CURS 9

29.11.2018

Def: Fie $f_n, f : A \longrightarrow R$

$f_n \xrightarrow{s} f$ $\forall x \in A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

$\forall x \in A$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_{\varepsilon, x}$ a. î. $\forall n \geq n_{\varepsilon,x} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$f_n \xrightarrow{u} f$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ a. î. $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ $\forall x \in A$

$\Updownarrow$

$a_n = \sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

$f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{s} f$

__Teoremă__: Fie $f_n, f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ și $c \in (a, b)$ a. î. $f_n \xrightarrow{u} f$ și f_n să fie cont. în c $\forall n \geq 1$. Atunci f este continuă în c

__Dem:__ $f_n \xrightarrow{u} f$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ a. î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall x \in (a, b)$.

Fie $n \geq n_\varepsilon$ f_n cont. în c $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a. î. $|x - c| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_n(c)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$|f(x) - f(c)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(c) + f_n(c) - f(c)| \leq$

$\leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(c)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(c) - f(c)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$

$|x - c| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

Teorema (Dini): Fie $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \to f$, $(f_n)_n$ să fie monoton și f_n și f să fie continue. Atunci $f_n \xrightarrow{u} f$

exemplu $f_n(x) = x^n(1-x)$ $\quad f_n \xrightarrow{s} 0$

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$f_n \geq f_{n+1}$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$

Teoremă Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci $\exists\, c \in [a;b]$ a.î.

$f(c) = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x)$

Dem: **Pasul 1** PP. $\sup\limits_{x \in [a;b]} f(x) = \infty \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, x_n \in [a;b]$ a.î. $f(x_n) \geq n$

$(x_n)_n \subset [a;b]$ (deci este mărginit) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, (x_{n_k})_k$ a.î. $x_{n_k} \to c \in [a;b]$

$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_{n_k}) = f(c) \Rightarrow f(c) = \infty$ contradicție

Pasul 2 Notăm $\alpha = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x) < \infty$

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, y_\varepsilon \in [a;b]$ a.î. $\alpha - \varepsilon < f(y_\varepsilon) \leq \alpha$

$\varepsilon = \frac{1}{n}$ $\quad x_n = y_{\frac{1}{n}} \Rightarrow \alpha - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$

$(x_n)_n \subset [a;b] \Rightarrow \exists\, x_{n_k} \to c \in [a;b]$

$\underset{\alpha}{\underset{\downarrow}{f(x_{n_k})}} \to f(c)$

$\alpha = f(c) = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x)$

Def: Fie (X_1, d_1) și (X_2, d_2) sp. metrice. O funcție $f: X_1 \to X_2$ s.n. uniform continuă (u.c.) dacă $\forall \varepsilon > 0$ $\Rightarrow \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $d_1(x,y) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$

f cont. $\forall x \in X_1$ f cont. în x $\forall x \in X_1$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_{\varepsilon, x} > 0$ a.î. $d_1(x,y) < \delta_{\varepsilon, x} \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$

exemplu ① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x$ este u.c.

$\delta_\varepsilon = \varepsilon$ $\quad |f(x) - f(y)| = |x - y|$

exemplu ② $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

$|f(x + \frac{1}{n}) - f(x)| = (x + \frac{1}{n})^2 - x^2 = 2x \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$

$y_n = n + \frac{1}{n}$

$|x_n - y_n| = \frac{1}{n}$ $\quad |f(x_n) - f(y_n)| = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$

$x_n = n$

Teoremă. Fie $A \subset \mathbb{R}$ închisă și mărginită și $f: A \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci f este uniform continuă.

Dem: f este u.c. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x, y \in A$ cu $|x - y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

pp. că f nu este u.c. $\exists \varepsilon > 0$ a.î. $\forall \delta > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists x_\delta, y_\delta \in A$ a.î. $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ și $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$

$u_n = x_{\frac{1}{n}}$

$v_n = y_{\frac{1}{n}}$

$(u_n)_n \subset A$ - mărginită $\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$
a. î. $u_{n_k} \to c$

A închisă $\Rightarrow c \in A$
$|u_n - v_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow v_{n_k} \to c$

$\varepsilon \leq |f(u_{n_k}) - f(v_{n_k})| \leq |f(u_{n_k}) - f(c)| +$

$+ |f(c) - f(v_{n_k})| \to c$

f cont în c

$\Rightarrow 0 < \varepsilon \leq 0$
contradicție

Def: Fie (X,d) un spațiu metric. O mulțime $A \subset X$ s.n. secvențial compactă dacă $\forall (x_n)_n \subset A \Rightarrow \exists (x_{n_k})_k$ a.î. $x_{n_k} \to a \in A$

Def: O mulțime $K \subset (X, \tau)$ s.n. compactă dacă $\forall (D_i)_{i\in I} \subset \tau$ a.î. $K \subset \bigcup_{i\in I} D_i \Rightarrow J \subset I$ finită a.î. $K \subset \bigcup_{i\in J} D_i$

Teoremă: O mulțime $A \subset (\mathbb{R}^n, d_2)$ este compactă $\Leftrightarrow$ este închisă și mărginită

Teoremă: Fie (X,d) un sp metric și $A \subset X$. AUASE:
1) A este compactă
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, x_1, x_2 \dots x_n$ a.î. $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$ (A - precompactă sau total mărginită) și A este completă ($\forall$ șir Cauchy A este conv. în A)
3) A este secvențial compactă

Dem $1) \Rightarrow 2) \Leftrightarrow 3)$

$\cancel{A \subset \bigcup^{n}}$

$A \subset \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon)$

A compactă $\Rightarrow \exists\, x_1 \dots x_n \in A$ a.î. $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$

Prop. Fie (X, d) un sp. metric

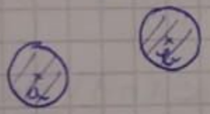
1) Dacă $A \subset X$ este compactă $\Rightarrow A$ este închisă

2) $A \subset X$ este compactă și $B = \overline{B} \subset A \Rightarrow B$ compactă

3) $(K_n)_n \subset X$, $K_n > K_{n+1}$, compacte $\Rightarrow \bigcap_{n \geq 1} K_n \neq \emptyset$

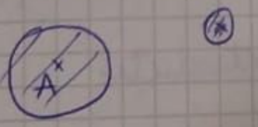
Dem. (X, d) sp. metric și $a, b \in X$ $a \neq b$

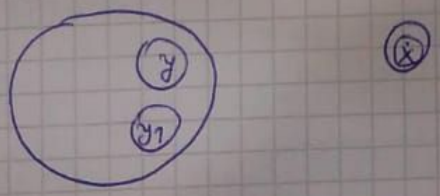
$0 < r < \frac{d(a,b)}{2} \Rightarrow B(a, r) \cap B(b, r) = \emptyset$



A închisă $\Leftrightarrow X \setminus A$ deschisă $\forall x \in X \setminus A\ \exists\, r > 0$

a.î. $B(a, r) \subset X \setminus A$





$\forall y \in A \Rightarrow r_y > 0$ a.î. $B(y, r_y) \cap B(x, r_y) = \emptyset$

$A \subset \bigcup_{y \in A} B(y, r_y) \Rightarrow \exists\, y_1 \dots y_n \in A$ a.î. $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, r_{y_i})$

$r = \min r_{y_i} > 0$ $\quad B(x, r) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, r_i)\right) = \emptyset$

$B(x, r) \subset B(x, r_{y_i})$

$A = \bar{A} \subset K$ - compactă

$(D_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ $\quad A \subset \bigcup_{i \in I}$

$K \subset X = A \cup \underbrace{X \setminus A}_{\in \mathcal{T}} \subset (X \setminus A) \cup (\bigcup_{i \in I} D_i)$

K compactă

$\Rightarrow J \subset I$ finită a.î.

$A \subset K \subset (X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in J} D_i$

$A \cap (X \setminus A) = \emptyset$

$\Rightarrow A \subset \bigcup_{i \in J} D_i$

$K_n \quad K_n \supset K_{n+1}$

$I_n = [a_n, b_n] \supset I_{n+1}$

$\bigcap I_n \neq \emptyset$

$\Rightarrow \bigcap K_n \neq \emptyset$

pp. că $\bigcap_{n \geq 1} K_n = \emptyset$ $\quad K_1 \subset X = X \setminus \bigcap_{n \geq 1} K_n = \bigcup_{n \geq 1} (X \setminus K_n) \in \mathcal{T}$

$\hookrightarrow K_1$ compactă

$\emptyset \neq K_m \subset K_1 \subset \bigcup_{i=1}^{m} (X \setminus K_i) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{m} K_i = X \setminus K_m$

contradicție

Derivabilitate

Def: Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ și $c\in(a,b)$. f este derivabilă în c dacă $\exists \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\in\mathbb{R}$

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

$$0=\lim_{x\to c}\underbrace{\frac{f(x)-f(c)-f'(c)(x-c)}{x-c}}_{w(x)}$$

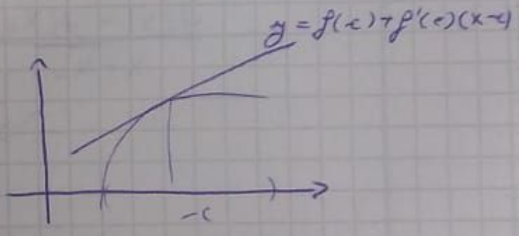
Def: Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ și $c\in(a,b)$. Spunem că f este derivabilă în c dacă $\exists\,\alpha\in\mathbb{R}$ și $w:(a,b)\to\mathbb{R}$ a. î.

1) $f(x)=f(c)+\alpha(x-c)+(x-c)\cdot w(x)$

2) $\lim_{x\to c} w(x)=0$

$\alpha=f'(c)$

$y=f(c)+f'(c)(x-c)$



Proprietățile fct. deriv.

Fie $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile în $c\in(a,b)$. Atunci:

1) f este cont. în c
2) $\exists\,(f+g)'(c)=f'(c)+g'(c)$
3) $\exists\,(f\cdot g)'(c)=f'(c)\cdot g(c)+f(c)\cdot g'(c)$

1) $\lim_{x\to c}f(x)=\lim_{x\to c}f(c)+f'(c)\underset{\downarrow\atop 0}{(x-c)}+\underset{\downarrow\atop 0}{(x-c)}\cdot\underset{\downarrow\atop 0}{w(x)}=f(c)$

2) $\lim_{x\to c}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}+\frac{g(x)-g(c)}{x-c}=$

$=f'(c)+g'(c)$

$$\lim_{x\to c} \frac{(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(c)\cdot g(x) + f(c)\cdot g(x) - f(c)\cdot g(c)}{x-c}$$

$$= \lim_{x\to c} \underbrace{g(x)}_{\to g(c)} \frac{(f(x)-f(c))}{x-c} + \frac{f(c)\cdot(g(x)-g(c))}{x-c}$$

$$= g(c)\cdot f'(c) + f(c)\cdot g'(c)$$

<u>Prop</u>: Fie $f:(a,b)\to(c,d)$, $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in(a,b)$.

Dacă $\exists\, f'(x_0)$ şi $\exists\, g'(f(x_0)) \Rightarrow \exists\,(g\circ f)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g'(f(x_0))$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(x_0)}{f(x)-f(x_0)}}_{\to g'(f(x_0))} \cdot \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)}$$

<u>Prop</u>: Fie $f:(a,b)\to(c,d)$ bijectivă a.î. $\exists\, f'(x_0)\neq 0$ şi

f^{-1} să fie cont în $f(x_0)$

$$\Rightarrow \exists\,(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$f:\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$

$f(x) = tg\, x$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x = 1 + f^2(x)$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}y)} = \frac{1}{1+(\underbrace{(f\circ f^{-1})(y)}_{y})^2} = \frac{1}{1+y^2}$$