Rezolvări subiecte analiză

1) • Corp ordonat: O mulțime nevidă K pe care s-au definit 2 legi de compoziție „+" și „·" și relația binară „≤", având proprietățile:

a) $(K, +, \cdot)$ corp comutativ

b) $(K, \leq)$ mulțime total ordonată

c) $x, y \in K$ și $x \leq y \Rightarrow \begin{cases} x+z \leq y+z, & \forall z \in K \\ xz \leq yz, & \forall z \in K \text{ cu } z \geq 0_K \end{cases}$

~~(aceasta~~ se numește corp ordonat și se notează $(K, +, \cdot, \leq)$

• Corp complet ordonat: Un corp ordonat $(K, +, \cdot, \leq)$ în care $\forall$ submulțime $\neq \emptyset$ majorată a sa posedă margine superioară ($\forall\ \emptyset \neq A \subseteq K$, A majorată $\Rightarrow$ $\Rightarrow \exists \sup A$) se numește corp complet ordonat.

• Corp arhimedian: Un corp ordonat se numește arhimedian dacă, privit ca inel, este un inel arhimedian.
Un inel $(A, +, \cdot, \leq)$ ordonat și cu unitate (în raport cu „·") se numește inel arhimedian dacă pentru $\forall$ pereche de elemente pozitive ~~din~~ $x, y \in A$, $\exists$ un nr. natural n a.î. $y < n \cdot x$ ($n \cdot x = \underbrace{x + x + x \ldots + x}_{n \text{ ori}}$)

sau

Un corp ordonat $(S, +, \cdot, \leq)$ s.n. arhimedian dacă $\forall x \in S\ \exists M \in \mathbb{N}$ a.î. $x \leq M$.

• Morfism de corpuri ordonate:

Fie $(S, +, \cdot, \leq)$ și $(R, \oplus, \odot, \leq)$ două corpuri ordonate. O funcție $f: S \to R$ sn. morfism de corpuri ordonate dacă:
1) $f(x+y) = f(x) \oplus f(y), \forall x, y \in S$
2) $f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y), \forall x, y \in S$
3) f este crescătoare $(x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$

2) • Corp arhimedian: Un corp ordonat $(S, +, \cdot, \leq)$ sn. arhimedian dacă $\forall x \in S \Rightarrow \exists M \in \mathbb{N}$ a.î. $x \leq M$.

Prop.: Fie $(S, +, \cdot, \leq)$ un corp ordonat, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:
a) S este arhimedian
b) $\forall x \in S$ și $a > 0 \Rightarrow \exists M \in \mathbb{N}$ a.î. $M \cdot a > x$
c) $\forall x > 0 \Rightarrow \exists M \in \mathbb{N}$ a.î. $0 < \frac{1}{M} < x$
d) $\forall x, y \in S$, $x < y \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{Q}$ a.î. $x < n < y$

3) T1: Orice corp complet ordonat este arhimedian.

T2: Fie $(S, +, \cdot, \leq)$ corp arhimedian și $(R, \oplus, \odot, \leq)$ corp complet ordonat. Atunci $\exists! f: S \to R$ morfism de corpuri ordonate. $(S, +, \cdot, \leq)$ complet ordonat $\Rightarrow$ $\Rightarrow f$ bijectiv.

4). • <u>Def!</u> (1): Un șir de numere reale $(a_n)_{n\geq 0}$ sn. <u>convergent</u> dacă $\exists\ l \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|a_n - l| < \varepsilon$, $\forall\ n \geq n_\varepsilon$.

• <u>Def!</u> (2): Șirul x_n sn. <u>șir Cauchy/șir fundamental</u> dacă pt. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. dacă $n, m \in \mathbb{N}$, ~~n, m ≥ n~~ $|x_n - x_m| < \varepsilon$ (adică $d(x_n, x_m) < \varepsilon$)

sau

$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ (adică $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$), pt. $\forall\ n \geq n_\varepsilon$ și $p \in \mathbb{N}^*$

• T (Criteriul general de convergență al lui Cauchy): Un șir de numere reale este convergent $\Leftrightarrow$ este șir fundamental. (Se spune că $\mathbb{R}$ în raport cu distanța euclidiană este spațiu metric complet $\Leftrightarrow (\mathbb{R}, d)$ sp. m. complet)

5). • <u>Proprietăți</u>: Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un șir convergent în $\mathbb{R}$.

a). Orice șir convergent are o unică limită.

condiții necesare:

b). (x_n) convergent în $\mathbb{R} \Rightarrow (x_n)$ mărginit

c). (x_n) convergent în $\mathbb{R} \Rightarrow (x_n)$ șir Cauchy

d). Prin adăugarea sau suprimarea unui număr finit de termeni la un șir convergent, acesta rămâne convergent cu aceeași limită.

$x_n \longrightarrow x \Leftrightarrow \exists\ M \geq 0$ a.î. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ și $\forall\ n \geq n_\varepsilon$ să avem $|x_n - x| < \varepsilon \cdot M$.

• ~~Două~~ Produsul a 2 șiruri convergente este convergent.

Dem: $\left(\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n\right) \\ \text{Limita produsului} = \text{produsul limitelor} \end{array} \right)$

Fie $x \in \mathbb{R}$ limita șirului (x_n),

$y \in \mathbb{R}$ — " — (y_n),

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șirul cu termenul general:

$$a_n = |x_n - x|, \quad n \in \mathbb{N}$$

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — " —

$$b_n = |y_n - y|, \quad n \in \mathbb{N}$$

Urmează că șirurile (a_n) și (b_n) sunt convergente

și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Șirul (y_n) este mărginit (deoarece e conv.) $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ a.î. să avem $|y_n| < M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Atunci, pt. $\forall n \in \mathbb{N}$, avem:

$$|(x_n y_n) - (xy)| = |x_n y_n - x y_n + x y_n - xy| <$$

$$< |(x_n - x) y_n + x(y_n - y)| = |x_n - x||y_n| + |x||y_n - y| <$$

$$< M|x_n - x| + |x||y_n - y| < M a_n + |x| b_n.$$

$(M a_n + |x| b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conv. și $\lim\limits_{n\to\infty} (M a_n + |x| b_n) = 0$

Pe baza existenței limitei finite $\Rightarrow (x_n y_n)$ conv. și

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = xy$

6) <u>T. Weierstrass</u>: Fie $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$

a). Dacă (a_n) crescător și majorat $\Rightarrow$ convergent. (către marginea sa superioară, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$)

b). Dacă (b_n) descrescător și minorat $\Rightarrow$ convergent (către marginea sa inferioară, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf b_n$)

<u>Dem</u>: a). Dacă șirul (a_n) majorat, mult. $A = \{a_0, a_1, \dots\}$ este majorată $\Rightarrow \exists\, x_0 = \sup A \overset{def.}{\Rightarrow}$ pt. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $a_{n_0} > x_0 - \varepsilon$. Dar șirul (a_n) crescător $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_n \geq a_{n_0}$, $\forall n \geq n_0$, i.e. $a_n > x_0 - \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.

Prin urmare $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon = n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $|a_n - x_0| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$.

$\Rightarrow$ Șirul (a_n) converge către $x_0 = \sup A$.

b). Analog a)

7). • <u>Distanța</u>: Fie X o mulțime nevidă dată. Se numește <u>distanță</u> (metrică) pe mult. X aplicația $d: X \times X \to \mathbb{R}$ care verifică axiomele:

a) $d(x,y) \geq 0$, $\forall x,y \in X$ și $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

b) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x, y \in X$ (simetria distanței)

c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, $\forall x, y, z \in X$ (ineg. Δ-ului)

• Spațiu metric: Dacă $X \neq \emptyset$ și se definește aplicația

$d: X \times X \to \mathbb{R}$ prin $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ și

$d(x,y)=1 \Leftrightarrow x \neq y$, atunci (X,d) sn. spațiu metric.

• Bila/sfera: Fie (X,d) un spațiu metric și $a \in X$, $r \in \mathbb{R}_+^*$.

∘ Mulț. $B(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) < r\}$ sn. bila deschisă de centru a și rază r; ①

∘ Mulț. $S(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) = r\}$ sn. sfera de centru a și rază r; ②

∘ Mulț. $\overline{B}(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) \le r\}$ sn. bila închisă de centru a și rază r. ③ $\xRightarrow{①②③}$ $\overline{B}(a,r) = B(a,r) \cup S(a,r)$.

8). • Șir convergent în spațiu metric:

Def!: Fie (X,d) sp. metric. Șirul $(a_n)_n \subset X$ este convergent în X dacă $\exists x_0 \in X$ cu proprietatea:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ a.î. } d(a_n, x_0) < \varepsilon, \forall n \ge n_\varepsilon.$$

Se notează: $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Obs!: În orice sp. metric, limita unui șir este unică.

• Șir Cauchy în spațiu metric:

Def!: Fie (X,d) sp. metric. și $(a_n)_n \subset X$. Șirul $(a_n)_n$ este șir Cauchy/șir fundamental dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ a.î. } d(a_n, a_m) < \varepsilon, \forall n, m \ge n_\varepsilon.$$

sau

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ a.î. } d(a_{n+p}, a_n) < \varepsilon, \forall n \ge n_\varepsilon \text{ și } p \ge 1.$$

9) <u>Proprietăți</u>: a) Dacă $(x_n)_n$ convergent $\Rightarrow (x_n)_n$ Cauchy

b) Orice șir Cauchy este mărginit

c) Orice șir convergent este mărginit

d) Dacă un șir Cauchy de numere reale are un punct limită, atunci este convergent.

e) Limita unui șir convergent este unică.

f) Orice subșir al unui șir convergent este convergent.

10) • <u>Limita superioară</u>:

<u>Def!</u>: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ un șir mărginit superior. Se numește <u>limită superioară</u> a șirului (x_n):

$$x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k .$$

• <u>Limita inferioară</u>:

<u>Def!</u>: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ șir mărginit inferior. Sn. <u>limită inferioară</u> a șirului (x_n):

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k .$$

11) Limita superioară este un punct limită. (Se numește <u>punct limită</u> al unui șir limita unui subșir al <u>șirului dat.</u>)

<u>Dem:</u> „$\Rightarrow$" $a = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$

$\Rightarrow a \leq x_n < a + \varepsilon$

$x_n = \sup_{k\leq n} x_k < a + \varepsilon \Rightarrow \forall k \geq n_\varepsilon \Rightarrow x_k < a + \varepsilon$

„$\Leftarrow$" $\forall \varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow x_k < a+\varepsilon$

$$X_n = \sup_{k\geq n} x_k \leq a+\varepsilon$$

$$X_n = \sup_{k\geq n} x_k \geq a$$

$$x_{n_k} \to a \Rightarrow X_n \to a.$$

12) <u>Consecințe</u>:

1- Orice șir mărginit are un subșir convergent.

2- Spațiul metric $(\mathbb{R}, d_e)$, unde $d_e = |\ |$ (metrica euclidiană) este un spațiu complet.

13) <u>Caracterizare</u>:

Fie $a = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $a \in \mathbb{R}$ este margine/limită sup.

$\Leftrightarrow$ a) $\forall \varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow x_n < a+\varepsilon$

b) $\exists x_{n_k} \to a$

14) <u>Proprietăți</u>: a) $\overline{\lim}(x_n+y_n) = \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$

b) $\underline{\lim}(x_n+y_n) \geq \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n$

$\Rightarrow$ c) $\exists \lim x_n \Rightarrow \overline{\lim}(x_n+y_n) = \lim x_n + \overline{\lim} y_n$.

d) $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$

e) $\overline{\lim}(a\cdot x_n) = a\cdot \overline{\lim} x_n$, $a>0$

f) $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$, $\overline{\lim} x_n y_n \leq \overline{\lim} x_n\, \overline{\lim} y_n$

15) Criterii de convergență pt. serii:

• Criteriul lui Cauchy (condensării):

Fie seria $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n > 0$ a.î. $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$, $\forall n \geq 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \ (C) \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (C)$$

• Criteriul comparației:

a) cu inegalități: $0 \leq x_n \leq y_n$, $\forall n \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \ (C)/(D) \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \ (C)/(D)$$

b) cu limită: $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ șiruri din $(0;+\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = c \in (0;+\infty)$$

Atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ "au aceeași natură" (amândouă (C) sau (D))

• Criteriul raportului:

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n > 0$, $\forall n \geq 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l; \begin{cases} l \in [0;1] \Rightarrow \sum (C) \\ l = 1 \Rightarrow \underline{\text{NU}} \text{ putem decide} \\ l \in (1;+\infty) \Rightarrow \sum (D) \end{cases}$$

• Criteriul rădăcinii:

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n;\ x_n>0,\ \forall n\geq 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l;\ \begin{cases} l\in[0;1] \Rightarrow \sum (C) \\ l=1 \Rightarrow \underline{\text{NU}} \text{ putem decide} \\ l\in(1;+\infty) \Rightarrow \sum (D) \end{cases}$$

• Criteriul Raabe-Duhamel:

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n;\ x_n>0,\ \forall n\geq 1$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)n = l;\ \begin{cases} l>1 \Rightarrow \sum (C) \\ l=1 \Rightarrow \underline{\text{NU}} \text{ putem decide} \\ l<1 \Rightarrow \sum (D) \end{cases}$$

• Criteriul Dirichlet:

$a_n \downarrow,\ a_n \to 0$

$\sum b_n$ cu șirul sumelor parțiale mărginit $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ (C)

(adică $\exists M\geq 0$ a.î. $\left|\sum_{i=1}^{k} b_i\right| \leq M;\ \forall k\geq 1$)

• Criteriul Abel: $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton, mărginit

$\sum b_n$ (C) $\Rightarrow \sum a_n b_n$ (C)

• Criteriul Leibniz:

$(a_n)_{n\geq 1}$ strict $\downarrow$

$a_n \to 0$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ (C)

16). • **Topologie**: **Def 1**: Fie X o mulț. și $\mathcal{T} \subset P(X)$.

$\mathcal{T}$ sn. topologie pe X dacă: a) $\{\emptyset, X\} \in \mathcal{T}$;

b) dacă $\Delta_i \in \mathcal{T}, \forall i \in I$, atunci $\bigcup_{i \in I} \Delta_i \in \mathcal{T}$

c) dacă $\Delta_1, ..., \Delta_n \in \mathcal{T}$, atunci $\bigcap_{i=1}^{n} \Delta_i \in \mathcal{T}$.

• **Spațiu topologic**: Dacă $\mathcal{T}$ topologie pe X, atunci $(X, \mathcal{T})$ sn. spațiu topologic.

• **Mulțime închisă**: O submulțime a unui spațiu topologic X sn. închisă dacă complementul său față de spațiul X este o mulțime deschisă.

• **Vecinătate**: Sn. vecinătate a unui punct $x \in X$ al unui spațiu topologic orice submulțime $Y \subseteq X$ ce conține o mulțime deschisă ce are în ea punctul x:

$$\exists\, \Delta \subset \mathcal{T} \text{ a.î. } x \in \Delta \subseteq Y$$

17) Analiza unei mulțimi:

• **În spațiul topologic**:

◦ interiorul mulț.: $\mathring{A} = \{x \in X \mid \exists\, \Delta \in \mathcal{T} \text{ a.î. } x \in \Delta \subset A\} = \{x \in X \mid \exists\, V \in \mathcal{V}(x) \text{ a.î. } V \subset A\}$.

◦ închiderea mulț. (aderența): $\bar{A} = \{x \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}(x) \text{ a.î. } V \cap A \neq \emptyset\}$

- mult. pct. de acumulare : $A' = \{x \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $V \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset\}$
- frontiera mulț.: $\partial A = \mathrm{Fr}\, A = \{x \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset$ și $V \cap \mathring{A} \neq \emptyset\}$.

- <u>În sp. metric $A \subset \mathbb{R}^n$:</u>
- $\mathring{A} = \{x \in A \mid \exists \varepsilon > 0$ a.î. $B(x, \varepsilon) \subset A\}$
- $\bar{A} = \{x \in A \mid \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}$
- $A' = \{x \in A \mid \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset\}$
- $\partial A = \mathrm{Fr}\, A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ și $B(x, \varepsilon) \cap \mathring{A} \neq \emptyset\}$

18) <u>Def!</u>: Fie (S_1, d_1) și (S_2, d_2) spații metrice. Fie $f : D \subseteq S_1 \to S_2$ o fct. și $a \in D$. Fct. f este <u>continuă în a</u> dacă $\forall (x_n)_{n \geq 0} \in D$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

19) Compunerea a 2 fct. continue este continuă:

<u>Dem</u>: Fie $(x_n)_n \subseteq A$ un șir cu limita $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ și arătăm că: $\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = h(a)$

f cont. în $a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b = f(a)$

g cont. în $b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(b)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = g(f(x_n)) = h(a)$

22) (T.) Weierstrass (mărginirea funcțiilor continue):

Orice funcție continuă pe un interval închis și mărginit este mărginită și își atinge marginile.

23) • Convergența ~~uniformă~~ simplă:

Def!: Fie $f_n, f : A \to (X,d)$

$f_n \xrightarrow{s} f$ (converge simplu la f) dacă $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

$\forall x \in A,\ \varepsilon > 0\ \exists n_{\varepsilon_x} > 0$ a.î. $\forall n \geq n_{\varepsilon_x} \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

• Convergența uniformă:

Def!: Fie $f_n, f : A \to (X,d)$.

$f_n \xrightarrow{u} f$ (conv. uniform la f)

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$.

$\sup_{x\in A} (f_n(x) - f(x)) \leq \varepsilon$.

24) Păstrarea continuității prin convergența simplă:

Fie (X, T) sp. topologic, (Y, d) sp. metric, $a \in X$ și $f_n, f : X \to Y$. Dacă $f_n \to f$ și f_n cont. în $a \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ cont. în a.

25) Funcții uniform continue: Def!: Fie (X, d_1) și (Y, d_2) 2 sp. metrice, $f : X \to Y$. f s.n. uniform continuă dacă $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta_\varepsilon$ a.î. $\forall x, y \in X$ a.î. $d_1(x,y) < \delta_\varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

28) T. **L'Hospital**: Fie $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ deriv. pe (a,b) a.î. $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$.

Dacă: a) $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \lim\limits_{y \to b} g(x) = 0$ sau

$\lim\limits_{x \nearrow b} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow b} g(x) = \infty$

b) $\exists \lim\limits_{x \nearrow b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$

c) $\exists \lim\limits_{x \nearrow b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

Cazuri: ① $l \in \mathbb{R}$ sau $l \in \{\pm\infty\}$

② $\lim f(x) = 0$ sau $\lim\limits_{x \nearrow b} f(x) = \infty$

③ $b < \infty$ sau $b = \infty$

29) **Condiții puncte extrem local**:

Fie $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ o mult. deschisă $f : \Delta \to \mathbb{R}$ și $a \in \Delta$.

$\boxed{1}$ Dacă a este pct. de minim local $\Rightarrow f'(x) = 0$ și $f''(a) \geq 0$

$\boxed{2}$ Dacă a este pct. de maxim local $\Rightarrow f'(a) = 0$ și $f''(a) \leq 0$

$\boxed{3}$ Dacă $f'(a) = 0$ și $f''(a) > 0 \Rightarrow$ a este pct. de minim local

$\boxed{4}$ Dacă $f'(a) = 0$ și $f''(a) \leq 0 \Rightarrow$ a este pct de maxim local.