

## CURSUL 12: INELE

G. MINCU

### 1. MORFISME DE INELE

**Definiția 1.** Fie  $R$  și  $S$  două inele. Spunem că funcția  $f : R \rightarrow S$  este **morfism de inele** dacă sunt îndeplinite condițiile:

- i)  $\forall x, y \in R \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$  și
- ii)  $\forall x, y \in R \quad f(xy) = f(x)f(y)$ .

**Definiția 2.** Dacă  $R$  și  $S$  sunt inele unitare, atunci morfismul de inele  $f : R \rightarrow S$  se numește **unitar** dacă  $f(1) = 1$ .

**Exemplul 3.** Dacă  $R$  este un inel (unitar), atunci  $1_R : R \rightarrow R$ ,  $1_R(x) = x$  este un morfism (unitar) de inele. El se numește **morfismul identic** al lui  $R$ .

**Exemplul 4.** Dacă  $R$  și  $S$  sunt inele, atunci  $f : R \rightarrow S$ ,  $f(x) = 0$  este un morfism de inele. El se numește **morfismul nul** de la  $R$  la  $S$ .

**Exemplul 5.** Dacă  $S$  este subinel al inelului  $R$ , atunci  $i : S \rightarrow R$ ,  $i(x) = x$  este morfism (injectiv) de inele.

**Exemplul 6.** Pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ ,  $\pi(a) = \hat{a}$  este morfism unitar de inele.

**Exemplul 7.** Fie  $R_1, R_2, \dots, R_n$  inele (unitare) și  $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$  produsul lor direct. Atunci:

- Funcția  $\sigma_i : R_i \rightarrow R$ ,  $\sigma_i(a) = (0, 0, \dots, 0, a, 0, \dots, 0)$  este morfism de inele (Temă: demonstrați această afirmație!). Acest morfism se numește **injecția canonică** a lui  $R_i$  în  $R$ .
- Funcția  $\pi_i : R \rightarrow R_i$ ,  $\pi_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_i$  este morfism (unitar) de inele (Temă: demonstrați această afirmație!). Acest morfism se numește **proiecția canonică** a lui  $R$  pe  $R_i$ .

**Exemplul 8.** Dacă  $R$  este un inel, iar  $n \in \mathbb{N}^*$ , atunci  $j : R \rightarrow \mathcal{M}_n(R)$ ,

$$j(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} \text{ este un morfism injectiv de inele.}$$

**Propoziția 9.** Dacă  $f : R \rightarrow S$  și  $g : S \rightarrow T$  sunt morfisme (unitare) de inele, atunci  $g \circ f$  este morfism (unitar) de inele.

**Definiția 10.** Numim **endomorfism de inele** orice morfism de inele  $f : R \rightarrow R$ .

**Definiția 11.** Morfismul de inele  $f : R \rightarrow S$  se numește **izomorfism de inele** dacă:

- i)  $f$  este funcție inversabilă și
- ii)  $f^{-1}$  este morfism de inele.

**Propoziția 12.** Fie  $R$  și  $S$  două inele și o funcție  $f : R \rightarrow S$ . Atunci,  $f$  este izomorfism de inele dacă și numai dacă  $f$  este morfism bijectiv de inele.

**Definiția 13.** Inelele  $R$  și  $S$  se numesc **izomorfe** dacă există un izomorfism de inele între ele.

**Exemplul 14.** Fie  $m, n \in \mathbb{N}^*$ . Atunci, inelele  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$  și  $\mathbb{Z}_{mn}$  sunt izomorfe dacă și numai dacă  $(m, n) = 1$ .

*Demonstrație:* „ $\Leftarrow$ ”: Definim  $f : \mathbb{Z}_{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ ,  $f(a + mn\mathbb{Z}) = (a + m\mathbb{Z}, a + n\mathbb{Z})$ . Este imediat (temă!) că  $f$  este corect definită și morfism injectiv de inele. Cum însă domeniul și codomeniul lui  $f$  au ambele de cardinal  $mn$ , rezultă că  $f$  este bijecție.

„ $\Rightarrow$ ”: Cum caracteristica lui  $\mathbb{Z}_{mn}$  este  $mn$ , iar cea a lui  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$  este  $[m, n]$ , presupunerea de izomorfism ne conduce la egalitatea  $[m, n] = mn = [m, n](m, n)$ , de unde  $(m, n) = 1$ .  $\square$

**Definiția 15.** Numim **automorfism de inele** orice izomorfism de inele  $f : R \rightarrow R$ .

**Exemplul 16.** Dacă  $R$  este un inel, atunci  $1_R$  este un automorfism de inele.

### Notății:

Vom nota cu  $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Rng}}(\mathbf{R}, \mathbf{S})$  mulțimea morfismelor de inele de la  $R$  la  $S$ .

Vom nota cu  $\mathbf{End}_{\mathbf{Rng}}(\mathbf{R})$  mulțimea endomorfismelor de inel ale lui  $R$ .

Vom nota cu  $\mathbf{Aut}_{\mathbf{Rng}}(\mathbf{R})$  mulțimea automorfismelor de inel ale lui  $R$ .

Dacă din context se subînțelege că este vorba de morfisme de inele, putem să ometem indicele Rng din notațiile anterioare.

## 2. INELE DE POLINOAME

În acest paragraf,  $R$  va desemna un inel comutativ și unitar. Pe mulțimea  $R^{\mathbb{N}}$  a șirurilor  $(a_0, a_1, \dots)$  de elemente din  $R$  introducem

operațiile

$$\begin{aligned}(a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) &= (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, \dots) \\ (a_0, a_1, \dots) \cdot (b_0, b_1, \dots) &= (a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, \dots, \sum_{i+j=n} a_i b_j, \dots).\end{aligned}$$

$R^{\mathbb{N}}$  are în raport cu aceste operații o structură de inel comutativ și unitar (temă: demonstrați această afirmație!); notând  $X = (0, 1, 0, 0, \dots) \in R^{\mathbb{N}}$ ,  $X^0 = 1$ , și identificând  $R$  cu  $\phi(R)$ , unde  $\phi$  este morfismul injectiv de inele de la  $R$  la  $R^{\mathbb{N}}$  dat prin  $a \mapsto (a, 0, 0, \dots)$ , constatăm că  $(a_0, a_1, \dots) = \sum_{i \geq 0} a_i X^i$ . Această construcție justifică următoarele:

**Definiția 17.** Inelul definit mai sus se numește **inelul seriilor formale** în nedeterminata  $X$  cu coeficienți în  $R$ .

**Notăția** standard pentru inelul seriilor formale în nedeterminata  $X$  cu coeficienți în inelul  $R$  este  $R[[X]]$ . Din acest moment, vom folosi și noi această notație.

**Definiția 18.** Prin **ordinul** seriei formale nenule  $f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i \in R[[X]]$  înțelegem cel mai mic număr natural  $j$  pentru care  $a_j \neq 0$ . Convenim că ordinul seriei formale nule este  $+\infty$ .

**Vom nota** ordinul seriei formale  $f \in R[[X]]$  cu **ord**  $f$ .

**Propoziția 19.** Dacă  $f, g \in R[[X]]$ , atunci

a)  $\text{ord}(f + g) \geq \min\{\text{ord } f, \text{ord } g\}$

b)  $\text{ord}(fg) \geq \text{ord } f + \text{ord } g$ .

Dacă, în plus,  $R$  este domeniu de integritate, atunci

b')  $\text{ord}(fg) = \text{ord } f + \text{ord } g$ .

**Observația 20.** Dacă  $R$  este domeniu de integritate, atunci și  $R[[X]]$  este domeniu de integritate.

**Propoziția 21.**  $U(R[[X]]) = \{a_0 + a_1 X + \dots \in R[[X]] : a_0 \in U(R)\}$ .

*Demonstrație:* Fie  $f = a_0 + a_1 X + \dots \in R[[X]]$ . Dacă  $f$  este inversabilă, atunci există  $g = b_0 + b_1 X + \dots \in R[[X]]$  astfel încât  $fg = 1$ . Rezultă  $a_0 b_0 = 1$ , deci  $a_0 \in U(R)$ . Reciproc, dacă  $a_0 \in U(R)$ , punem  $b_0 = a_0^{-1}$  și, presupunând construite  $b_0, b_1, \dots, b_n$ , definim  $b_{n+1} = -a_0^{-1}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_{n+1} b_0)$ . Este clar că  $b_0 + b_1 X + \dots$  este inversa lui  $f$ .  $\square$

Este imediat faptul că submulțimea lui  $R[[X]]$  alcătuită din acele serii formale care au un număr finit de coeficienți nenuli este subinel al lui  $R[[X]]$ . Conform observației 2 din primul curs, această submulțime are o structură de inel în raport cu legile induse de adunarea și înmulțirea din  $R[[X]]$ .

**Definiția 22.** Inelul definit mai sus se numește **inelul de polinoame** în nedeterminata  $X$  cu coeficienți în  $R$ . Elementele acestui inel se numesc **polinoame** în nedeterminata  $X$  cu coeficienți în  $R$ .

**Notăția standard** pentru inelul polinoamelor în nedeterminata  $X$  cu coeficienți în inelul  $R$  este  $R[X]$ .

**Observația 23.** Orice polinom  $f \in R[X] \setminus \{0\}$  se reprezintă în mod unic sub forma  $a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  cu  $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$  și  $a_n \neq 0$ . Două polinoame  $f = \sum_{i=0}^m a_iX^i, g = \sum_{j=0}^n b_jX^j \in R[X]$  sunt egale dacă și numai dacă  $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{\max\{m,n\}} = b_{\max\{m,n\}}$ .

**Definiția 24.** Dat fiind polinomul  $f = \sum_{i=0}^n a_iX^i \in R[X]$  cu  $a_n \neq 0, a_0$  se numește **termenul liber** al lui  $f$ , iar  $a_n$  se numește **coeficientul dominant** al lui  $f$ . Dacă  $a_n = 1$ , polinomul  $f$  se numește **monic**. Dacă  $f$  nu are alți coeficienți nenuli decât (eventual) pe  $a_0$ , el se numește **constant**.

**Definiția 25.** Prin **gradul** polinomului nenul  $f = \sum_{i=0}^n a_iX^i \in R[X]$  înțelegem numărul natural  $\max\{j \in \mathbb{N} | a_j \neq 0\}$ . Convenim că gradul polinomului nul este  $-\infty$ .

**Vom nota** gradul polinomului  $f \in R[X]$  cu  $\text{grad } f$ .

**Propoziția 26.** Dacă  $f, g \in R[X]$ , atunci

a)  $\text{grad}(f + g) \leq \max\{\text{grad } f, \text{grad } g\}$

b)  $\text{grad}(fg) \leq \text{grad } f + \text{grad } g$ .

Dacă, în plus,  $R$  este domeniu de integritate, atunci

b')  $\text{grad}(fg) = \text{grad } f + \text{grad } g$ .

**Propoziția 27.** Fie  $R$  un inel comutativ și unitar și  $f \in R[X]$ . Atunci:

i)  $f$  este nilpotent dacă și numai dacă toți coeficienții săi sunt nilpotenți.

ii)  $f$  este inversabil dacă și numai dacă termenul său liber este inversabil, iar toți ceilalți coeficienți ai săi sunt nilpotenți.

iii)  $f$  este idempotent dacă și numai dacă este element idempotent al lui  $R$ .

iv)  $f$  este divizor al lui zero dacă și numai dacă există  $a \in R \setminus \{0\}$  astfel încât  $af = 0$ .

**Observația 28.** Funcția  $j : R \rightarrow R[X], j(a) = a$  este morfism unitar de inele. Acest morfism se numește **injectia canonică** a lui  $R$  în  $R[X]$ .

Dacă  $R$  este un inel comutativ și unitar, iar  $j$  este injectia canonică a lui  $R$  în  $R[X]$ , are loc:

**Propoziția 29. (Proprietatea de universalitate a inelului de polinoame într-o nedeterminată)** Pentru orice inel comutativ unitar  $S$ , orice morfism unitar de inele  $u : R \rightarrow S$  și orice  $s \in S$  există un

unic morfism de inele unitare  $v : R[X] \rightarrow S$  cu proprietățile  $v(X) = s$  și  $v \circ j = u$ .

*Demonstrație:* Presupunând mai întâi că există un morfism  $v$  ca în concluzia propoziției, constatăm că, dat fiind  $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in R[X]$ , condițiile din enunț implică  $v(f) = u(a_0) + u(a_1)s + \cdots + u(a_n)s^n$ , de unde unicitatea lui  $v$ . Definind acum  $v$  prin formula anterioară, constatăm cu ușurință că el este morfism de inele, ceea ce justifică și afirmația de existență din enunț.  $\square$

**Definiția 30.** Prin **valoarea polinomului**  $f = \sum_{i=0}^n a_iX^i \in R[X]$  în elementul  $r \in R$  înțelegem elementul  $\sum_{i=0}^n a_ir^i \in R$ . Vom nota acest element cu  $f(r)$ .

**Definiția 31.** Prin **funcția polinomială asociată polinomului**  $f \in R[X]$  înțelegem funcția  $\tilde{f} : R \rightarrow R$ ,  $\tilde{f}(x) = f(x)$ .

**Observația 32.** La polinoame egale corespund funcții polinomiale egale. Reciproca nu este numaidecât adevărată.

### 3. CORPURI

**Definiția 33.** Inelul unitar  $R$  se numește **corp** dacă sunt îndeplinite condițiile:

- i)  $1 \neq 0$ .
- ii) orice element nenul al lui  $R$  este inversabil.

**Observația 34.** Orice corp este inel integru.

**Exemplul 35.** Conform proprietăților cunoscute de la școala generală sau de la liceu,  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  sunt corpuri comutative.  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  nu este corp, deoarece  $2 \in \mathbb{Z}$  este nenul și neinvertibil.

**Exemplul 36.** Întrucât  $U(\mathbb{Z}_n) = \{a \in \mathbb{Z}_n : (a, n) = 1\}$ , deducem că inelul  $\mathbb{Z}_n$  este corp dacă și numai dacă  $n$  este număr prim.

**Definiția 37.** Fie  $R$  un inel. O submulțime nevidă  $K$  a lui  $R$  se numește **subcorp** al lui  $R$  dacă  $K$  este corp în raport cu operațiile induse de cele de pe  $R$ .

**Propoziția 38.** Fie  $K$  un corp. O submulțime  $L$  a lui  $K$  cu cel puțin două elemente este subcorp al lui  $K$  dacă și numai dacă sunt îndeplinite condițiile:

- i)  $\forall x, y \in L \quad x - y \in L$  și
- ii)  $\forall x, y \in L \setminus \{0\} \quad xy^{-1} \in L$ .

**Propoziția 39.** Fie  $K$  un corp și  $L_\alpha$ ,  $\alpha \in A$  subcorpuri ale acestuia. Atunci,  $P_K = \bigcap_{\alpha \in A} L_\alpha$  este subcorp al lui  $K$ .

**Definiția 40.** Un corp care nu admite subcorpuri proprii se numește **corp prim**.

**Observația 41.** Dat fiind un corp  $K$ , subcorpul său  $P_K$  este corp prim. El se numește **subcorpul prim** al lui  $K$ .

Fie  $K$  un corp de caracterisită  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $P_K$  subcorpul său prim. Atunci,  $1 \in P_K$ , deci  $\mathcal{M} = \{1, 1+1, \dots, \underbrace{1+1+\dots+1}_n\} \subset P_K$ . Este

ușor de văzut că

$$\begin{aligned} \underbrace{(1+1+\dots+1)}_u - \underbrace{(1+1+\dots+1)}_v &= \underbrace{1+1+\dots+1}_{u-v \pmod n} \quad \text{și} \\ \underbrace{(1+1+\dots+1)}_u \underbrace{(1+1+\dots+1)}_v &= \underbrace{1+1+\dots+1}_{uv \pmod n}. \end{aligned}$$

De aici deducem că  $\varphi : \mathbb{Z}_n \rightarrow P_K$ ,  $\varphi(\hat{a}) = \underbrace{1+1+\dots+1}_a$  este morfism de inele. Surjectivitatea acestuia fiind evidentă, din  $|\mathbb{Z}_n| = |P_K|$  obținem și injectivitatea. Așadar, inelele  $\mathbb{Z}_n$  și  $P_K$  sunt izomorfe. Rezultă că  $\mathbb{Z}_n$  este inel integră, de unde deducem că  $n$  este număr prim. Am obținut prin urmare:

**Propoziția 42.** Caracteristica unui corp este fie zero, fie număr prim.

**Propoziția 43.** Dacă  $K$  este un corp de caracteristică  $p > 0$ , atunci subcorpul său prim este izomorf cu  $\mathbb{Z}_p$ .

Procedând în mod similar, obținem:

**Propoziția 44.** Dacă  $K$  este un corp de caracteristică zero, atunci subcorpul său prim este izomorf cu  $\mathbb{Q}$ .

Din cele de mai sus rezultă și:

**Propoziția 45.** Singurul tip de corp prim de caracteristică  $p$  este  $\mathbb{Z}_p$ . Singurul tip de corp prim de caracteristică zero este  $\mathbb{Q}$ .

**Exemplul 46.** Considerăm submulțimea  $\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}$  a lui  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Se constată că  $\mathcal{H}$  este o parte stabilă a lui  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  în raport cu adunarea și cu înmulțirea matricilor. În raport cu legile induse,  $\mathcal{H}$  are o structură de corp.

**Definiția 47.** Corpul (necomutativ!) din exemplul anterior se numește **corpul cuaternionilor**. El se notează de obicei cu  $\mathbb{H}$ .

**Exemplul 48.** Fie  $R$  un domeniu de integritate. Pe  $R \times (R \setminus \{0\})$  introducem relația  $\sim$  astfel:  $(a, s) \sim (b, t)$  dacă și numai dacă  $at = bs$ . Se constată că această relație este de echivalență.

Notăm cu  $\frac{a}{s}$  clasa elementului  $(a, s) \in R \times (R \setminus \{0\})$  în raport cu relația  $\sim$  și cu  $M$  mulțimea factor  $R \times (R \setminus \{0\}) / \sim$ .

Pe  $M$  introducem operațiile  $\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}$  și  $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$ .

Este ușor de văzut că aceste operații sunt corect definite și că  $(M, +, \cdot)$  este un corp comutativ.

**Definiția 49.** Corpul construit în exemplul anterior se numește **corpul de fracții al domeniului  $R$** . O notație frecvent folosită pentru acest corp este  $Q(R)$ .

**Exemplul 50.** Corpul de fracții al lui  $\mathbb{Z}$  este  $\mathbb{Q}$ .

**Definiția 51.** Dacă  $K$  este corp comutativ, corpul de fracții al lui  $K[X]$  se numește **corpul de fracții raționale în nedeterminata  $X$  cu coeficienți în  $K$**  și se notează  $\mathbf{K}(X)$ .

**Observația 52.**  $K(X) = \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in K[X], g \neq 0 \right\}$ .

**Observația 53.** Dat fiind un domeniu de integritate  $R$ , funcția  $j_R : R \rightarrow Q(R)$ ,  $j_R(a) = \frac{a}{1}$  este un morfism injectiv și unitar de inele.

**Propoziția 54. (Proprietatea de universalitate a corpului de fracții al unui domeniu de integritate)** Fie  $R$  un domeniu de integritate. Pentru orice inel unitar  $S$  și orice morfism unitar de inele  $u : R \rightarrow S$  cu proprietatea că  $\text{Im } u \setminus \{0\} \subset U(S)$  există un unic morfism de inele unitare  $v : Q(R) \rightarrow S$  cu proprietatea  $v \circ j_R = u$ .

*Demonstrație:* Presupunând mai întâi că există un morfism  $v$  ca în concluzia propoziției, constatăm că, dat fiind  $x = \frac{a}{s} \in Q(R)$ , condițiile din enunț implică  $v(f) = u(a)u(s)^{-1}$ , de unde unicitatea lui  $v$ . Definind acum  $v$  prin formula anterioară, constatăm cu ușurință că el este corect definit și morfism unitar de inele, ceea ce justifică și afirmația de existență din enunț.  $\square$

**Definiția 55.** Fie  $K$  și  $L$  două corpuri. Funcția  $f : K \rightarrow L$  se numește **morfism de corpuri** dacă este morfism unitar de inele.

**Exemplul 56.**  $i_1 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i_1(x) = x$ ,  $i_2 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $i_2(x) = x$ ,  $i_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $i_3(x) = x$  și  $i_4 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ,  $i_4(x) = x$  sunt câteva exemple imediate de morfisme de corpuri.

**Exemplul 57.** Pentru orice corp  $K$ ,  $1_K$  este automorfism de corpuri.

**Exemplul 58.**  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $\alpha(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  este un morfism de corpuri.

**Observația 59.** Fie  $K$  un corp comutativ de caracteristică  $p > 0$ . Pentru orice  $x \in K$  are loc relația

$$px = \underbrace{x + x + \cdots + x}_p = x \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_p = 0.$$

Mulțimită comutativității, pentru orice  $x, y \in K$  are loc

$$(xy)^p = x^p y^p.$$

Numărul  $p$  fiind prim, avem  $p \mid \binom{p}{k}$  pentru orice  $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ .

Prin urmare, pentru orice  $x, y \in K$  are loc relația

$$(x + y)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x^{p-k} y^k = x^p + y^p.$$

Drept consecință a acestei observații, obținem

**Exemplul 60.** Fie  $K$  un corp comutativ de caracteristică  $p > 0$ . Atunci,  $\varphi : K \rightarrow K$ ,  $\varphi(x) = x^p$  este un endomorfism de corpuri.

**Definiția 61.** Endomorfismul din exemplul anterior se numește **endomorfismul lui Frobenius**.

Se constată cu ușurință că toate morfismele din exemplele prezentate sunt injective (temă!). Aceasta este consecința unui fapt mai general, și anume:

**Propoziția 62.** Orice morfism de corpuri este injectiv.

(Temă: demonstrați această propoziție!)

Încheiem cu enunțul unui rezultat foarte interesant, pentru a cărui demonstrație cititorul interesat este invitat să consulte, de pildă, [?]:

**Teorema lui Wedderburn.** Orice corp finit este comutativ.



## BIBLIOGRAFIE

- [1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universității din București, 2006.
- [2] I. D. Ion, N. Radu, *Algebra*, Ed. Universității din București, 1981.
- [3] C. Năstăsescu, C. Niță, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, București, 1986.