⑤ $x \in X$ s.n. pct izolat al lui A dacă x este punct aderent al lui A și nu este punct de acumulare al lui A

Notație: $Izo(A) = \{x \in X \mid x \text{ pct. izolat al lui } A\}$ (mulțimea punctelor izolate ale lui A)

Obs: $Izo(A) = \bar{A} \setminus A'$.

22.11.2018

CURS 8

$\mathcal{T} \subset P(X)$ s.n. topologie dacă

1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

2) $D_1, D_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}$

3) $(D_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{T}$

$D \in \mathcal{T}$ s.n. deschisă, F s.n. închisă dacă $X \setminus F \in \mathcal{T}$

$a \in X \qquad \mathcal{V}_a = \{V \subset X \mid \exists D \in \mathcal{T} \text{ a.î. } a \in D \subset V\}$

$V_1, V_2 \in \mathcal{V}_a$

1) $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_a$

2) $V_1 \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{V}_a$

3) $a \in V_1$

$f : (X_1, \mathcal{T}_1) \to (X_2, \mathcal{T}_2) \quad a \in X_1$

f este continuă în a dacă $\forall V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a$

Teoremă Fie (X_1, d_1) și (X_2, d_2) spații metrice, $a \in X_1$ și $f : X_1 \to X_2$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente (AUASE)

1) f este continuă în a

2) $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \delta_\varepsilon > 0$ a. î. $d_1(a, x) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(a), f(x)) < \varepsilon$

3) $\forall (x_n)_n < x$ a. î. $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$

$((x, d)$ $V \in \mathcal{V}_a$ dacă $\exists r > 0$ a. î. $B(a, r) \subset V)$

Dem: 1) $\Rightarrow$ 2) $\quad B(f(a), \varepsilon) \in \mathcal{V}_{f(a)} \overset{1)}{\Rightarrow} f^{-1}(B((f(a), \varepsilon)) \in \mathcal{V}_a \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0$ a. î. $B(a, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(B((f(a), \varepsilon)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(B(a, \delta_\varepsilon)) \subset B(f(a), \varepsilon)$

$$\forall x \in \underset{\substack{\Updownarrow \\ d_1(a,x) < \delta_\varepsilon}}{B(a, \delta_\varepsilon)} \Rightarrow \underset{\substack{\Updownarrow \\ d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon}}{f(x) = B(f(a), \varepsilon)}$$

2) $\Rightarrow$ 1) $\quad V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ a. î. $B(a, \varepsilon) \subset V \overset{2)}{\Rightarrow}$

$\exists \delta_\varepsilon$ a. î. $d_1(a, x) < \delta_2 \Leftrightarrow x \in B(a, \delta_\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow d_2(f(a), f(x)) < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$

$B(a, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \subset f^{-1}(V) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a$

2) $\Rightarrow$ 3) $\quad$ Fie $(x_n)_n \subset X$ a. î. $x_n \to a$

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0$ a. î. $\forall x \in X$

$d_1(a, x) < d_2 \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$ $\quad x_n \to a$

$\forall \eta > 0$ $\exists n_\eta$ a. î. $\forall n \geq n_\eta \Rightarrow d_1(a, x_n) < \eta$

$\eta = \delta_\varepsilon$ $\forall n \geq n_{\delta_\varepsilon} \Rightarrow d_1(a, x_n) < \delta_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow d_2(f(a), f(x)) < \varepsilon$

$3) \Rightarrow 2)$ Pp. că 2) nu este adevărat

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ a.î. $\forall\, \delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_\delta$ a.î.

$d_1(x_\delta, a) < \delta$ și $d_2(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon$

$y_n = x_{\frac{1}{n}} \quad (\delta = \frac{1}{n})$

$d_1(y_n, a) < \frac{1}{n} \Rightarrow y_n \to a$

$d_2(f(y_n), f(a)) \geq \varepsilon \Rightarrow f(y_n) \neq f(a)$

contradicție

<u>Teoremă</u> Fie (X_1, τ_1) și (X_2, τ_2) spații topologice și $f: X_1 \to X_2$. AUASE

1) f este cont. pe X_1
2) $\forall\, D \in \tau_2 \Rightarrow f^{-1}(D) \in \tau_1$
3) $F \subset X_2$, F închisă $\Rightarrow f^{-1}(F)$ închisă

<u>Obs</u>: Fie (X, τ) spațiu topologic. O mulțime $D \subset X$ deschisă $\Leftrightarrow D \in \mathcal{V}_a \ \forall\, a \in D$ $(\Leftrightarrow D = \mathring{D})$

$\Rightarrow D \in \tau \Rightarrow a \in D \subset D \Rightarrow D \in \mathcal{V}_a$

$\Leftarrow D \in \mathcal{V}_a \ \forall a \in D \Rightarrow \forall a \in D \ \exists\, D_a \in \tau$ a.î. $a \in D_a \subset D$

$\Rightarrow D = \bigcup_{a \in D} D_a \in \tau$

<u>Dem (T)</u> Teoremei $1) \Rightarrow 2)$

Fie $D \in \tau_2 \Rightarrow \forall\, a \in f^{-1}(D) \Rightarrow D \in \mathcal{V}_{f(a)} \xRightarrow{f \text{ cont. în } f(a)} f^{-1}(D) \in \mathcal{V}_a \ \forall a \in f^{-1}(D)$

$(\Leftrightarrow f(a) \in D)$

$\Rightarrow f^{-1}(D) \in \tau_1$

2) $\Rightarrow$ 1)

Fie $a \in X_1$ și $V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow \exists D \in \tau_2$ a.î. $f(a) \in D \subset D \subset V \Rightarrow$
$\Rightarrow a \in f^{-1}(D) \subset f^{-1}(V) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a$.

2) $\Rightarrow$ 3)

F închisă $\Rightarrow X_2 \setminus F \in \tau_2 \Rightarrow f^{-1}(X_2 \setminus F) \in \tau_1$

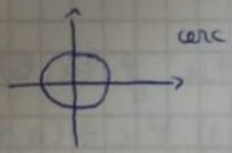
$F \subset X_2$

$$f^{-1}(X_2 \setminus F) = f^{-1}(X_2) \setminus f^{-1}(F) = X_1 \setminus f^{-1}(F) \Rightarrow f^{-1}(F) \text{ închisă}$$

EXEMPLE

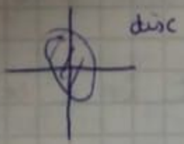
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x,y) = x^2 + y^2$ f cont.

$\{1\} \subset \mathbb{R}$ închisă

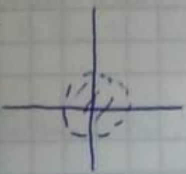


$f^{-1}(\{1\}) = \{x^2 + y^2 = 1\}$ închisă

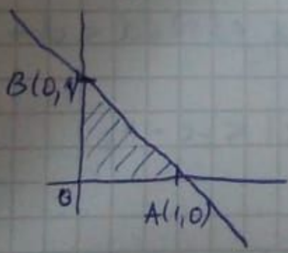
$f^{-1}([0;1]) = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$



$f^{-1}((-1,1)) = \{x^2 + y^2 < 1\}$



i = $\{x, y \mid x \geq 0, y \geq 0 \quad x + y \leq 1\}$



$f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_1(x,y) = x$

$f_2(x,y) = y$

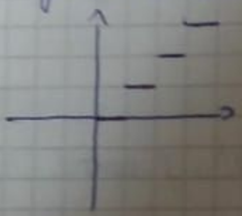
$f_3(x,y) = x+y$

$= f_1^{-1}([0;+\infty)) \cap f_2^{-1}([0;\infty)) \cap f_3^{-1}(\infty;1])$ - închisă

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = [x]$ $\quad f$ este cresc.

$D_f = \mathbb{Z}$



<u>Prop</u>: Fie $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ crescătoare. Atunci:

1) $\forall c \in (a,b)$ $\exists \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x < c}} f(x) = l_s(c)$ și $\exists \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x > c}} f(x) = l_d(c)$

2) f este cont. în $c \iff l_s(c) = l_d(c)$

3) D_f este cel mult numărabilă

<u>Dem</u>: Fie $c \in (a,b)$.

$\cancel{l_s(c) = \sup\limits_{x<c} f(x)}$ $\quad d = \sup\limits_{x<c} f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x_\varepsilon < c$ a. î. $d - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq d$

$x \in (x_\varepsilon, c) \Rightarrow d - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq d < d + \varepsilon$

$x_\varepsilon < x < c \qquad x < c \qquad |x - c| < c - x_\varepsilon$

$\Rightarrow |f(x) - d| < \varepsilon$

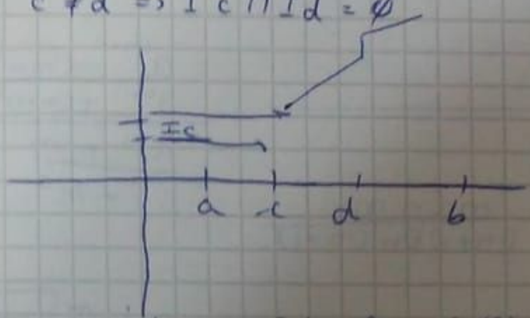
~~vectori liberi, liniari dependenti/independenti legati~~

3) $a < c < d < b$ $\quad$ d punct de des. $\exists$ $c < e < d$

$l_s(c) < l_d(c) \leq f(e) \leq l_s(d) < l_d(d)$

$c \in \mathcal{D}_f$ $\quad I_c = (l_s(c), l_d(c))$

$c \neq d \Rightarrow I_c \cap I_d = \emptyset$



$\hookrightarrow$ interval între l_s și l_d(?)

$(I_c)_{c \in \mathcal{D}_f}$

$\Rightarrow \mathcal{D}_f$ este numărabilă

<u>Def</u>: Fie (X, τ_X) și (Y, τ_Y) sp. topologice. O mult. $A \subset X$ $a \in A'$ și $f : A \to Y$. Spunem că f are limita $b \in Y$ în punctul a și notăm $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ dacă

$\forall V \in \mathcal{V}_b \Rightarrow \exists W \in \mathcal{V}_a$ a.î. $\forall x \in W \cap A \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in V$

(reamintire definiția continuității)

$\hookrightarrow$ $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$, $a \in X$ $\quad f$ este cont. în $a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow \exists W \in \mathcal{V}_a$ a.î. $W \subset f^{-1}(V) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow \exists W \in \mathcal{V}_a$ a.î. $x \in W \Rightarrow f(x) \in V$

Obs: $\tilde{A} = A \cup \{a\}$

$\tilde{f}$

$\tilde{A} \longrightarrow Y$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ b & x = b \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \iff f$ cont în a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x + e^{nx}}{1 + e^{nx}} =$$

$$\lim_{n \to \infty} e^{nx} = \begin{cases} \infty & , x > 0 \\ 1 & , x = 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 & , x > 0 \\ \frac{1}{2} & , x = 0 \\ x & , x < 0 \end{cases} = f(x) \qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$f_n \xrightarrow{s} f$

f_n cont. f disc.

Def. Fie A o mulțime, (X, d) un spațiu metric și $f_n, f : A \longrightarrow X$

f_n converge simplu sau punctual la f ($f_n \xrightarrow{s} f$) dacă $\forall x \in A \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$

$\forall x \in A \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_{\varepsilon, x}$ a.î. $n \geq n_{\varepsilon, x} \Rightarrow d(f_n(x), f(a)) < \varepsilon$

f_n converge uniform la f ($f_n \xrightarrow{u} f$) dacă
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon$ a. î. $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \; \forall x \in A$

$$a_n = \sup_{x \in A} d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

Obs: $f_n \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow a_n \longrightarrow 0$

Obs. $f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{s} f$

exemplu $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad f_n(x) = x^n$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} x^n = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} = f(x)$$

$$f_n \xrightarrow{s} f$$

$$a_n = \sup_{x \in [0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0;1]} |f_n(x) - f(x) = \sup_{x \in [0;1]} x^n - 1 \longrightarrow 0$$

$x = 1 \quad f_n(1) = 1 = f_n$

$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_n(x) = x^n(1-x)$

$$\lim_{n \to \infty} x^n(1-x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases} \quad f_n \xrightarrow{s} 0$$

$$a_n = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} f_n(x)$$

$f_n(0) = f_n(1) = 0$

$$f_n'(x) = (x^n - x^{n+1})' = n x^{n-1} - (n-1) x^n =$$

$$= x^{n-1}(n - (n-1)x) = 0$$

I $x_0 = 0$

II $x_1 = \frac{n}{n+1}$

$$a_n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{\le 1} \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n+1} \to 0$$

$$f_n \xrightarrow{u} f$$

<u>Teoremă</u> Fie $f_n, f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$ și f_n cont. în c pt. $\forall n \ge 1$.

Atunci f este cont. în c.

<u>Dem</u>: $f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow$ pt $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \ge n_\varepsilon$ și $\forall x \in (a,b) \to |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

f_{n_ε} cont. în $c \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta_\varepsilon > 0$ a.î.

$|x - c| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(c)| < \frac{\varepsilon}{3}$

x a.î. $|x - c| < \delta_\varepsilon$

$|f(x) - f(c)| = |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x) + f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(c) +$

$+ f_{n_\varepsilon}(c) - f(c)| \le |\underbrace{f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)}_{< \frac{\varepsilon}{3}}| +$

$+ |\underbrace{f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(c)}_{< \frac{\varepsilon}{3}}| + |\underbrace{f_{n_\varepsilon}(c) - f(c)}_{< \frac{\varepsilon}{3}}| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} =$

$= \varepsilon$

$F = \{ f : A \longrightarrow \mathbb{R} \}$ $\quad d_u : F \times F \longrightarrow [0; +\infty)$

$$d_u(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$$

$$f_n \xrightarrow{u} f \iff d_u(f_n, f) \to 0$$