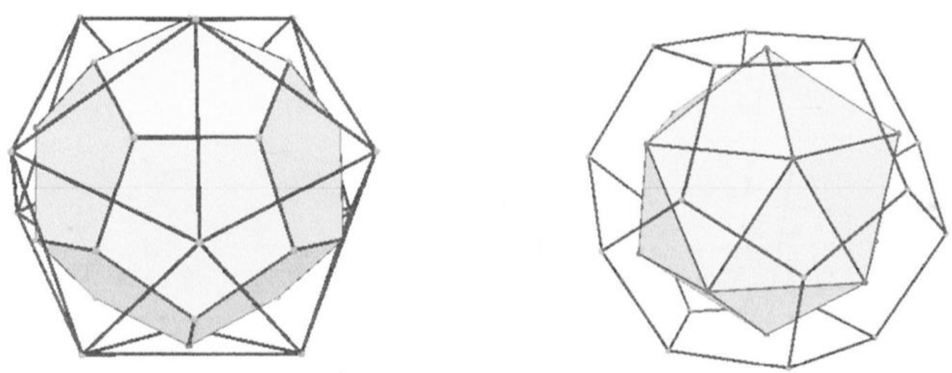


duale

Graf planar

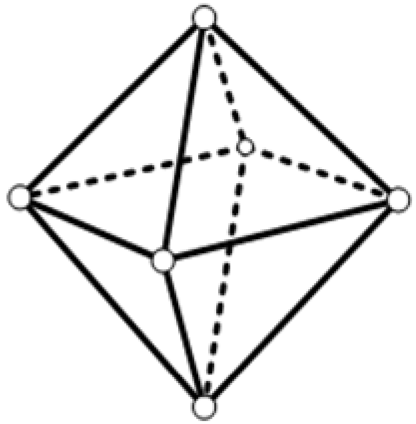


Dualul dodecaedrului = icosaedru

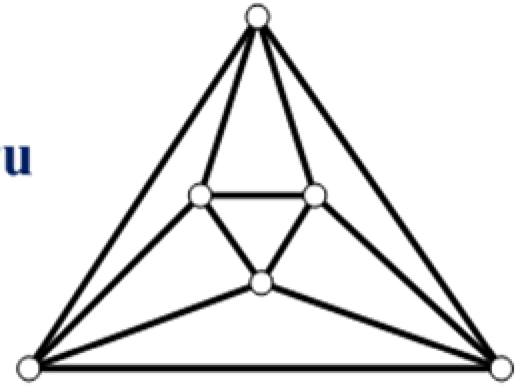


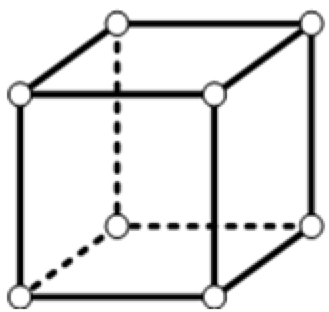
Dualitatea dodecaedru ⇔ icosaedru (http://apollonius.math.nthu.edu.tw/d1/dg-07-exe/943251/dynamic/duality.htm**)**

Graf planar

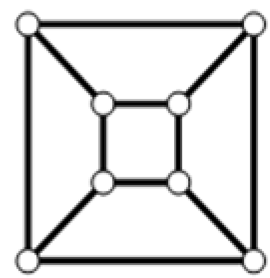


Octaedru



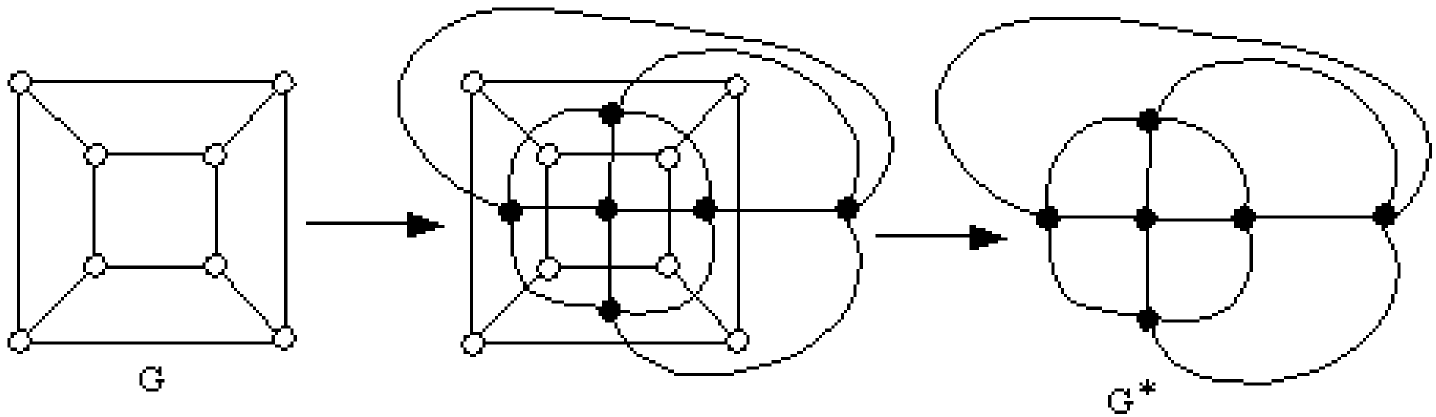


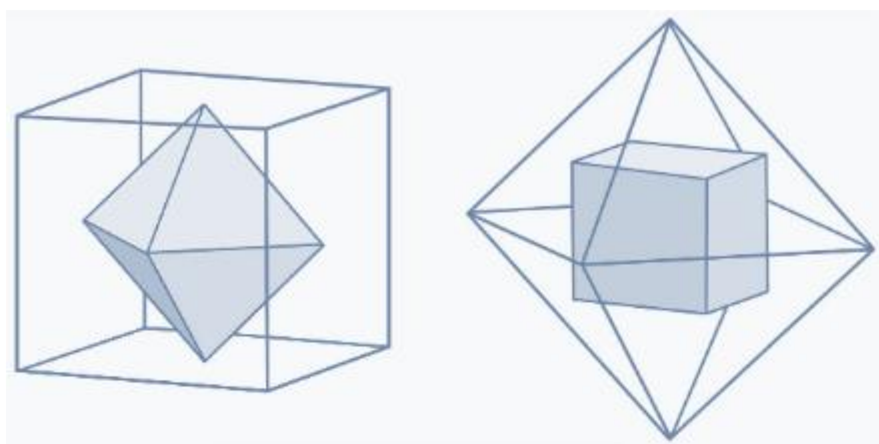
Cub



duale

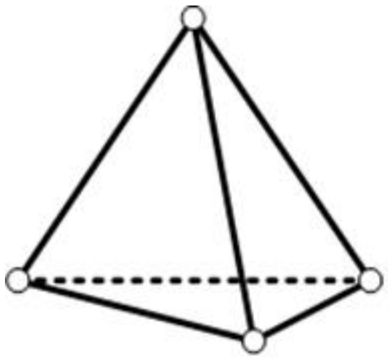
Graf planar



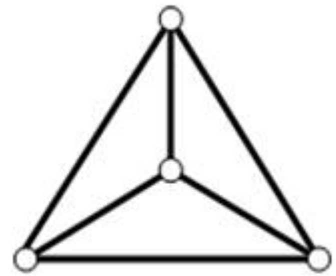


http://origametry.net/combgeom/graphnotes.html

Graf planar



Tetraedru



Autodual (M izomorf cu M*)

Colorări în grafuri

Colorări ale grafurilor

Amintim:

Computațional: Dat p, **este G p-colorabil**?

Care este p minim cu proprietatea că G este p-colorabil?
= Care este numărul cromatic al lui G?

- Este G 2-**colorabil** / graf bipartit - algoritm polinomial
- Este G 3**-colorabil** - problemă NP-completă

P/NP

- Complexitatea în timp a algoritmilor joacă un rol esenţial.

- **Un algoritm este considerat "acceptabil" numai dacă timpul său de executare este polinomial**

Nu ştim algoritm polinomial – problemă grea?

P/NP

Nu ştim algoritm polinomial – problemă grea?

P = clasa problemelor pentru care există algoritmi polinomiali (determinişti)

P/NP

Nu ştim algoritm polinomial – problemă grea?

NP

– există algoritm polinomial pentru a testa o soluţie candidat dacă este soluţie posibilă (verificator polinomial) / există algoritm polinomial nedeterminist

⇒ o problemă NP poate fi rezolvată în timp exponenţial (considerând toate soluţiile candidat)

P/NP

Nu ştim algoritm polinomial – problemă grea?

NP

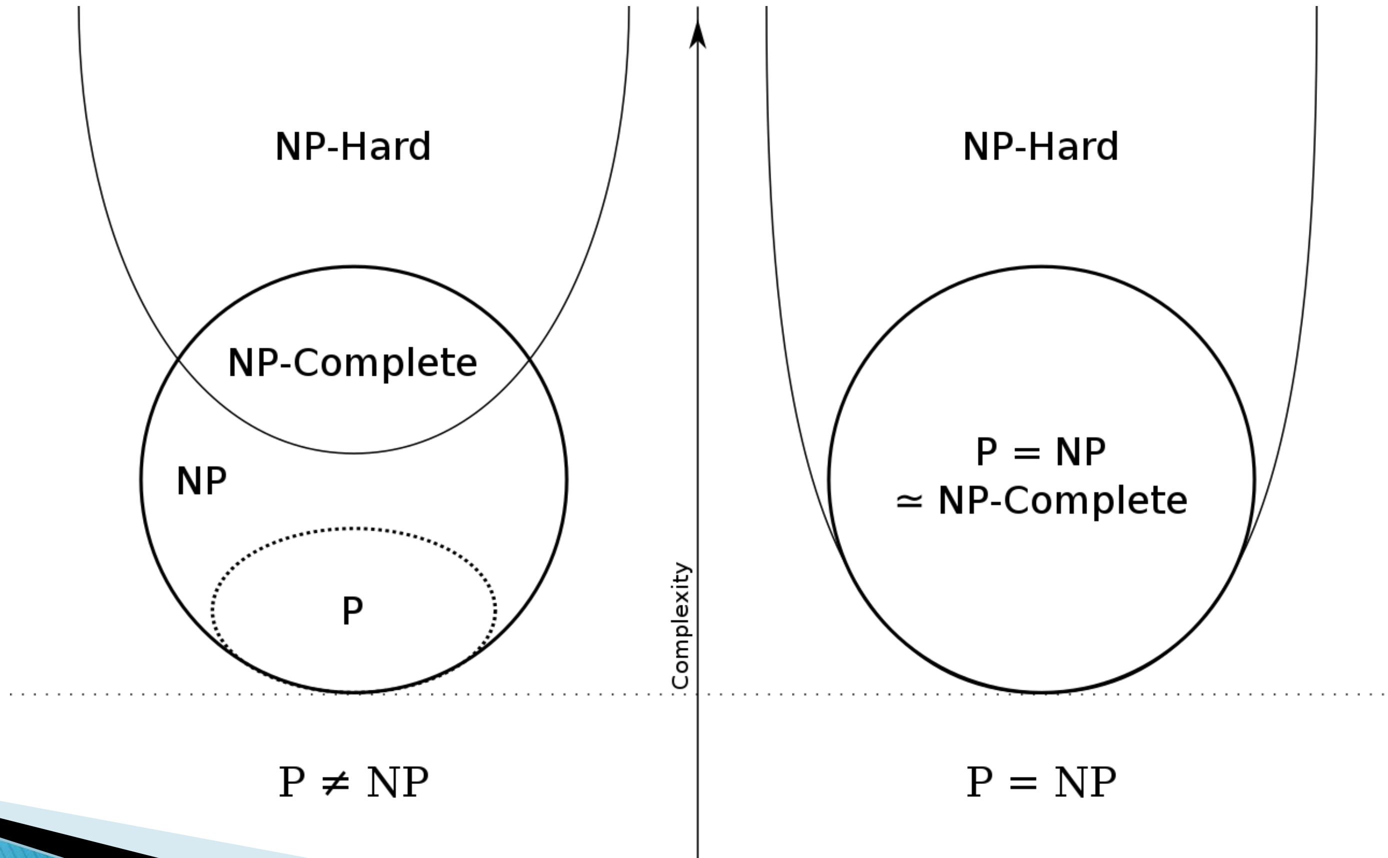
- **– $P \neq NP$?**
- **– Probleme NP-complete**
  - B ∈ **NP** a.î. $\forall A \in NP$, $A \leq p\ B$ (reducere în timp polinomial)
  - Dacă pentru un B se găseşte algoritm polinomial, atunci $P = NP$
  - SAT (Cook-Levin)
- **– Probleme NP-dificile (NP-hard)**
  - B a.î. $\forall A \in NP$, $A \leq p\ B$.

P/NP

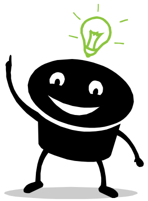
Nu ştim algoritm polinomial – problemă grea?

NP

– P versus NP



Metode de elaborare a algoritmilor

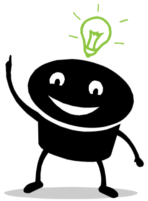


Nu ştim algoritm polinomial

- **Demonstrăm** NP - dificilă

Soluţii:

Metode de elaborare a algoritmilor



Nu ştim algoritm polinomial

- **Demonstrăm** NP - dificilă

Soluţii:

- algoritmi exponenţiali mai rapizi decât cei exhaustivi (brute force) de căutare în spaţiul soluţiilor: **Backtracking, Branch & Bound**

- **Compromis**: algoritmi mai rapizi care produc soluţii care nu sunt optime – algoritmi **euristici, aleatorii, genetici**…

Algoritmi de colorare de tip greedy (euristici)

Colorări în grafuri

Algoritm Greedy de coloare

- Fie $v_1, \dots , v_n$ o ordonare a vârfurilor
- Pentru $i = 1,\dots,n$
  - Colorează v_i cu cea mai mică culoare posibilă (care nu este culoare a unui vecin al său deja colorat)

Colorări în grafuri

Algoritm Greedy de coloare

- Complexitate?

Colorări în grafuri

Algoritm Greedy de coloare

- **Complexitate**?
  - $O(n+m)$ – determinarea primei culori disponibile pentru v – ordin $d(v)$

Colorări în grafuri

Algoritm Greedy de coloare

- Câte culori folosește maxim? (=> limită superioară pentru numărul cromatic)

- Cât de mare poate fi diferența între numărul de culori folosite de Algoritmul Greedy de colorare și numărul cromatic? Sunt clase de grafuri pentru care avem egalitate?

Colorări în grafuri

Algoritm Greedy de coloare

- Ordonarea contează, în funcție de ea numărul de culori poate diferi

Exemplul 1:

Colorări în grafuri

Algoritm Greedy de coloare

- Ordonarea contează, în funcție de ea numărul de culori poate diferi

Exemplul 1:

Ordinea 1, 2, 3, 4:

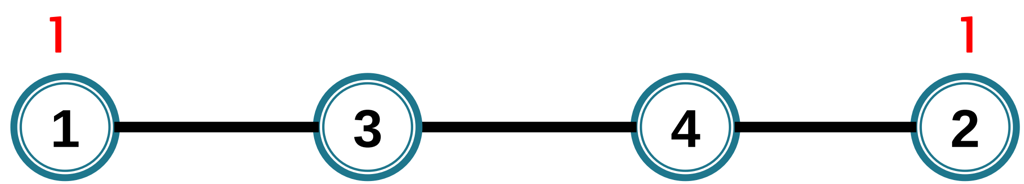
Colorări în grafuri

Algoritm Greedy de coloare

- Ordonarea contează, în funcție de ea numărul de culori poate diferi

Exemplul 1:

Ordinea 1, 2, 3, 4:



Colorări în grafuri

Algoritm Greedy de coloare

- Ordonarea contează, în funcție de ea numărul de culori poate diferi

Exemplul 1:

Ordinea 1, 2, 3, 4:

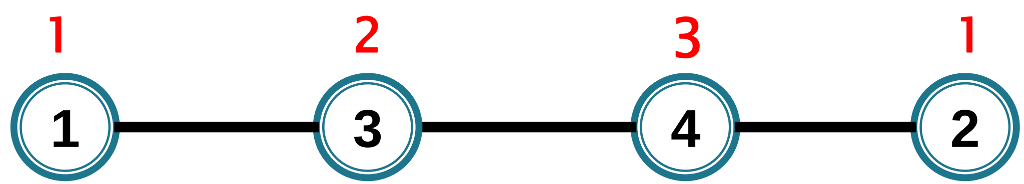
Colorări în grafuri

Algoritm Greedy de coloare

- Ordonarea contează, în funcție de ea numărul de culori poate diferi

Exemplul 1:

Ordinea 1, 2, 3, 4:



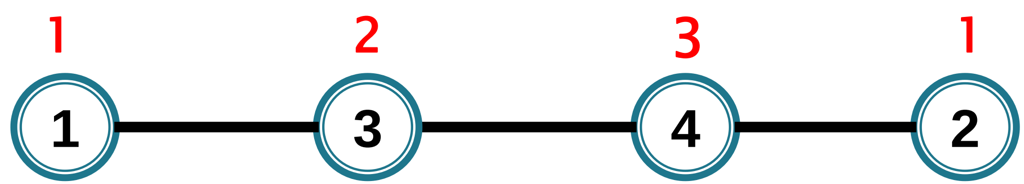
Colorări în grafuri

Algoritm Greedy de coloare

- Ordonarea contează, în funcție de ea numărul de culori poate diferi

Exemplul 1:

Ordinea 1, 2, 3, 4:

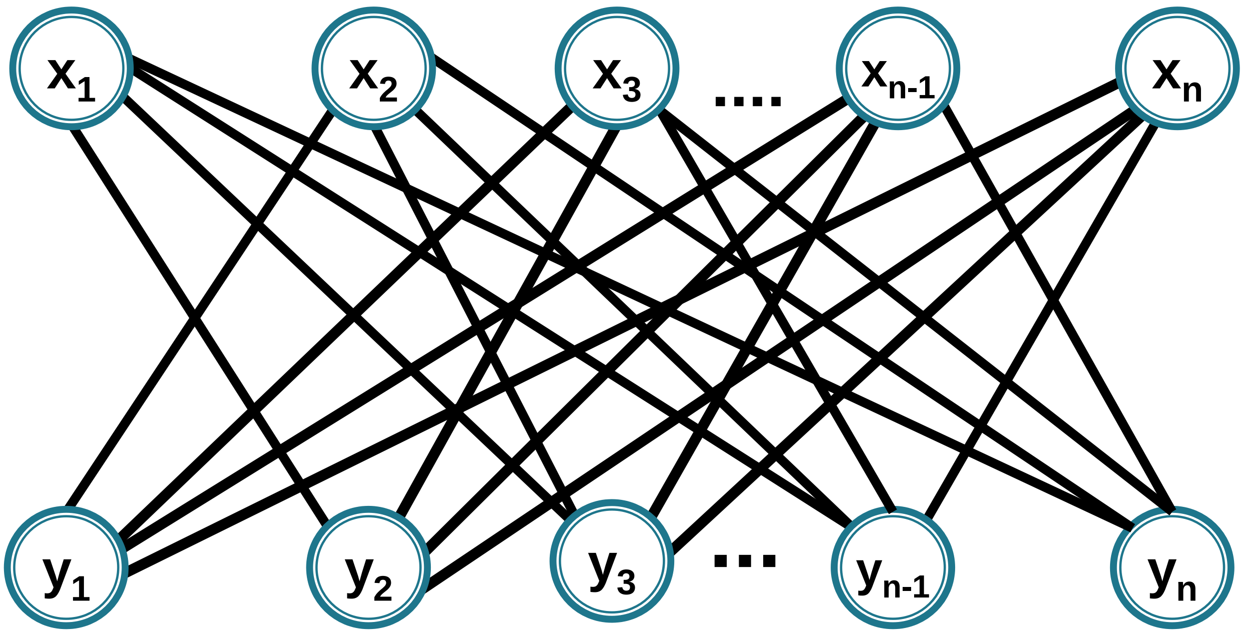


Ordinea 1, 3, 4, 2:

Colorări în grafuri

Algoritm Greedy de coloare

Exemplul 2: – Graful $G = K_{n,n}$ fără muchiile x_iy_i



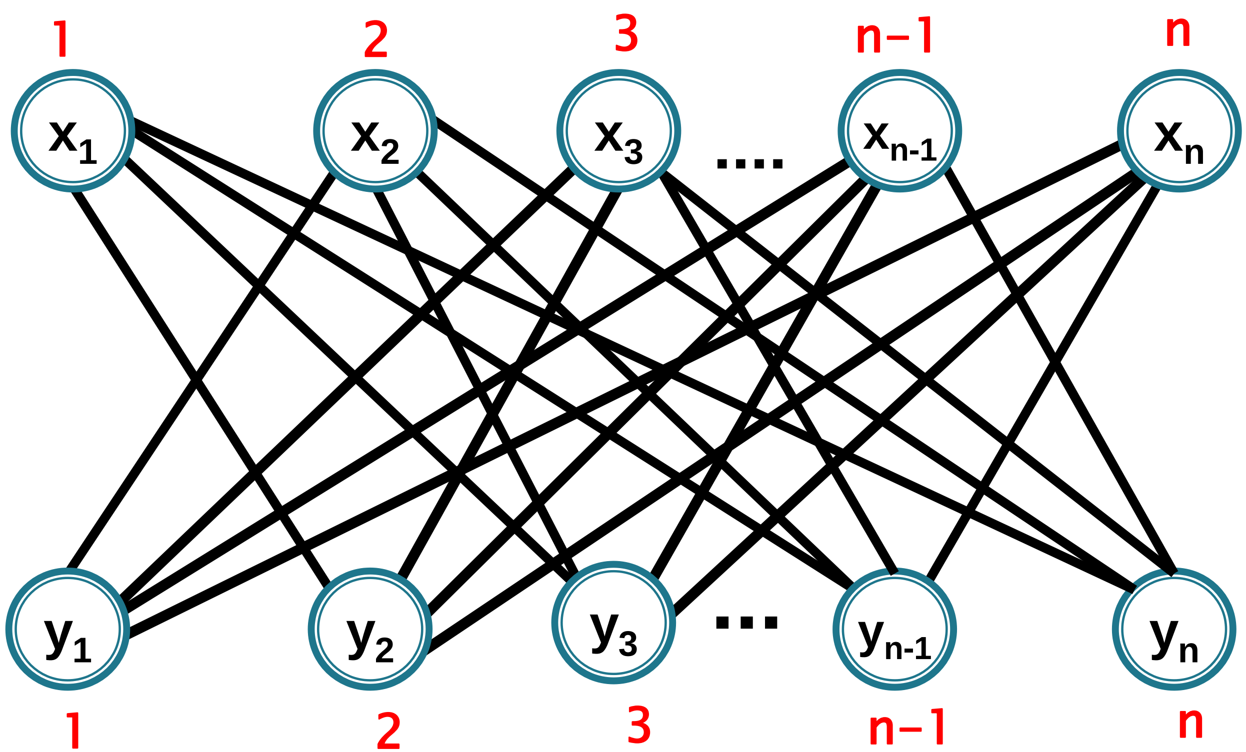
Ordinea $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots, x_n, y_n$: ? culori

$$\chi(G) = 2$$

Colorări în grafuri

Algoritm Greedy de coloare

Exemplul 2: – Graful $G = K_{n,n}$ fără muchiile $x_i y_i$



Ordinea $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots, x_n, y_n$: $n = \dfrac{|V(G)|}{2}$ **culori**

$$\chi(G) = 2$$

Colorări în grafuri

Algoritm Greedy de coloare

- $N_{greedy}(G,\{v_1,\ldots,v_n\})$ = numărul de culori folosit de Algoritmul Greedy de colorare pentru G considerând vârfurile în ordinea $v_1,\ldots,v_n$

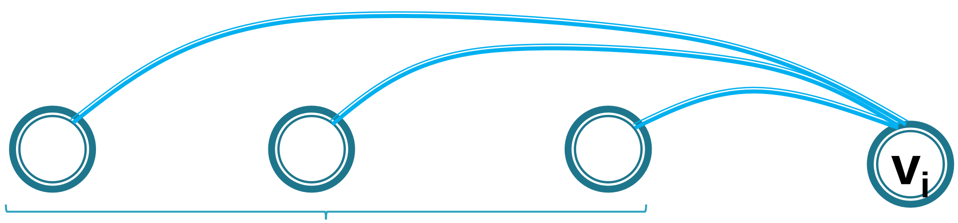
- $\Delta(G)$ = gradul maxim al lui G

Colorări în grafuri

Algoritm Greedy de coloare

- $N_{greedy}(G,\{v_1,\ldots,v_n\}) \leq \max\{\ \min(d(v_i)+1,\ i) \mid i=1,..,n\}$

$$\leq \Delta(G) + 1$$

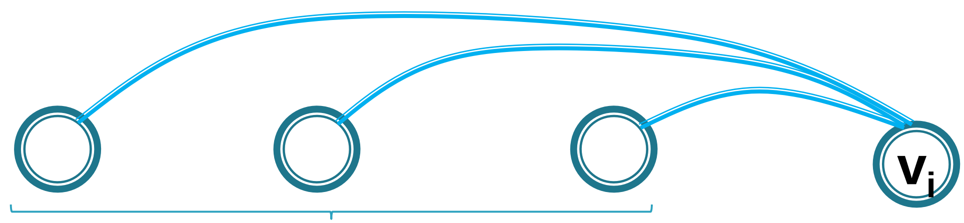


Colorări în grafuri

Algoritm Greedy de coloare

- $N_{greedy}(G,\{v_1,\ldots,v_n\}) \leq \max\{\ \min(d(v_i)+1,\ i) \mid i=1,..,n\}$

$$\leq \Delta(G) + 1$$



v_i are $d(v_i)$ vecini și sunt cel mult i-1 vârfuri deja colorate =>
v_i are cel mult $\min\{d(v_i),\ i-1\} \leq \Delta(G)$ vecini deja colorați
când se alege culoare lui

Colorări în grafuri

Limite pentru numărul cromatic

Proprietate

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

(Demonstrație: $\chi(G) \leq \mathbf{N_{greedy}(G,\{v_1,\ldots,v_n\})}$)

Colorări în grafuri

Limite pentru numărul cromatic

Proprietate

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

(Demonstrație: $\chi(G) \leq \mathbf{N_{greedy}(G,\{v_1,\ldots,v_n\})}$)

Observații:

1. $\chi(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1$
2. $\chi(C_n) = 3 = \Delta(C_n) + 1$ pentru n impar
3. $\chi(S_n) = 2, \ \Delta(S_n) = n - 1$ (graful stea)

Colorări în grafuri

Limite pentru numărul cromatic

Teorema lui Brooks

$\chi(G) \leq \Delta(G)$ pentru G care nu este graf complet sau ciclu impar

(Demonstrație– suplimentar, v. bibliografie)

Colorări în grafuri

Limite pentru numărul cromatic

Proprietate

$\chi(G) \geq \omega(G)$ = numărul clică = cardinalul maxim al unei clici (subgraf complet) din G

Colorări în grafuri

Limite pentru numărul cromatic

Proprietate

$\chi(G) \geq \omega(G)$ =numărul clică = cardinalul maxim al unei clici (subgraf complet) din G

Demonstrație – vârfurile dintr-o clică trebuie demonstrate diferit

Colorări în grafuri

Algoritm Greedy de coloare

- Am demonstrat la grafuri planare: există o ordonare a vârfurilor pentru care Algoritmul Greedy furnizează o colorare cu cel mult 6 culori (Teorema celor 6 culori)
- Exista ordonări + clase de grafuri pentru care Algoritmul Greedy de colorare este optim?

Colorări în grafuri

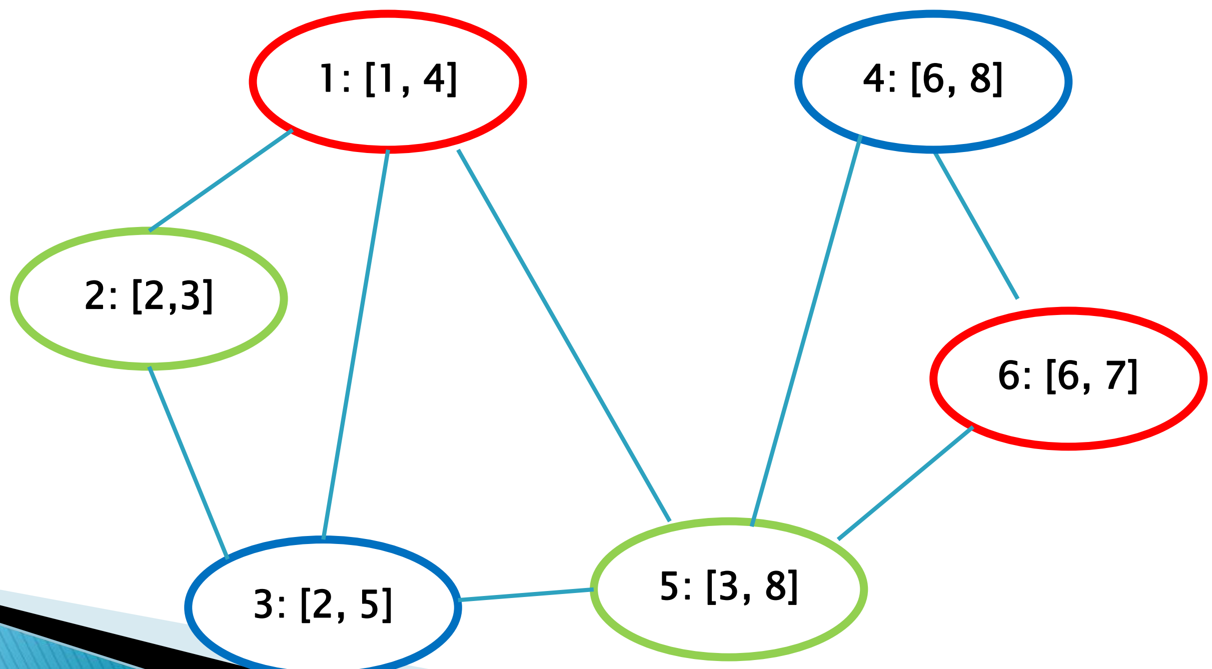
Algoritm Greedy de coloare

- Exista ordonări + clase de grafuri pentru care Algoritmul Greedy de colorare este optim?
  - Grafuri bipartite, ordonare dată de o parcurgere (sau orice ordonare în care orice vârf v_i este adiacent cu cel puțin un vârf v_j cu $j<i$)
  - Grafuri interval

Colorări în grafuri

Algoritm Greedy de colorare

- **Grafuri interval**
  - Fiecare vârf i – asociat unui interval $[a_i,b_i]$
  - Muchii – între intervale care se intersectează



Colorări în grafuri

Algoritm Greedy de coloare

- **Grafuri interval**

Proprietate: Fie G un graf interval si $v_1,\ldots,v_n$ o ordonare a vârfurilor sale după extremitatea inițială a intervalelor corespunzătoare.

Avem $\chi(G) = \mathbf{N_{greedy}(G,\{v_1,\ldots,v_n\})}$

Colorări în grafuri

Algoritm Greedy de coloare

- **Grafuri interval**

Proprietate: Fie G un graf interval si $v_1,\ldots,v_n$ o ordonare a vârfurilor sale după extremitatea inițială a intervalelor corespunzătoare.

Avem $\chi(G) = \mathbf{N_{greedy}(G,\{v_1,\ldots,v_n\})}$

Demonstrație – tablă

Colorări în grafuri

Algoritm Greedy de coloare

- **Grafuri interval**

Algoritm O(n log(n)) de determinare a numărului cromoatic $\chi(G)$ si a unei $\chi(G)$-colorări – vezi metoda Greedy, problema Partiționării intervalelor

Colorări în grafuri

Agoritm Greedy de coloare

Ordonări ale vârfurilor – strategii generale

- **SL Smallest Last** [Matula et al]: v_1, ... , v_n astfel încât v_i este vârful de grad minim din $G-v_n-...-v_{i+1}$

  – folosește cel mult 6 culori pentru grafuri planare

- **LF Largest first** [Welsh, Powell]: $v_1,...,v_n$ în ordine descrescătoare după grad

Colorări în grafuri

Agoritm Greedy de coloare

- **Ordonări dinamice**:

- DSatur – se dă prioritate în ordonare vârfurilor care au un număr maxim de vecini deja colorați (și, in caz de egalitate, celor cu gradul cel mai mare)
  - optim pentru grafuri bipartite

Colorări în grafuri

Agoritm Greedy de coloare

- **Repetarea algoritmului pe ordonări diferite**:

repetă în timpul avut la dispoziție:

- generează aleator o ordonare a vârfurilor
- colorează G folosind algoritmul Greedy pentru această ordonare
- dacă colorarea obținută folosește un număr mai mic de culori decât cea mai bună găsită până acum, memorează această colorare ca fiind cea mai bună