CURSUL 3: FUNCŢII

G. MINCU

1. Funcţii

Definiţia 1. (provizorie!) Numim **funcţie** orice triplet format din două mulţimi şi o „lege de corespondenţă" care asociază ***fiecărui*** element din prima mulţime un ***unic*** element din cea de-a doua.

Definiţia 2. Prima dintre cele două mulţimi care intră în componenţa unei funcţii se numeşte **domeniul** (**de definiţie** al) funcţiei, iar cea de a doua se numeşte **codomeniul** (sau **domeniul de valori** al) funcţiei.

Observaţia 3. Două funcţii sunt egale dacă şi numai dacă au acelaşi domeniu, acelaşi codomeniu şi aceeaşi lege de corespondenţă.

Notaţia uzuală pentru o funcţie f care are domeniul A şi codomeniul B este $f : A \to B$ (citim „f este definită pe A şi ia valori în B"). Faptul că elementului $a \in A$ îi corespunde prin f elementul $b \in B$ se notează $f(a) = b$.

Definiţia 4. Prin **graficul** unei funcţii $f : A \to B$ înţelegem mulţimea $\Gamma_f = \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\}$.

Observaţia 5. Dacă $f : A \to B$, atunci $\Gamma_f \subset A \times B$.

Observaţia 6. Cunoscând graficul unei funcţii, putem identifica domeniul de definiţie al funcţiei, precum şi legea de corespondenţă a acesteia[1]. Din acest motiv, se preferă reformularea definiţiei 1 astfel încât să se evite termenul „lege", care nu are în situaţia respectivă un înţeles foarte bine precizat:

Definiţia 7. Numim **funcţie** orice triplet format din trei mulţimi A, B, G, $G \subset A \times B$, cu proprietatea: $\forall a \in A\ \exists!\ b \in B\ (a, b) \in G$.

Observaţia 8. O consecinţă a axiomelor din teoria mulţimilor este faptul că, date fiind două mulţimi A şi B, funcţiile definite pe A cu valori în B constituie o mulţime.

[1] Nu însă şi codomeniul; putem însă „vedea" imaginea funcţiei.

Observaţia 9. Dacă mulţimile finite A şi B au a, respectiv b elemente, se arată uşor (temă!) că numărul funcţiilor definite pe A cu valori în B este b^a. Această observaţie ne sugerează utilizarea pentru mulţimea tuturor funcţiilor definite pe A cu valori în B a notaţiei B^A.

2. Clase importante de funcţii

Definiţia 10. Funcţia $f : A \to B$ se numeşte **injectivă** dacă $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.

Observaţia 11. În cuvinte, o funcţie este injectivă dacă duce orice două elemente diferite în elemente diferite.

O caracterizare des utilizată a funcţiilor injective este dată de:

Propoziţia 12. Funcţia $f : A \to B$ este injectivă dacă şi numai dacă $\forall a_1, a_2 \in A \ \ f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.

Exemplul 13. Dacă $A \subset B$, atunci $i : A \to B$, $i(a) = a$ este o funcţie injectivă. Ea se numeşte **injecţia canonică** a lui A în B.

Definiţia 14. Funcţia $f : A \to B$ se numeşte **surjectivă** dacă $\forall b \in B$ $\exists a \in A \ f(a) = b$.

Observaţia 15. În cuvinte, o funcţie este surjectivă dacă „îşi umple codomeniul".

Exemplul 16. $\pi_A : A \times B \to A$, $\pi_A(a, b) = a$ şi $\pi_B : A \times B \to A$, $\pi_B(a, b) = b$ sunt funcţii surjective (ele se numesc **proiecţiile canonice** ale produsului cartezian $A \times B$).

Definiţia 17. O funcţie injectivă şi surjectivă se numeşte **bijectivă**.

Exemplul 18. Dată fiind o mulţime A, funcţia $\mathrm{id}_A : A \to A$, $\mathrm{id}_A(a) = a$ este o funcţie bijectivă. Ea se numeşte **funcţia identică a mulţimii** A.

Definiţia 19. O mulţime A se numeşte **infinită** dacă există $f \in A^A$ injectivă, dar nesurjectivă. Mulţimea A se numeşte **finită** dacă nu este infinită.

Propoziţia 20. Fie A o mulţime nevidă. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
a) A este finită.
b) Există un număr $n \in \mathbb{N}^*$ şi o funcţie bijectivă $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$.

Pentru consideraţiile de până la finalul acestei secţiuni vom considera că A şi B desemnează submulţimi ale lui $\mathbb{R}$.

Definiţia 21. Funcţia $f : A \to B$ se numeşte **crescătoare** dacă $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) \leq f(a_2)$.

Definiţia 22. Funcţia $f : A \to B$ se numeşte **descrescătoare** dacă $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) \geq f(a_2)$.

Definiţia 23. Funcţia $f : A \to B$ se numeşte **monotonă** dacă este fie crescătoare, fie descrescătoare.

Definiţia 24. Funcţia $f : A \to B$ se numeşte **strict crescătoare** dacă $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) < f(a_2)$.

Definiţia 25. Funcţia $f : A \to B$ se numeşte **strict descrescătoare** dacă $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) > f(a_2)$.

Definiţia 26. Funcţia $f : A \to B$ se numeşte **strict monotonă** dacă este fie strict crescătoare, fie strict descrescătoare.

3. Funcţia caracteristică a unei submulţimi

Definiţia 27. Fie E o mulţime şi $A \subset E$. Funcţia

$$\chi_A : E \to \{0,1\}, \qquad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in A \\ 0 & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$

se numeşte **funcţia caracteristică**[2] **a lui** A **în** E.

Teorema 28. Fie E o mulţime. Funcţia $\chi : \mathcal{P}(E) \to \{0,1\}^E$, $\chi(A) = \chi_A$ este bijectivă.

Funcţiile caracteristice ale submulţimilor au proprietăţi calculatorii interesante care, laolaltă cu teorema 28, le conferă o largă aplicabilitate:

Propoziţia 29. Fie E o mulţime şi A, B submulţimi ale sale. Au loc relaţiile:
a) $\chi_E = 1$; $\chi_\emptyset = 0$.
b) $\chi_{A\cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\} = \chi_A \chi_B$.
c) $\chi_{A\cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B$.
d) $\chi_{\complement_E A} = 1 - \chi_A$.

4. „Transportul" submulţimilor prin funcţii

Definiţia 30. Dacă $f : A \to B$ şi $C \subset A$, notăm $f(C)$ şi numim **imaginea submulţimii** C **prin funcţia** f mulţimea

$$\{b \in B : \exists c \in C \ f(c) = b\}.$$

[2] Uneori, cu precădere în teoria probabilităţilor, se mai foloseşte pentru funcţia prezentată denumirea de **funcţia indicator a submulţimii** A **a lui** E

Definiţia 31. Prin **imaginea** funcţiei $f : A \to B$ înţelegem mulţimea $f(A)$.

Notaţia folosită în mod uzual pentru imaginea funcţiei f este $\mathrm{Im} f$.

Observaţia 32. O funcţie este surjectivă dacă şi numai dacă imaginea sa coincide cu codomeniul său.

Definiţia 33. Dacă $f : A \to B$ şi $D \subset B$, notăm $f^{-1}(D)$ şi numim **preimaginea**[3] **submulţimii** D **prin funcţia** f mulţimea $\{a \in A : f(a) \in D\}$.

Observaţia 34. Notaţia din definiţia 33 se utilizează şi în situaţia în care funcţia f nu este inversabilă!

Propoziţia 35. Considerăm funcţia $f : A \to B$. Atunci:
a) Dacă $M \subset N \subset A$, atunci $f(M) \subset f(N)$.
b) Dacă $M, N \subset A$, atunci $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$.
c) Dacă $M, N \subset A$, atunci $f(M \cap N) \subset f(M) \cap f(N)$.
d) Dacă $P \subset Q \subset B$, atunci $f^{-1}(P) \subset f^{-1}(Q)$.
e) Dacă $P, Q \subset B$, atunci $f^{-1}(P \cup Q) = f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q)$.
f) Dacă $P, Q \subset B$, atunci $f^{-1}(P \cap Q) = f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$.

Temă: Demonstraţi propoziţia 35!

Temă: Generalizaţi afirmaţiile din propoziţia 35 la situaţia unei familii arbitrare de submulţimi!

Observaţia 36. Observăm că în cazul relaţiilor din propoziţia 35 imaginea inversă „se poartă mai bine” decât imaginea directă. Aparenta ,,anomalie” de la punctul c) dispare pentru funcţiile injective:

Propoziţia 37. Funcţia $f : A \to B$ este injectivă dacă şi numai dacă

$$\forall M, N \subset A \quad f(M \cap N) = f(M) \cap f(N).$$

5. COMPUNEREA FUNCŢIILOR

Definiţia 38. Date fiind funcţiile $f : A \to B$ şi $g : C \to D$ cu[4] $B \subset C$, definim funcţia $g \circ f : A \to D$, $g \circ f(x) = g(f(x))$. Funcţia $g \circ f$ se numeşte **compusa lui** g **cu** f.

O situaţie importantă din punctul de vedere al compunerii funcţiilor este prezentată în

[3] sau **imaginea inversă**, sau încă **imaginea reciprocă**
[4] în caz de necesitate, se poate impune doar condiţia mai slabă $\mathrm{Im} f \subset C$

Exemplul 39. Dată fiind o funcţie arbitrară $f : A \to B$, $\mathrm{id}_B \circ f = f$ şi $f \circ \mathrm{id}_A = f$.

Propoziţia 40. Fie funcţiile $f : A \to B$, $g : C \to D$ şi $h : E \to F$, unde $B \subset C$ şi $D \subset E$. Atunci[5] $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Propoziţia 41. Fie funcţiile $f : A \to B$ şi $g : C \to D$, unde $B \subset C$. Atunci:
a) Dacă f şi g sunt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă.
b) Dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă.
c) Dacă f şi g sunt surjective şi $B = C$, atunci $g \circ f$ este surjectivă.
b) Dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci g este surjectivă.
e) Dacă f şi g sunt bijective şi $B = C$, atunci $g \circ f$ este bijectivă.
b) Dacă $g \circ f$ este bijectivă, atunci f este injectivă, iar g este surjectivă.

Temă: Demonstraţi propoziţia 41!

Propoziţia 42. Fie $A, B, C, D \subset \mathbb{R}$, $B \subset C$, şi funcţiile $f : A \to B$ şi $g : C \to D$. Atunci:
a) Dacă f şi g sunt de aceeaşi monotonie, atunci $g \circ f$ este crescătoare.
b) Dacă f şi g sunt de monotonii opuse, atunci $g \circ f$ este descrescătoare.
c) Dacă f şi g sunt de aceeaşi monotonie strictă, atunci $g \circ f$ este strict crescătoare.
d) Dacă f şi g sunt de monotonii stricte opuse, atunci $g \circ f$ este strict descrescătoare.

Temă: Demonstraţi propoziţia 42!

Propoziţia 43. Orice funcţie strict monotonă este injectivă.

Temă: Demonstraţi propoziţia 43!

6. INVERSAREA FUNCŢIILOR

Definiţia 44. (provizorie!) Prin **inversă a funcţiei** $f : A \to B$ înţelegem orice funcţie $g : B \to A$ cu proprietăţile $g \circ f = \mathrm{id}_A$ şi $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Definiţia 45. Funcţia $f : A \to B$ se numeşte **inversabilă** dacă ea admite (cel puţin o) inversă.

Propoziţia 46. Dacă funcţia $f : A \to B$ este inversabilă, atunci ea admite o unică inversă

[5] Anticipând discuţia referitoare la legi de compoziţie, această relaţie arată că, dată fiind o mulţime M, compunerea funcţiilor este o operaţie asociativă pe M^M.

Demonstraţie: Presupunem că f este inversabilă şi că g şi h sunt inverse ale sale. Atunci,

$$g = g \circ \mathrm{id}_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_A \circ h = h. \quad \square$$

Definiţia 47. Dacă funcţia $f : A \to B$ este inversabilă, atunci prin **inversa** lui f înţelegem unica (conform propoziţiei 46) funcţie $g : B \to A$ cu proprietăţile $g \circ f = \mathrm{id}_A$ şi $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Notaţia pe care o vom folosi pentru a desemna inversa funcţiei inversabile f este f^{-1}.

Observaţia 48. Dacă $f : A \to B$ este inversabilă, iar $D \subset B$, atunci, în acord cu definiţia 33, notaţia $f^{-1}(D)$ ar desemna atât preimaginea lui D prin f, cât şi imaginea lui D prin f^{-1}. Întrucât aceste două mulţimi coincid, utilizarea aceleiaşi notaţii nu prezintă ambiguităţi.

Teorema 49. O funcţie este inversabilă dacă şi numai dacă ea este bijectivă.

7. Produsul cartezian al unei familii de mulţimi

Observaţia 50. Perechea ordonată $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ poate fi interpretată ca fiind o reprezentare a funcţiei $a : \{1, 2\} \to A_1 \cup A_2$, $a(1) = a_1$, $a(2) = a_2$. Evident, $a(1) \in A_1$ şi $a(2) \in A_2$. Aceste consideraţii ne sugerează:

Definiţia 51. Dată fiind familia de mulţimi $(A_i)_{i \in I}$, definim produsul său cartezian ca fiind mulţimea $\{a : I \to \bigcup\limits_{i \in I} A_i : \forall i \in I \;\; a(i) \in A_i\}$[6,7]

Vom nota produsul cartezian al familiei de mulţimi $(A_i)_{i \in I}$ cu $\prod\limits_{i \in I} A_i$, iar elementul $a \in \prod\limits_{i \in I} A_i$ cu $(a(i))_{i \in I}$ sau, mai frecvent, cu $(a_i)_{i \in I}$.

Definiţia 52. Pentru $j \in I$, funcţia $\pi_j : \prod\limits_{i \in I} A_i \to A_j$, $\pi_j((a_i)_{i \in I}) = a_j$ se numeşte **proiecţia canonică** a produsului $\prod\limits_{i \in I} A_i$ pe componenta j.

Observaţia 53. Proiecţiile canonice ale produsului cartezian sunt surjective.

---

[6]Axiomele teoriei mulţimilor au drept consecinţă faptul că aceasta este într-adevăr o mulţime.

[7]Una dintre axiomele teoriei mulţimilor (aşa-numita „axiomă a alegerii") afirmă că dacă toate mulţimile familiei date sunt nevide, atunci produsul cartezian al familiei este nevid.

Observaţia 54. Dacă avem familia de mulţimi $(A_i)_{i\in I}$ cu proprietatea $A_i = A$ pentru orice $i \in I$, atunci, conform definiţiei 51, produsul cartezian $\prod\limits_{i\in I} A_i$ constă exact în funcţiile definite pe I şi care iau valori în A. Deci, în acest caz avem $\prod\limits_{i\in I} A_i = A^I$. Dacă în situaţia prezentată avem $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, vom folosi în loc de A^I notaţia A^n.

Observaţia 55. Conform observaţiei anterioare,

$$A^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1, a_2, \ldots, a_n \in A\}.$$

Bibliografie

[1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.
[2] P. Halmos, *Naive set theory*, Springer Verlag, 1960.
[3] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.
[4] C. Năstăsescu, *Introducere în teoria mulţimilor*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974.