CURSUL 2: MULŢIMI

G. MINCU

1. Mulţimi

Noţiunea de mulţime este una primară în matematică.

De obicei, folosim termenul de „mulţime” pentru a desemna o entitate pe care considerăm că o constituie anumite obiecte[1]. Acestea din urmă se numesc **elementele** mulţimii.

Vom nota faptul că obiectul x este element al mulţimii M prin $x \in M$.

Vom considera că **două mulţimi sunt egale dacă şi numai dacă au aceleaşi elemente**.

Cea mai naturală metodă de a reprezenta o mulţime este de a enumera efectiv elementele acesteia; în mod standard, elementele respective se scriu între acolade, fără repetiţii şi în orice ordine dorim.

Exemplul 1. a) $\{1, 3, -5\}$; $\{-\frac{7}{3}, \pi\}$; {a;b;1, 2(3)}, $\{3, -5, 1\}$, $\{-3, 5, 1\}$, etc.
Reamintim aici şi mulţimile „uzuale” de numere:
b) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ - mulţimea numerelor naturale.
c) $\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ - mulţimea numerelor întregi.

Observaţia 2. $\{1, 3, -5\} = \{3, -5, 1\}$, dar $\{1, 3, -5\} \neq \{-1, 3, 5\}$.

Nu toate mulţimile pot fi reprezentate de maniera sintetică propusă anterior, de cele mai multe ori motivul fiind acela că respectivele mulţimi au „prea multe” elemente pentru a fi posibilă (sau utilă!) o astfel de reprezentare. În astfel de situaţii, apelăm la reprezentarea mulţimilor cu ajutorul unei proprietăţi caracteristice elementelor lor.

[1]fie graţie unor proprietăţi comune ce justifică punerea laolaltă a acestor obiecte, fie pur şi simplu în mod arbitrar/ca exerciţiu intelectual

Exemplul 3. a) $\{a \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}\ a = 2k+1\}$ - mulţimea numerelor naturale impare
b) $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$ - mulţimea numerelor raţionale.
c) $\mathbb{R}$ = mulţimea numerelor ce corespund punctelor unei drepte[2] - mulţimea numerelor reale.
d) $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$ - mulţimea numerelor complexe.

Observaţia 4. În exemplul 3 nu este reprezentată şi mulţimea $\mathbb{R}$ în acord cu ideile pe care le-am introdus. O astfel de reprezentare este posibilă, dar greu de urmărit în acest moment.

Definiţia 5. Spunem că mulţimea A este **inclusă** în mulţimea B dacă orice element al lui A îi aparţine şi lui B. Această situaţie este descrisă şi de exprimarea „**A este submulţime a mulţimii B**".

Desemnăm situaţia în care mulţimea A este inclusă în mulţimea B prin notaţia $A \subset B$.

Observaţia 6. Dacă $A \subset B$, putem avea $A = B$ sau nu. Dacă nu are loc egalitatea celor două mulţimi, spunem că A **este inclusă strict în** B şi scriem $A \subsetneq B$.

Observaţia 7. Dată fiind o mulţime M şi o proprietate $\mathcal{P}$ care are sens pentru cel puţin unul dintre elementele lui M, admitem că $\{x \in M : x$ are proprietatea $\mathcal{P}\}$ este o submulţime a lui M. Acest lucru conferă legitimitate manierei „analitice" de prezentare a mulţimilor pe care am amintit-o mai sus[3].

Observaţia 8. Mulţimile A şi B sunt egale dacă şi numai dacă $A \subset B$ şi $B \subset A$.

O consecinţă foarte importantă a observaţiei 8 este următoarea:

Observaţia 9. Întotdeauna egalitatea de mulţimi se demonstrează prin dublă incluziune.

Observaţia 10. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Niciuna dintre aceste incluziuni nu este egalitate.

Definiţia 11. Considerăm că există o mulţime care nu are niciun element. Ea se notează cu $\emptyset$ şi se numeşte **mulţimea vidă**.

[2]pe care am fixat originea şi unitatea

[3]Atragem atenţia asupra faptului că, în lipsa unei mulţimi iniţiale M în cadrul căreia să punem problema elementelor cu proprietatea $\mathcal{P}$, nu avem garanţia că acestea constituie o mulţime. Persistenţa în a lucra cu astfel de „mulţimi" poate conduce la paradoxuri.

Observaţia 12. Pentru orice mulţime M avem $\emptyset = \{x \in$M: $x \neq x\}$. Prin urmare, $\emptyset \subset M$.

Se consideră că, dată fiind o mulţime M, submulţimile sale constituie o mulţime.

Definiţia 13. Dată fiind mulţimea M, mulţimea $\{A : A \subset M\}$ se numeşte **mulţimea părţilor lui** M. Vom nota această mulţime cu $\mathcal{P}(M)$.

2. Principiul inducţiei

O proprietate fundamentală a mulţimii numerelor naturale, care ne oferă o puternică metodă pentru demonstraţia de afirmaţii şi pentru construcţia de obiecte, este următoarea[4]:

Principiul inducţiei: *Dacă M este o submulţime a lui $\mathbb{N}$ cu proprietăţile*
1) $0 \in M$
şi
2) $\forall n \in \mathbb{N} \;\; n \in M \Rightarrow n+1 \in M$,
atunci $M = \mathbb{N}$.

Prezentăm mai jos două consecinţe ale acestui principiu. Acestea stau la baza abordării practice a demonstraţiilor prin inducţie matematică.

Teorema 14. *Fie P un predicat de variabilă naturală şi $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât:*
1) $P(n_0)$
şi
2) $\forall k \geq n_0 \;\; P(k) \Rightarrow P(k+1)$,
atunci $\forall n \geq n_0 \; P(n)$.

Teorema 15. *Fie P un predicat de variabilă naturală şi $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât:*
1) $P(n_0)$
şi
2) $\forall k \geq n_0 \;\; (P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \ldots \wedge P(k)) \Rightarrow P(k+1)$,
atunci $\forall n \geq n_0 \; P(n)$.

---

[4] Principiul inducţiei este o consecinţă imediată a axiomaticii teoriei mulţimilor, fie că se utilizează axioma mulţimilor infinite, fie că se porneşte de la axiomele lui Peano

3. Operaţii cu mulţimi

În fiecare dintre situaţiile care urmează, în lipsa vreunei alte menţiuni, vom considera că există o mulţime „mare” care conţine toate mulţimile în discuţie.

Considerăm mulţimile A şi B.

Definiţia 16. Mulţimea $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ se numeşte **reuniunea** mulţimilor A şi B.

Definiţia 17. Mulţimea $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ se numeşte **intersecţia** mulţimilor A şi B.

Definiţia 18. Dacă $A \cap B = \emptyset$, spunem că mulţimile A şi B sunt **disjuncte**.

Definiţia 19. Mulţimea $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ se numeşte **diferenţa** mulţimilor A şi B.

Definiţia 20. $(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$ se numeşte **perechea ordonată** determinată de elementele a şi b.

Observaţia 21. Drept consecinţă a axiomelor teoriei mulţimilor obţinem în acest context faptul că toate perechile ordonate (a, b) cu $a \in A$ şi $b \in B$ constituie o mulţime.

Definiţia 22. $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$ se numeşte **produsul cartezian** al mulţimilor A şi B.

Propoziţia 23. Pentru orice mulţimi A, B şi C au loc relaţiile:
a) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.
b) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.
c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
e) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$; $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Exerciţiul 24. Demonstraţi propoziţia 23!

Punctul c) al propoziţiei 23 ne sugerează următoarele definiţii:

Definiţia 25. $A \cup B \cup C \stackrel{\text{def}}{=} (A \cup B) \cup C$;
$A \cap B \cap C \stackrel{\text{def}}{=} (A \cap B) \cap C$.

Fie E o mulţime.

Definiţia 26. Pentru $A \subset E$, definim **complementara lui A în raport cu E** ca fiind mulţimea $E \setminus A$.

Notaţia utilizată pentru complementara lui A în raport cu E este $\complement_E A$. Dacă E este subînţeleasă în context, atunci complementara lui A în raport cu E se mai notează şi $\complement A$ sau $\overline{A}$.

Regulile lui de Morgan: Dacă $A, B \subset E$, atunci:

$$\complement_E(A \cup B) = \left(\complement_E A\right) \cap \left(\complement_E B\right) \quad \text{şi} \quad \complement_E(A \cap B) = \left(\complement_E A\right) \cup \left(\complement_E B\right).$$

Exerciţiul 27. Demonstraţi regulile lui de Morgan!

Definiţia 28. Dacă E este o mulţime înzestrată cu o lege de compoziţie $\circ$, iar $A, B \subset E$, definim $A \circ B = \{a \circ b : a \in A \wedge b \in B\}$.
Dacă $a \in E$, notăm $a \circ E$ (respectiv, $E \circ a$) în loc de $\{a\} \circ E$ (respectiv, de $E \circ \{a\}$).

Exemplul 29. a) $\{1, 2, 3\} + \{10, 20\} = \{11, 12, 13, 21, 22, 23\}$
b) $\{1, 2, 3\} - \{10, 20\} = \{-19, -18, -17, -9, -8, -7\}$
c) $\{1, 2, 3\} \cdot \{10, 20\} = \{10, 20, 30, 40, 60\}$
d) $2\mathbb{Z}$ = mulţimea numerelor întregi pare.
e) $3\mathbb{Z} + 1$ = mulţimea acelor numere întregi care prin împărţire la 3 dau restul 1.
f) $\{-1, 1\} \cdot \mathbb{N} = \mathbb{Z}$.

4. Familii de mulţimi

Pentru generalizarea chestiunilor din paragraful precedent, este necesară o modalitate de a gestiona „multe" mulţimi. Una dintre cele mai frecvente abordări ale chestiunii este următoarea[5]:

Definiţia 30. Prin **familie de mulţimi indexată după mulţimea** I înţelegem o funcţie definită pe I şi ale cărei valori sunt mulţimi.

Vom nota familia mulţimilor M_i, $i \in I$, cu $(M_i)_{i \in I}$.

O consecinţă imediată a axiomelor teoriei mulţimilor este aceea că putem defini reuniunea oricărei mulţimi de mulţimi. Este legitimă deci:

Definiţia 31. Prin **reuniunea** familiei de mulţimi $(M_i)_{i \in I}$ înţelegem mulţimea $\{x : \exists i \in I \;\; x \in M_i\}$.

Notaţia pe care o vom folosi pentru reuniunea familiei de mulţimi $(M_i)_{i \in I}$ este $\bigcup\limits_{i \in I} M_i$. În situaţia în care $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, reuniunea

[5] Pentru a plasa aceste consideraţii imediat după cele pe care le generalizează, utilizăm aici noţiunea de funcţie; aceasta este definită în cursul 3, iar definiţia respectivă nu se bazează pe chestiunile din acest paragraf.

familiei menţionate se notează şi $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$, iar dacă $I = \mathbb{N}$, reuniunea familiei $(M_i)_{i\in I}$ se notează şi $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ sau $\bigcup_{i\geq 1} M_i$

Definiţia 32. Prin **intersecţia** familiei de mulţimi $(M_i)_{i\in I}$ înţelegem mulţimea $\{x : \forall i \in I \;\; x \in M_i\}$.

Notaţia pe care o vom folosi pentru intersecţia familiei de mulţimi $(M_i)_{i\in I}$ este $\bigcap_{i\in I} M_i$. În situaţia în care $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, intersecţia familiei menţionate se notează şi $\bigcap_{i=1}^{n} M_i$, iar dacă $I = \mathbb{N}$, intersecţia familiei $(M_i)_{i\in I}$ se notează şi $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ sau $\bigcap_{i\geq 1} M_i$

Afirmaţiile propoziţiei 23 se generalizează astfel:

Propoziţia 33. *Pentru orice familie de mulţimi $(A_i)_{i\in I}$ şi pentru orice mulţime B au loc relaţiile*[6]*:*

a') $\forall i \in I \qquad \bigcap_{i\in I} A_i \subset A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.

c') Dacă $I = \bigcup_{j\in J} I_j$, iar mulţimile familiei $(I_j)_{j\in J}$ sunt disjuncte două câte două, atunci

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in J}\left(\bigcup_{i\in I_j} A_i\right) \quad \text{şi} \quad \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{j\in J}\left(\bigcap_{i\in I_j} A_i\right).$$

d') $B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i)$ şi $B \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i)$.

e') $B \times \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B \times A_i)$ şi $B \times \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(B \times A_i)$.

Toate consideraţiile anterioare sunt, desigur, valabile şi pentru familii de submulţimi ale unei mulţimi date. În acest context funcţionează următoarea variantă generalizată a regulilor lui de Morgan:

[6]Punctul b) al propoziţiei 23 se generalizează la:
b') Pentru orice funcţie bijectivă $\sigma : I \to I$,
$\bigcup_{i\in I} A_{\sigma(i)} = \bigcup_{i\in I} A_i$ şi $\bigcap_{i\in I} A_{\sigma(i)} = \bigcap_{i\in I} A_i$.

Propoziţia 34. Dată fiind familia $(A_i)_{i\in I}$ de submulţimi ale mulţimii E, au loc relaţiile:

$$\complement_E\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} \complement_E A_i \quad \text{şi} \quad \complement_E\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} \complement_E A_i$$

Bibliografie

[1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.
[2] P. Halmos, *Naive set theory*, Springer Verlag, 1960.
[3] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.
[4] C. Năstăsescu, *Introducere în teoria mulţimilor*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974.