

CURSUL 12: IDEALE. INELE FACTOR

G. MINCU

1. IDEALE

- **Definiția 1.** Fie R un inel, iar I o submulțime nevidă a lui R .
Spunem că I este **ideal stâng** al lui R dacă sunt îndeplinite condițiile:
i) $\forall x, y \in I \ x - y \in I$.
ii) $\forall a \in R \ \forall x \in I \ ax \in I$.
- **Definiția 2.** Fie R un inel, iar I o submulțime nevidă a lui R .
Spunem că I este **ideal drept** al lui R dacă sunt îndeplinite condițiile:
i) $\forall x, y \in I \ x - y \in I$.
ii) $\forall a \in R \ \forall x \in I \ xa \in I$.
- **Definiția 3.** Fie R un inel, iar I o submulțime nevidă a sa. I se numește **ideal bilateral** al lui R dacă este atât ideal stâng, cât și ideal drept al lui R .

Observația 4. Orice ideal al unui inel R este subgrup aditiv al lui R .

Observația 5. Dacă inelul R este comutativ, orice ideal stâng al său este și ideal drept, iar orice ideal drept al său este și ideal stâng.

Exemplul 6. Orice inel are ca ideale bilaterale pe $\{0\}$ și pe el însuși.

Exemplul 7. Mulțimea idealelor lui \mathbb{Z} este $\{n\mathbb{Z} : n \in \mathbb{N}\}$.

Exemplul 8. Mulțimea idealelor lui \mathbb{Z}_n este $\{\widehat{d} \cdot \mathbb{Z}_n : d|n\}$.

Exemplul 9. Fie k un corp comutativ. Mulțimea idealelor lui $k[X]$ este $\{fk[X] : f \in k[X]\}$.

Demonstrație: Fie k un corp comutativ și I un ideal al lui $k[X]$. Dacă $I = \{0\}$, atunci $I = 0k[X]$. În caz contrar, mulțimea $I \setminus \{0\}$ este nevidă; fie $f \in I \setminus \{0\}$ un polinom de grad minim. Evident, $fk[X] \subset I$. Fie $g \in I$. Conform teoremei de împărțire cu rest, există $q, r \in k[X]$ astfel încât $g = fq + r$ și $\text{grad } r < \text{grad } f$. Din aceste relații rezultă mai întâi că $r \in I$, iar apoi, datorită alegerii lui f , că $r = 0$. Prin urmare, $g = fq$, deci $g \in fk[X]$. \square

Exemplul 10. i) Fie R și S două inele, iar I și J ideale de același tip ale lui R , respectiv S . Atunci, $I \times J$ este ideal de același tip al lui $R \times S$.

ii) Dacă R și S sunt inele unitare, iar I este ideal în $R \times S$, atunci există idealele I_R și I_S în R , respectiv în S , de același tip cu I , astfel încât $I = I_R \times I_S$.

Exercițiul 11. i) Generalizați afirmațiile din exemplul 10 la cazul a n inele ($n \in \mathbb{N}^*$).

ii) Demonstrați afirmațiile din exemplul 10.

Problemă suplimentară: Rămân adevărate afirmațiile din exemplul 10 pentru o infinitate de inele?

Exemplul 12. Fie R un inel. Atunci, $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in R \right\}$ este ideal stâng al lui $\mathcal{M}_2(R)$, dar nu este ideal drept al acestui inel.

Exercițiul 13. Dați exemplu de ideal drept al unui inel care să nu fie ideal stâng al acelui inel!

Propoziția 14. Fie R un inel și I un ideal stâng (respectiv, drept) al său. Dacă I conține un element inversabil la stânga (respectiv, la dreapta), atunci $I = R$.

Demonstrație: Fie I un ideal stâng al inelului R , iar $a \in I$ un element inversabil la stânga. Fie $r \in R$. Atunci, $r = (ra^{-1})a \in I$. Prin urmare, $I = R$. \square

Exercițiul 15. Demonstrați afirmația referitoare la ideale la dreapta din propoziția anterioară!

Corolarul 1. Dacă inelul R este corp, atunci singurele sale ideale sunt $\{0\}$ și R .

Exercițiul 16. Este adevărată reciproca afirmației din corolarul 1?

● **Exemplul 17.** Fie R un inel și I, J ideale (stângi, drepte, respectiv bilaterale) ale lui R . Atunci $\{a + b : a \in I, b \in J\}$ este ideal (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui R .

● **Definiția 18.** Idealul definit în exemplul 17 se numește suma idealelor I și J .

Exercițiul 19. Definiți suma mai multor ideale!

● **Propoziția 20.** Fie R un inel și $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ o familie de ideale (stângi, drepte, respectiv bilaterale) ale sale. Atunci, $\bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha$ este ideal (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui R .

Exercițiul 21. Demonstrați propoziția 20!

● **Definiția 22.** Fie R un inel și $M \subset R$. Prin **idealul (stâng, drept, respectiv bilateral al) lui R generat de M** înțelegem intersecția tuturor idealelor (stângi, drepte, respectiv bilaterale) ale lui R care conțin pe M .

Observația 23. Fie R un inel și $M \subset R$. Idealul (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui R generat de M este cel mai mic ideal (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui R care conține M .

Notăm de obicei cu (M) idealul bilateral al lui R generat de M .

Propoziția 24. Fie R un inel unitar și $M \subset R$. Atunci:

i) Idealul stâng al lui R generat de M este

$$\left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in R, x_i \in M \right\}.$$

ii) Idealul drept al lui R generat de M este

$$\left\{ \sum_{i=1}^n x_i a_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in R, x_i \in M \right\}.$$

iii) Idealul bilateral al lui R generat de M este

$$\left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i b_i : n \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in R, x_i \in M \right\}.$$

Demonstrație: Notăm cu (M) idealul stâng generat de M și cu I mulțimea $\left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in R, x_i \in M \right\}$. Este evident că $I \subset (M)$. Pe de altă parte, deoarece $I \leq^s R$ și $M \subset I$, obținem și $(M) \subset I$. Celelalte două afirmații se probează analog. \square

Definiția 25. Dacă R este un inel, iar a un element al său, atunci idealul (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui R generat de $\{a\}$ se numește **ideal** (stâng, drept, respectiv bilateral) **principal** ale lui R .

Observația 26. Dacă R este un inel, iar a un element al său, atunci: Idealul stâng principal al lui R generat de a este egal cu Ra . Idealul drept principal al lui R generat de a este egal cu aR . Idealul bilateral principal al lui R generat de a este egal cu RaR . Pentru acest ideal se folosește de obicei notația (a) .

2. SUBINELE, IDEALE ȘI MORFISME

Propoziția 27. Fie $f : R \rightarrow S$ un morfism de inele. Atunci:

- i) Dacă R' este subinel al lui R , atunci $f(R')$ este subinel al lui S .
- ii) Dacă S' este subinel al lui S , atunci $f^{-1}(S')$ este subinel al lui R .
- iii) Dacă J este ideal (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui S , atunci $f^{-1}(J)$ este ideal (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui R .
- iv) Dacă f este surjectiv, iar I este ideal (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui R , atunci $f(I)$ este ideal (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui S .

Definiția 28. Fie $f : R \rightarrow S$ un morfism de inele. Numim **nucleul** lui f , și notăm $\ker f$, mulțimea $\{a \in R : f(a) = 0\}$.

Observația 29. Conform propoziției 27, dacă $f : R \rightarrow S$ este un morfism de inele, atunci $\ker f$ este ideal bilateral al lui R .

Propoziția 30. Morfismul de inele $f : R \rightarrow S$ este injectiv dacă și numai dacă $\ker f = \{0\}$.

Exercițiul 31. Demonstrați această propoziție!

Exercițiul 32. Folosind propoziția 30, redemonstrați faptul că orice morfism de corpuri este injectiv!

Teorema de corespondență pentru ideale. Fie $f : R \rightarrow S$ un morfism surjectiv de inele. Notăm cu \mathcal{M} mulțimea idealelor lui R care conțin $\ker f$ și cu \mathcal{N} mulțimea idealelor lui S . Atunci aplicațiile $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, $\Phi(I) = f(I)$ și $\Psi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$, $\Psi(J) = f^{-1}(J)$ (*Definiția*) sunt inverse una celeilalte.

3. INEL FACTOR

- **3.1. Construcția inelului factor.** Fie R un inel, iar I un ideal bilateral al lui R . Cum I este subgrup normal al grupului $(R, +)$, putem construi grupul factor R/I . Dacă $\widehat{a} = \widehat{a'}$ și $\widehat{b} = \widehat{b'}$ în acest grup, atunci $a - a' \in I$ și $b - b' \in I$, de unde deducem că $ab - a'b' = a(b - b') + (a - a')b' \in I$, deci $\widehat{ab} = \widehat{a'b'}$ în R/I . Prin urmare, operația $\widehat{a} \cdot \widehat{b} = \widehat{ab}$ este corect definită pe R/I .

Exercițiul 33. Arătați că $(R/I, +, \cdot)$ este inel.

Definiția 34. Inelul $(R/I, +, \cdot)$ se numește inelul factor al lui R în raport cu idealul bilateral I .

Observația 35. Date fiind un inel R și un ideal bilateral I al acestuia, inelul factor R/I are:

- mulțimea subiacentă $\{a + I : a \in R\}$,
- adunarea $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$, și
- înmulțirea $(a + I)(b + I) = (ab) + I$.

Notație uzuală: Vom folosi frecvent atunci când lucrăm în inelul R/I notația \widehat{a} în loc de $a + I$. Cu această notație, observația anterioară se rescrie astfel:

Observația 36. Date fiind un inel R și un ideal bilateral I al acestuia, inelul factor R/I are:

- mulțimea subiacentă $\{\widehat{a} : a \in R\}$,
- adunarea $\widehat{a} + \widehat{b} = \widehat{a + b}$, și
- înmulțirea $\widehat{a}\widehat{b} = \widehat{ab}$.

Observația 37. În inelul factor R/I avem:

- $\widehat{a} = \widehat{b} \Leftrightarrow a - b \in I$
- $\widehat{a} = \widehat{0} \Leftrightarrow a \in I$.

Exemplul 38. Dat fiind $n \in \mathbb{N}$, inelul factor $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ este \mathbb{Z}_n .

Propoziția 39. Fie R un inel, iar I un ideal bilateral al lui R . Atunci:

- i) Dacă R este comutativ, atunci R/I este comutativ.
- ii) Dacă R este unitar, atunci R/I este unitar (cu unitatea $1+I$).

Exercițiul 40. Demonstrați propoziția 39.

Propoziția 41. Fie R un inel (unitar), iar I un ideal bilateral al lui R . Atunci, $\pi : R \rightarrow R/I$, $\pi(a) = a + I$ este morfism (unitar și) surjectiv de inele. În plus, $\ker \pi = I$.

Exercițiul 42. Demonstrați propoziția 41.

Definiția 43. Morfismul π din propoziția 41 se numește **proiecția** (sau **surjecția**) **canonică** a lui R pe R/I .

Proprietatea de universalitate a inelului factor. Fie R un inel, I un ideal bilateral în R , $\pi : R \rightarrow R/I$ proiecția canonică, iar $f : R \rightarrow S$ un morfism de inele. Atunci:

- i) Dacă $\ker \pi \subset \ker f$, atunci există un unic morfism de inele $u : R/I \rightarrow S$ cu proprietatea $f = u \circ \pi$.
- ii) u este injectiv dacă și numai dacă $\ker \pi = \ker f$.
- iii) u este surjectiv dacă și numai dacă f este surjectiv.

4. TEOREMA FUNDAMENTALĂ DE IZOMORFISM PENTRU INELE

- **Teorema fundamentală de izomorfism pentru inele.** Fie $f : R \rightarrow S$ un morfism de inele. Atunci, $\tilde{f} : \frac{R}{\ker f} \rightarrow \text{Im } f$, $\tilde{f}(\widehat{a}) = f(a)$ este un izomorfism. Deci, $\frac{R}{\ker f} \xrightarrow{\sim} \text{Im } f$.

Demonstrație: Dacă $\widehat{a} = \widehat{b}$, atunci $a - b \in \ker f$, deci $f(a - b) = 0$, de unde $f(a) = f(b)$. Prin urmare, \tilde{f} din enunț este corect definită. \tilde{f} este în mod evident morfism surjectiv de inele. $\ker \tilde{f} = \{\widehat{a} \in R/\ker f : \tilde{f}(\widehat{a}) = \widehat{0}\} = \{\widehat{a} \in R/\ker f : f(a) = 0\} = \{\widehat{a} \in R/\ker f : a \in \ker f\} = \{\widehat{0}\}$, deci \tilde{f} este și injectivă. \square

- **Corolarul 2.** Fie $n, d \in \mathbb{N}$ cu $d|n$. Atunci, $\frac{\mathbb{Z}_n}{d\mathbb{Z}_n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_d$.

Exercițiul 44. Demonstrați corolarul 2.

- **Corolarul 3.** Fie R, S două inele, iar I și J ideale bilaterale ale lui R , respectiv S . Atunci, $\frac{R \times S}{I \times J} \xrightarrow{\sim} \frac{R}{I} \times \frac{S}{J}$.

Exercițiul 45. Demonstrați corolarul 3.

Lema chineză a resturilor. Fie R un inel comutativ și unitar și I, J două ideale ale lui R cu proprietatea că $I + J = R$. Atunci, $\frac{R}{I \cap J} \xrightarrow{\sim} \frac{R}{I} \times \frac{R}{J}$.

REFERENCES

- [1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universității din București, 2006.
- [2] I. D. Ion, N. Radu, *Algebra*, Ed. Universității din București, 1981.
- [3] C. Năstăsescu, C. Niță, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, București, 1986.