Sem 6 — 1 —

Spațiul dual. Reper dual
Vectori proprii, valori proprii

Ex $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f(x) = (x_2 - x_3 + x_4, x_2 - x_3 + x_4, x_4, x_4)$

Să se afle valorile proprii, subspațiile proprii corespunzătoare și câte un reper în fiecare subspațiu.

SOL

a) $A = [f]_{R_0, R_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \ m_1 = 2$

$\lambda_2 = 1, \ m_2 = 2$

$\sigma(f) = \{0, 1\}$.

b) • $V_{\lambda_1} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) = \lambda_1 x\} = \ker f$.

$\dim V_{\lambda_1} = 4 - rg A = 4 - 2 = 2$.

$\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

$V_{\lambda_1} = \{(x_1, x_2, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \langle \{(1,0,0,0), (0,1,1,0)\} \rangle$

$\dim V_{\lambda_1} = |R_1| = 2$, unde $R_1 = \{(1,0,0,0), (0,1,1,0)\}$

$\Rightarrow R_1$ reper în V_{λ_1}.

• $V_{\lambda_2} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) = \lambda_2 x\} = \{(x_1, x_1, x_3, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$

$= \langle \{(1,1,0,0), (0,0,1,1)\} \rangle$

$\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = x_1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = x_2 \\ x_4 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$ $\quad R_2 = \{(1,1,0,0), (0,0,1,1)\}$

$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow R_2$ e SLI $\Rightarrow R_2$ reper în V_{λ_2}.

OBS $\mathbb{R}^4 = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$

$\mathcal{R} = \{(1,0,0,0), (0,1,1,0), (1,1,0,0), (0,0,1,1)\}$ reper în $\mathbb{R}^4$

$A' = [f]_{\mathcal{R},\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (diagonală).

Ex. $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$. $\mathcal{R} = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ repere.

$\mathcal{R}' = \{e_1' = e_1 - e_2,\ e_2' = e_1 + 2e_2\}$.

$((\mathbb{R}^2)^*, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$ sp. dual.

$(\mathbb{R}^2)^* = \{f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ liniară}\}$

$\mathcal{R}^* = \{e_1^*, e_2^*\}$, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, $\forall i,j = \overline{1,2}$

$\mathcal{R}'^* = \{e_1'^*, e_2'^*\}$, $e_i'^*(e_j') = \delta_{ij}$, $\forall i,j = \overline{1,2}$

repere duale în spatiul dual.

Fie $\mathcal{R} \xrightarrow{C} \mathcal{R}'$, $\mathcal{R}^* \xrightarrow{D} \mathcal{R}'^*$

Precizați legătura dintre matricele de trecere C și D.

SOL

$\mathcal{R} \xrightarrow{C} \mathcal{R}'$ $\begin{cases} e_1' = e_1 - e_2 \\ e_2' = e_1 + 2e_2 \end{cases}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$e_i' = \sum_{j=1}^{2} c_{ji} e_j$, $\forall i = \overline{1,2}$

$\begin{cases} e_1'^* = a e_1^* + b e_2^* \\ e_2'^* = c e_1^* + d e_2^* \end{cases}$ $D = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

- $e_1'^*(e_1') = 1 \Rightarrow a e_1^* + b e_2^* (e_1 - e_2) = 1.$

$$a \underbrace{e_1^*(e_1)}_{1} - a \underbrace{e_1^*(e_2)}_{0} + b \underbrace{e_2^*(e_1)}_{0} - b \underbrace{e_2^*(e_2)}_{1} = 1$$

$$\Rightarrow a - b = 1.$$

- $e_1'^*(e_2') = 0 \Rightarrow a e_1^* + b e_2^* (e_1 + 2e_2) = 0 \Rightarrow a + 2b = 0$

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow 3b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{3},\ a = \frac{2}{3}.$$

- $e_2'^*(e_1') = 0 \Rightarrow c e_1^* + d e_2^* (e_1 - e_2) = 0 \Rightarrow c - d = 0$
- $e_2'^*(e_2') = 1 \Rightarrow c e_1^* + d e_2^* (e_1 + 2e_2) = 1 \Rightarrow c + 2d = 1$

$$\begin{cases} c - d = 0 \\ c + 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow 3d = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{3}$$

$$c = \frac{1}{3}.$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det C = 3$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$D = C^{-1}.$$

<u>Ex</u>. Fie $f \in End(V)$ aî $f^2 = 0$

Să se arate că $g = id_V + f \in Aut(V)$

<u>SOL</u>

Fie $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în V, $\dim_{\mathbb{K}} V = n$.

$A = [f]_{R,R}$.

Dem: Dacă $A^2 = O_n$, atunci $I_n + A \in GL(n, \mathbb{K})$.

$$\underset{\overset{\parallel}{I_n}}{I_n^2} - A^2 = (I_n - A)(I_n + A) = (I_n + A)(I_n - A)$$

$$\Rightarrow (I_n + A)^{-1} = I_n - A \Rightarrow I_n + A \in GL(n, \mathbb{K}) \Rightarrow$$

$$g = id_V + f \in Aut(V).$$

Ex $\underset{\text{liniară}}{f}: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $A = [f]_{R_0, R_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Să se afle valorile proprii și subspațiile proprii corespunzătoare.

b) Fie $U = \langle \{ e_1 + 2e_2, e_2 + e_3 + 2e_4 \} \rangle$

Să se arate că U este subspațiu invariant al lui f ($R_0 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ reper canonic în $\mathbb{R}^4$)

SOL

a) $f(x) = (x_1 + 2x_3 - x_4, x_2 + 4x_3 - 2x_4, 2x_1 - x_2 + x_4, 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4)$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -\lambda & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$l_4' = l_4 - l_3$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 2 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \xRightarrow{C_3' = C_3 + C_4}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \\ 2 & -1 & 1-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(\lambda-1) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -(\lambda-1)\{(1-\lambda)[(1-\lambda)^2 + 2] - 2(1-\lambda)\} = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^4 = 0 \Rightarrow \begin{matrix}\lambda_1 = 1 \\ m_1 = 4.\end{matrix}$$

$V_{\lambda_1} = \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) = 1x \}$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = x_1 \\ x_2 + 4x_3 - 2x_4 = x_2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = x_3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_3 - 2x_4 = 0. \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{4} & -2 & 0 \\ 2 & \boxed{-1} & \boxed{-1} & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$\dim V_{\lambda_1} = 4 - \mathrm{rg} M = 4 - 2 = 2 \neq m_1$.

$$\begin{cases} 2x_3 = x_4. \\ +x_2 + x_3 = 2x_1 + x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{1}{2} x_4 \\ x_2 = 2x_1 - \frac{1}{2}x_4 + x_4 = 2x_1 + \frac{1}{2}x_4. \end{cases}$$

$$V_{\lambda_1} = \{ (x_1, 2x_1 + \tfrac{1}{2}x_4, \tfrac{1}{2}x_4, x_4) \mid x_1, x_4 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \langle \{ (1,2,0,0), (0,1,1,2) \} \rangle.$$

$$= \langle \{ e_1 + 2e_2, e_2 + e_3 + 2e_4 \} \rangle = U.$$

$V_{\lambda_1} \subseteq \mathbb{R}^4$ este subsp. propriu coresp. valorii proprii $\lambda_1 = 1$

$\Rightarrow V_{\lambda_1} = U$ = subspațiu invariant al lui f.

Temă (3 seminar)

① Fie $f \in End(\mathbb{R}^3)$ și $A = [f]_{R_0, R_0} = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Să se determine valorile proprii, subspațiile proprii și câte un reper în fiecare subspațiu

② Fie $(V, +, \cdot)_{/K}$ și $(V^*, +, \cdot)_{/K}$ sp. dual, $R = \{e_1, .., e_n\}$ reper în V și $R^* = \{e_1^*, .., e_n^*\}$ reperul dual.
Fie $S \in End(V)$ și $S^* \in End(V^*)$, unde $S^*(f) = f \circ S, \forall f \in V^*$.
Precizați legătura dintre $[S]_{R,R}$ și $[S^*]_{R^*, R^*}$.