

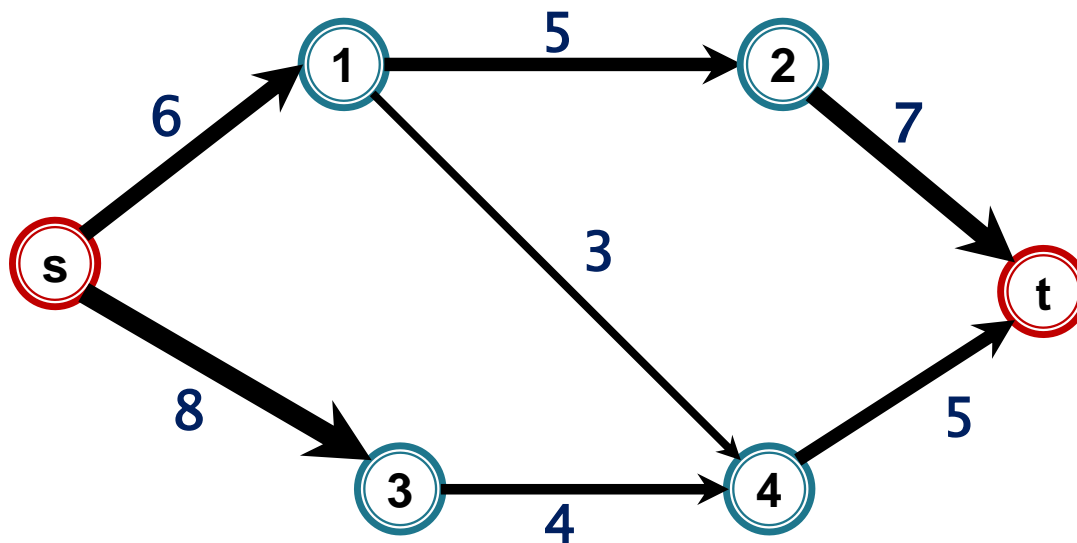
Fluxuri maxime în rețele de transport





- ▶ Avem o rețea în care
 - arcele au limitări de capacitate
 - nodurile = joncțiune

Care este cantitatea maximă care poate fi transmisă prin rețea de la surse la destinații?
(în unitatea de timp)



Fluxuri în rețele de transport

- ▶ **Rețea de comunicare**

- Transferul de informații – limitat de lățimea de bandă

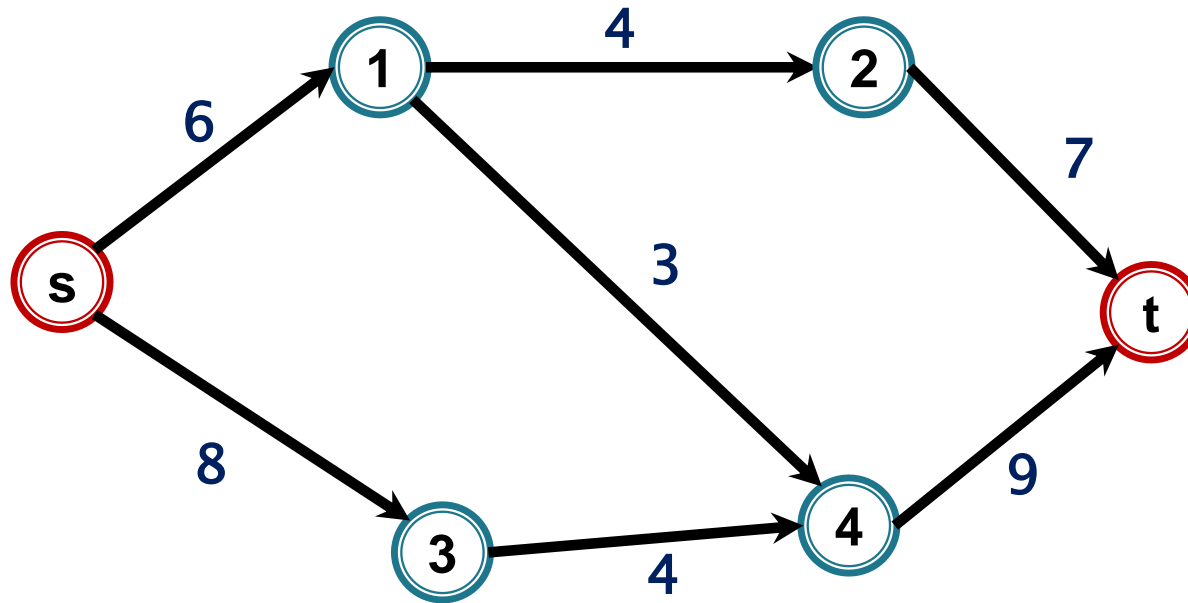
- ▶ **Rețele de transport / evacuare în caz de urgențe**

- Limitare – număr de mașini/persoane în unitatea de timp

- ▶ **Rețele de conducte**

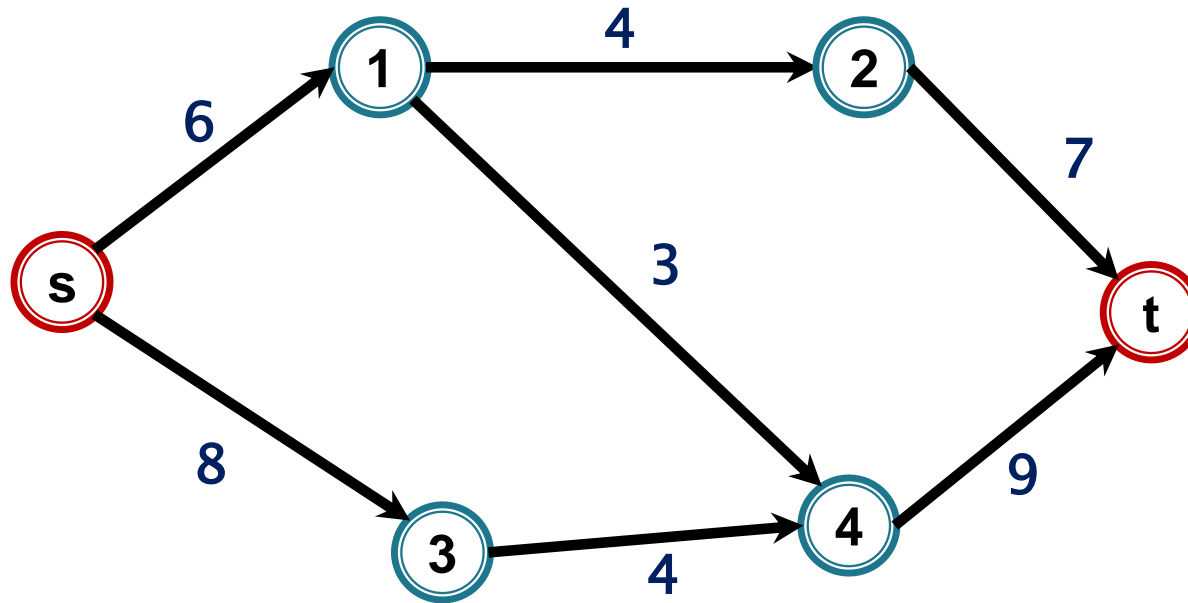
- ▶ ...

Fluxuri în rețele de transport



Încercăm să trimitem marfă (flux) **de la vârful sursă s la destinația t**

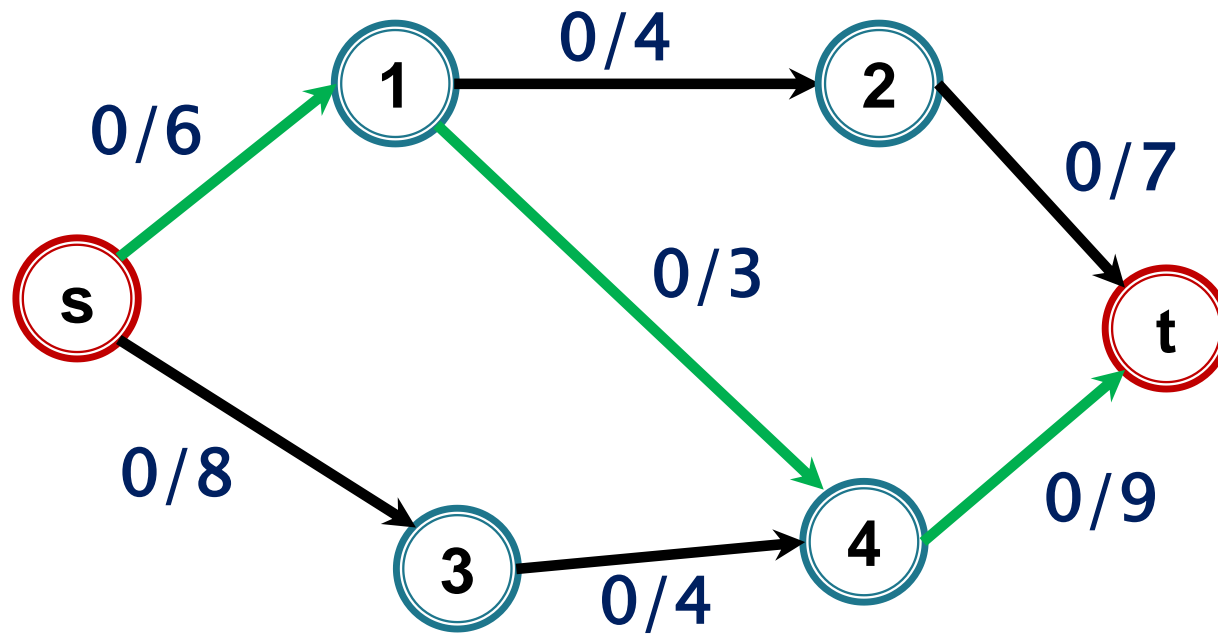
Fluxuri în rețele de transport

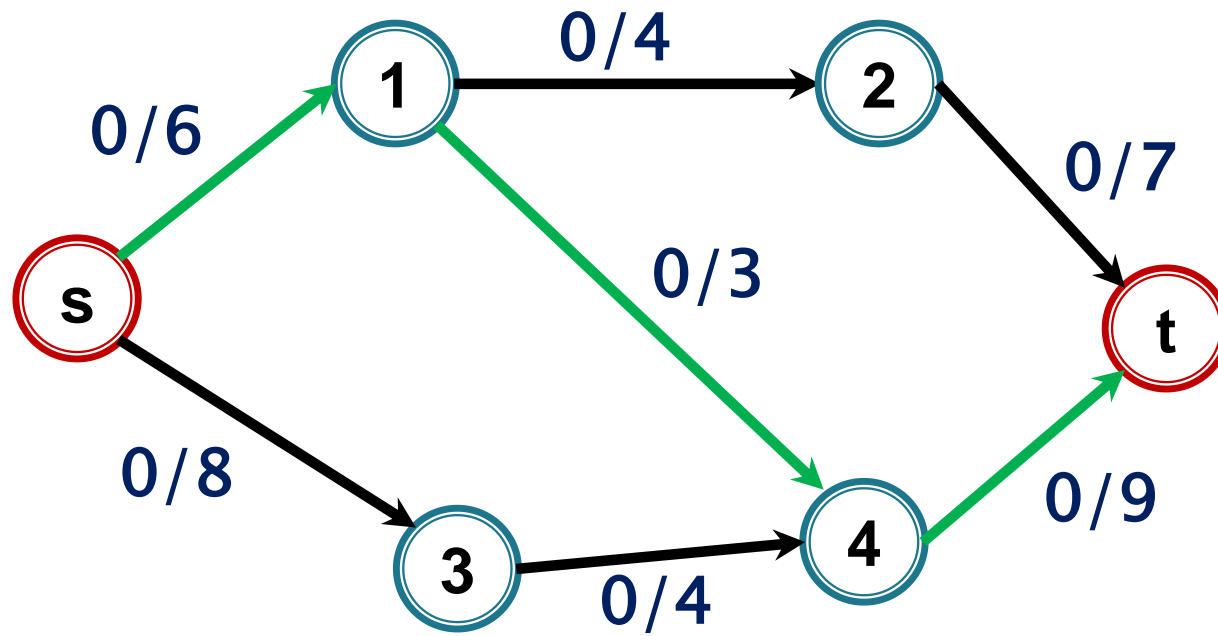


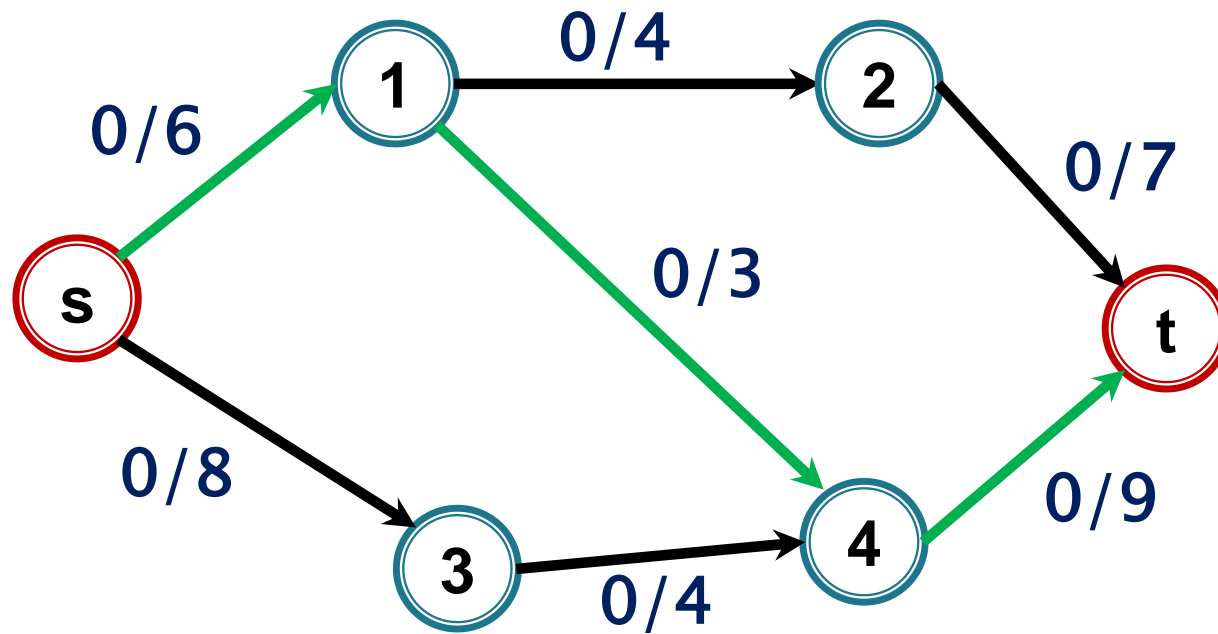
Încercăm să trimitem marfă (flux) **de la vârful sursă s la destinația t**

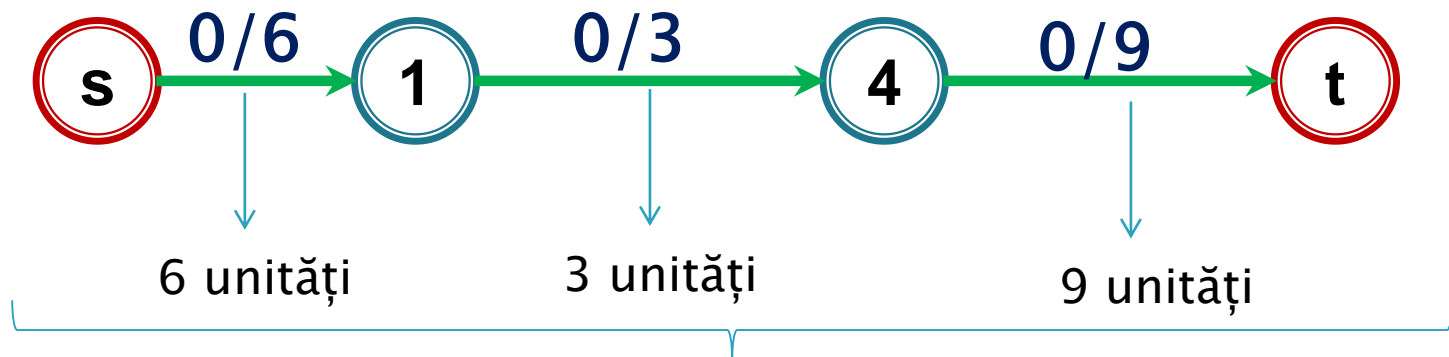
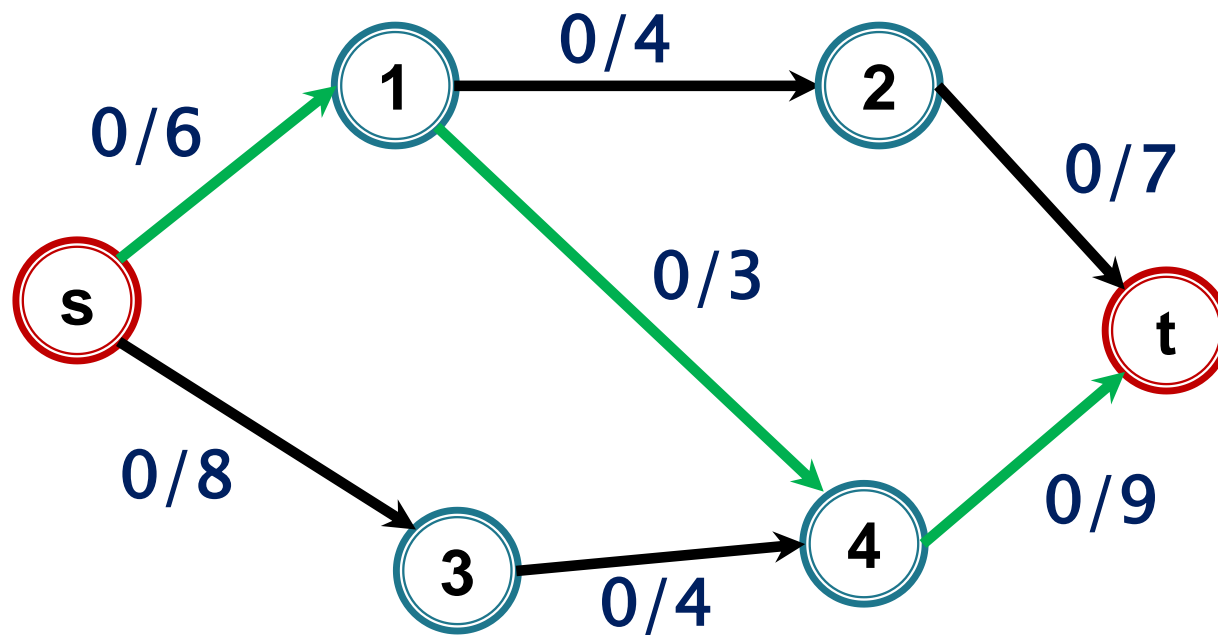


Determinăm drumuri de la s la t pe care mai putem trimite marfă

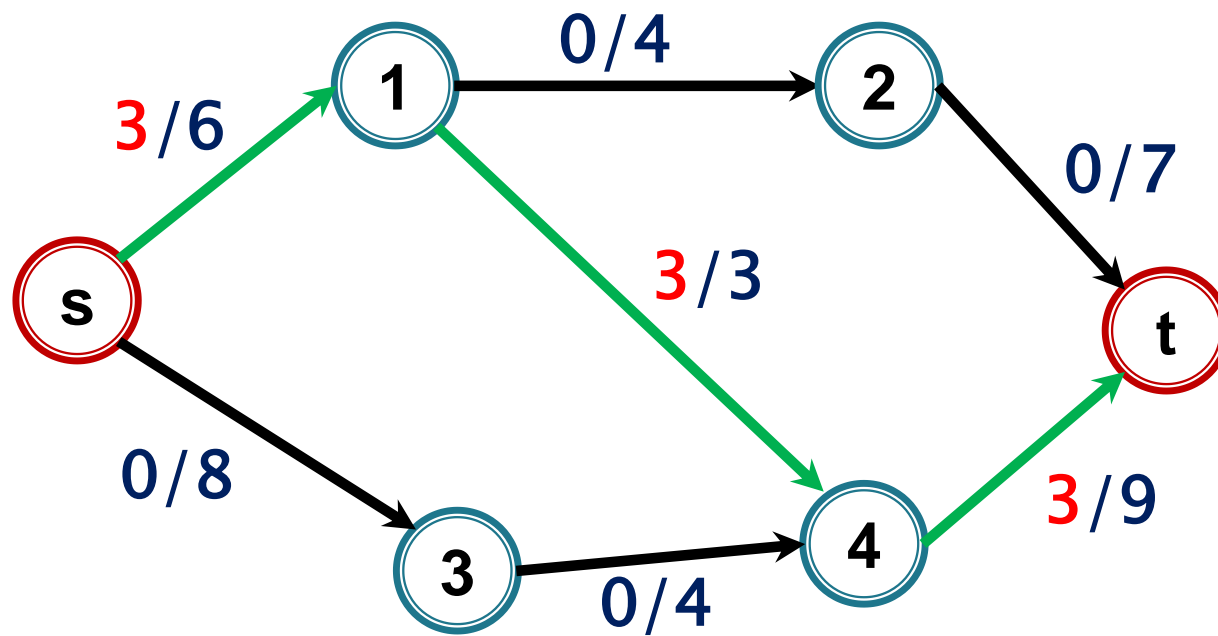


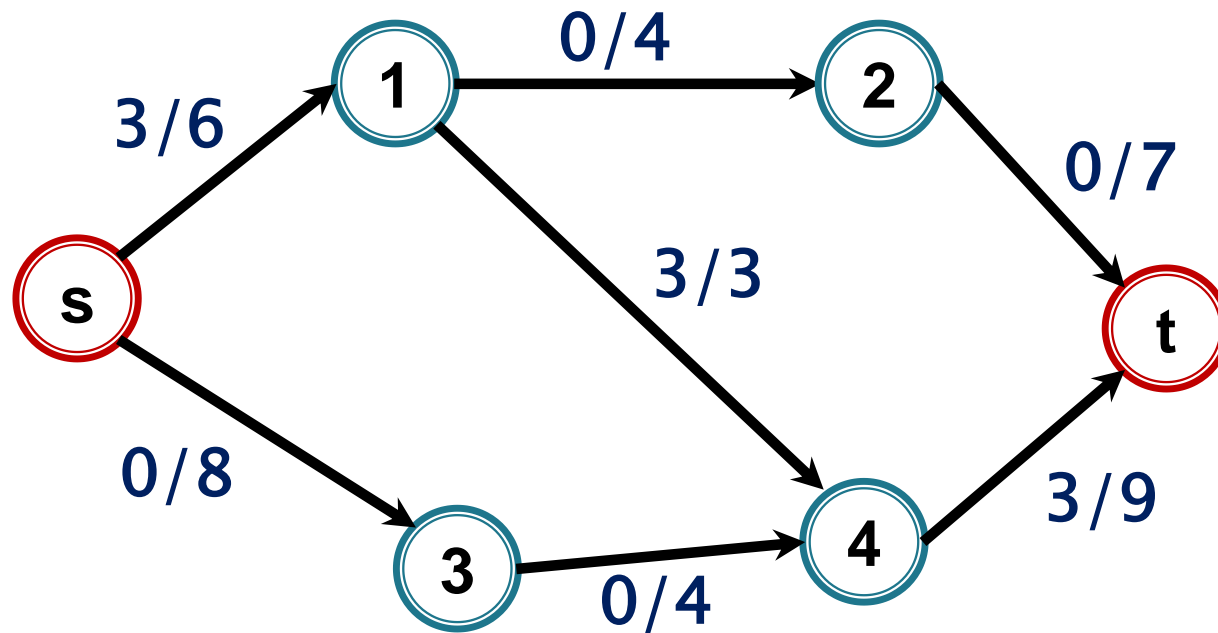




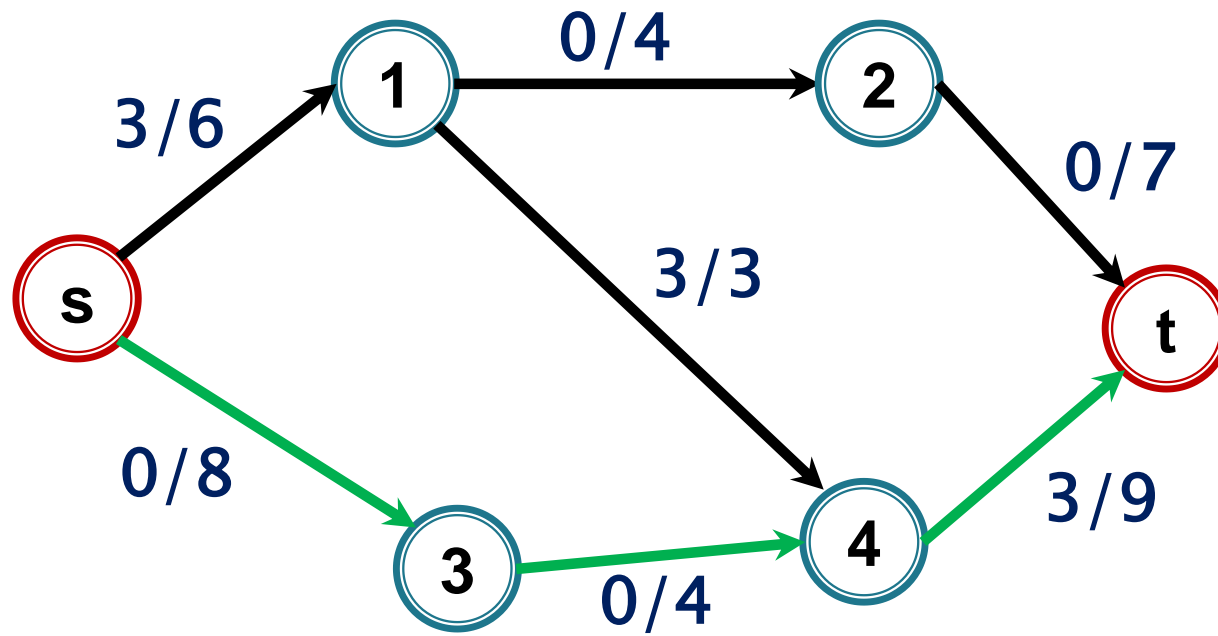


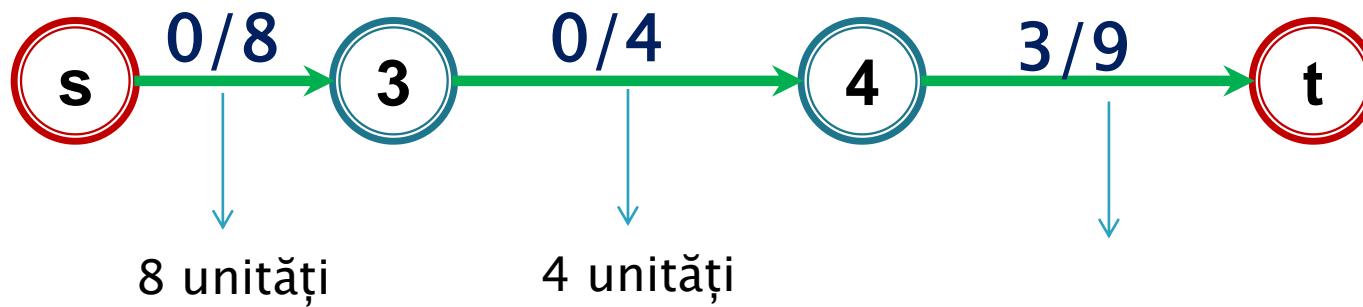
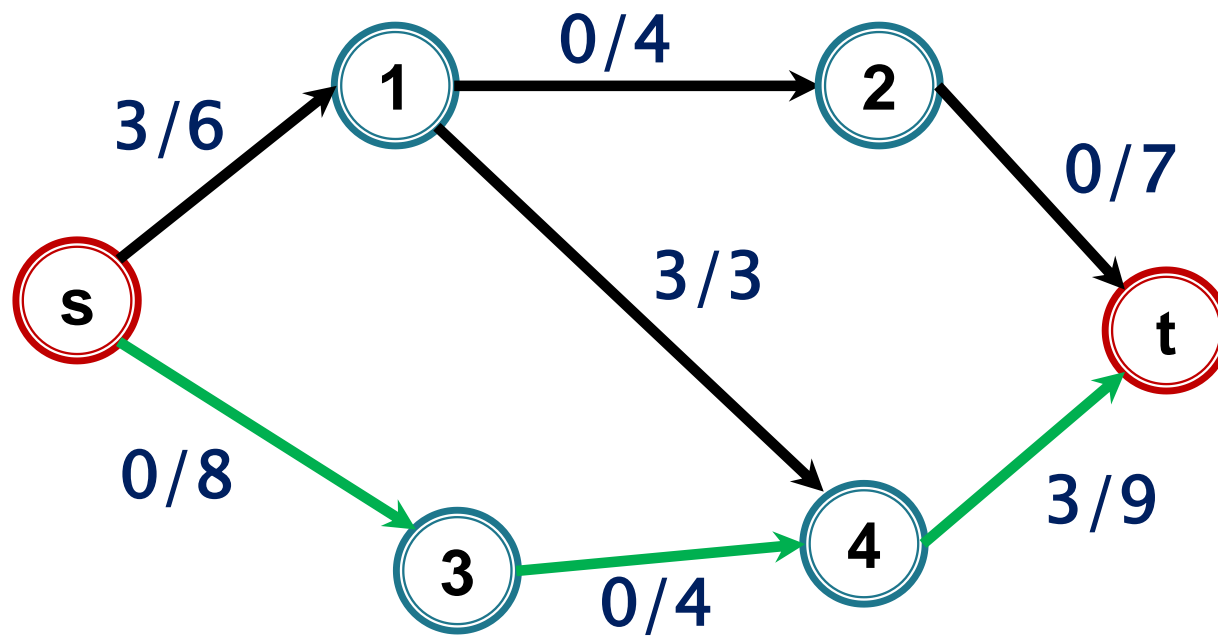
3 unități de-a lungul întregului drum

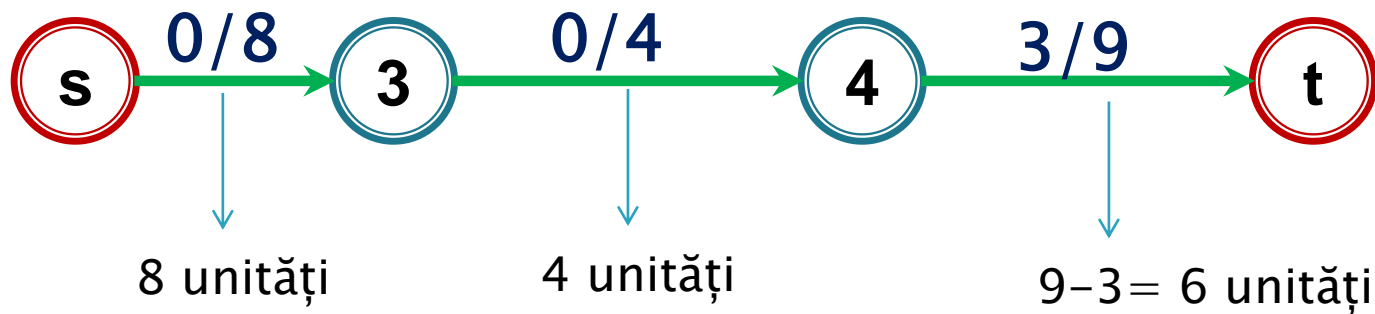
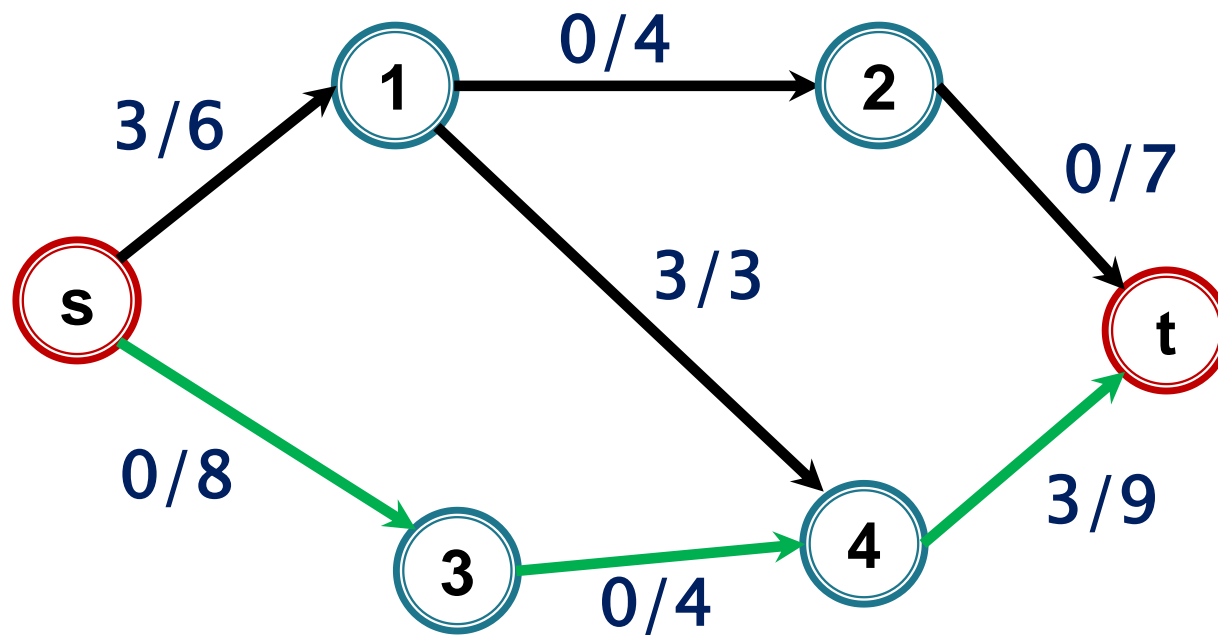


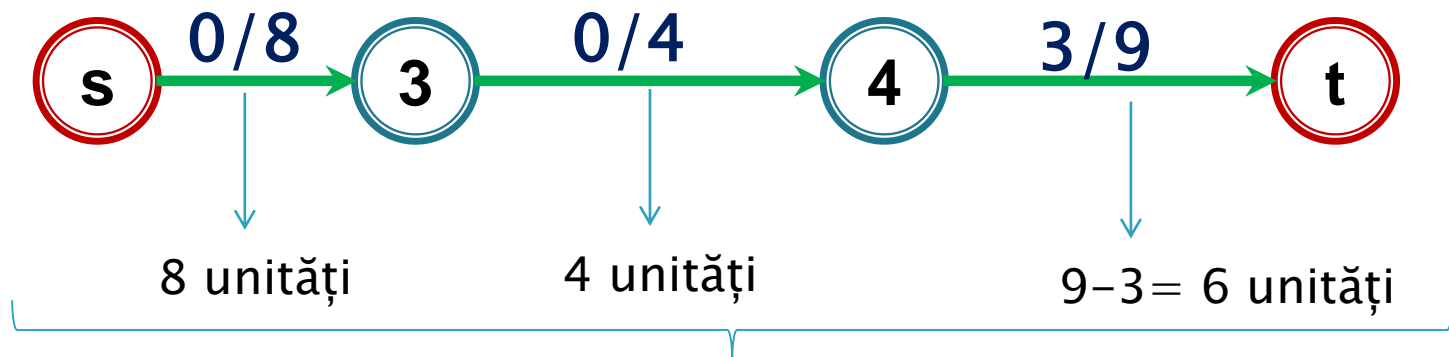
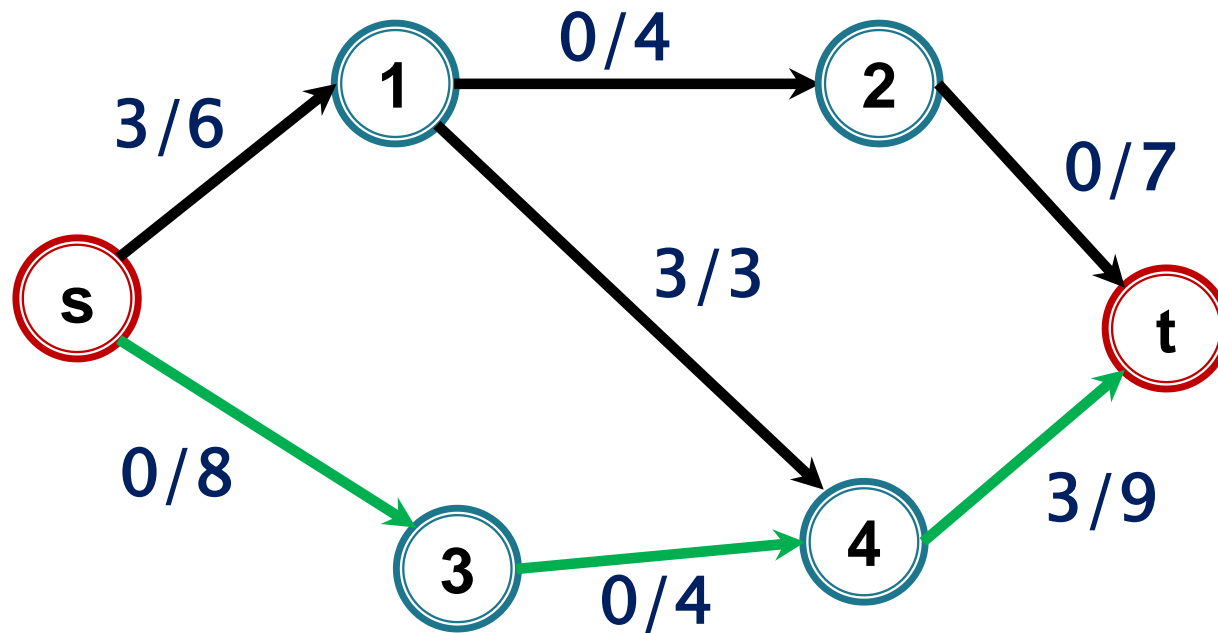


Căutăm alt drum de la s la t pe care mai putem trimite flux

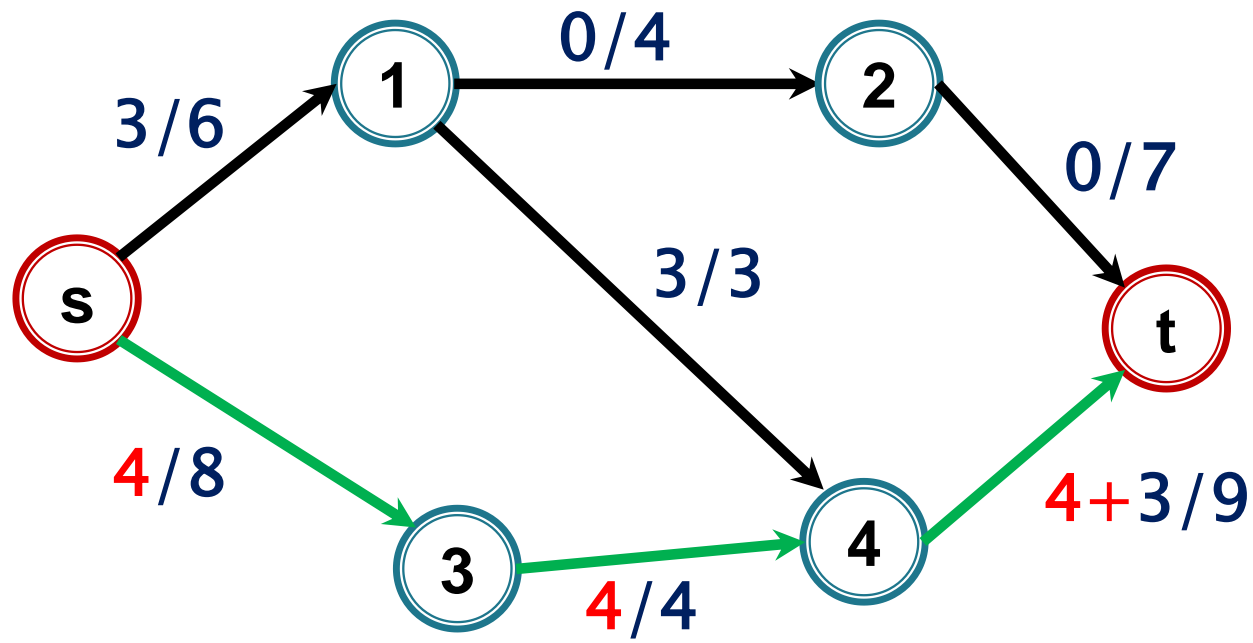


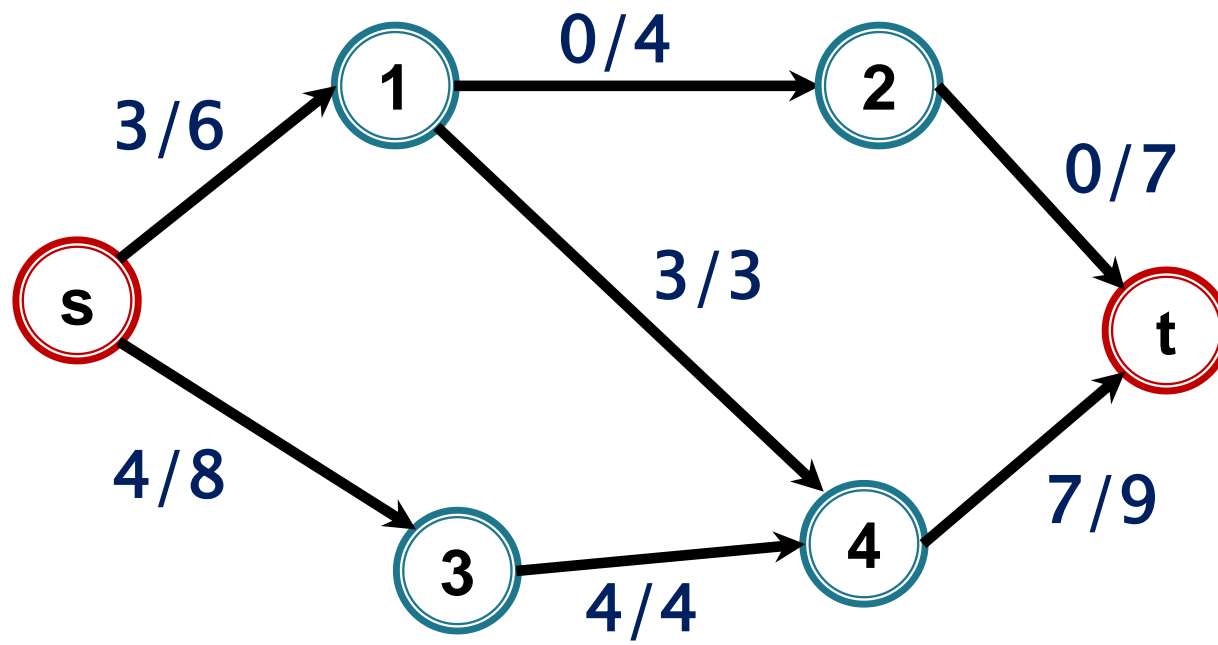


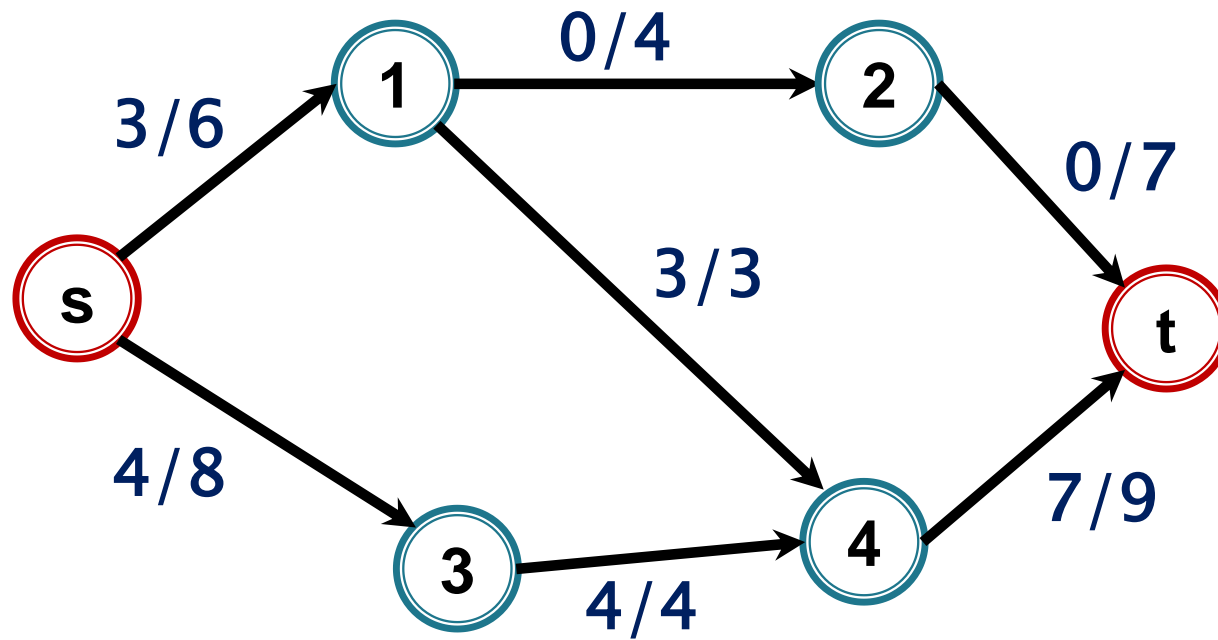




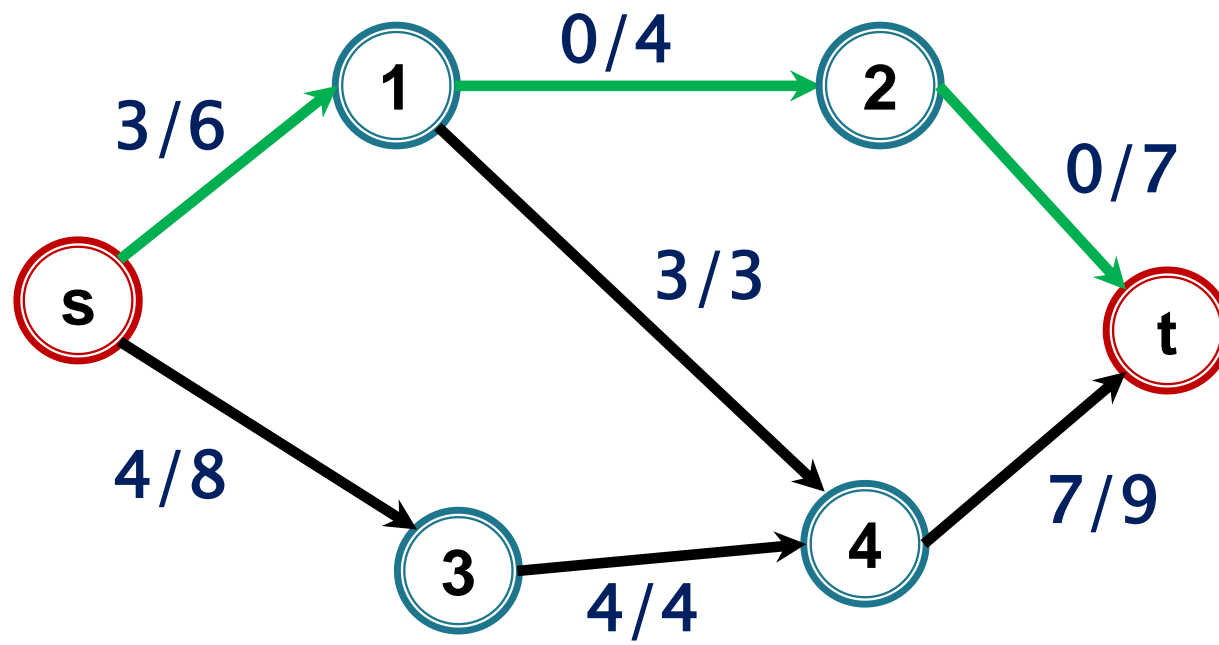
4 unități de-a lungul întregului drum

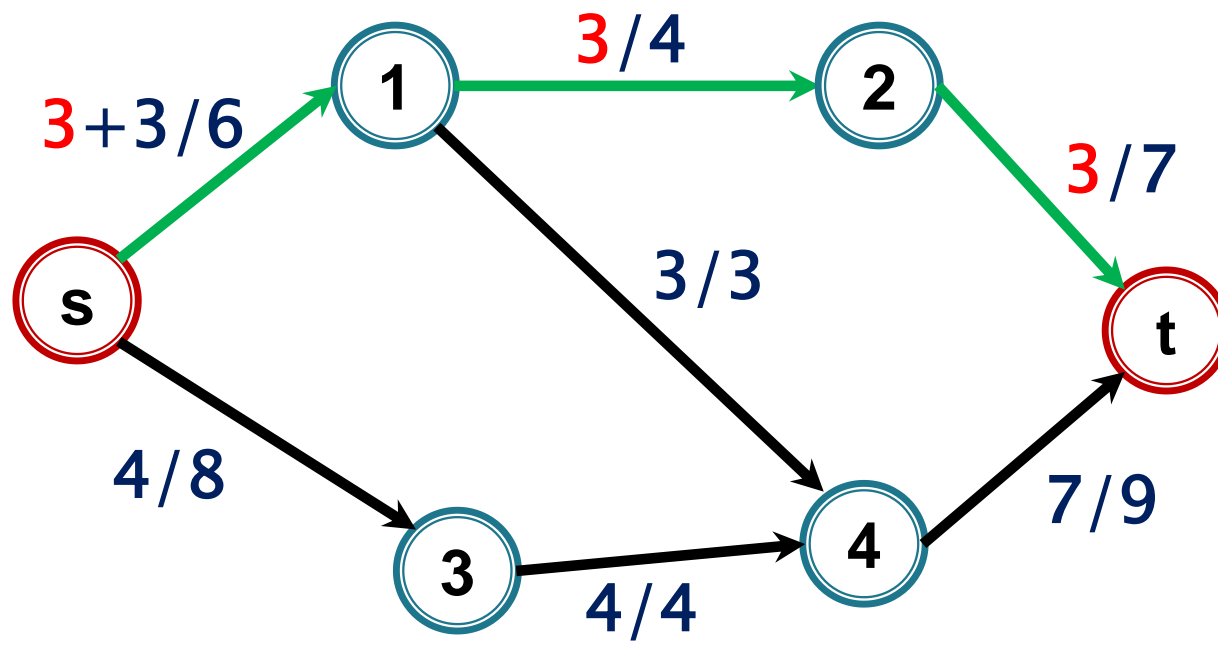


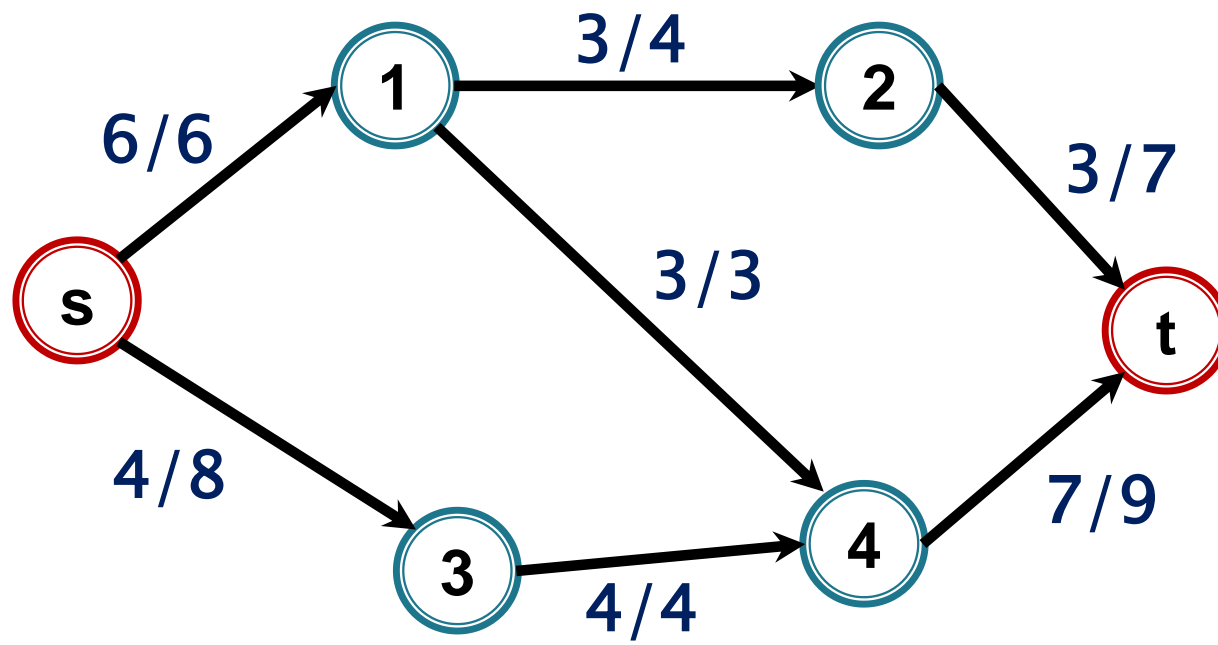


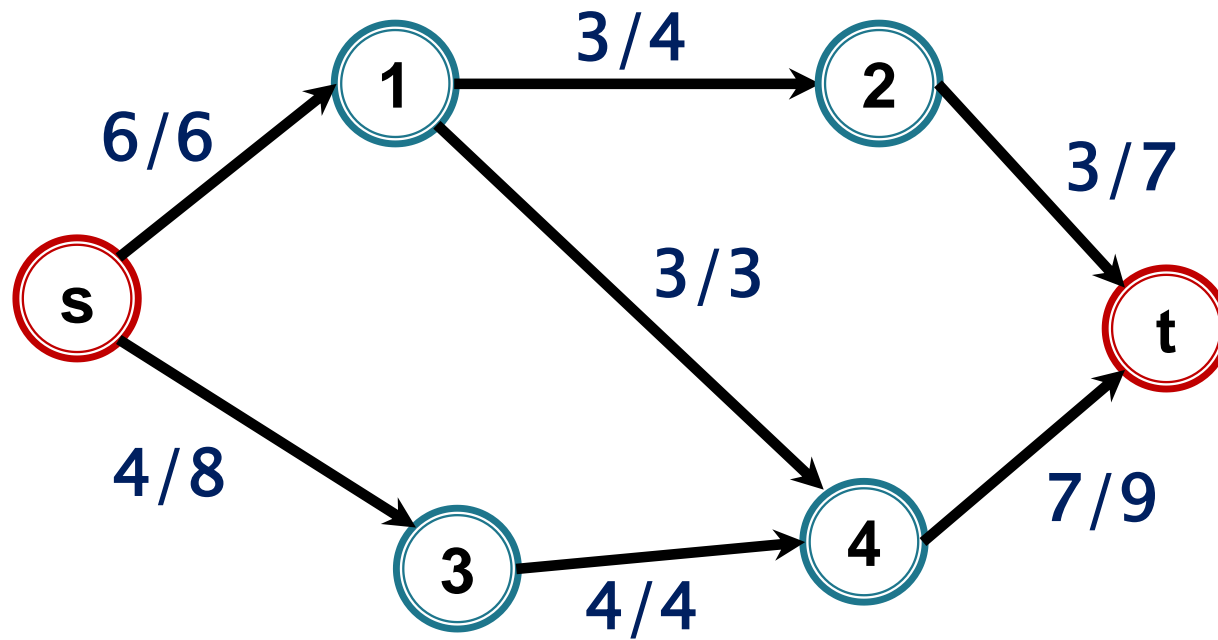


Căutăm alt drum de la s la t pe care mai putem trimite flux

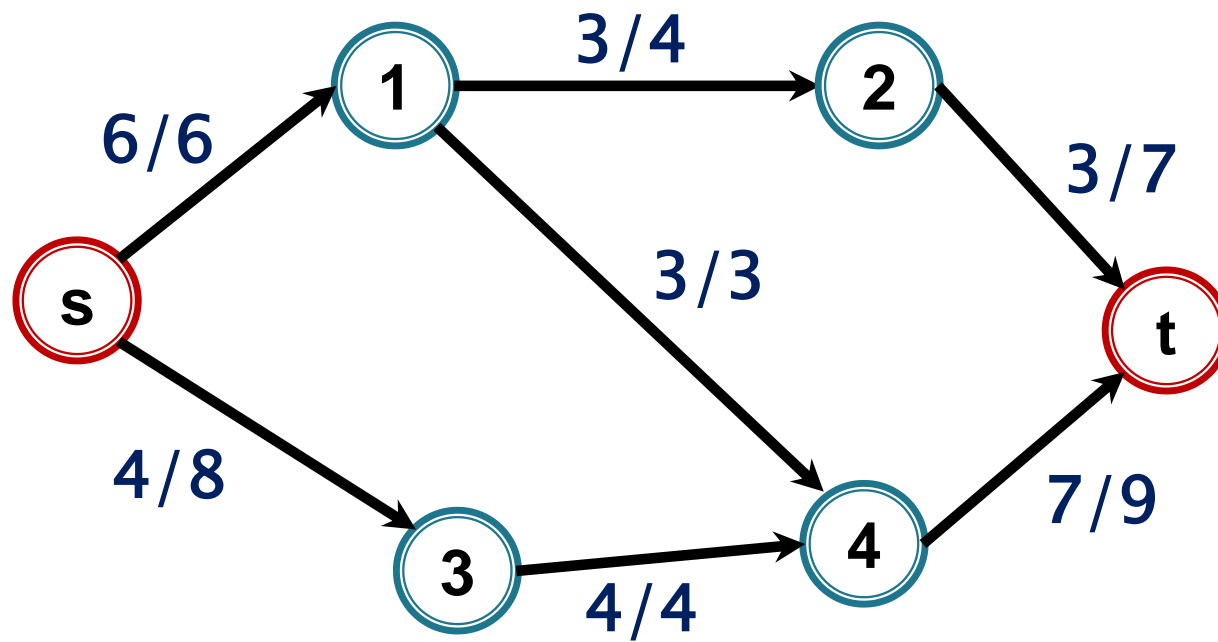




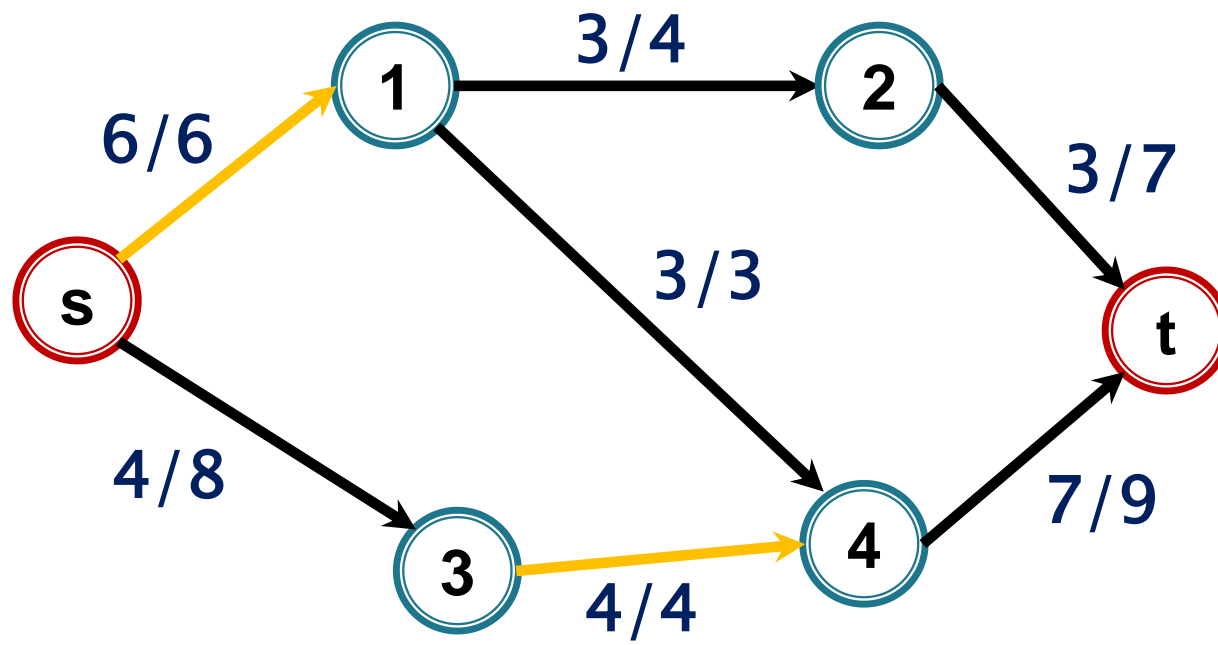


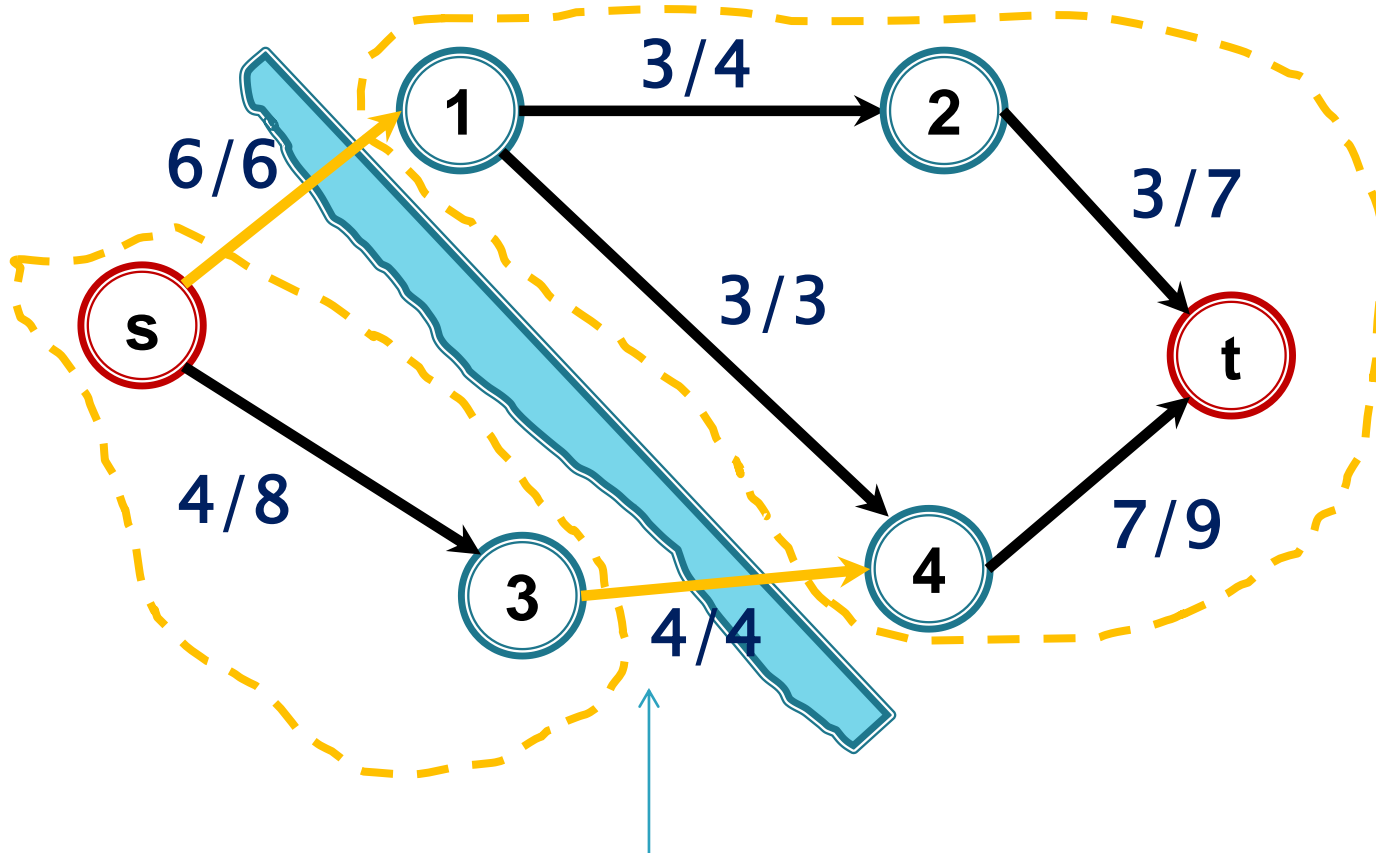


Nu mai există drumuri de la **s** la **t** pe care mai putem trimite flux



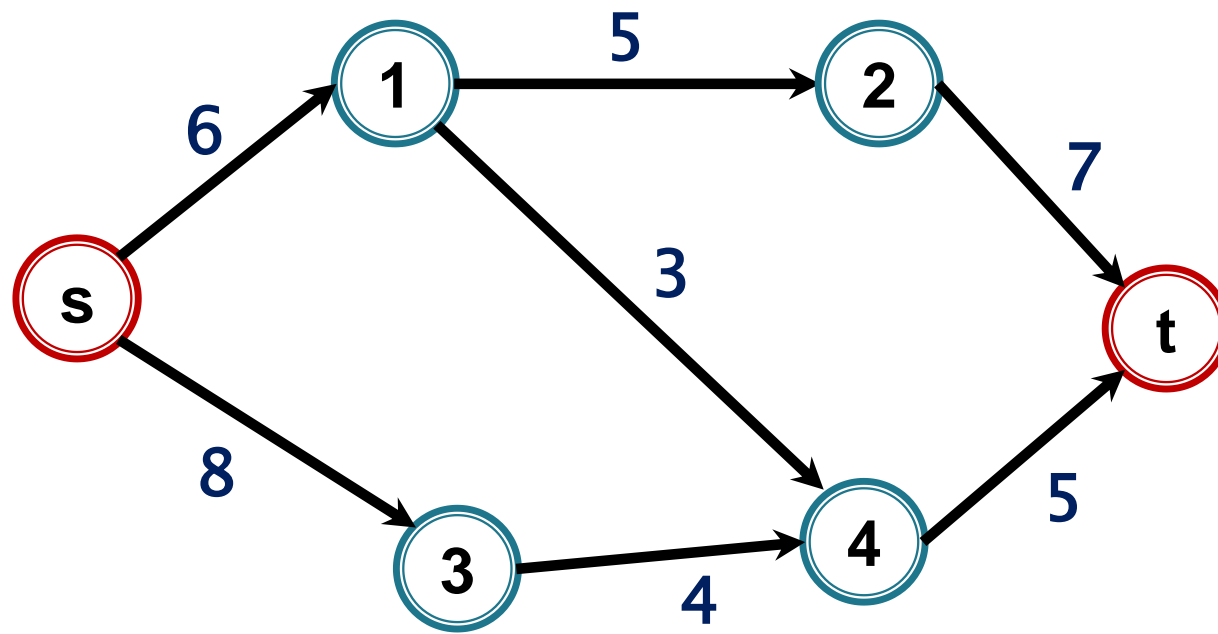
Este maxim fluxul?

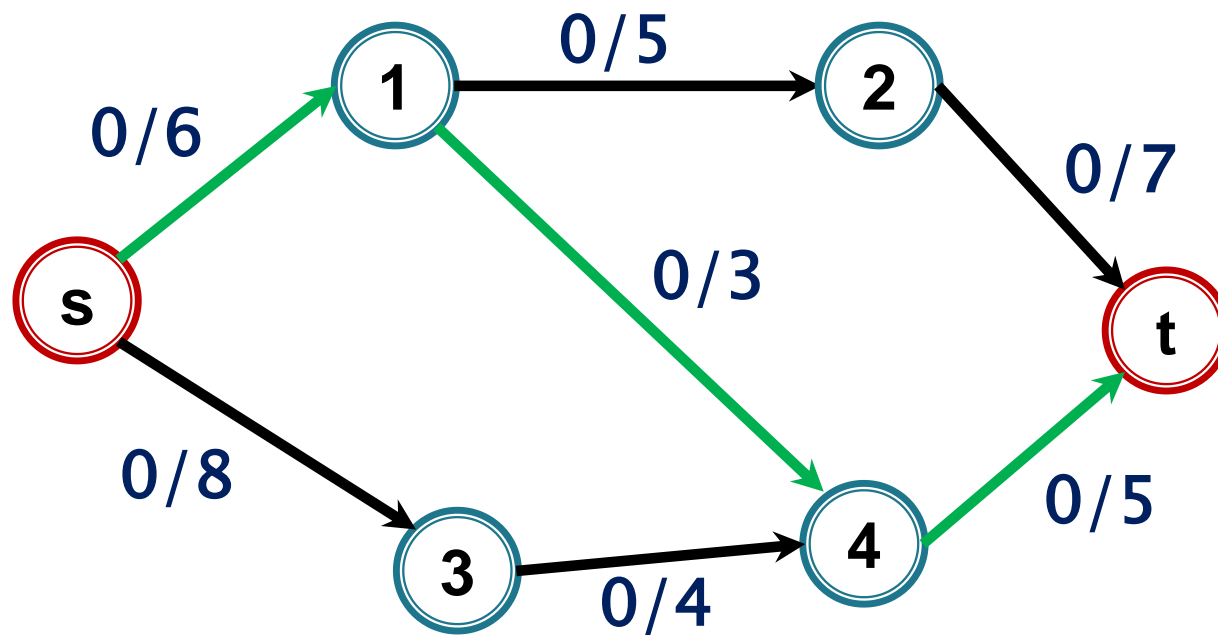


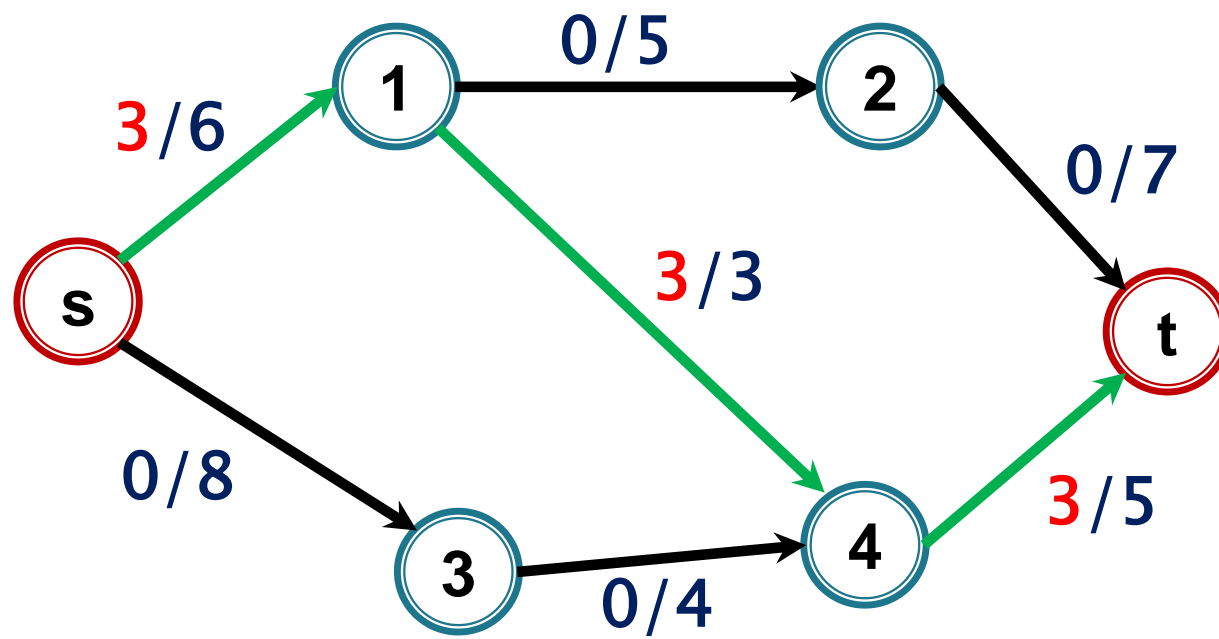


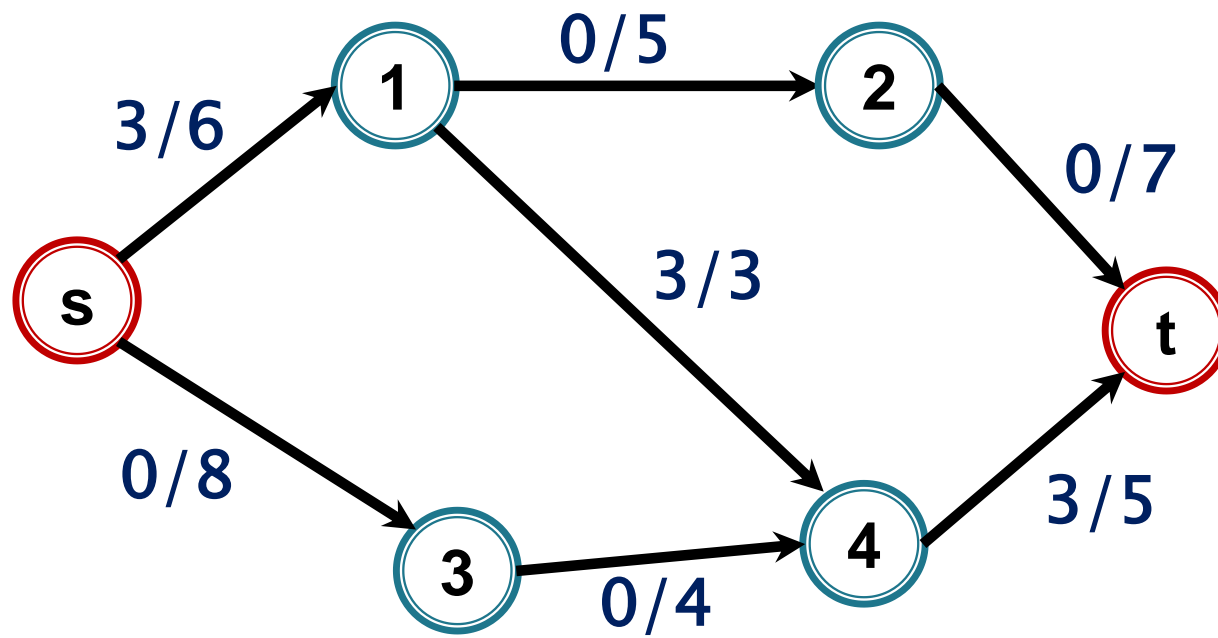
- singurele arce (“poduri”) care trec din regiunea lui s în cea a lui t nu mai pot fi folosite pentru a trimite flux (au fluxul = capacitatea) \Rightarrow fluxul este maxim
- s - t tăietură

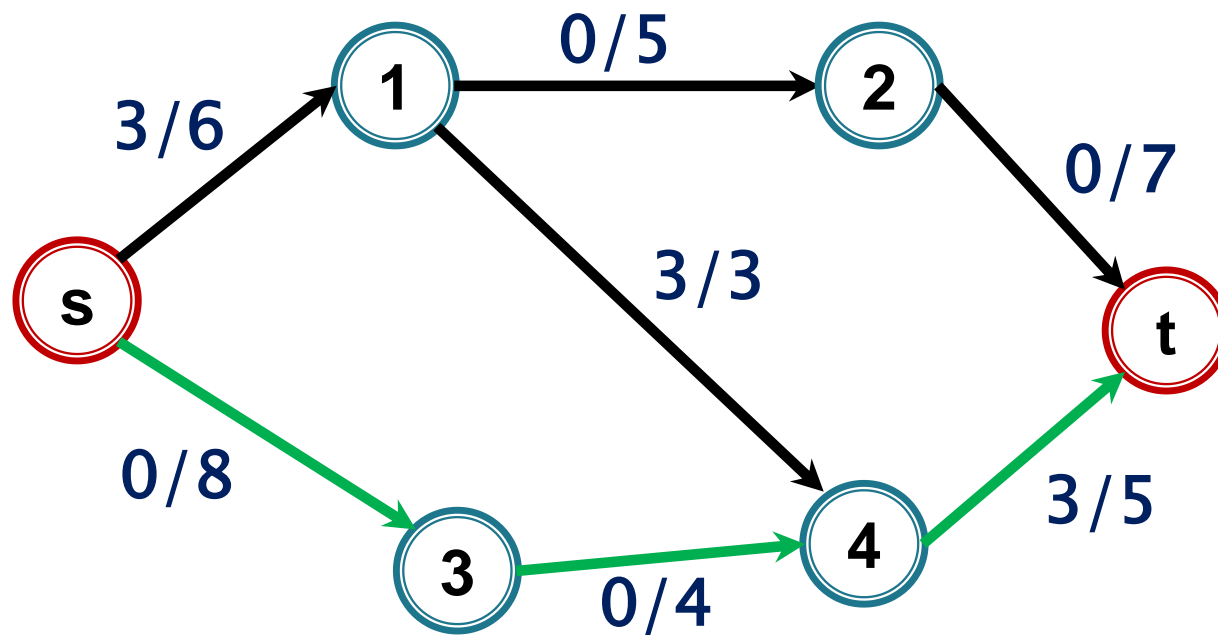
Alt exemplu

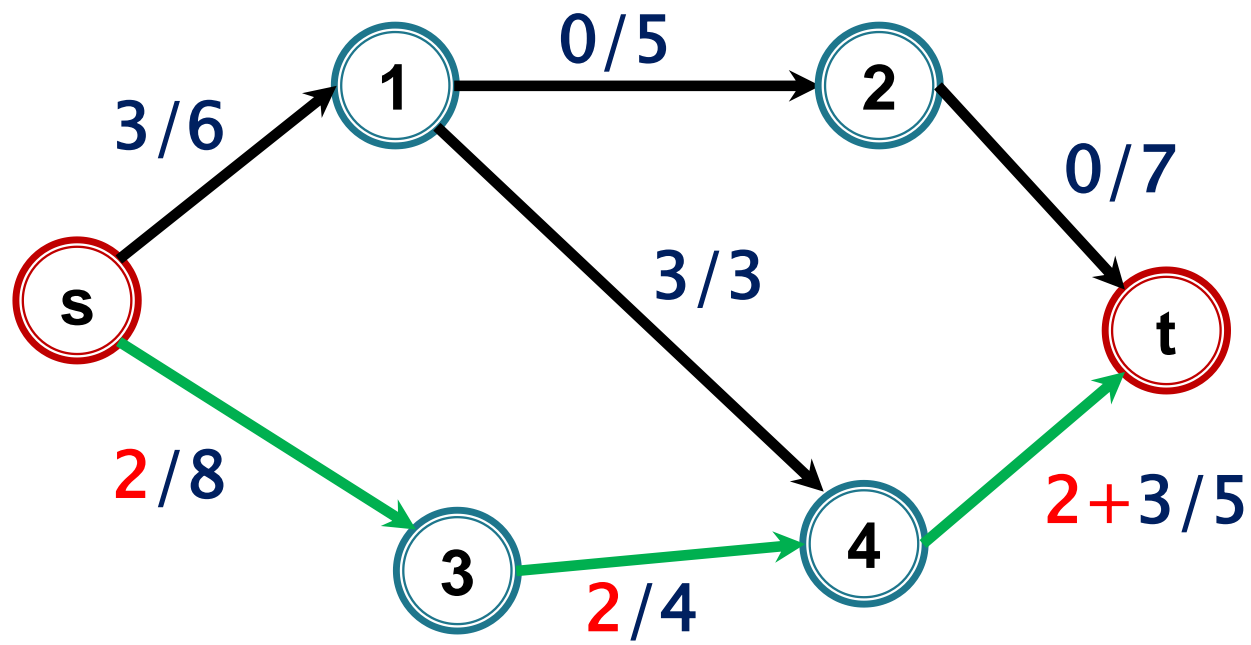


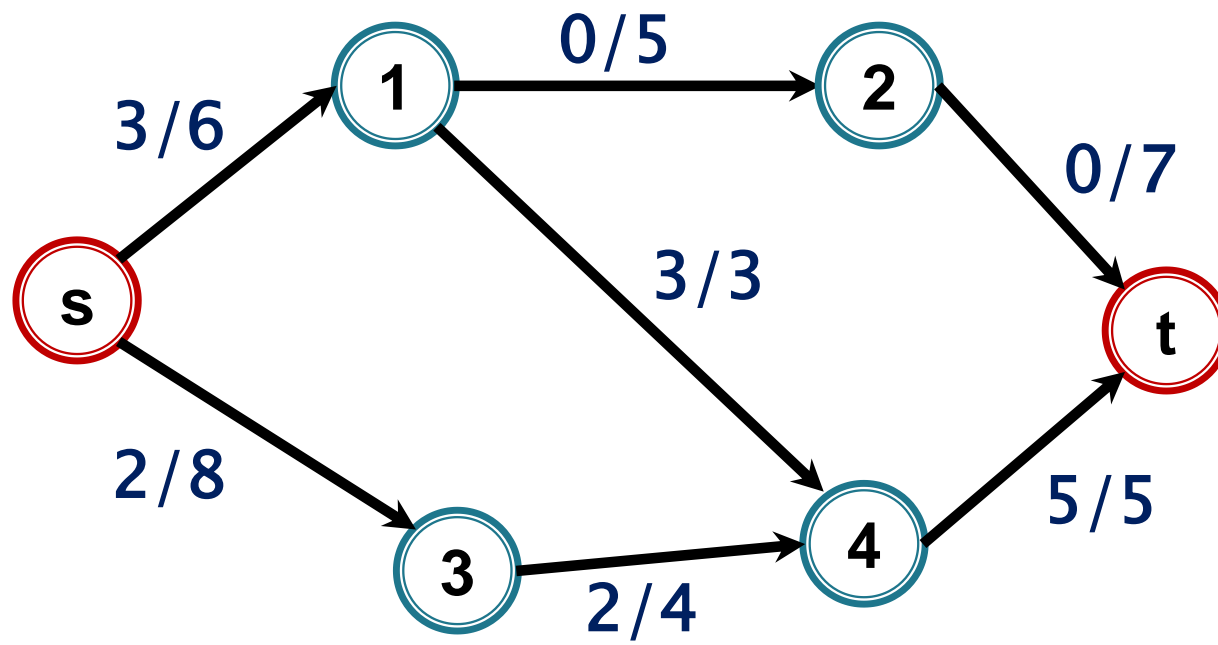


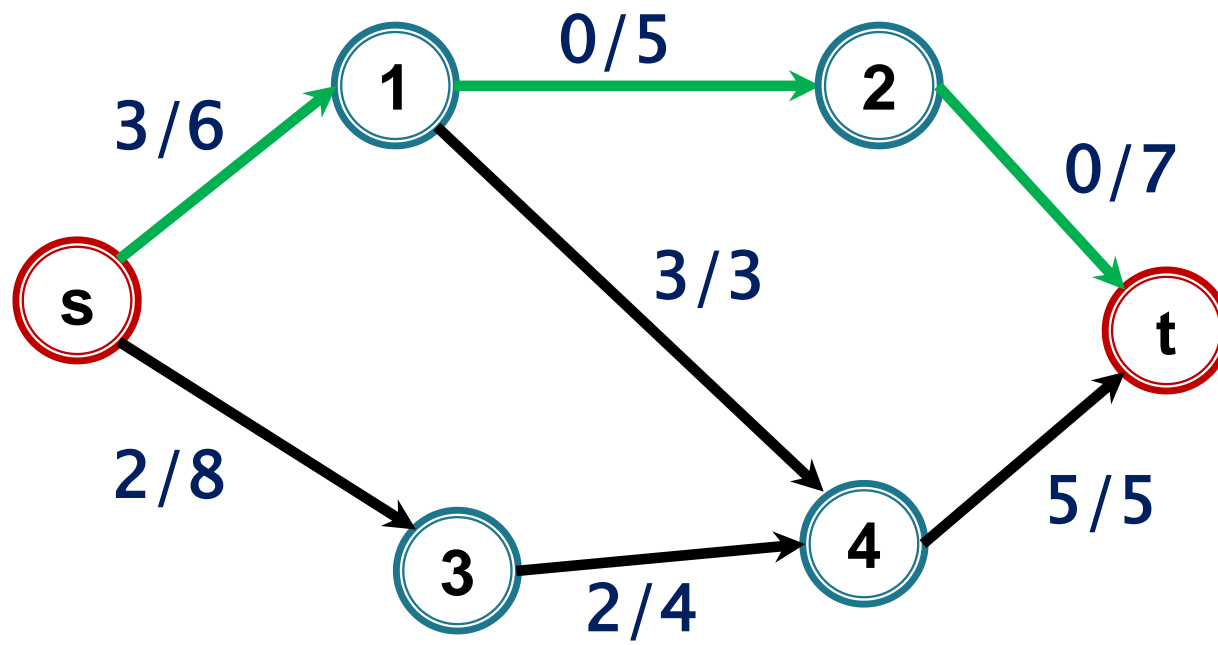


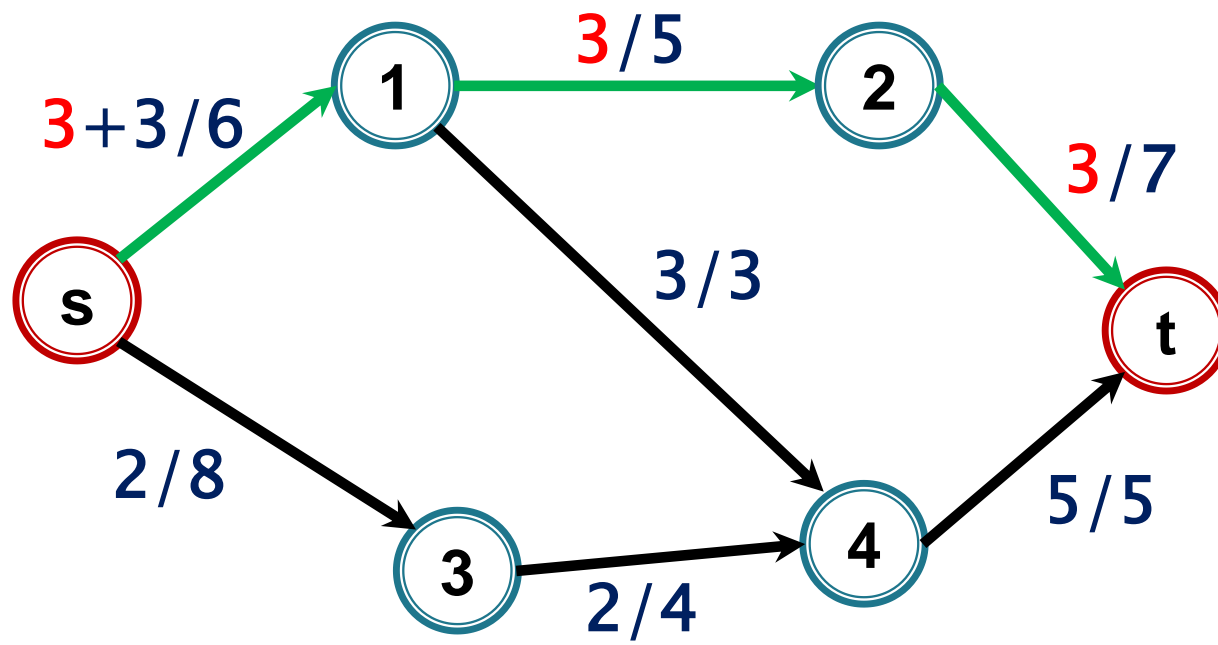


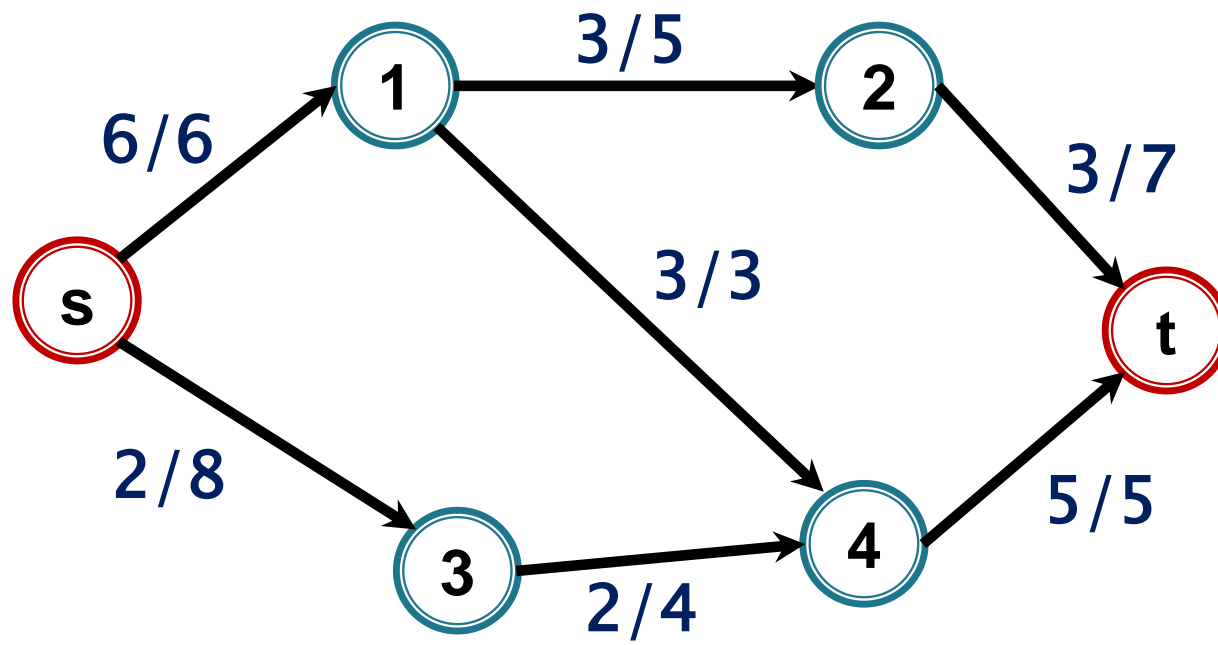


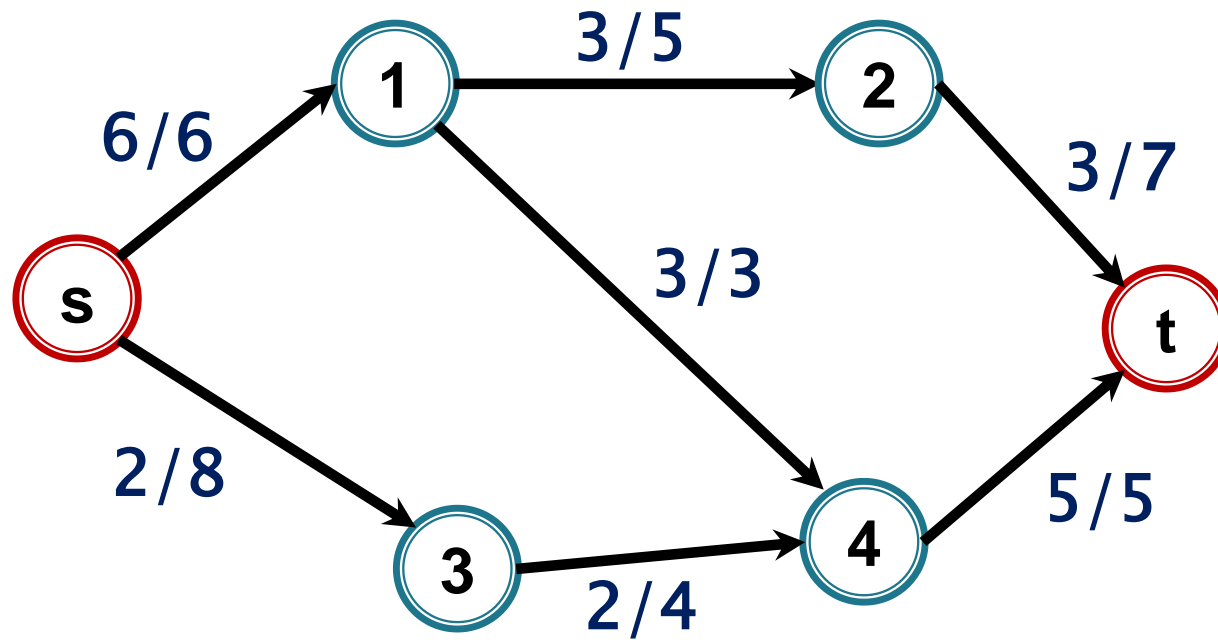








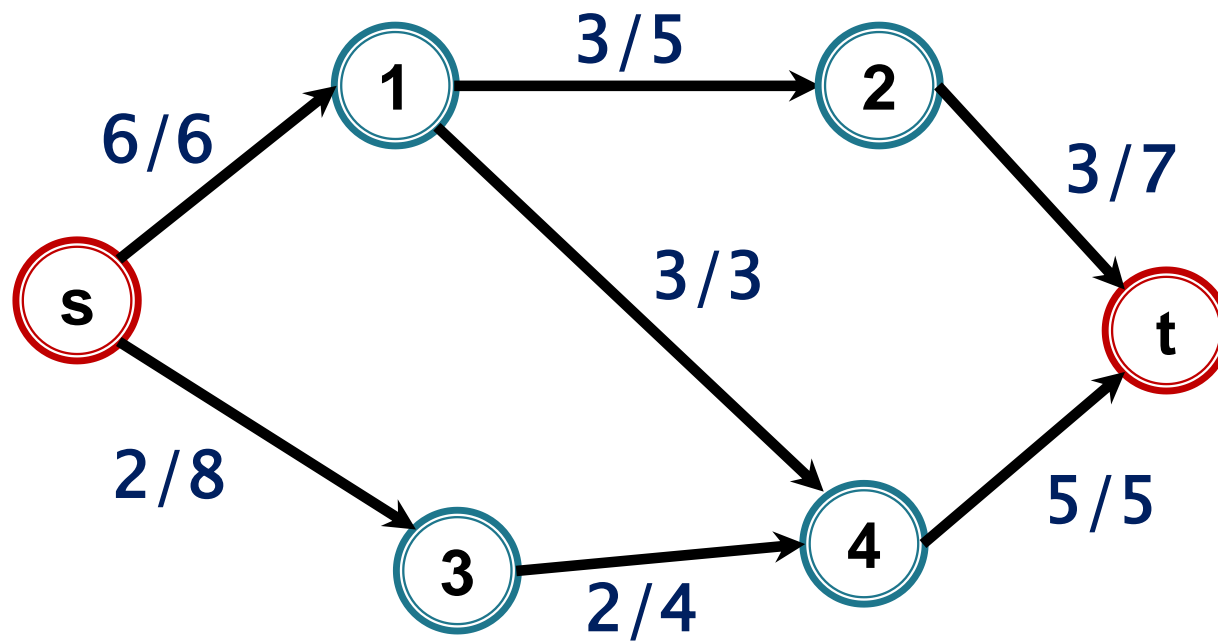




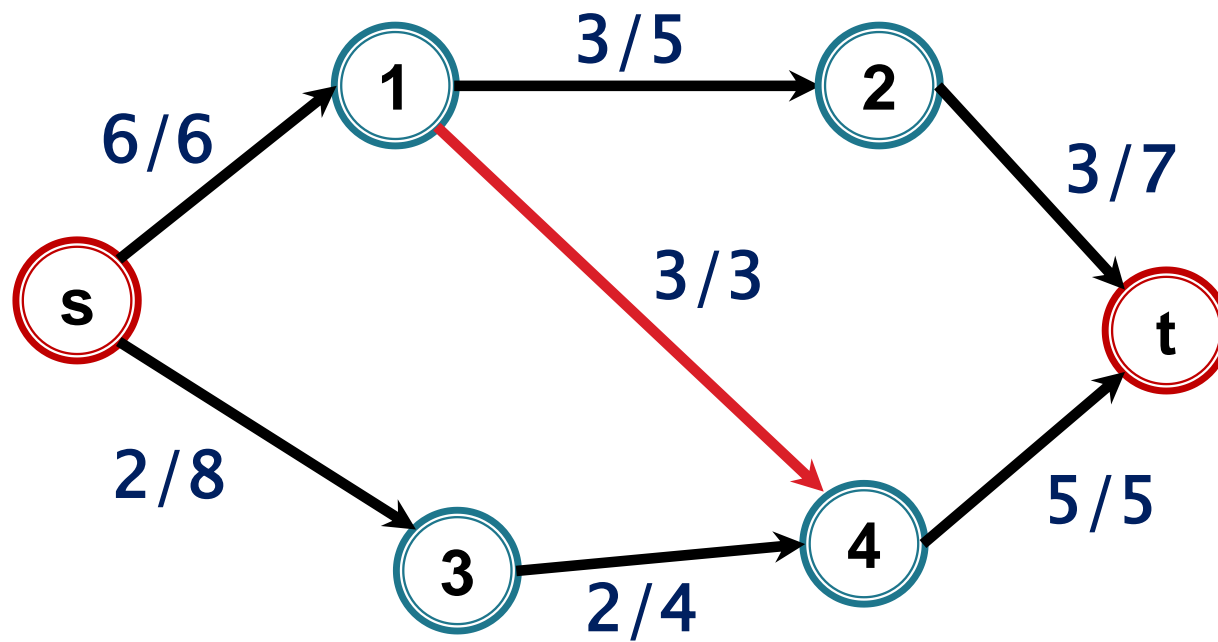
Nu mai există drumuri de la s la t pe care putem crește fluxul



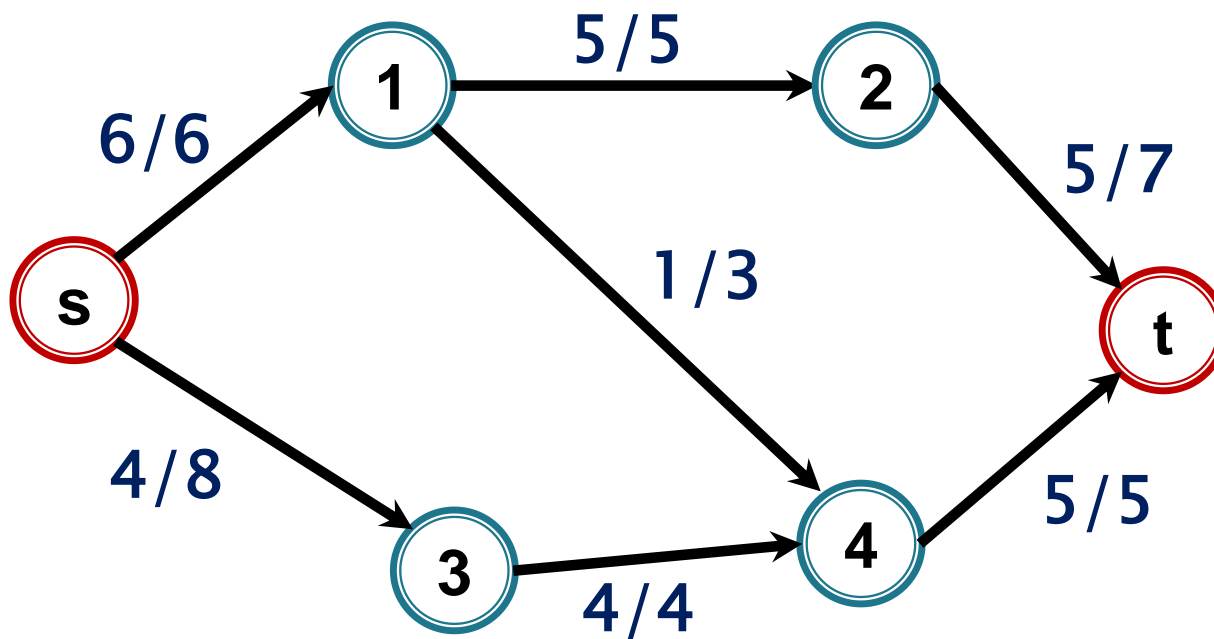
Este maxim fluxul?



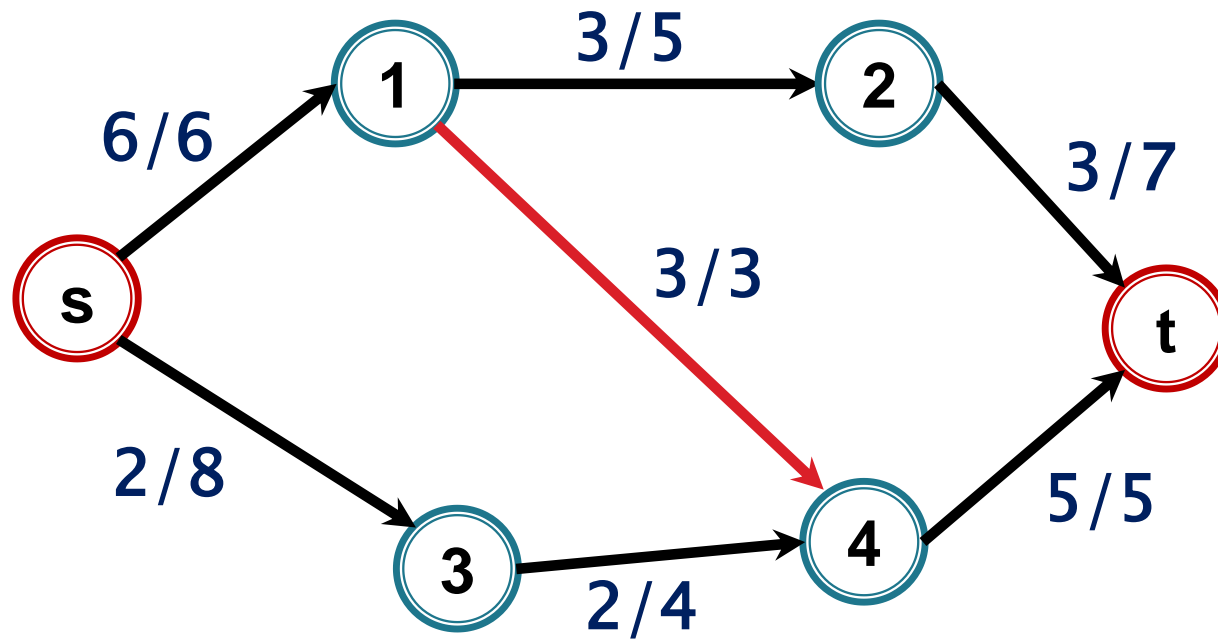
Nu este cantitatea maximă pe care o putem trimite, am trimis greșit pe arcul (1,4) (pe drumul [s, 1, 4, t])



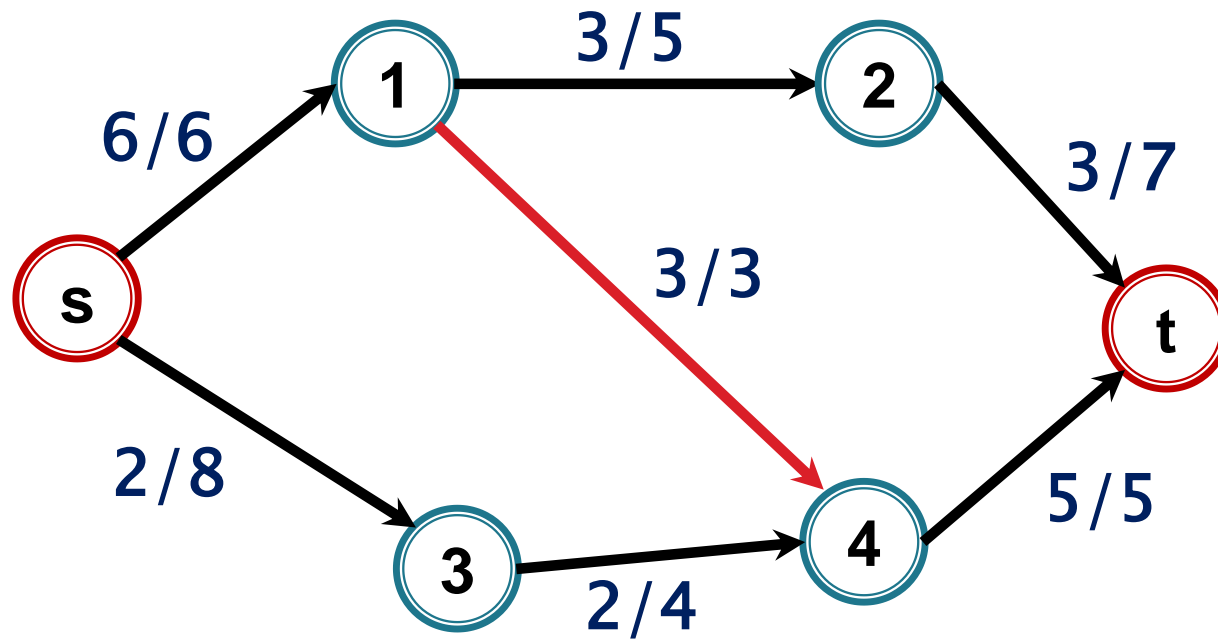
fluxul
obținut



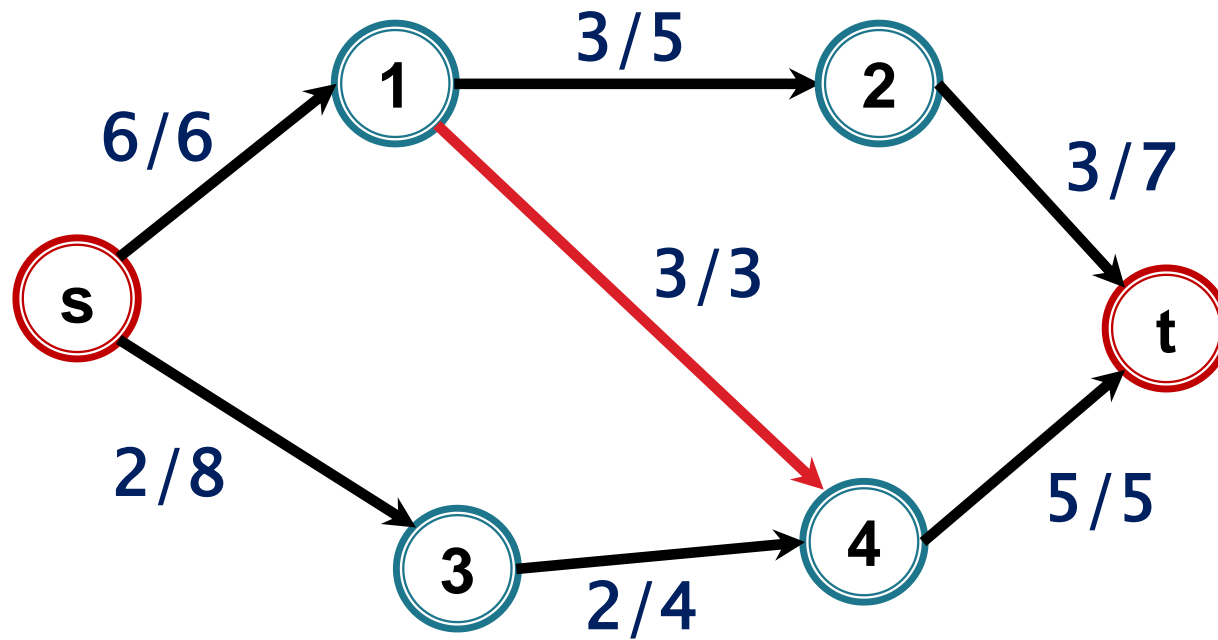
un flux
"mai mare"



Trebuie să putem **corecta** (să trimitem flux înapoi pe un arc, pentru a fi direcționat prin alte arce către destinație)

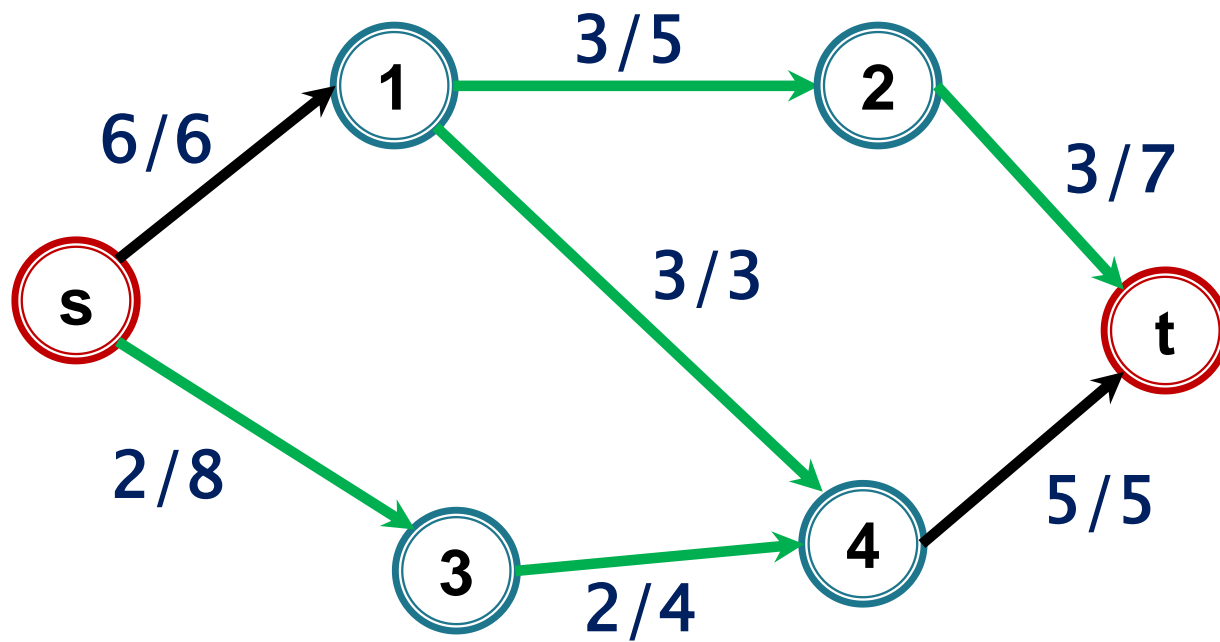


- Trimitem unități de flux înapoi pe arcul (1,4)

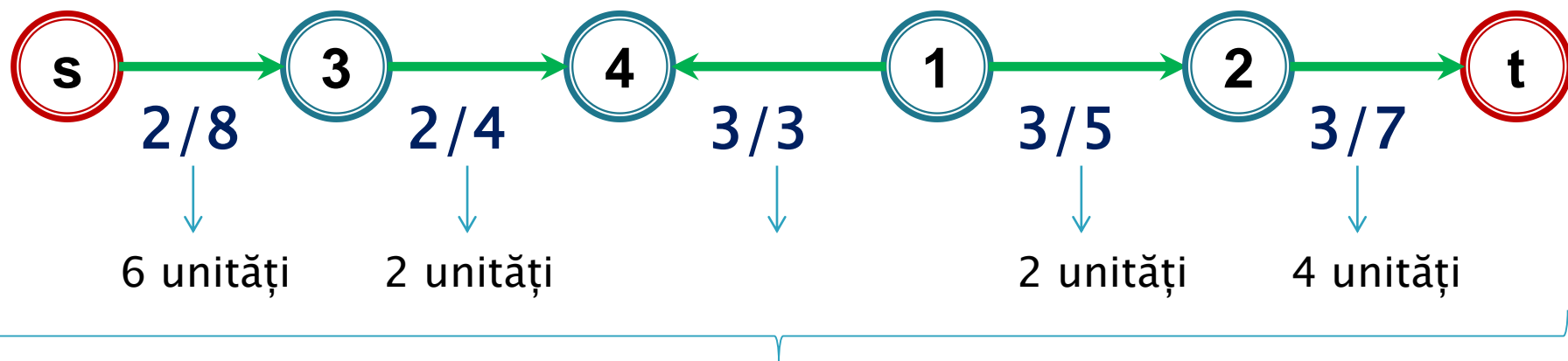
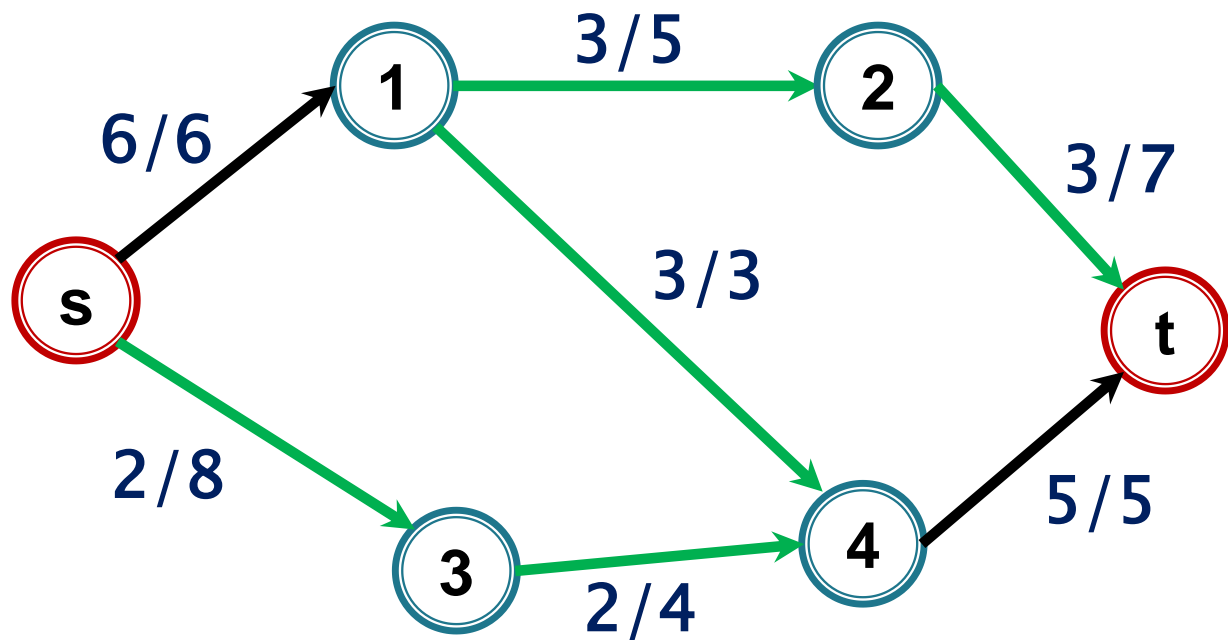


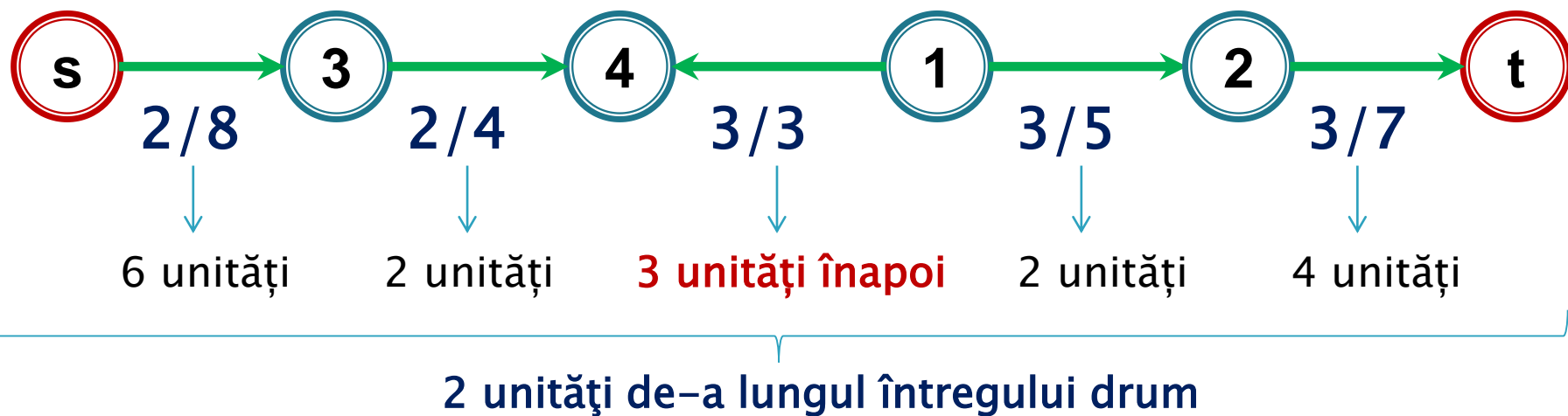
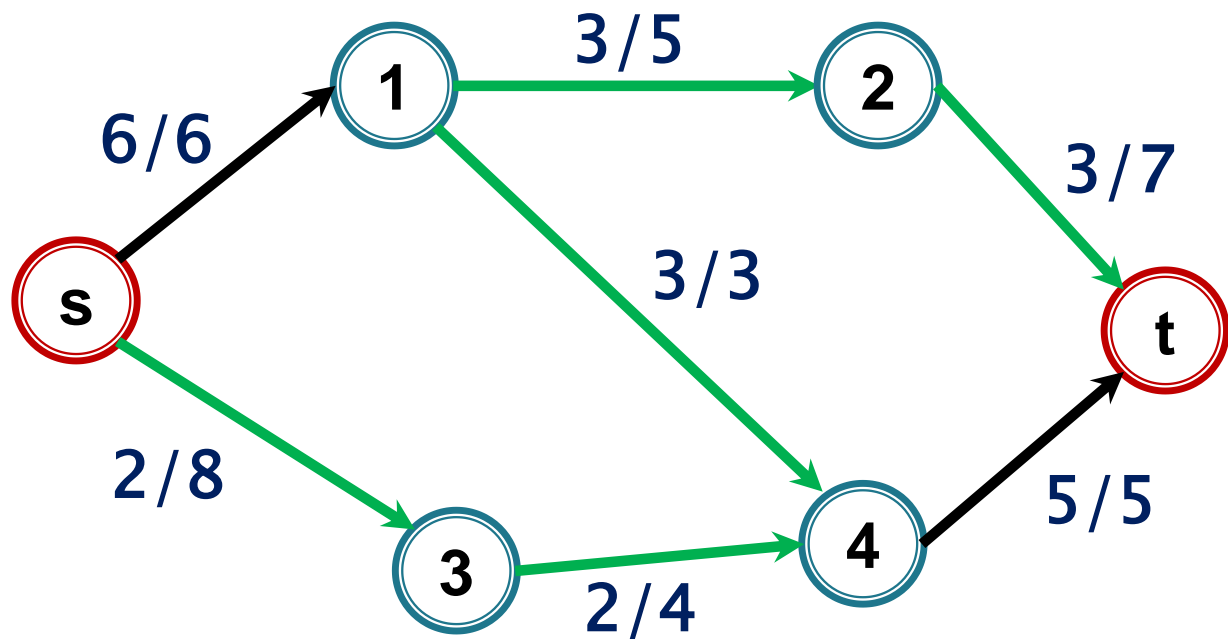
- Trimitem unități de flux înapoi pe arcul (1,4)
- Corecția trebuie făcută pe un lanț de la s la t, nu doar pe un arc, altfel fluxul (marfa) va rămâne într-un vârf intermediar

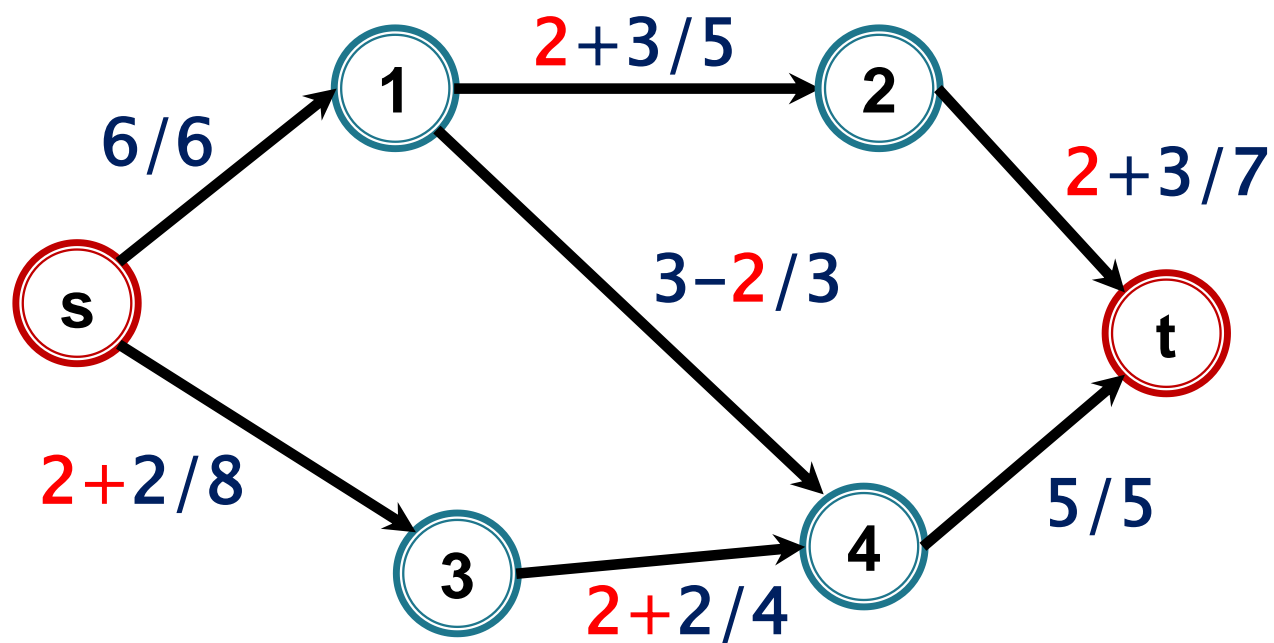
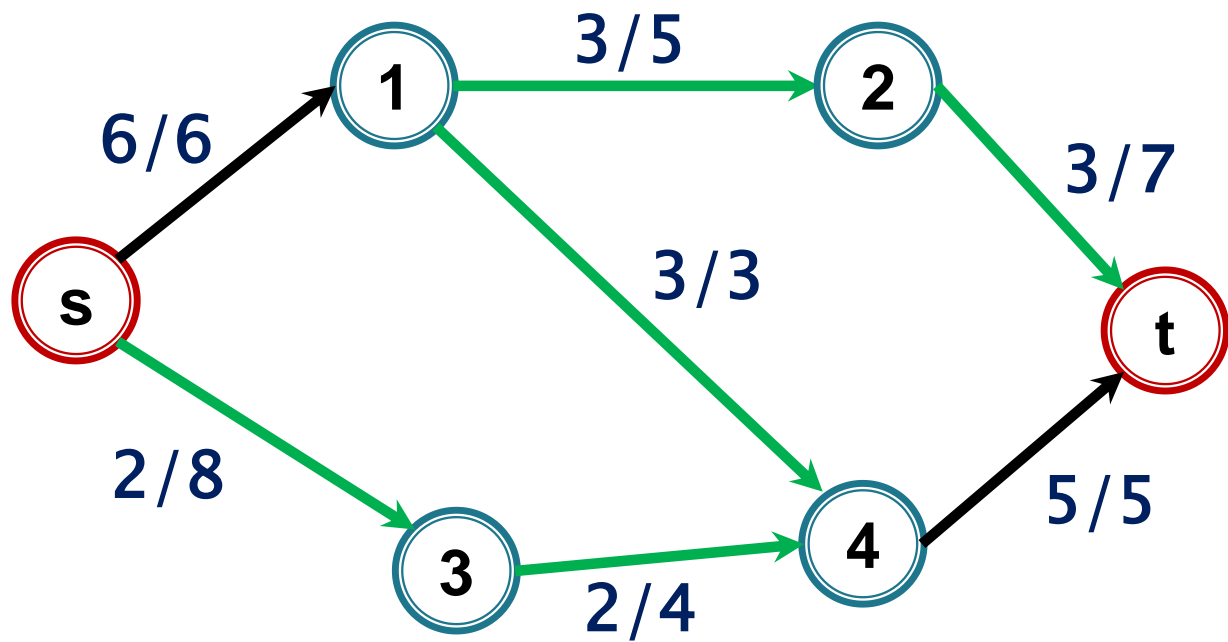
Determinăm un **LANȚ** (nu drum) de la s la t pe care putem modifica fluxul

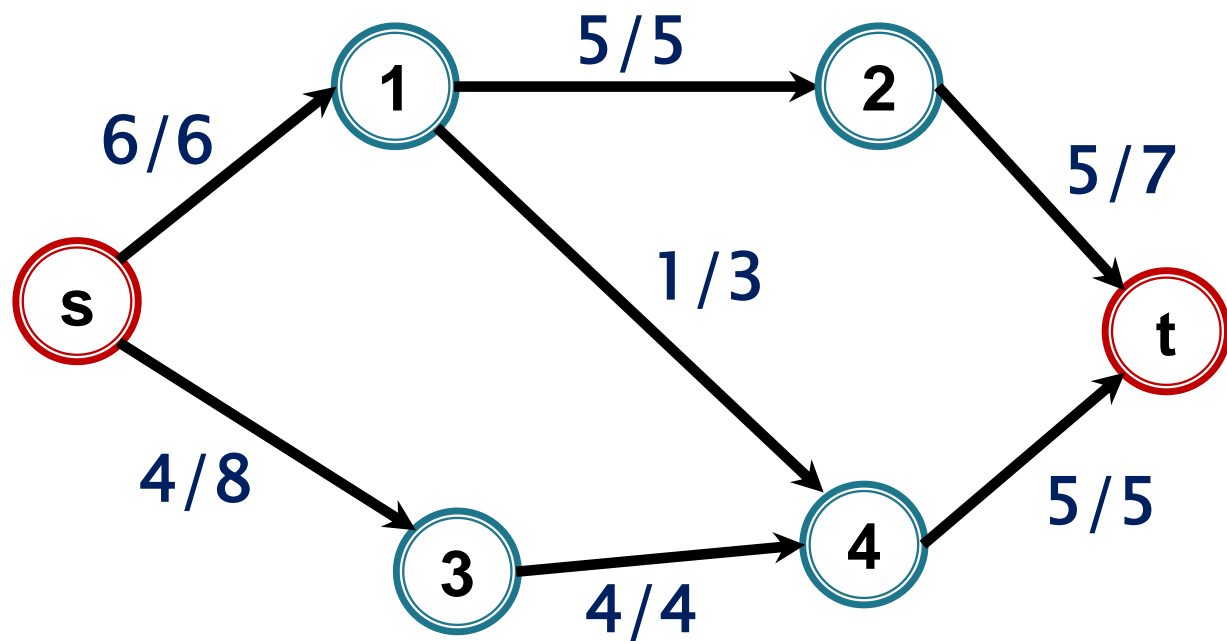
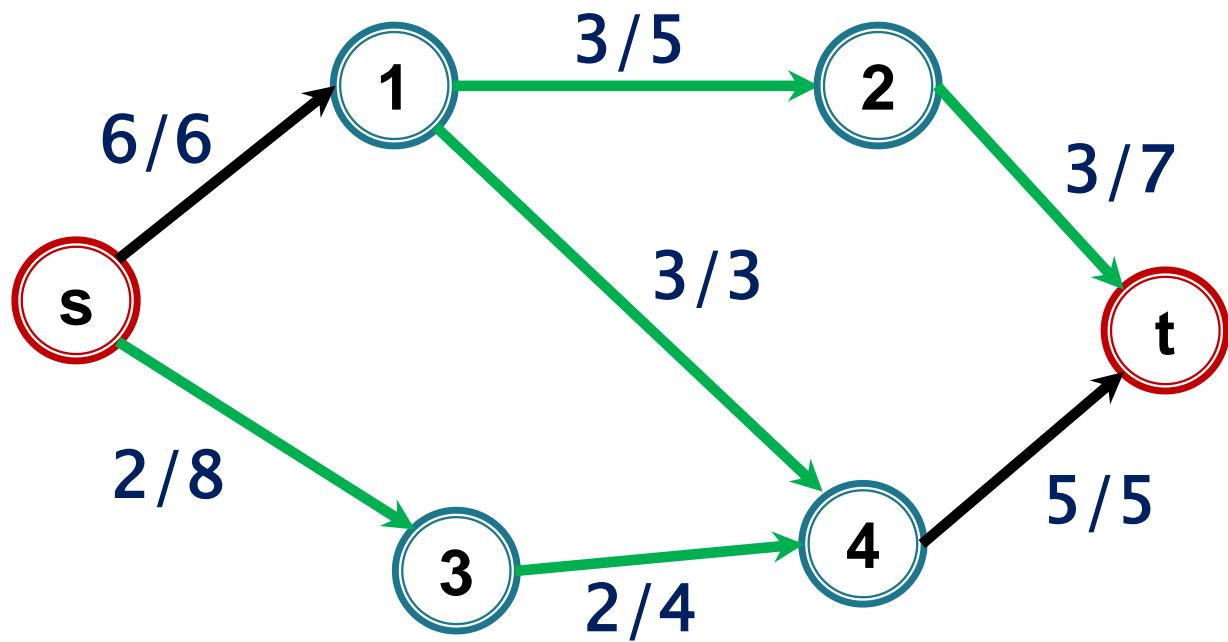


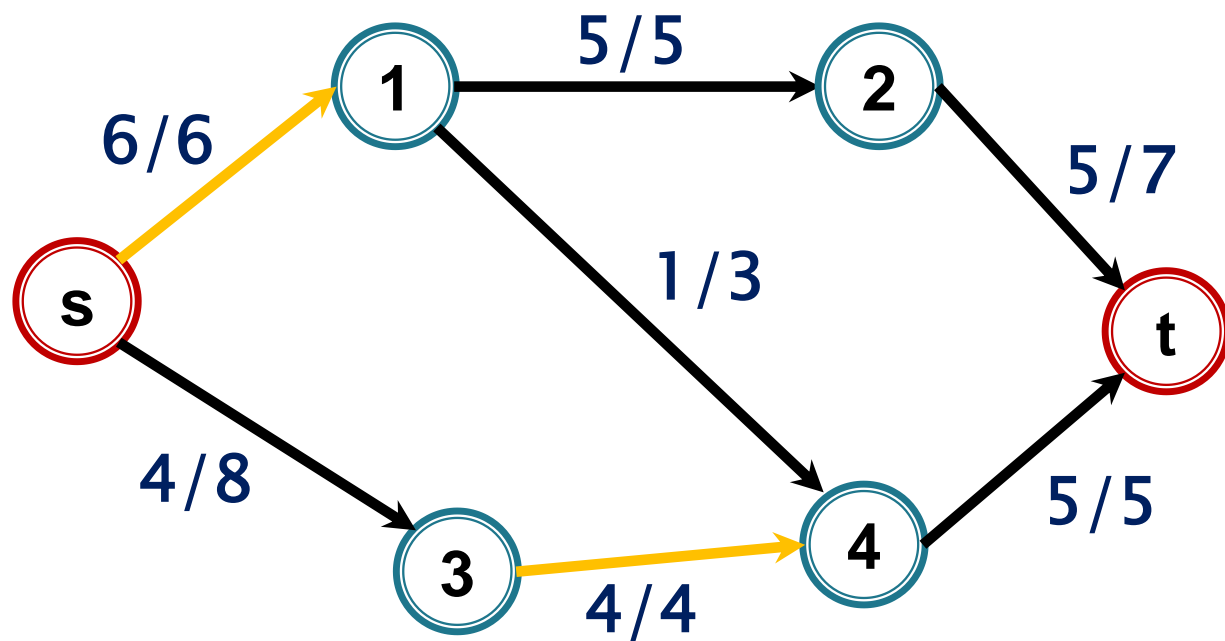
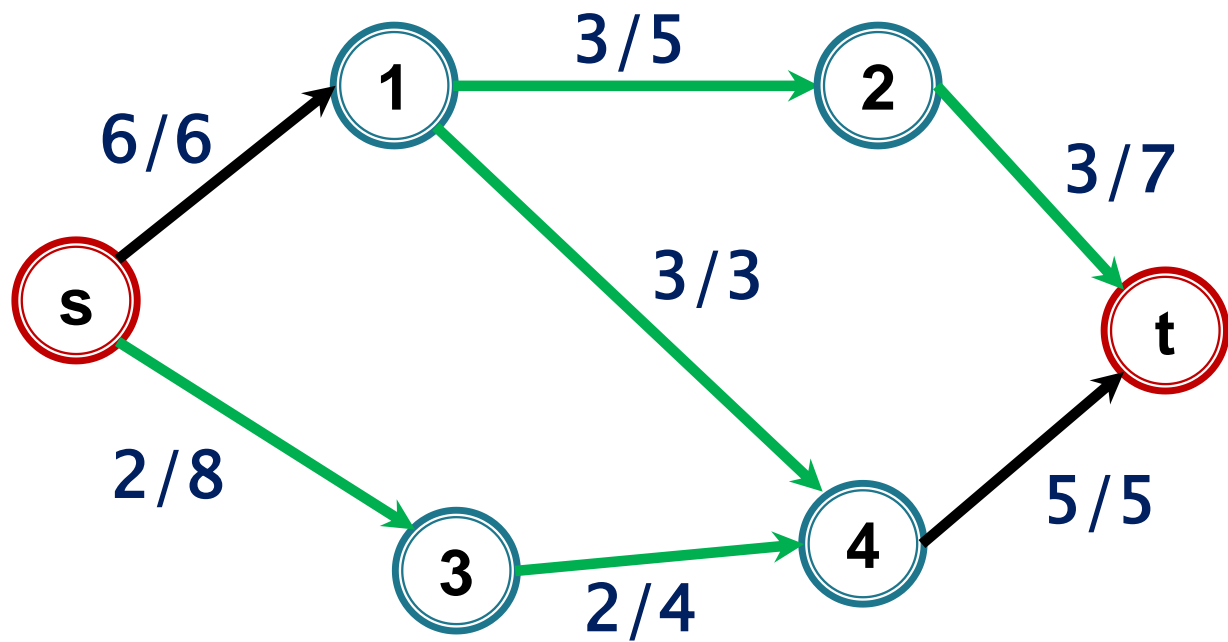
Cu cât putem modifica fluxul pe acest lanț?











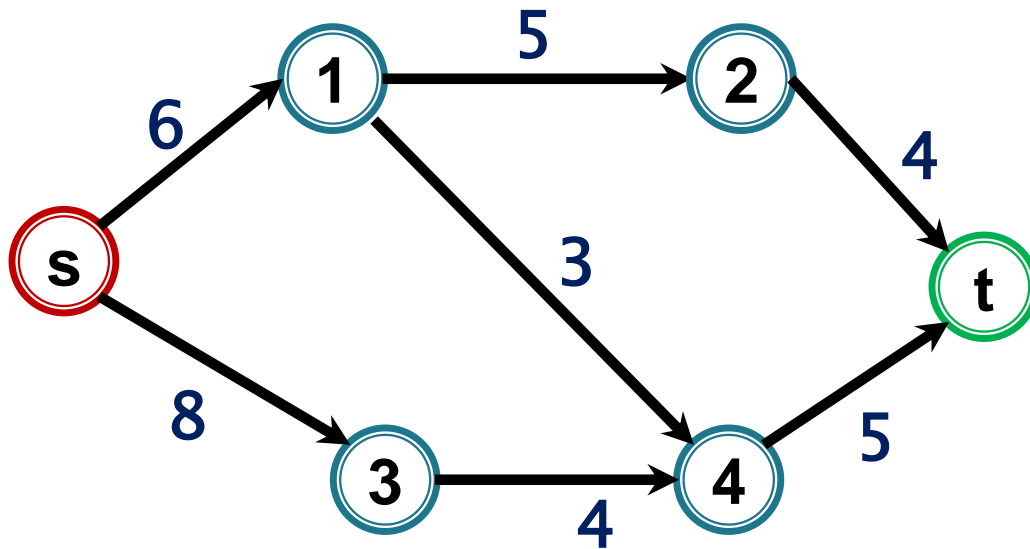
Definiții

Fluxuri în rețele de transport

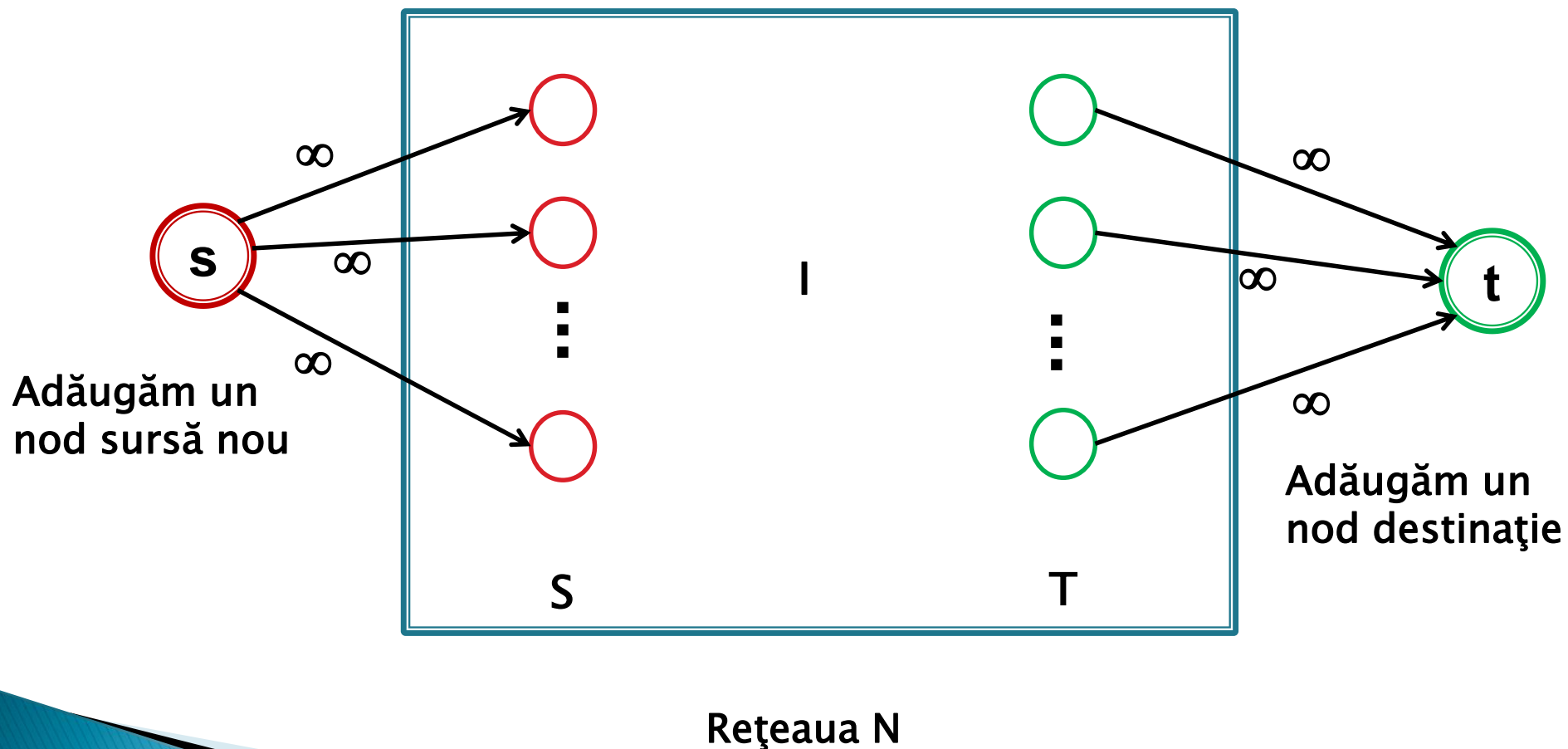
- ▶ **Rețea de transport** $N = (G, S, T, I, c)$ unde
 - $G = (V, E)$ – graf orientat cu
 - $V = S \cup I \cup T$
 - S, I, T disjuncte, nevide
 - S – mulțimea **surselor** (intrărilor)
 - T – mulțimea **destinațiilor** (ieșiri)
 - I – mulțimea vârfurilor **intermediare**
 - $c : E \rightarrow \mathbb{N}$ funcția **capacitate** (cantitatea maximă care poate fi transportată prin fiecare arc)

► Ipoteze pentru rețeaua N

- $S = \{s\}$ – o singură sursă
- $T = \{t\}$ – o singură destinație
- $d^-(s) = 0$ – în sursă nu intră arce
- $d^+(t) = 0$ – din destinație nu ies arce



- **Ipotezele nu sunt restrictive**, orice rețea poate fi transformată într-o rețea echivalentă de acest tip (din punct de vedere al valorii fluxului)



► Ipoteze pentru rețeaua N

- $S = \{s\}$ – o singură sursă
- $T = \{t\}$ – o singură destinație
- $d^-(s) = 0$ – în sursă nu intră arce
- $d^+(t) = 0$ – din destinație nu ies arce
- **orice vârf este accesibil din s**
- Notăm $N = (G, s, t, l, c)$

- ▶ Un **flux** într-o rețea de transport $N = (G, S, T, I, c)$ este o funcție $f : E \rightarrow \mathbb{N}$ cu proprietățile

- ▶ Un **flux** într-o rețea de transport $N = (G, S, T, l, c)$ este o funcție $f : E \rightarrow \mathbb{N}$ cu proprietățile

1) $0 \leq f(e) \leq c(e), \forall e \in E(G)$ *condiția de mărginire*

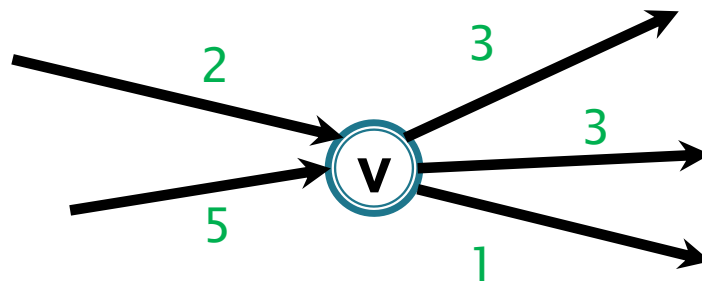
- Un **flux** într-o rețea de transport $N = (G, S, T, I, c)$ este o funcție $f : E \rightarrow \mathbb{N}$ cu proprietățile

1) $0 \leq f(e) \leq c(e), \forall e \in E(G)$ *condiția de mărginire*

2) Pentru orice vârf **intermediar** $v \in I$

$$\sum_{uv \in E} f(uv) = \sum_{vu \in E} f(vu) \quad \begin{array}{l} \textit{condiția de conservare} \\ \textit{a fluxului} \end{array}$$

(fluxul total care intră în v = fluxul total care iese din v)



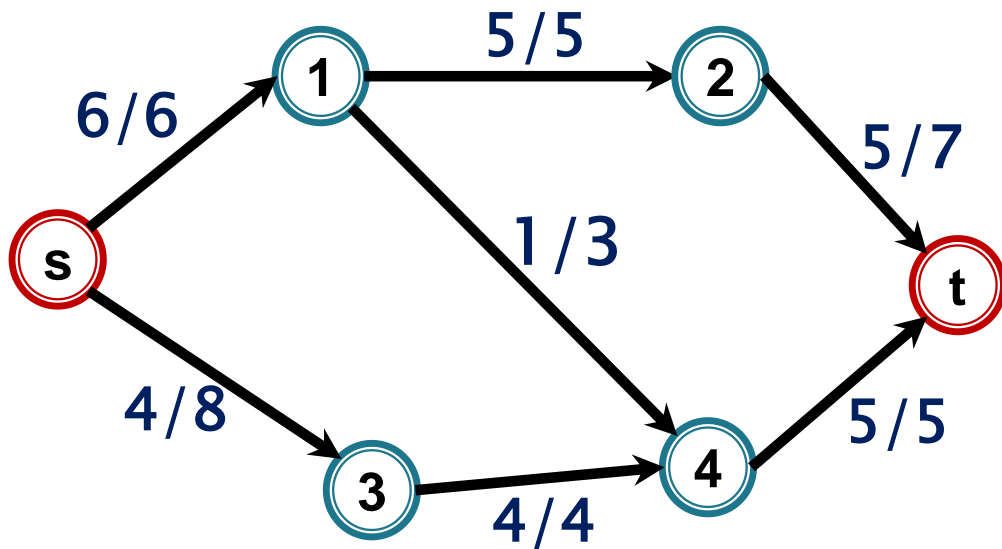
Notatii

$$\overline{X} = V - X, \text{ pentru } X \subseteq V$$

Notății

$$f^+(v) = \sum_{vu \in E} f(vu) = \text{fluxul care iese din } v$$

$$f^-(v) = \sum_{uv \in E} f(uv) = \text{fluxul care intră în } v$$

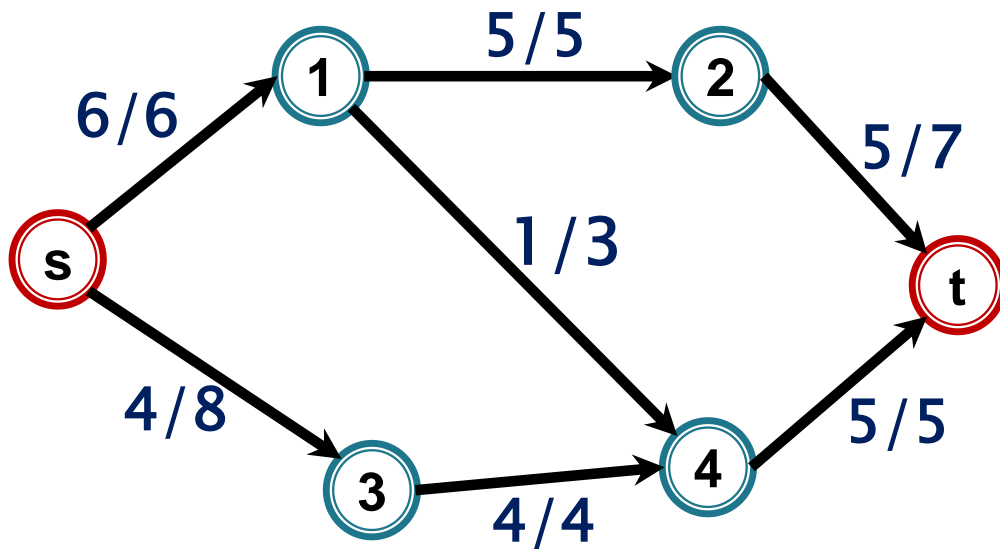


$$f^+(4) = f^-(4) = ?$$

Notății

$$f^+(v) = \sum_{vu \in E} f(vu) = \text{fluxul care iese din } v$$

$$f^-(v) = \sum_{uv \in E} f(uv) = \text{fluxul care intră în } v$$



$$f^+(4) = f^-(4) = 5$$

Notății

$$f^+(v) = \sum_{vu \in E} f(vu) = \text{fluxul care iese din } v$$

$$f^-(v) = \sum_{uv \in E} f(uv) = \text{fluxul care intră în } v$$

- ▶ Condiția de **conservare a fluxului** devine:

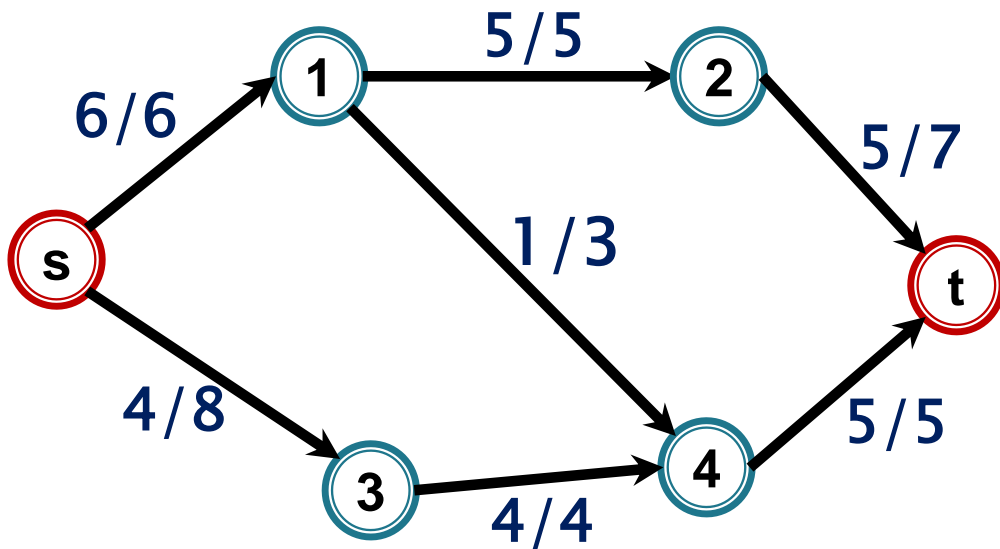
$$f^-(v) = f^+(v), \forall v \in I$$

Notății

- ▶ Pentru $X, Y \subseteq V$ disjuncte

$$f(X, Y) = \sum_{\substack{uv \in E \\ u \in X, v \in Y}} f(uv) = \text{fluxul de la } X \text{ la } Y$$

(pe arcele care ies din X către Y)



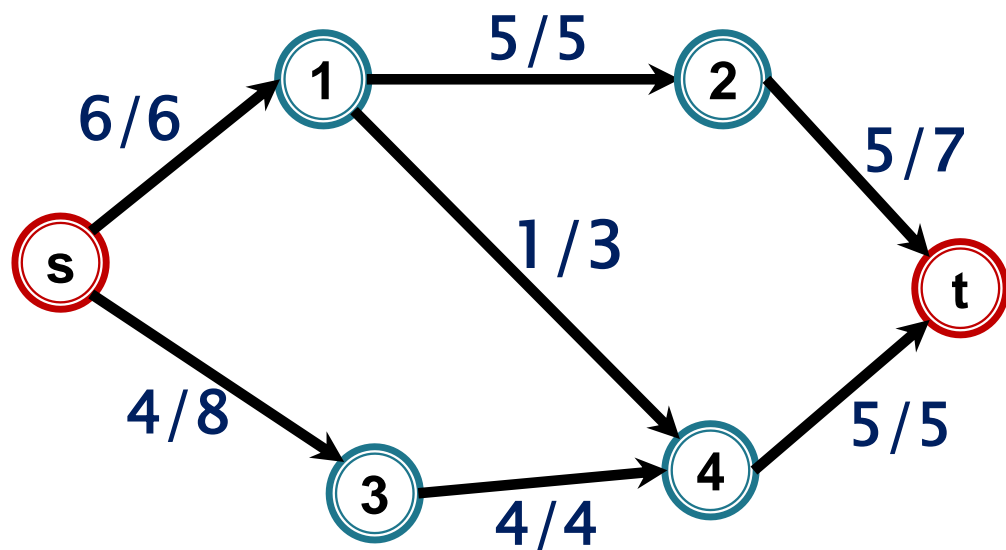
$$f(\{s, 1, 3\}, \{2, 4, t\}) = ?$$

Notății

- ▶ Pentru $X, Y \subseteq V$

$$f(X, Y) = \sum_{\substack{uv \in E \\ u \in X, v \in Y}} f(uv) = \text{fluxul de la } X \text{ la } Y$$

(pe arcele care ies din X către Y)



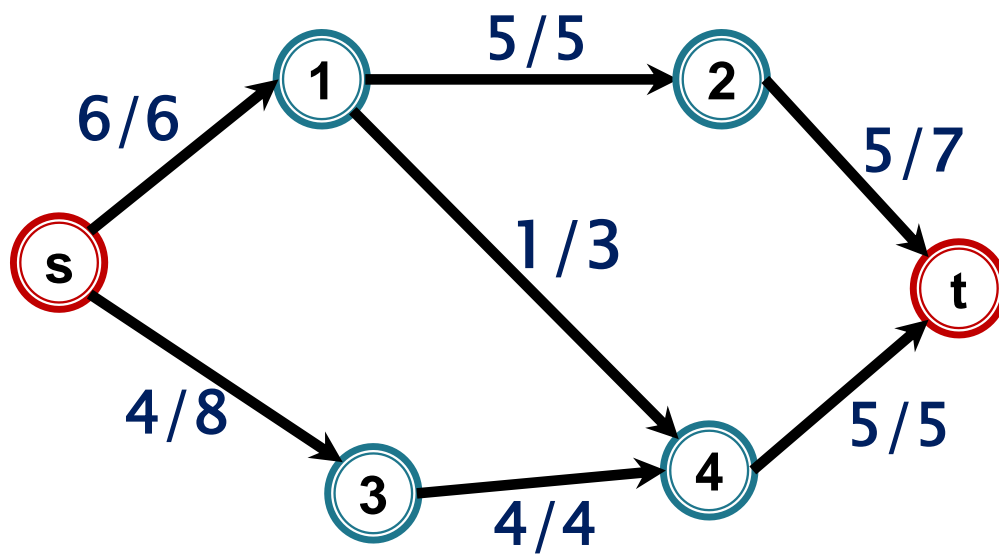
$$\begin{aligned} f(\{s, 1, 3\}, \{2, 4, t\}) &= \\ &= f(1, 2) + f(1, 4) + f(3, 4) = \\ &= 10 \end{aligned}$$

Notatii

► Pentru $X \subseteq V$

$$f^+(X) = \sum_{\substack{uv \in E \\ u \in X, v \notin X}} f(uv) = \text{fluxul care iese din } X \\ \text{(din vârfurile din } X)$$

$$f^-(X) = \sum_{\substack{vu \in E \\ u \in X, v \notin X}} f(vu)$$



$$f^+(\{s, 1, 3\}) = ?$$

Notății

► Pentru $X \subseteq V$

$$f^+(X) = \sum_{\substack{uv \in E \\ u \in X, v \notin X}} f(uv) = \text{fluxul care iese din } X \\ \text{(din vârfurile din } X)$$

$$f^-(X) = \sum_{\substack{vu \in E \\ u \in X, v \notin X}} f(vu)$$

Avem

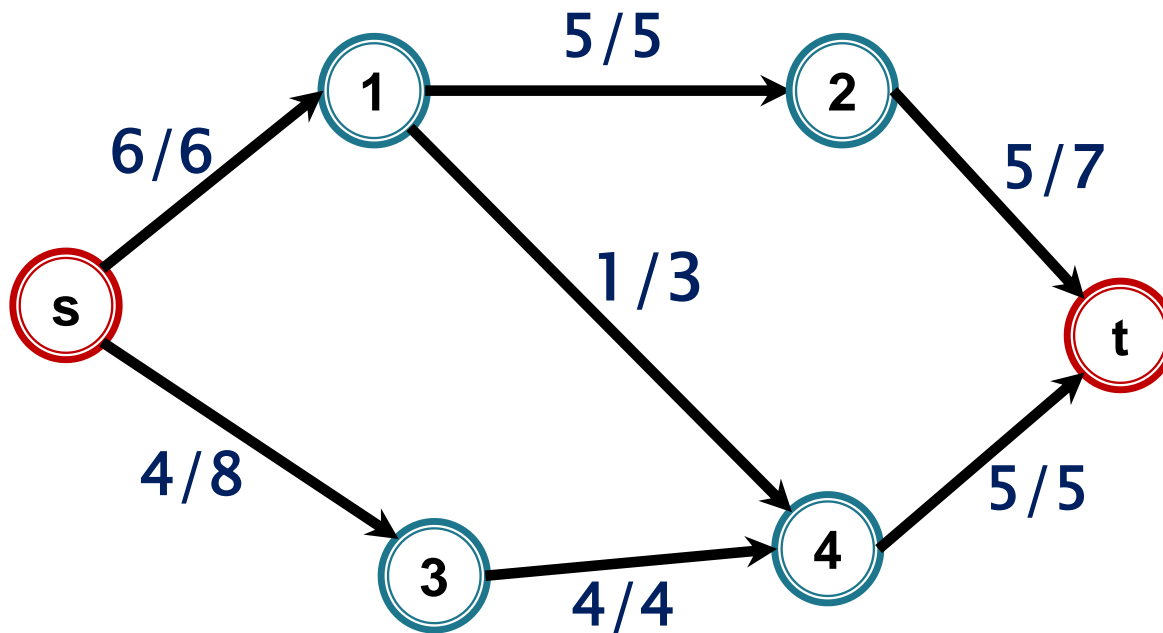
$$f^+(X) = f(X, V - X) = f(X, \overline{X})$$

$$f^-(X) = f(\overline{X}, X)$$

- ▶ În general, pentru orice funcție $g : E \rightarrow \mathbb{N}$ vom folosi notații similare

- ▶ Valoarea fluxului f se definește ca fiind

$$val(f) = f^+(s) = \sum_{su \in E} f(su)$$



$val(f) = ?$

- ▶ Valoarea fluxului f se definește ca fiind

$$\text{val}(f) = f^+(s)$$

- ▶ Vom demonstra ulterior că are loc relația

$$\text{val}(f) = f^+(s) = f^-(t)$$

Problema fluxului maxim

- ▶ Fie N o rețea.

Un flux f^* se numește **flux maxim în N** dacă

$$val(f^*) = \max\{val(f) \mid f \text{ este flux în } N\}$$

Problema fluxului maxim

- ▶ Fie N o rețea.

Un flux f^* se numește **flux maxim în N** dacă

$$val(f^*) = \max\{val(f) \mid f \text{ este flux în } N\}$$

- ▶ **Observație:** Orice rețea admite cel puțin un flux, spre exemplu fluxul vid:

$$f(e) = 0, \forall e \in E$$

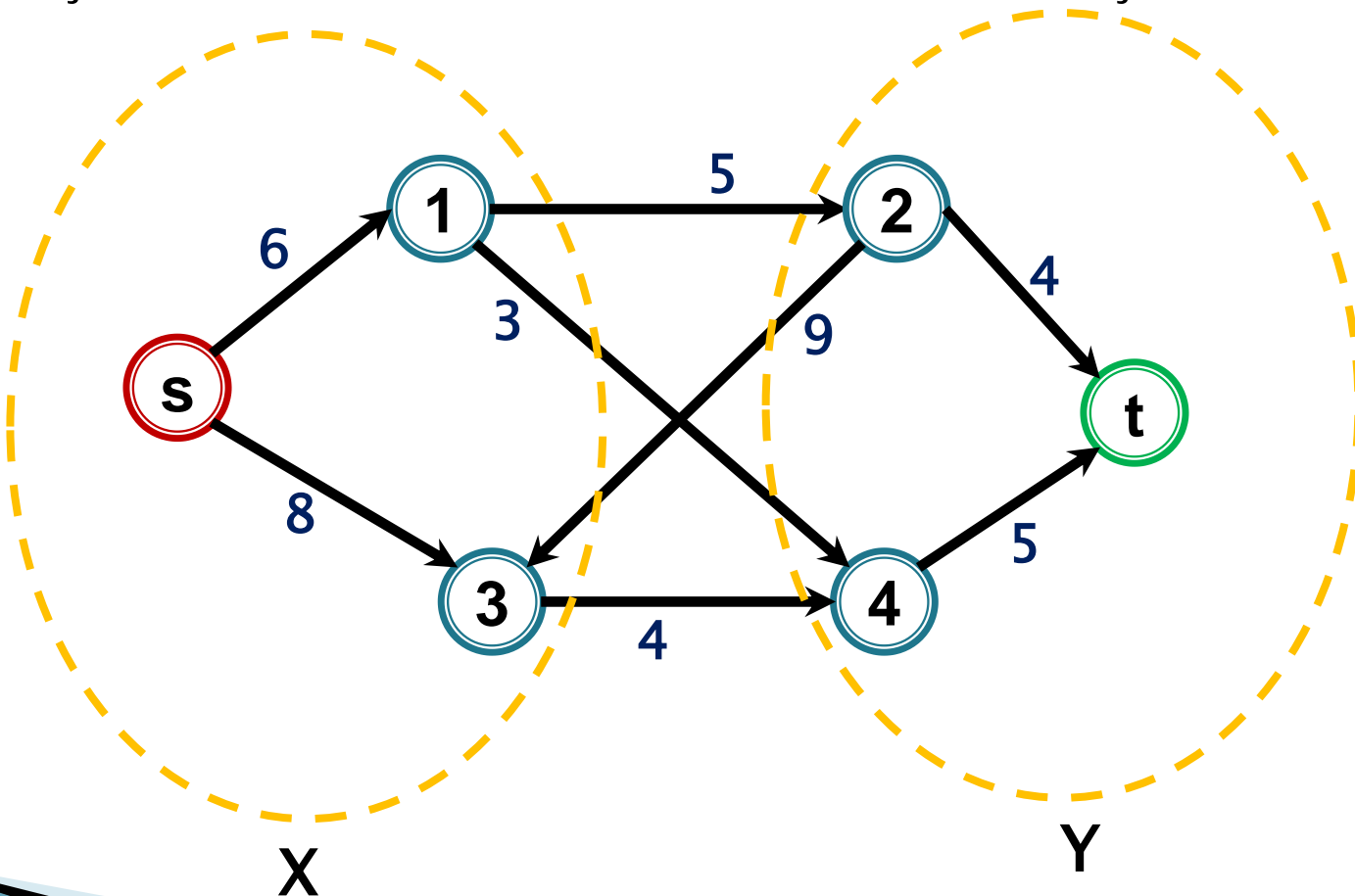
Problema fluxului maxim (MAX-FLOW)

- ▶ Fie N o rețea.

Să se determine f^* un **flux maxim** în N

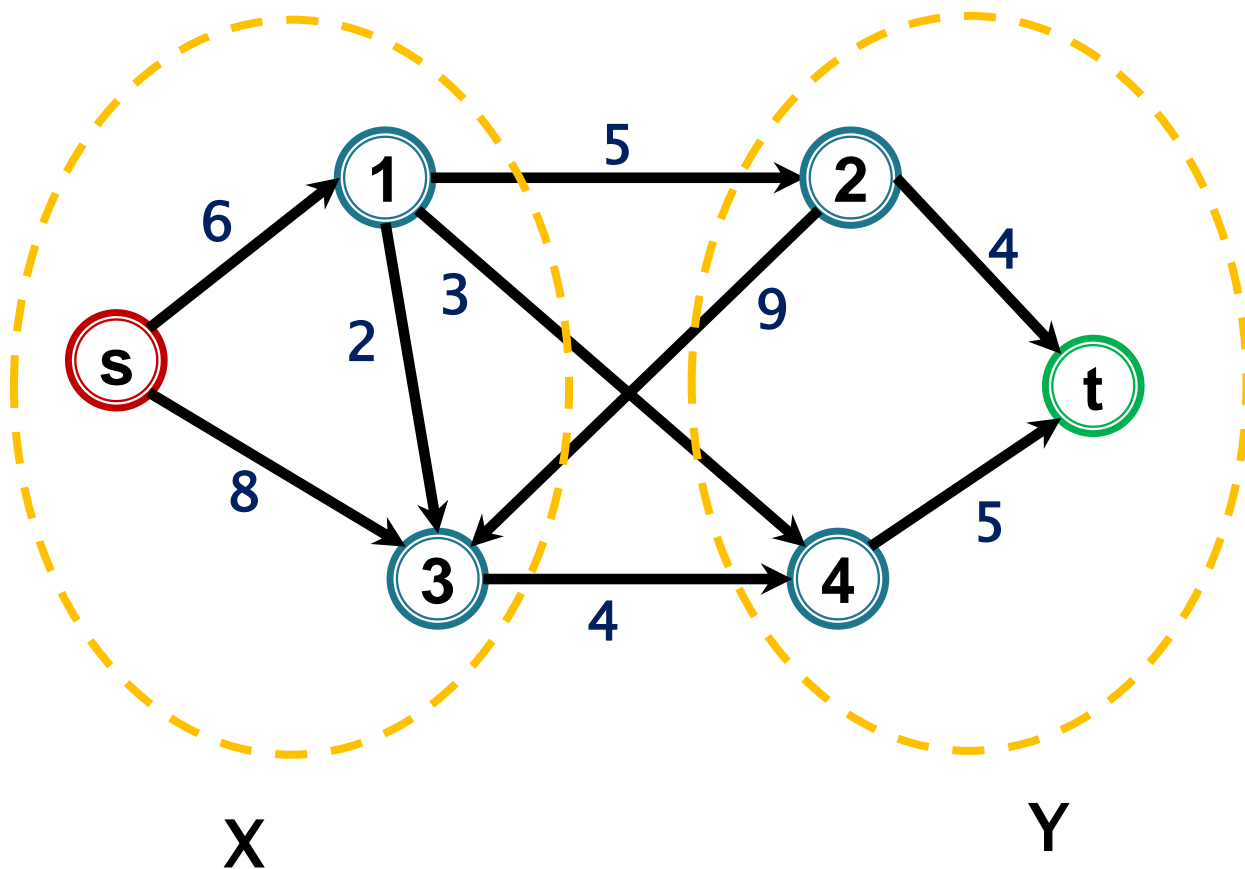
Fie $N = (G, \{s\}, \{t\}, l, c)$ o rețea

- ▶ O tăietură $K = (X, Y)$ în rețea este o (bi)partiție (X, Y) a mulțimii vârfurilor V astfel încât $s \in X$ și $t \in Y$



Fie $K = (X, Y)$ o tăietură

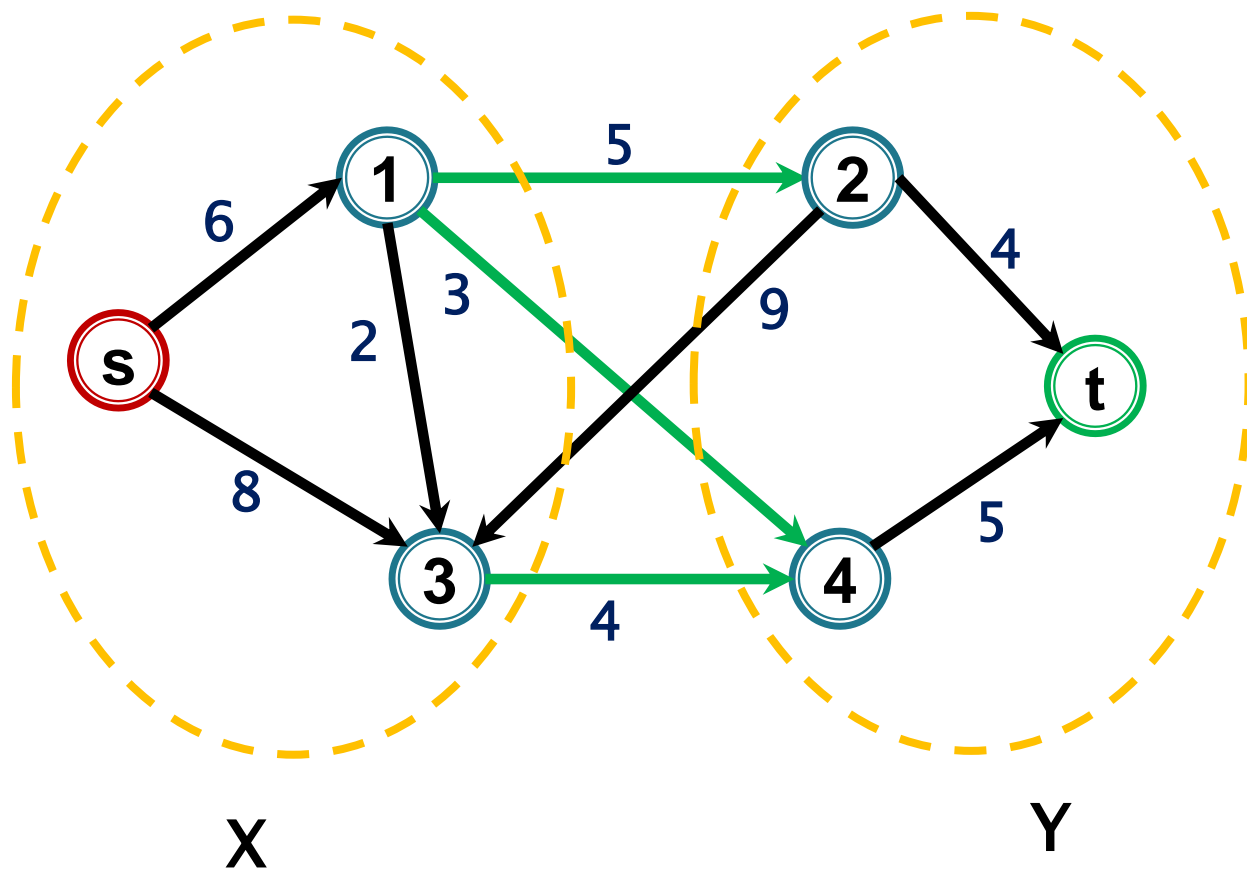
► Capacitatea tăieturii $K = (X, Y)$:



$$c(K) = c(X, Y) = \sum_{\substack{x \in X, y \in Y \\ xy \in E}} c(xy)$$

Fie $K = (X, Y)$ o tăietură

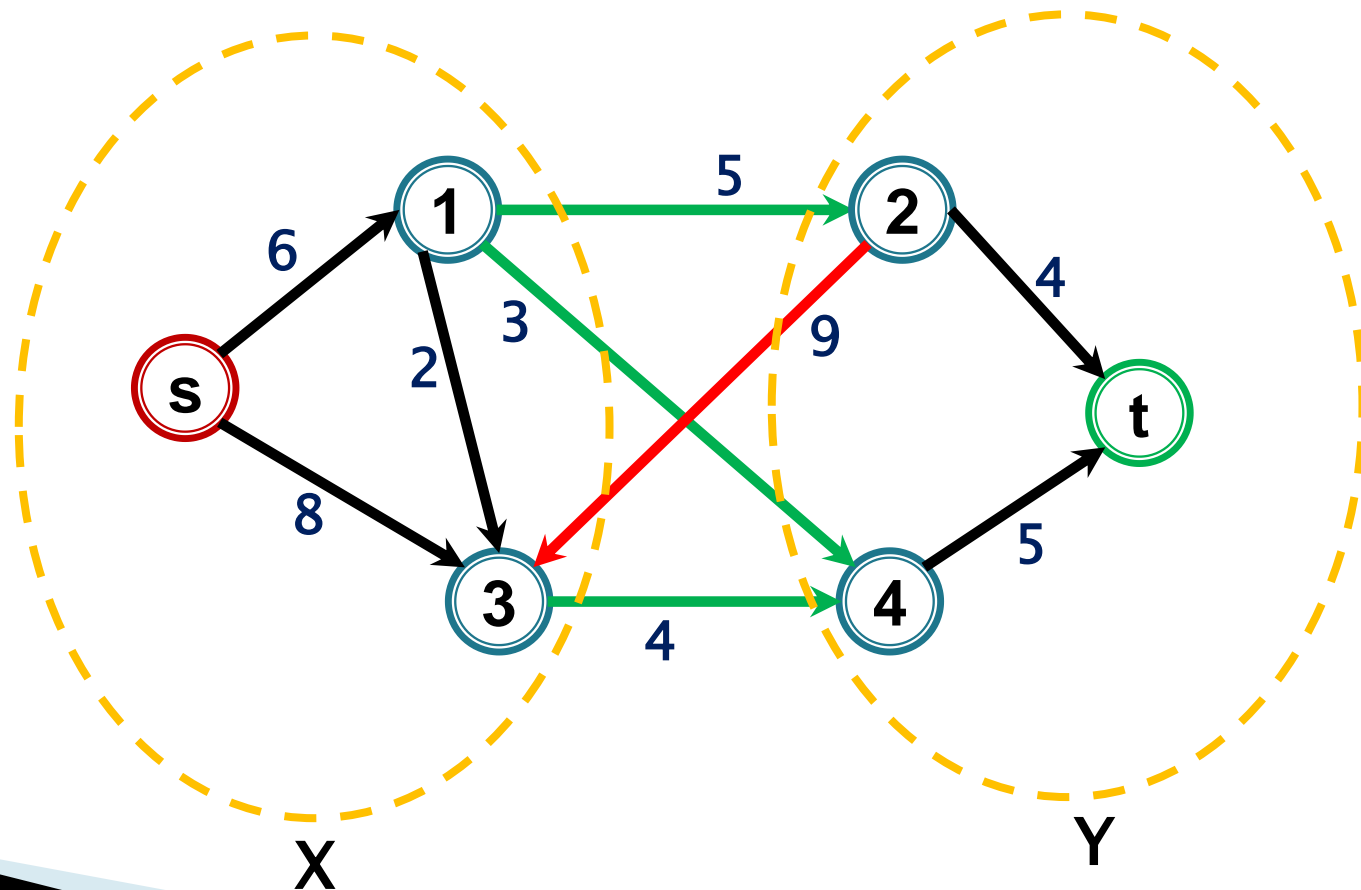
► Capacitatea tăieturii $K = (X, Y)$



$$c(K) = c(X, Y) = 5 + 3 + 4 = 12$$

Fie $K = (X, Y)$ o tăietură

- $xy \in E$ cu $x \in X, y \in Y$ = **arc direct** al lui K 
- $yx \in E$ cu $x \in X, y \in Y$ = **arc invers** al lui K 



Tăietură minimă

- ▶ Fie N o rețea.

O tăietură \tilde{K} se numește **tăietură minimă în N** dacă

$$c(\tilde{K}) = \min\{c(K) \mid K \text{ este tăietură în } N\}$$

Problema tăieturii minime (MIN-CUT)

- ▶ Fie N o rețea.

Să se determine K un **o tăietură minimă** în N

Tăietură minimă

- ▶ Vom demonstra că pentru orice flux f și orice tăietură K

$$val(f) \leq c(K)$$

- ▶ Dacă avem **egalitate** $\Rightarrow f$ flux maxim, K tăietură minimă

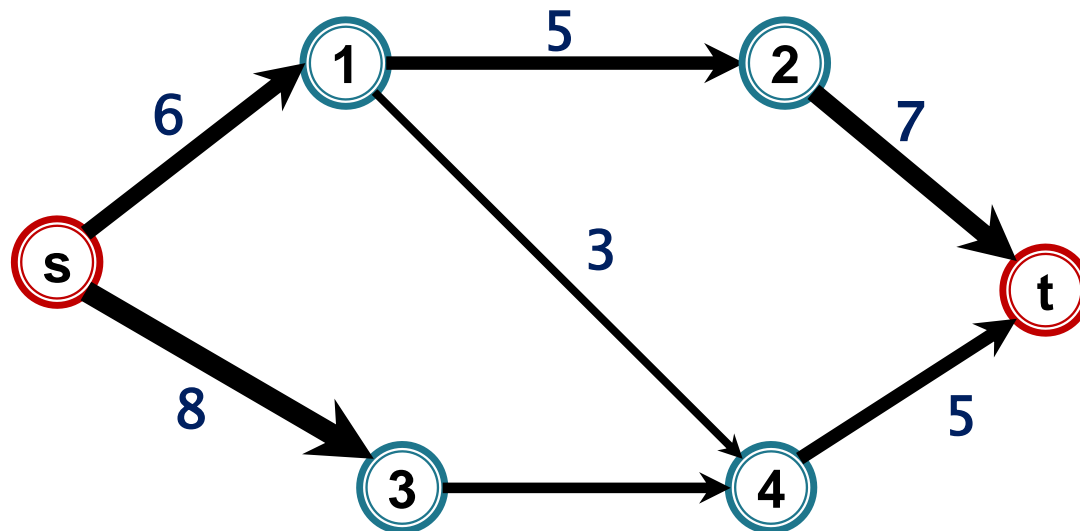
Tăietură minimă

- ▶ Determinarea unui flux maxim \Rightarrow determinarea unei tăieturi minime

- ▶ **Aplicații**

- Arce = poduri, capacitate = costul dărâmrării podului.

Ce poduri trebuie dărâmate a.î. teritoriul sursă să nu mai fie conectat cu destinația și costul distrugerilor să fie minim?



Tăietură minimă

- ▶ **Determinarea unui flux maxim \Rightarrow determinarea unei tăieturi minime**
- ▶ **Aplicații**
 - Fiabilitatea rețelelor
 - Probleme de proiectare, planificare
 - Segmentarea imaginilor