Tema 2

Exercițiul 1

Fie X o variabilă aleatoare a cărei repartiție este:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Să se scrie repartițiile variabilelor $3X+7$, X^2, X^3, $X+X^2$ și să se calculeze probabilitățile $\mathbb{P}\left(X > -\frac{1}{3}\right)$ și $\mathbb{P}\left(X < \frac{1}{4} | X \geq -\frac{1}{2}\right)$.

Exercițiul 2

Fie X o variabilă aleatoare cu valori in $\mathbb{N}$, aşa incat $p_n = \mathbb{P}(X = n) > 0$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$.

a) Arătaţi că pentru $\lambda > 0$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:
   i) X este o variabilă Poisson de parametru λ
   ii) Pentru toţi $n \geq 1$ avem $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}$
b) Dacă $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ determinaţi
   i) Valoarea k pentru care $\mathbb{P}(X = k)$ este maximă.
   ii) Valoarea lui λ care maximizează $\mathbb{P}(X = k)$, pentru k fixat.

Exercițiul 3

Bobby Fischer și Boris Spassky joacă un meci de șah în care primul jucător care câștigă o partidă câștigă și meciul. Regula spune că după 10 remize succesive meciul se declară egal. Știm că o partidă poate fi câștigată de Fischer cu probabilitatea de 0.4, câștigată de Spassky cu probabilitatea de 0.3 și este remiză cu probabilitatea de 0.3, independent de rezultatele din partidele anterioare.

a) Care este probabilitatea ca Fischer să câștige meciul?
b) Care este funcția de masă a duratei meciului (durata se măsoară în număr de partide jucate)?

Exercițiul 4

Fie X o variabilă discretă astfel încât $\mathbb{P}(X = k) = \frac{(1-p)^k}{-k\log(p)}$ dacă $k \geq 1$ și $\mathbb{P}(X = 0) = 0$, cu $0 < p < 1$. Să se calculeze $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$ și $Var[X]$.

Exercițiul 5

Fie a și b două numere naturale cu $a < b$ și fie X o variabilă aleatoare care ia valori puteri ale lui 2 în intervalul $[2^a, 2^b]$, cu aceeași probabilitatea. Determinați media, varianța și momentul de ordin 3 al lui X.

Exercițiul 6

Un administrator de reprezentanţă de maşini comandă uzinei Dacia N maşini, numărul aleator X de maşini pe care il poate vinde reprezentanţa sa intr-un an fiind un număr intreg intre 0 şi $n \geq N$, toate avand aceeaşi probabilitate. Maşinile vandute de administrator ii aduc acestuia un beneficiu de a unităţi monetare pe maşină iar maşinile nevandute ii aduc o pierdere de b unităţi. Calculaţi valoarea medie a caştigului G reprezentanţei de maşini şi deduceţi care este comanda optimă.

Exercițiul 7

Fie X variabila aleatoare (v.a.) care reprezintă cifra obţinută in urma aruncării unui zar (echilibrat) cu şase feţe. Determinaţi legea de probabilitate a v.a. $Y = X(7 - X)$ apoi calculaţi $\mathbb{E}[Y]$ şi $\mathbb{V}[Y]$. Notăm cu $Y_1, \ldots, Y_n$ valorile observate după n lansări independente. Determinaţi legea de probabilitate a v.a. M_n egală cu valoarea cea mai mare a acestora.