# Curs 9 Variabile aleatoare continue

Curs 9 Variabile aleatoare continue

**Def** Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un câmp de probabilitate și $X:\Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. Spunem că v.a $X$ este continuă (absolut continuă) dacă există o fcție $f(x) \geq 0$ cu proprietatea că:

$$P(X \in A) = \int_A f(x)\,dx \;,\; \forall A \subseteq \mathbb{R}$$

↳ intervale sau reuniuni finite sau numărabile de intervale

(nu este o probabilitate)

densitate de repartitie

Funcția $f(x)$ s.n. densitatea de repartiție

Reamintim: Dacă $X$ era o v.a. discretă, atunci pentru $A \subseteq \mathbb{R}$ avem că

$$P(X \in A) = \sum_{\{x \mid x \in A\}} P(X = x) = \sum_{\{x \in \mathrm{Im}X \mid x \in A\}} p_X(x)$$

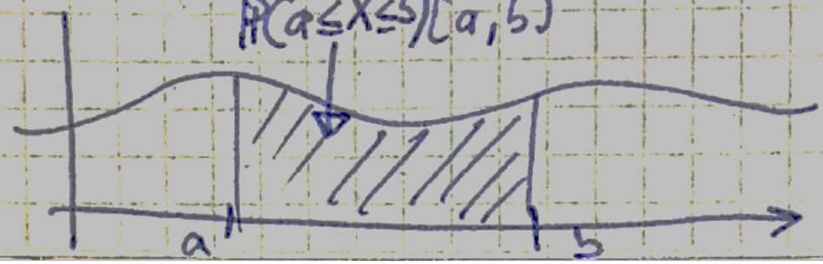
→ fct de masă → este o probabilitate

În cazul discret avem $\sum$ iar în cel cont avem $\int$.

În particular, pt $A = [a,b]$ avem (, pt cont.)

$$P(a \leq X \leq b) = \int f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

$P(a \leq X \leq b)$ $[a,b]$



Dacă $A = \mathbb{R}$ atunci $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

**Propoziție** Densitatea de repartiție $f$ a unei v.a. continue trebuie să satisfacă următoarele proprietăți:

a) $f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

conditii densitate de repartitie a unei v.a continue

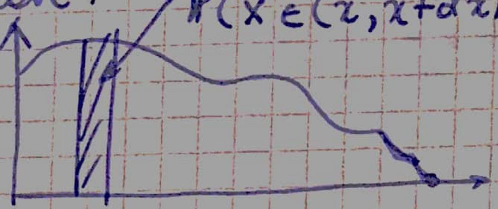
**Obs** Dacă $A = \{a\}, a \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X = a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Astfel,

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X < b)$$

Interpretare: $\mathbb{P}(X \in (x, x+dx))$



$\mathbb{P}(X \in [x, x+dx]) = \int_{(x, x+dx)} f(t)\,dt = \int_x^{x+dx} f(t)\,dt$

Pentru $dx$ foarte mic aproximăm

$$\int_x^{x+dx} f(t)\,dt \simeq \underline{f(x)\,dx}$$

$\hookrightarrow$ aria dreptunghiului

Astfel putem vedea $f(x) \simeq \dfrac{\text{probabilitatea}}{\text{unitatea de lungime}}$

Dacă $X$ este măsurat în cm (u.m) atunci densitatea $f$ este măsurată în $1/\text{cm}$ ($1/\text{u.m.}$)

Analog cu v.a. discrete: $p(x)$ corespunde la $f(x)\,dx$

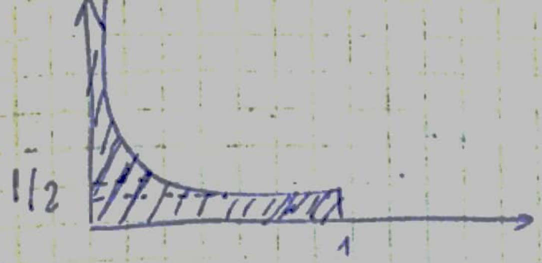
| v.a. discrete | v.a. continue |
|---|---|
| $\sum$ | $\int$ |
| $p(x)$ | $f(x)\,dx$ |

variabile discrete vs variabile continue

**Obs** Densitatea de repartiție **nu** este o probabilitate.

**Exp** (O densitate poate lua valori oricât de mari)

v.a $X$ cu densitatea $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$




a) $f(x) \geq 0$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x}\Big|_0^1 = 1.$$

→ Functia de repartitie pentru v.a. X este $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Reamintim proprietatile fct de repartitie:
a) F crescatoare
b) F continua la dreapta
c) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ si $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

In cazul in care v.a X este continua cu densitatea f, avem:

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{P}(X \in (-\infty, x])$$

**Teorema fundamentala a analizei**

Din teorema fundamentala a analizei stim ca daca f este continua intr-un pct $x_0$ atunci F este derivabila in $x_0$ si $F'(x_0) = f(x_0)$

Obs Daca f este continua atunci $F'(x) = f(x)$, $\forall x$
Pentru a gasi densitatea atunci cand cunoastem fctia de repartitie folosim relatia $\boxed{F'(x) = f(x)}$.
In caz contrar, (stim densitatea si vrem fctia de repartitie), atunci $\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt}$ **formula functie de repartitie**

Exp Consideram o v.a X cu densitatea f definita prin

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, \ x \in \mathbb{R} \ \text{(Logistica)}$$

Vrem sa calculam: a) $F(x)$
b) $\mathbb{P}(-2 < x < 2) = ?$

Sol $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt \ \overset{u = e^t}{\underset{du = e^t dt}{=}} \ \int_0^{e^x} \frac{1}{(1+u)^2}\,du$

$$= \left(-\frac{1}{1+u}\right)\Big|_0^{e^x} = 1 - \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+e^x}$$

b) $\mathbb{P}(-2 < X < 2) = \mathbb{P}(X < 2) - \mathbb{P}(X < -2) = \mathbb{P}(X \leq 2) - \mathbb{P}(X \leq -2)$ =

Scanned with CamScanner

$= F(2) - F(-2)$

sau $P(-2 < X < 2) = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} \frac{e^x}{(1+e^x)}\,dx \overset{u=1+e^x}{=}$

$= \int_{1+e^{-2}}^{1+e^2} \frac{1}{u^2}\,du =$

**Calcularea probabilitatii in functie de functia de repartitie a variabilei continue**

În general,

$P(X \in [a,b]) = F(b) - F(a), \forall a < b$

$= \int_a^b f(x)\,dx$

$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a) =$

$= \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

**Media si momentele variabilei aleatoare continue**

Media și momentele v.a. continue

Reamintim că în cazul v.a. discrete, media era definită

i) $E[X] = \sum_x x \cdot p_X(x)$

ii) $E[X^k] = \sum_x x^k p_X(x)$ (momentul de ordin $k$)

iii) $E[g(X)] = \sum_x g(x)\, p_X(x)$ (media unei fcții de v.a. X)

Def Fie X o v.a. continuă cu densitatea de repartiție $f$. Media v.a. X este definită prin: $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$

dacă $E[|X|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,dx < \infty$. În caz contrar spunem că media nu există.

Obs Se observă analogia (discret vs cont), $\sum \to \int$ și $p_X(x) \to f(x)dx$

În mod similar, momentul de ordin $k$ al v.a. X este

$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx$

Iar media unei fcții de var. a. X este $\boxed{E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx}$

De asemenea, varianța X este

$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E[X^2] - E[X]^2$

Proprietățile mediei și ale varianței de la v.a discrete rămân valabile:

Scanned with CamScanner

**Proprietati ale variantei v.a. continue**

a) Dacă $X \geq 0$ atunci $\mathbb{E}[X] \geq 0$

b) Dacă $X \geq Y$ atunci $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$

c) Dacă $X = c$ atunci $\mathbb{E}[X] = c$

d) Dacă $\mathbb{E}[aX + bY] = a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y]$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$

e) $Var(X) \geq 0$

f) Dacă $X = c$, atunci $Var(X) = 0$

g) $Var(aX + b) = a^2\, Var(X)$

h) Dacă $X$ şi $Y$ sunt independente atunci

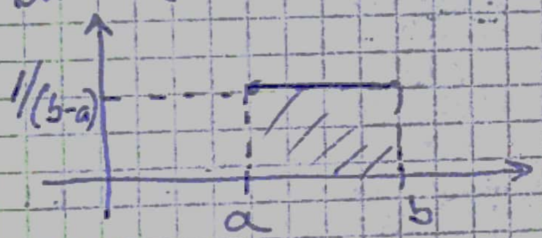
$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$

$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

**Uniforme**

## Uniforme

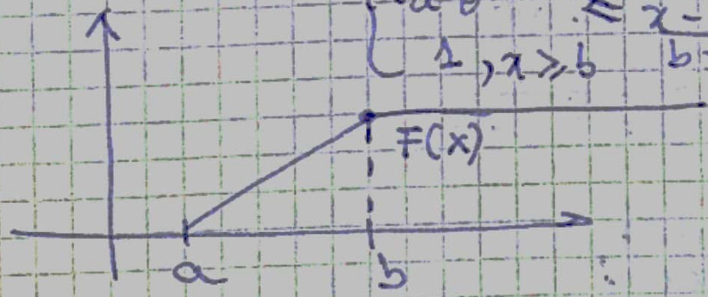
**Def:** O v.a. Uniformă este repartizată uniform pe $[a,b]$ dacă admite densitatea de repartiție $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x < b \\ 0 &, \text{altfel} \end{cases}$




Notație $U \sim \mathcal{U}((a,b))$

Funcția de repartiție $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \int_a^x f(t)\,dt = \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$



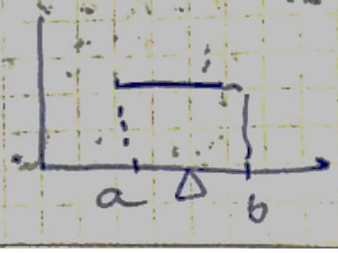

Dacă $U \sim \mathcal{U}((0,1))$ ce se întâmplă cu $V = a + (b-a)U$

Variabila $V \sim \mathcal{U}((a,b))$ // este uniformă în intervalul $(a,b)$

$\boxed{dx}$

$$F_V(x) = P(V \leq x) = P(a + (b-a)U \leq x) =$$
$$= P\left(U \leq \frac{x-a}{b-a}\right) = \frac{x-a}{b-a} \text{ pt } x \in (a,b)$$

Fie $U \sim \mathcal{U}((a,b))$.




$$\mathbb{E}[U] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx =$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{(a,b)}^{x} \qquad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[U] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{(a,b)}(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var[U] = \mathbb{E}[U^2] - \mathbb{E}[U]^2$$

$$\mathbb{E}[U^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\Big|_a^b$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$Var[U] = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12}$$

$$= \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

**transformarea locatie-scala**

Obs Putem folosi și transformarea de locație-scală.

$U = a + (b-a)\tilde{U}$ cu $\tilde{U} \sim \mathcal{U}(0,1)$

unde

$$\mathbb{E}[\tilde{U}] = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \qquad f_{\tilde{U}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[\tilde{U}^2] = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$Var(\tilde{U}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

jocul de loto 6/49

problema pescarului de la curs

problema Acului lui Buffon

**Curs 10** **Universalitatea variabilei aleatoare uniforme**

Curs 10

Universalitatea variabilei aleatoare uniforme

Această proprietate este cunoscută și sub numele de teorema fundamentală a simulării **teorema fundamentala a simularii**

(I.) Fie X o variabilă aleatoare cu funcția de repartiție F, continuă și strict crescătoare (prin urmare există $F^{-1}$). Atunci

a) Dacă $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ atunci $F^{-1}(U)$ are aceeași repartiție ca X

b) $F(X) \sim \mathcal{U}((0,1))$

Dem Deoarece $F$ este continuă și strict crescătoare $\Rightarrow$ $F$ este bijectivă prin urmare inversa $F^{-1}$

a) $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ și $x \in \mathbb{R}$

$$P(F^{-1}(U) \le x) = P(U \le F(x)) = F(x)$$

astfel $F^{-1}(U)$ și $X$ sunt repartizate la fel

b) $X$ are fct de rep $F$ și considerăm $Y = F(X)$

$F: \mathbb{R} \to (0,1) \Rightarrow Y = (0,1)$

$P(Y \le y) = ?$ pentru $y \in (0,1)$

$$P(Y \le y) = P(F(X) \le y) \underset{\text{aplicăm } F^{-1}}{=} P(X \le F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y$$

Cum $P(Y \le y) = 0$ și $y \le 0$ și $P(Y \le y) = 1$ pt $y \ge 1$ avem
$Y \sim \mathcal{U}((0,1))$

Exp Pentru repartiția logistică:

$$F(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Dacă $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ și $F^{-1}$ este inversa lui $F$ atunci $F^{-1}(U)$ este repartizată logistic. $F^{-1}(u) = ?$

Rezolvăm ecuația $F(x) = u \Rightarrow \frac{e^x}{1+e^x} = u$, $u \in (0,1)$

$\Rightarrow e^x(1-u) = u \Rightarrow e^x = \frac{u}{1-u} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{u}{u+1}\right)$

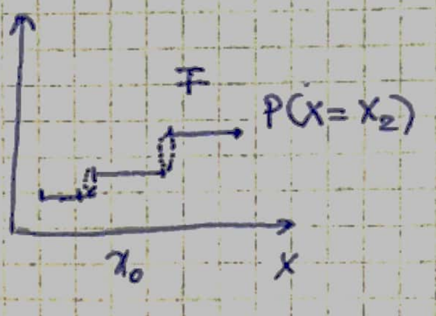
$F^{-1}(u) = \ln\left(\frac{u}{1-u}\right)$, Atunci $\ln\left(\frac{U}{1-U}\right) \sim$ logistic

Obs Rezultatul din teorema precedentă este real în cazul general.

$F^{-1}(u) = \inf\{x \mid F(x) \ge u\}$ $\leftarrow$ funcția cuantilă functia cuantila

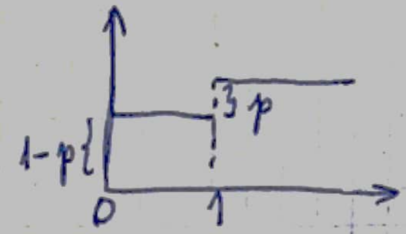
În cazul în care $F$ este bijectivă atunci $F^{-1}$ este chiar inversa lui $F$.

Cazul discret




Cum putem genera val aleatoare discrete plecând de la uniforme pe $(0,1)$

Exp $X \sim B(p)$, $X \in \{0,1\}$, $P(X=1)=p$




$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-p, & 0\le x<1\\ p, & x\ge 1\end{cases}$$

$$F^{-1}(u)=\begin{cases}0, & u\le 1-p\\ 1, & u>1-p.\end{cases}$$

Generăm $U\sim U(0,1)$ și considerăm $F^{-1}(U)=\begin{cases}0, & U\le 1-p\\ 1, & U>1-p\end{cases}$

$$F^{-1}(U)=\begin{cases}0, & p\le 1-U\\ 1, & p>1-U\end{cases} \qquad U\sim U((0,1)) \Downarrow\ 1-U\sim U((0,1))$$

Pt a genera o v.a. Bernoulli de parametru $p$:
- generăm $U\sim U((0,1))$
- dacă $U<p$ atunci $X=1$ altfel $X=0$

## Repartiția Exponențială

Repartitia exponentiala

Varianta continuă a rep. Geometrice
Modelează timpul de așteptare până la apariția unui evenimen[t]

**Def** O variabilă aleatoare $X$ este repartizată exponențial de parametru $\lambda>0$ și notăm $X\sim Exp(\lambda)$ dacă densitatea de repartiție $f$ a lui $X$ este de forma

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x>0$$

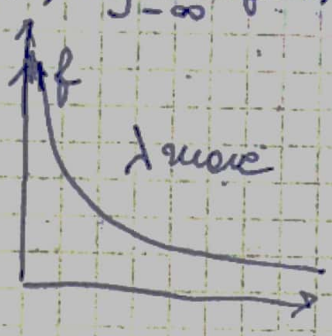
densitatea de repartitie f(x)

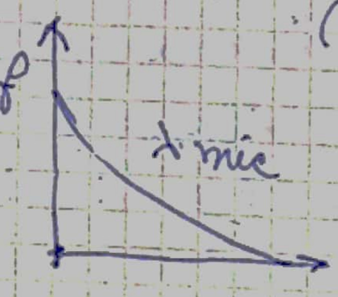
În acest caz, f-cția de rep este

Functia de repartitie F(x)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\cdot e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)\,dt=\int_0^x\lambda e^{-\lambda t}dt=1-e^{-\lambda x}$$

(pt $x<0$ ...)




$X\sim Exp(\lambda)$ și calculăm

X ~ Exp(lmbd) - P(x >= a)

$$P(X\ge a)=\int_a^{\infty} f(x)\,dx=\int_a^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda a}$$

probabilitatea ca $X$ să depășească pragul $a$ scade exponențial

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}\,1_{(0,\infty)}(x)\,dx=\int_0^{\infty} x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx$$

$$=\int_0^{\infty} x(-e^{-\lambda x})'dx=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx=$$

$$=0+\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{\lambda}$$

**E si Var pentru Exp(lmbd)**

În mod similar

$$E[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\,dx=\int_0^{\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=(-x^2e^{-\lambda x})\Big|_0^{\infty}+$$

$$+\int_0^{\infty}2xe^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda}\underbrace{\int_0^{\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx}_{E[X]}=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var(X)=E[X^2]-(E(X))^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

Exp 7 Pp că timpul până la căderea unui meteorit de mici dimensiuni, pentru prima oară, oriunde pe suprafața României este modelat prin intermediul unei v.a. rep. exponențial de medie 10 zile. Să presupunem că suntem la miezul nopții. Care este prob. ca un meteorit să cadă în România între 6 dimineața și 6 seara (în prima zi)?

X - timpul scurs până la realizarea evenimentului

$X\sim Exp(\lambda)$ știm că media $1/\lambda=10\Rightarrow\lambda=1/10$

$P(1/4\le X\le 3/4)$ — 0 — 6AM — 12N — 6PM — 12 Noaptea

$\|$

$P(X\le 3/4)-P(X\le 1/4)$

$=(1-e^{-\frac{3}{40}})-(1-e^{-1/40})=e^{-1/40}-e^{-\frac{3}{40}}$

Dacă aveam prop să fi căzut pt prima oară în a cincea zi între 6AM și 6PM.

$P(4+\frac{1}{4}\le X\le 4+\frac{3}{4})=\ldots$

**Lipsa de memorie**

P (Lipsa de memorie)

Spunem că v.a. X are proprietatea lipsei de memorie dacă

$$P(X\ge s+t\mid X\ge s)=P(X\ge t),\ \forall s,t\ge 0$$

a) V.a. rep Exp($\lambda$) admite proprietatea lipsei de memorie

b) Dacă X este o v.a. cont. pozitivă care admite prop. lipsei de memorie atunci X este rep. exponențial.

## Repartiția normală

repartitia normala (Gaussiana)

**Def** Spunem că o v.a. $X$ este repartizată normal (sau Gaussian) de parametri $\mu$ și $\sigma^2$ și notăm $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, dacă admite densitatea

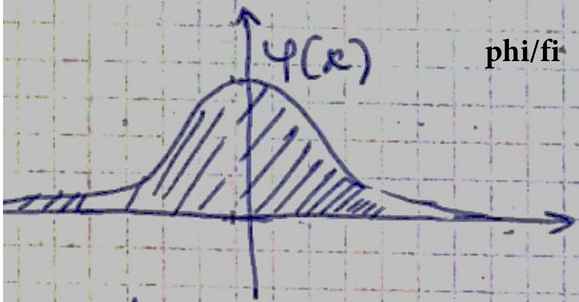
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$$

repartitia normala standard

În cazul în care $\mu = 0$ și $\sigma^2 = 1$ spunem că v.a $X$ este repartizată normal standard și notăm $X \sim N(0,1)$

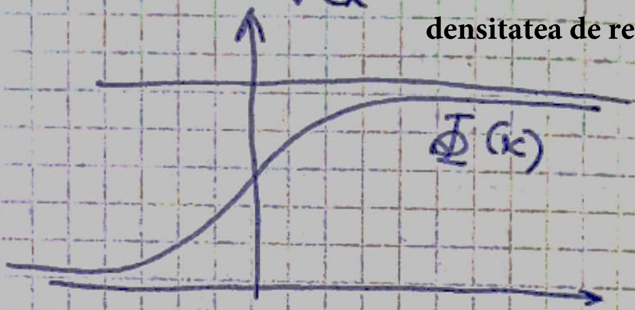
În acest caz, densitatea de repartiție se notează

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt$$




phi/fi

densitatea de repartitie




Vrem să arătăm că $\varphi(x)$ este o densitate de probabilitate

a) $\varphi(x) \geq 0, \forall x$ \ adevărat

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1$

densitate de probabilitate
fi(x) / phi(x)

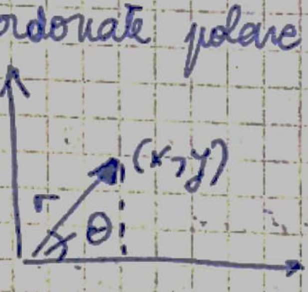
Fie $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx$ și vrem să calculăm $I^2$.

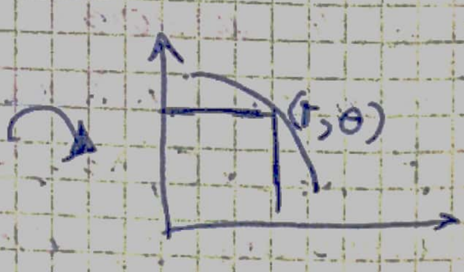
$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy$$

Teorema lui Fubbini

T. lui Fubbini

- transf în coordonate polare




$(x, y) \to (r\cos\theta, r\sin\theta)$

Avem următoarea teoremă de la analiză:

**T** Fie $G$ o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$ și $g: G \to \mathbb{R}^n$ dif și cu derivatele parțiale cont. Pp că $g$ este injectivă și că

Iacobianul lui $g$ este nenul. Atunci pentru $f$ astfel încât $f$ pe $G$ pozitivă sau integrabilă avem. **Iacobinaul**

$$\int_{g(x)} f(y)\,dy = \int_G f(g(x))\,|\det J_g(x)|\,dx$$

$$g=(g_1, g_2, \dots, g_n), \quad J_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$\cdot\, r, \theta$

$$J_g = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$\det J_g = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

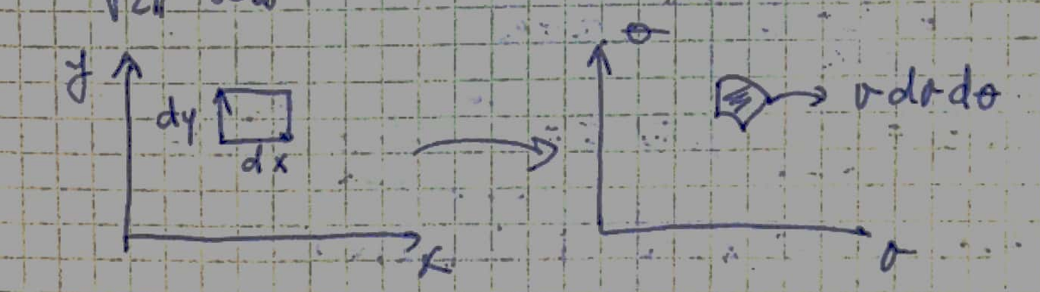
$$dx\,dy \longrightarrow r\,dr\,d\theta$$

$$I^2 = \iint_{\underset{g(G)}{\mathbb{R}^2}} \underbrace{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}_{f}\,dx\,dy = \iint_{G=[1,\infty)\times(0,2\pi]} f(g(r,\theta))\,|\det J_g|\,dr\,d\theta$$

$$= \iint_{[0,\infty]\times[0,2\pi]} e^{-r^2/2}\, r\,dr\,d\theta = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r e^{-r^2/2}\,d\theta\,dr = \int_0^\infty 2\pi r e^{-r^2/2}\,dr$$

$$= 2\pi \Rightarrow \boxed{I = \sqrt{2\pi}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx) = 1$$




Putem să calculăm media și varianța $E[X]$ și $Var(X)$ când $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

**E si Var cand X ~ N(0, 1)**

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}}_{\text{fct imp}}\,dx = 0$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-x^2/2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-e^{-x^2/2}\right)' \cdot x\,dx = \frac{1}{2\pi}\Big[\underbrace{-x e^{-x^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{0\ (\text{L'Hospital})} + \int_{-\infty}^{\infty} x' e^{-x^2/2}\,dx\Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = 1.$$

**v.a repartizata normal standard**

$Var(X) = 1 - 0 = 1.$ prin urmare o v.a. rep normal standard are medie 0 și varianță 1.

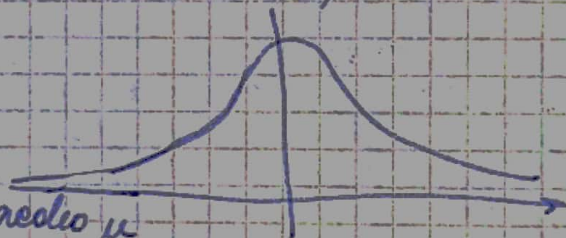
În general, o v.a. $X$ rep. $N(\mu, \sigma^2)$ se poate scrie sub forma $X = \mu + \sigma Z$ unde $Z \sim N(0,1)$

**media miu si varianta sigma ^2**

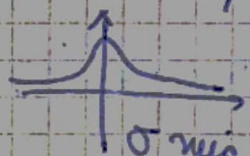
ceea ce conduce la $E[X] = \mu + \sigma E[Z] = \mu$

$$Var(X) = Var(\mu + \sigma Z) = \sigma^2 Var(Z) = \sigma^2$$

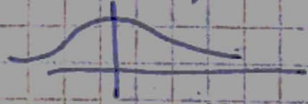
$N(\mu, \sigma^2)$: $\mu$ – medie, $\sigma^2$ – varianta



Simetrică în raport cu media $\mu$



$\sigma$ mic



$\sigma$ mare

## CURS 11

**Curs 11**

Normala standard:

**Normala standard**

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt$$

$X \sim N(0,1) \Rightarrow E[X] = 0$ și $Var(X) = 1$

Dacă $Z \sim N(0,1)$ atunci $X = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$

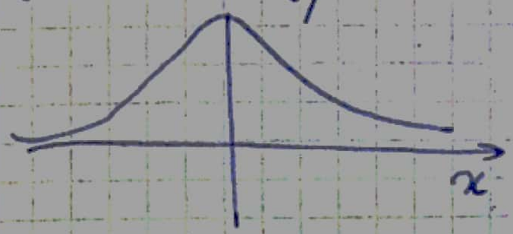
$$F(x) = P(X \le x) = P(\mu + \sigma Z \le x) = P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right), \ \sigma > 0$$

$$= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{2\pi} e^{-t^2/2}\,dt$$

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \mu\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$E[X] = E[\mu + \sigma Z] = \mu + \sigma E[Z] = \mu$ - media

$Var(X) = Var(\mu + \sigma Z) = \sigma^2 Var(Z) = \sigma^2$ - varianța



$f$ simetrică față de media $\mu$

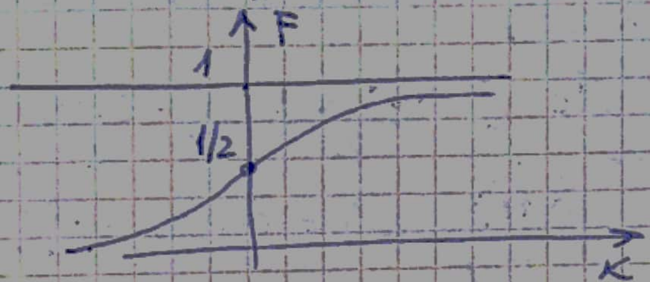
$\mu$ - este simetrică față de 0

$\varphi(z) = \varphi(-z)$

Functie de repartitie $\Phi$ a $N(0,1)$ verifică

**Functia de repartitie**

$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z), \forall z$



$\Phi(-z) = \int_{-\infty}^{-z} \varphi(t)dt$

sch. var $u = -t$

$= \int_{z}^{\infty} \varphi(-u)du = \int_{z}^{\infty} \varphi(u)du$

$\varphi$ sim

$= 1 - \int_{-\infty}^{z} \varphi(u)du = 1 - \Phi(z)$

Mai mult, dacă $Z \sim N(0,1)$ atunci $-Z \sim N(0,1)$

$P(-Z \leq z) = P(Z \geq -z)$

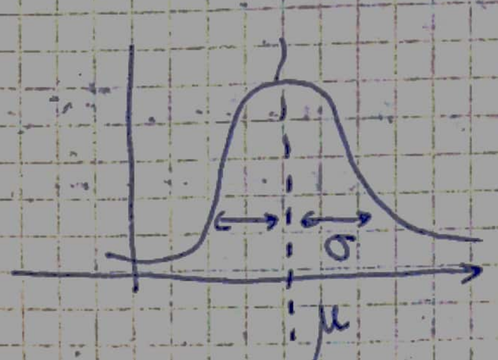
$= 1 - \Phi(-z) = \Phi(z) = P(Z \leq z)$

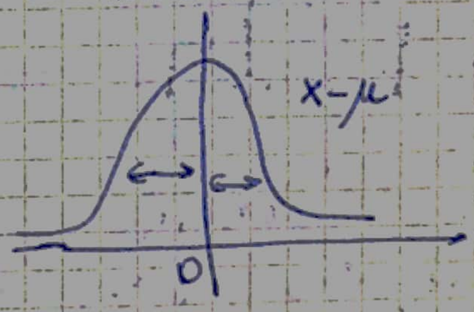
- Dacă $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ atunci $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

! normalizare

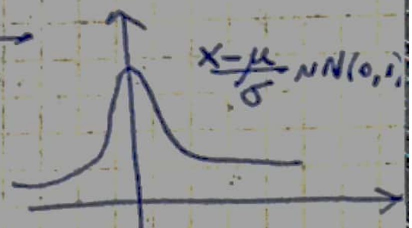
$\mu$ - media

$\sigma$ -





"facem scalarea pt a obtine varianta 1"



$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$\boxed{\text{T:}}$ Dacă $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ atunci

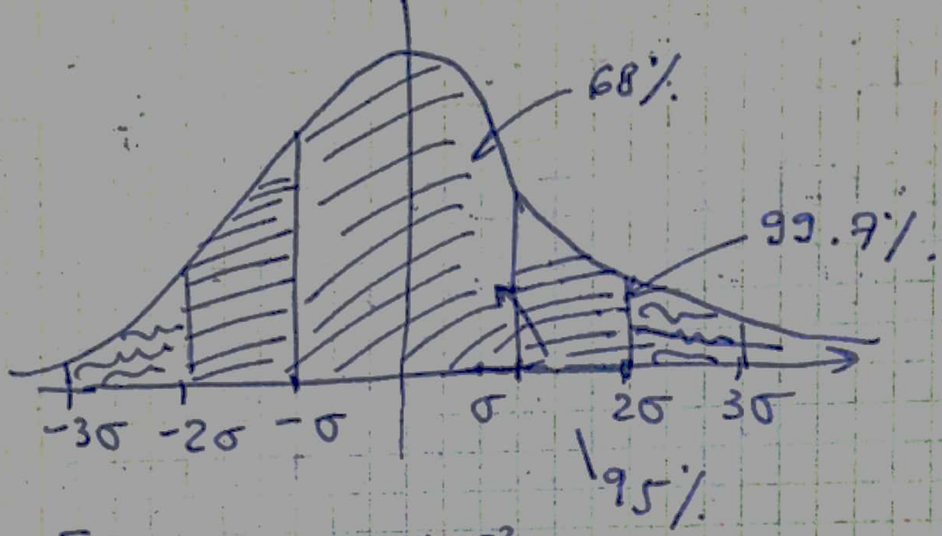
$P(|X-\mu| \leq \sigma) \simeq 0.68$

$P(|X-\mu| \leq 2\sigma) \simeq 0,95$

$P(|X-\mu| \leq 3\sigma) \simeq 0,997$

Regula 68-95-99.7%

**Regula 69 95 99.7**




**Exp** $X \sim N(\overset{\mu,\sigma^2}{-1,4})$

$P(|X| < 3) = ?$

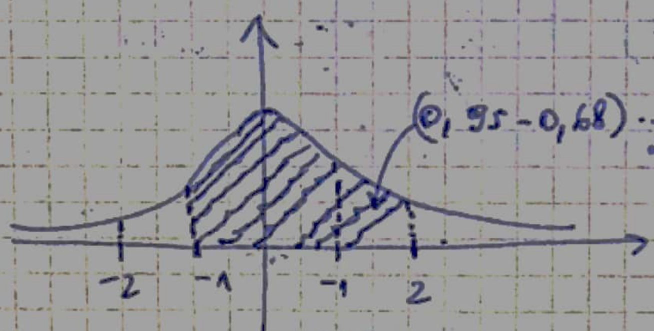
normalizare standardizare

$$P(|X|<3) = P(-3 < X < 3)$$
$$= P\left(\frac{-3-(-1)}{2} < \frac{X-(-1)}{2} < \frac{3-(-1)}{2}\right)$$
$$= P\left(-1 < \underbrace{\frac{X+1}{2}}_{N(0,1)} < 2\right) = \Phi(2) - \Phi(-1)$$

Din regula 68-95-99.7%

$$P\left(-1 < Z = \frac{X+1}{2} < 1\right) \simeq 0,68$$

$$P(-1 < Z < 2) \simeq 0,95$$




$(0,95-0,68)\cdot\frac{1}{2} = \frac{0.27}{2}$

$P(-1<Z<2) = P(-1<Z<1) + P(1<Z<2) \simeq 0,68 + \frac{0.27}{2} = 0,815$

**Exp** $Y = |Z|$, $Z \sim N(0,1)$

a) $E[Y] = ?$, $Var[Y] = ?$ b) $F_Y(y)$ și $f_Y(y)$

fct de rep — functia de repartite; densitatea

**Sol** a) $E[Y] = E[|Z|] = \int_{-\infty}^{\infty} |z| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz =$

(fct pară) $= 2\cdot \int_0^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} z e^{-z^2/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (-e)^{\prime} dz$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-e^{-z^2/2}\right)\Big|_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

Scanned with CamScanner

$Var(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - [\mathbb{E}[Y]]^2$ , $Var(z) = \mathbb{E}[z^2] - (\mathbb{E}[z])^2$

$Y^2 = Z^2 \Rightarrow \mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[Z^2] = Var(Z) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow Var(Y) = 1 - \frac{2}{\pi}$

**unde Z ~ N(0, 1), E[z] = 0, deci E[z$^2$] = Var (z) = 1**

b) $Y = |Z| \geq 0$

Dacă $y \leq 0 \Rightarrow P(Y \leq y) = 0$

$y > 0 \Rightarrow F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|Z| \leq y) =$

$= P(-y \leq Z \leq y)$

$= \Phi(y) - \Phi(-y)$

$= \Phi(y) - (1 - \Phi(y)) = 2\Phi(y) - 1$

**Functia de repartitie**

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ 2\Phi(y) - 1, & y > 0 \end{cases}$$

**Densitatea de repartitie**

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ 2\varphi(y), & y > 0 \end{cases}$$

prin derivarea lui $F_Y$

**Repartitii comune, marginale si conditionate. Media conditionata**

## Repartiții comune, marginale și condiționate. Media condiționată

Două var aleatoare X și Y. Dacă ne uităm la rep lui X putem calcula $P(X \in A)$

Dacă le privim în ansamblu vrem să calculăm $P((X,Y) \in B)$ ← rep. comună

$B \subset \mathbb{R}^2$

**repartitia comuna**

rep. marginală - ne uităm doar la rep unei v.a ignorând cealaltă v.a.

**repartitia marginala-neregulata**

rep. condiționată a lui X știind $Y = y$ - repartiția im... lui X știind că $Y = y$ a fost observat

**repartitia conditionata**

815

**Cazul variabilelor aleatoare discrete**

## Cazul v.a discrete

Fie X și Y două v.a. def pe $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ambele discrete

$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$

Numim fcție de masă a cuplului $\quad Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

$(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$

dz

$(X,Y) = \{(x_i, y_j) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$

**functia de masa**

$p_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$ ← fcția de masă

În mod similar se definește fct de repartiție a cuplului $(X,Y)$

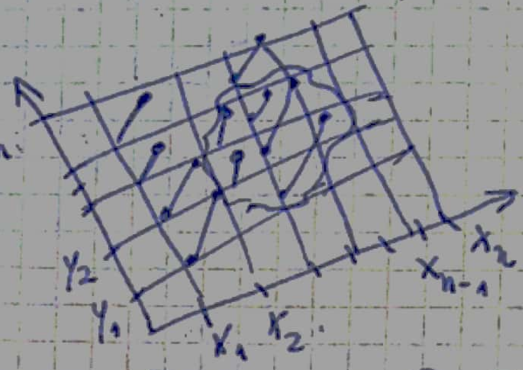
$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \le x, Y \le y)$$ **functia de repartitie**

(P) Funcția de masă $p_{X,Y}(x,y)$ verifică a) $p_{X,Y}(x,y) \ge 0$

b) $\sum_x \sum_y p_{X,Y}(x,y) = 1$.

$X \in \{x_1, \dots, x_n\}$

$Y \in \{y_1, \dots, y_n\}$



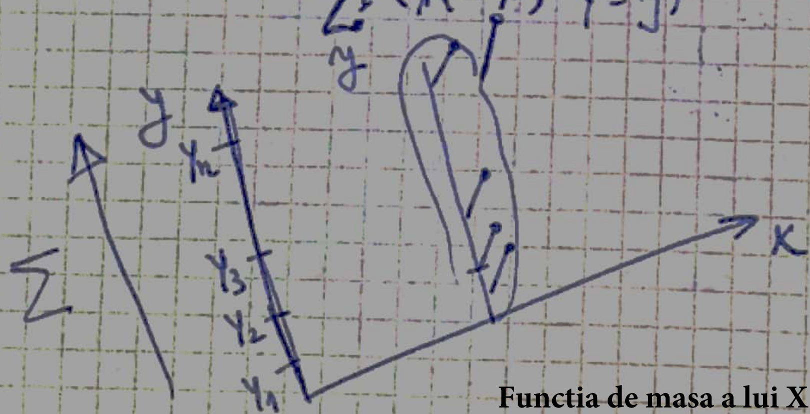

$\mathbb{P}(X=x, Y=y)$

Putem calcula probabilitatea $\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \sum_{(x,y)\in A} \mathbb{P}(X=x, Y=y)$

<u>Def</u> Se numește repartiția marginală a lui X

$$\mathbb{P}(X=x) = \sum_y \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$ **repartitie marginala a lui X**

$$\mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X=x, Y\in\mathbb{R}) = \mathbb{P}\Big(X=x, \bigcup_y \{Y=y\}\Big) =$$
$$= \mathbb{P}\Big(\bigcup_y \{X=x\} \cap \{Y=y\}\Big)$$
$$= \sum_y \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$




$\mathbb{P}(X=x) = ?$

$\mathbb{P}(Y=y) = ?$

**Functia de masa a lui X conditionata la A**

Fie A un eveniment cu $P(A) > 0$. Atunci fcția de masă a lui X cond la A este $p_{X|A}(x) = \mathbb{P}(X=x|A)$

$$\boxed{\mathbb{P}_{X|A}(x) = \mathbb{P}(X=x|A) = \frac{\mathbb{P}(\{X=x\}\cap A)}{\mathbb{P}(A)}}$$

Cum ev. $\{X=x\} \cap A$ sunt disjuncte 2 câte 2 pt val dif ale lui $x$, atunci

În mod similar se definește fct de repartiție a cuplului $(X,Y)$

$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$ **Functia de repartitie a cuplului (x, y)**

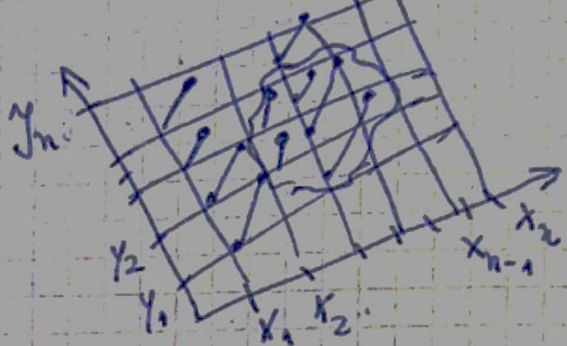
(P) Funcția de masă $p_{X,Y}(x,y)$ verifică a) $p_{X,Y}(x,y) \ge 0$

b) $\sum_x \sum_y p_{X,Y}(x,y) = 1$.

$X \in \{x_1, \dots, x_n\}$

$Y \in \{y_1, \dots, y_n\}$

$P(X=x, Y=y)$




Putem calcula probabilitatea $P((X,Y)\in A) = \sum_{(x,y)\in A} P(X=x, Y=y)$

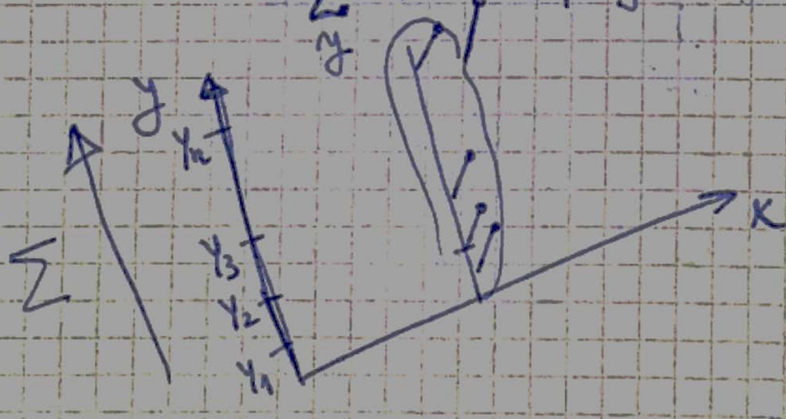
Def. Se numește repartiția marginală a lui X

$$P(X=x) = \sum_y P(X=x, Y=y)$$ **repartitia marginala a lui X**

$$P(X=x) = P(X=x, Y\in\mathbb{R}) = P\left(X=x, \bigcup_y \{Y=y\}\right) =$$
$$= P\left(\bigcup_y \{X=x\}\cap\{Y=y\}\right)$$
$$= \sum_y P(X=x, Y=y)$$

$P(X=x) = ?$

$P(Y=y) = ?$




Fie A un eveniment cu $P(A)>0$. Atunci fcția de masă a lui X cond la A este $p_{X|A}(x) = P(X=x|A)$

**Functia de masa a lui X conditionala la A**

$$\boxed{p_{X|A}(x) = P(X=x|A) = \frac{P(\{X=x\}\cap A)}{P(A)}}$$

Cum ev. $\{X=x\}\cap A$ sunt disjuncte 2 câte 2 pt val dif ale lui $x$, atunci

$$P(A) = \sum_x P(\{X=x\} \cap A)$$

$$p_{X|A}(x) = P(X=x|A).$$

Dacă construim cele 2 rezultate: $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$

Ex: X este rezultatul aruncării cu zarul și A even. ca rezultatul este par.

$$p_{X|A}(x) = P(X=x \mid par) = \frac{P(X=x, par)}{P(par)} \quad x \in \{1,2,6\}$$

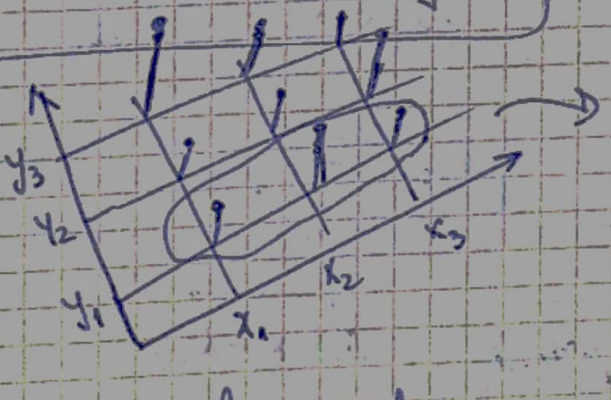
$$= \begin{cases} 1/3, & x = 2,4,6 \\ 0, & \text{impar} \end{cases}$$

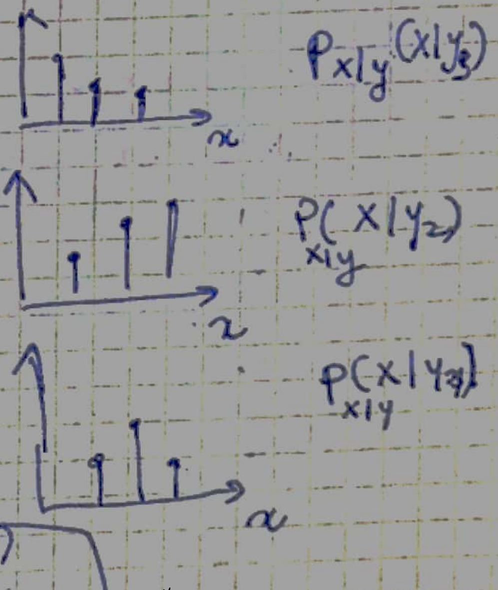
**Functia de masa conditionata a lui X la Y= y**

În particular, dacă avem două v.a. X și Y și considerăm că $A = \{Y=y\}$ atunci fct de masă condiționată a lui X la $Y=y$ este:

$$p_{X|Y}(x|y) = P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$$

$$\boxed{p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}}$$ ← văzută ca o fcție de x cu y fixat




Se păstrează forma dar trebuie normalizate

Obs:

$$\boxed{\begin{aligned} p_{X,Y}(x,y) &= p_Y(y)\, p_{X|Y}(x|y) \\ &= p_X(x)\, p_{Y|X}(y|x) \end{aligned}}$$

*

Ex: Pf răspunde corect în 25% dintre cazuri, indep. de întrebare. Ip că sunt 0, 1 sau 2 întrebări pe curs cu prob 1/3.
Fie X v.a. care ne dă nr de întrebări, Y - v.a. care

ne dă nr de rasp greșite.

Vrem $\mathbb{P}(X=x, Y=y) = ?$

| X\Y | 0 | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1/3 | 0 | 0 | 1/3 |
| 1 | 1/4 | 1/12 | 0 | 1/3 |
| 2 | 3/16 | 1/8 | 1/48 | 1/3 |

$P(X=0, Y=0) = \frac{1}{3}$

$P(X=1, Y=1) - \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=$
$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$p_{X,Y}(1,1) = p_X(1) * p_Y($

$\mathbb{P}(X=1, Y=0) = \mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=0 \mid X=1)$
$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(X=2, Y=0) = \mathbb{P}(X=2) \cdot \mathbb{P}(Y=0 \mid X=2)$
$= \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{16} = \frac{3}{16}$

$\mathbb{P}(X=2, Y=1)$ $= \mathbb{P}(X=2)\,\mathbb{P}(Y=1 \mid X=2)$ $\quad$ urmează după o binomială

$= \frac{1}{3} \times C_2^1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}^{2-1} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{3}{16} = \frac{1}{16}$

$P(X=2, Y=2) = P(X=2)\,\mathbb{P}(Y=2 \mid X=1)$
$= \frac{1}{3} C_2^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{48}$

În general

| X\Y | $y_1$ | $y_2$ | | $y_n$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | | | | | |
| $x_2$ | | | | | |
| $x_i$ | | | $p_{X,Y}(x_i, y_j)$ | | $\mathbb{P}(X=x_i)$ |
| $x_m$ | | | | | |
| $\Sigma$ | | | $\mathbb{P}(Y=y_j)$ | | |

$$\mathbb{P}(X=x_i) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j) = \sum_{j=1}^{n} p_{X,Y}(x_i, y_j)$$

$$\mathbb{P}(Y=y_j) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j) = \sum_{i=1}^{m} p_{X,Y}(x_i, y_j)$$

$$\mathbb{P}(X=x_i \mid Y=y_j) = \frac{p_{X,Y}(x_i, y_j)}{p_Y(y_j)}$$

Scanned with CamScanner

LABORATOR laborator

aplicatie functie de masa conditionata

Aplicații

① Se consideră ecuația dreptei $ax+by+c=0$, unde coef $a,b,c$ se determină prin aruncarea a trei zaruri. Care este probabilitatea ca dreapta obținută să treacă prin pct de coord. $(1,-1)$.

1|x=1)

$$1,3,3 \rightarrow x+3y+3=0$$

Dacă $a, b$ și $c$ sunt v.a. independente care descriu coef dreptei

$$\underset{X_1, X_2, X_3}{(a,b,c)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

$d: ax+by+c=0$ trece prin $(1,-1) \Leftrightarrow a-b+c=0$.

$P(a-b+c=0)=?$

$$P(a-b+c=0) = P(a+c=b) = P(a+c=b,\ b\in\{1,..,6\})$$

$$= P(a+c=b,\ \bigcup_{i=1}^{6}\{b=i\}) = \sum_{i=1}^{6} P(a+c=b,\ b=i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{6} P(a+c=i,\ b=i) = \sum_{i=1}^{6} P(a+c=i)\underbrace{P(b=i)}_{1/6}$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} P(a+c=i) = \frac{1}{6}\sum_{i=2}^{6} P(a+c)=i$$

$$P(a+c=i) = P(a+c=i,\ a=\{1,..,6\}) = \sum_{k=1}^{6} P(a+c=i, a=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{6} P(a=k,\ c=i-k)$$

Indep

$$\sum_{k=1}^{6} P(a=k)\,P(c=i-k) \qquad i=\{2,..6\} \quad k=\{1,..,i-1\}$$

$$= \sum_{k=1}^{i-1} P(a-k)\,P(c=i-k)$$

$$P(a-b+c)=0) = \frac{1}{6}\sum_{i=2}^{6}\sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{P(a=k)}_{1/6}\underbrace{P(c=i-k)}_{1/6}$$

$$= \frac{1}{6^3}\sum_{i=1}^{6}\sum_{k=1}^{i-1} 1$$

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{k=1}^{i-1} 1 = \sum_{i=2}^{6}(i-1) = \sum_{i=1}^{5} i = 1+2+3+4+5 = \frac{5\cdot 6}{2} = 15$$

$\mathbb{P}(a-b+c=0)=\frac{15}{6^3}$

② Probabilitatea ca o rachetă lansată spre o țintă să nu fie interceptată de un sistem de apărare antirachetă este de 2/3. Știind că racheta nu a fost interceptată, șansele de succes sunt de 75%. Pp că patru rachete sunt ~~aruncate~~ lansate spre aceeași țintă în manieră indep.

a) Care este prob ca toate cele 4 rachete să își atingă ținta? Dar prob ca cel puțin 2 să atingă ob?

b) Câte rachete trb lansate pt avea cel puțin 99% șanse ca ținta să fie atinsă.

Sol Fie $X_i=\begin{cases}1, & \text{racheta } i \text{ atinge ținta}\\ 0, & \text{altfel}\end{cases}$

A - ev. prin care o rachetă a fost interceptată de sistemul antirachetă

$\mathbb{P}(X_i=1) \underset{\uparrow}{=} \mathbb{P}(X_i|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(X_i=1|A^c)\,\mathbb{P}(A^c)$

formula prob totale $= 0\times\mathbb{P}(A)+\frac{3}{4}\times 2/3 = 1/2$

$\mathbb{P}$(toate cele 4 rachete să își atingă ținta) $=\mathbb{P}(\underbrace{X_1+X_2+X_3+X_4}_{\text{nr de rachete din cele 4 care își ating ținta}}=4)$

$=\mathbb{P}(X_1=1, X_2=1, X_3=1, X_4=1) \overset{\text{indep}}{=}$

$=\mathbb{P}(X_1=1)^4=\frac{1}{16}$ $\qquad C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-4}$

$X_1+X_2+X_3+X_4 \sim B(4,\frac{1}{2})$

$\mathbb{P}$(cel puțin 2 să își atingă ținta) $=\mathbb{P}(X_1+X_2+X_3+X_4\geq 2)$

$=1-\mathbb{P}(X_1+X_2+X_3+X_4<2) = 1-\mathbb{P}(X_1+X_2+X_3+X_4=0)-\mathbb{P}(X_1+X_2+X_3+$

$=1-C_4^0(1/2)^0(1-1/2)^{4-0}-C_4^1(1/2)^1\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-1}=1-\frac{5}{16}=\frac{11}{16}$

b) Determinăm n a.î. $\mathbb{P}(\underbrace{X_1+X_2+\ldots+X_n}\geq 1)\geq 0.99$

$\hookrightarrow$ nr de rachete din cele n lansate își ating ținta

$X_1+X_2+\ldots+X_n \sim B(n,\frac{1}{2})$

$\mathbb{P}((X_1+\ldots+X_n)\geq 1) = 1-\mathbb{P}(X_1+X_2+\ldots+X_n=0) = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$1-\frac{1}{2^n} \geq 0.99 \Rightarrow 0.01 \geq \frac{1}{2^n} \cdot \quad 2^n \geq 100$

$\Rightarrow n \geq \frac{\ln 100}{\ln 2}$
$n$ - cel mai mic $\Big\} \Rightarrow n = \left[\frac{\ln 100}{\ln 2}\right] = 7$

$\frac{\ln 100}{\ln 2} > 6$

③ Să se determine constanta $c \in (0,1)$ a.î.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [1-c, 1+c] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

este densitate de rep. Să se calc. media și varianța unei v.a cu densitatea $f$.

<u>Sol</u> Pt a fi densitate de rep.

a) $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \mid c \in (0,1)$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.

ⓐ $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq 0 \ \forall x$

$\Leftrightarrow x > 0$

$1-c \leftarrow$

$\Leftrightarrow 1-c > 0 \Rightarrow 1 > c$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = \int_{1-c}^{1+c} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_{1-c}^{1+c} = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{1+c}{1-c} = 1 \Leftrightarrow \frac{1+c}{1-c} = e$$

$1+c = e(1-c)$

$x_v = 1)$ $\quad 1+c = e - e \cdot c$

$c(1+e) = e-1$

$c = \frac{e-1}{1+e}$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{x} \mathbb{1}_{[1-c,1+c]}\,dx =$$

$$= \int_{1-c}^{1+c} dx = 1+c-(1-c) = 2c$$

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}(X))^2 = \int$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{1-c}^{1+c} x^2 \frac{1}{x}\,dx = \int_{1-c}^{1+c} x\,dx$$

$$= x^2/2 \Big|_{1-c}^{1+c} = \frac{1}{2}(1+c+1-c)(1+c-1+c) = 2c$$

$$Var(X) = 2c - 2c^2 = 2c(1-2c) \quad , \; c = \frac{e-1}{e+1}$$

④ $f(x) = \dfrac{A}{e^x + e^{-x}} \quad , x \in \mathbb{R}$

**proprietati densitate de probabilitate**
**+ Determinarea functiei de repartitie F(x)**

a) $A = ?$ a.î. $f$ este densitate de probabilitate

b) Să se det $F(x)$ și $\mathbb{P}(X \geq 0)$, $\mathbb{P}(X<1 \mid X \geq 0)$

Sol

a) $A > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{e^x + e^{-x}}\,dx = A\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = A\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + \frac{1}{e^x}}\,dx =$$

$$= A\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = A\int_{0}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$\frac{\sin}{\cos}$ $\qquad e^x = t$, $\quad e^x dx = dt$

$$= \arctg(t)\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \frac{2}{\pi}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{2}{\pi} \frac{1}{e^t + e^{-t}}\,dt \overset{e^t = u}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{e^x} \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \frac{2}{\pi} \arctg(u)\Big|_0^{e^x} = \frac{2}{\pi} \arctg(e^x)$$

$\mathbb{P}(X \geq 0) = 1 - \mathbb{P}(X < 0) \overset{\text{continua}}{=} 1 - F(0) = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(1) = 1 - 1/2 = 1/2$

$\mathbb{P}(X < 1 | X \geq 0) = \frac{\mathbb{P}(X < 1, X \geq 0)}{\mathbb{P}(X \geq 0)} = \frac{\mathbb{P}(0 \leq X < 1)}{\mathbb{P}(X \geq 0)}$

$= \frac{F(1) - F(0)}{1/2} = \frac{\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(e) - \frac{1}{2}}{1/2}$

(4) $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-kx}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, k > 0$

a) Det $\alpha = ?$ $f$ este densitate

b) Fcția de rep și media și varianța

c) Calc $\mathbb{P}(0 < X < 1/k) = ?$

(5) Ne interesăm la cantitatea de grâu recoltată de un agricultor într-o anumită zi. Avem urm. date: dacă bate vântul atunci nu avem recoltă ($=0$)

Dacă nu bate vântul dar plouă, atunci agricultorul folosește o mașină pt timp umed și în acest caz recolta va fi o v.a. rep uniform pe interv $[4, 6]$ tone

Dacă nu bate vântul și nu plouă, atunci recolta este o v.a. rep. uniform pe $[1, 9]$ tone. Pt o zi tipică probabilitatea să bată vântul este de $1/6$ și dacă nu este vânt atunci prob să plouă este de $3/10$.

Calculați și trasați fcția de rep a v.a. care rep recolta de grâu din ziua coresp. Calc media și varianța cantității de grâu. / grafic în R

$\geq$ prob. când la un ev. / rep nu-s discrete sunt cont

Curs 12

repartitii comune, marginale si conditionate

CURS 12

# Repartiții comune, marginale și condiționate

a) Cazul v.a. discrete

Reamintim: Fie $X$ și $Y$ două v.a. discrete cu $X \in \{x_1, .., x_m\}$ și $Y = \{y_1, .., y_n\}$

$p_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X=x, Y=y)$ - rep comună **reparitia comuna**

Având dată rep comună $p_{X,Y}(x,y)$ avem: **repartitia marginala**

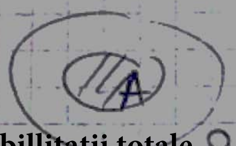
$$p_X(x) = \mathbb{P}(X=x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y) \rightarrow \text{rep. marginală a lui } X \text{ și } Y$$

$$p_Y(y) = \mathbb{P}(Y=y) = \sum_x p_{X,Y}(x,y) \nearrow$$

Repartiția condiționată la un ev $A$, $\mathbb{P}(A) > 0$

**repartitia conditionata**

$$p_{X|A}(x) = \mathbb{P}(X = x|A)$$

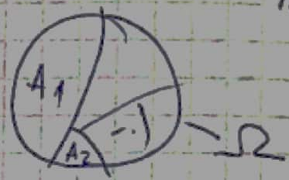



$$\sum_x \mathbb{P}(X=x|A) = 1$$

**formula probabillitatii totale**

Formula prob. totale $A_1, A_2, \ldots, A_n$ disjuncte a.î. $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$\mathbb{P}(A_i) > 0 \Rightarrow$




$$\Rightarrow p_X(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) p_{X|A_i}(x)$$

$\{X = x\} = B$ atunci din formula prob totale pt ev.

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

**repartitia conditionata a lui X la Y = y**

Repartiția condiționată a lui $X$ la $Y=y$ este:

$$\boxed{p_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X=x|Y=y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} p_{X,Y}(x,y) &= p_Y(y) \cdot p_{X|Y}(x|y) = \\ &= p_X(x)\, p_{Y|X}(y|x) \end{aligned}}$$

Formula prob. totale: **formula probabilitatii totale**

$$\boxed{p_X(x) = \sum_y p_Y(y) \cdot p_{X|Y}(x|y)}$$

Obs Putem considera în formula prob. totale de la evenimente ca $B = \{X = x\}$ și $A_i = \{Y = y_i\}$, $i = \{1, \ldots, n\}$

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{p_X(x)\, p_{Y|X}(y|x)}{p_Y(y)}$$

$$\boxed{p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_X(x)\, p_{Y|X}(y|x)}{\sum_{x} p_X(x')\, p_{Y|X}(y|x')}}$$ Formula lui Bayes

* Formula lui Bayes

Functu de variabile aleatoare :

Functii de variabile aleatoare

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ , $Z = g(X, Y)$

$$p_Z(z) = \mathbb{P}(Z = z) = \sum_{\{(x,y) | g(x,y) = z\}} p_{X,Y}(x, y)$$

media E[Z]

$$\boxed{E[Z] = E[g(X,Y)] = \sum_{x} \sum_{y} g(x,y)\, p_{X,Y}(x,y)}$$

Dacă $g(x,y) = ax + by + c$ atunci

$$E[g(X,Y)] = a E[X] + b E[Y] + c$$

Exp „nr accidente" O gâscă depune un nr aleator de ouă $N$, $N \sim Pois(\lambda)$. Să presupunem că fiecare eclozează cu prob. $p$ indep. de celelalte. Fie $X$ nr de ouă care au eclozat și $Y$ nr care nu au eclozat, $X + Y = N$. Vrem să determinăm rep. comună a lui $X$ și $Y$.

exercitiu repartitie comuna

Sol. $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$ , $i, j \geq 0$

Știind nr de ouă depuse, $\{N = n\}$ atunci $X / N = n \sim B(n, p)$ și în acelaș mod $Y/N = n \sim B(n, 1-p)$

Putem calcula $\mathbb{P}(X = i, Y = j / N = n) = 0$ , $n \neq i+j$, și dacă $n = i + j$ atunci

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j / N = i+j) = \mathbb{P}(X = i / N = i+j)$$ (intersecție)

$$= \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j$$

Astfel, $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j | N = i+j)\, \mathbb{P}(N = i+j)$

$$= \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}$$

$$= \frac{(i+j)!}{i!\, j!} p^i (1-p)^j \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^i \lambda^j}{(i+j)!}$$

$1 = p + (1-p) \Rightarrow \lambda = \lambda p + \lambda(1-p)$

$$\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \underbrace{\frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^i}{i!}}_{\sim Pois(\lambda p)} \times \underbrace{e^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}}_{\sim Pois(\lambda(1-p))}$$

ex reprezentare poisson

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X=i) = \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^i}{i!}$$

$$\mathbb{P}(Y=j) = e^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} \Rightarrow \begin{cases} X \sim Pois(\lambda p) \\ Y \sim Pois(\lambda(1-p)) \end{cases}$$

Observăm că

$$\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=j), \forall i, j$$

$\Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$ independente

dependenta, Poisson, Bernoulli

Obs a) Dacă $X \sim Pois(\lambda p)$, $Y \sim Pois(\lambda(1-p))$ cu $X$ și $Y$ independente $N = X+Y \sim Pois(\lambda)$ și $X/N = n \sim B(n, p)$

b) Dacă $N \sim Pois(\lambda)$ și $X/N = n \sim B(n, p)$ atunci $X \sim Pois(\lambda p)$ și $Y = N - X \sim Pois(\lambda(1-p))$ iar $X \perp\!\!\!\perp Y$.

b) Cazul v.a continue

Cazul variabilelor aleatoare continue

Extindem rezultatele de la cazul discret la cazul continuu.

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ câmp de probabilitate și $X$ și $Y$ două v.a. continue. Spunem că perechea $(X, Y)$ formează un cuplu de v.a. cont dacă $\exists\, f_{(X,Y)} \geq 0$ a.î.

cuplu de variabile aleatoare continue

$$\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \iint_{(x,y)\in A} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy, \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^2$$

$f_{(X,Y)}$ (notată și $f_{X,Y}$) s.n. densitatea comună a lui $X$, $Y$.

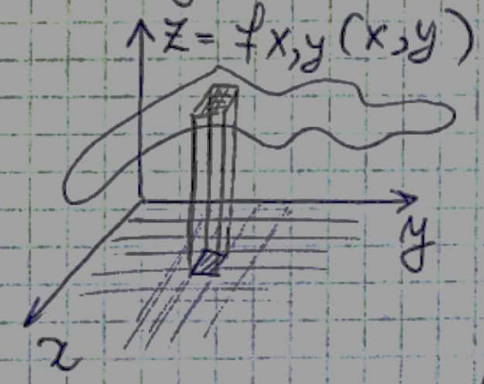
$f_{(x,y)} = f_{X,Y}$ densitatea comuna a lui X si Y

Caz particular, $A = [a,b] \times [c,d]$ atunci

$$P((X,Y) \in A) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

Dacă în plus $A = \mathbb{R}^2$ atunci $\mathbb{P}((x,y)\in\mathbb{R}^2) = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1 \qquad \left(\int_{\mathbb{R}^2} f = 1\right)$$



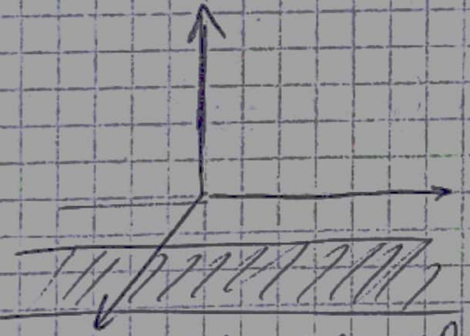

$$\mathbb{P}(X\in(x,x+dx),\ Y\in(y,y+dy)) = \int_x^{x+dx}\int_y^{y+dy} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv$$

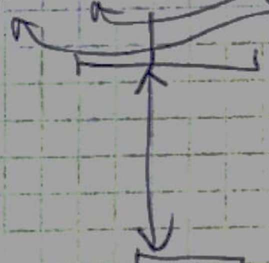
$$\simeq f_{X,Y}(x,y)\cdot dx\,dy$$

unitatea de arie

Densitatea $f_{X,Y}(x,y)$ conține toată informația despre X și Y, putem calcula probabilitatea oricărui eveniment ce implică pe X și Y

În particular, $\mathbb{P}(X\in A) = \mathbb{P}((X,Y)\in A\times\mathbb{R}) = \int_A\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$





Dacă X admite densitatea $f_X$ atunci $\mathbb{P}(X\in A) = \int_A f_X(x)\,dx$

Densitatea marginală: **Densitatea marginala $f_X(x)$**

$$\boxed{f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy}$$

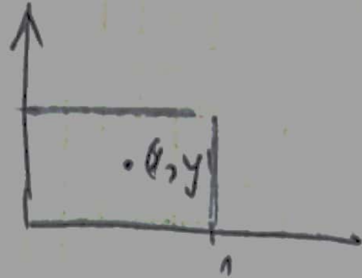
În mod similar,

$$\boxed{f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx}$$ densitatea marginală a lui Y.

Y. Exp Romeo și Julieta își dau întâlnire într-o zi specială la o anumită oră și ajung la punctul de întâlnire cu o întârziere (aleatoare) care variază între 0 și 1h. Fie

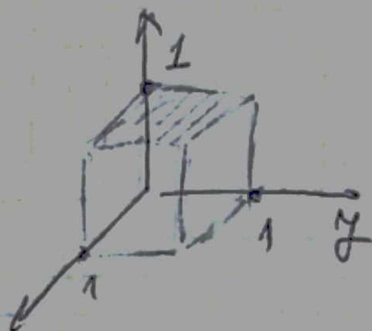
dy X și Y durata de întârziere. Densitatea comună $(X,Y)$?

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$




$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = 1$$

$$\int_0^1\int_0^1 c\, dx\, dy = 1 \Rightarrow c = 1$$




Fie $S \subseteq \mathbb{R}^2$ (triunghi, dreptunghi, ..)

definim densitatea uniformă pe $S$, $(X, Y) \sim U(S)$

**densitatea uniforma pe o multime**

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in S \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

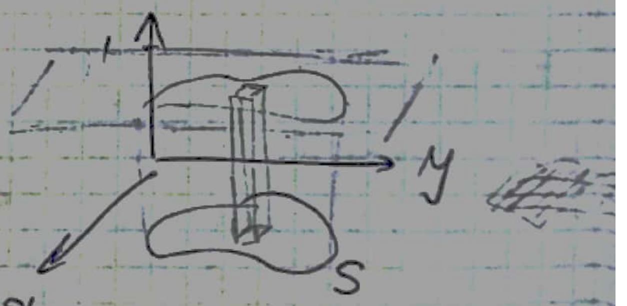
c - constantă

Care este c? $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} c\, 1_S(x,y)\, dx\, dy = 1 \Rightarrow c \iint_S dx\, dy = 1$$

$$\Downarrow$$

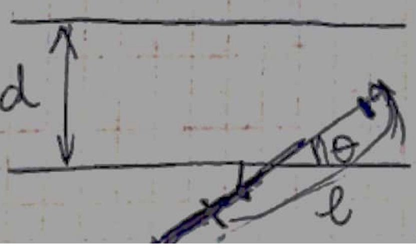
$$c = \frac{1}{Aria(S)}$$




$$P((X,Y) \in A) = \iint_A \frac{1}{Aria(S)}\, dx\, dy = \frac{Aria(A)}{Aria(S)}$$

Exp (Problema acului lui Buffon)

O suprafață este marcată cu linii paralele la distanță $d$ una față de cealaltă. Să presupunem că aruncăm un ac de lungime $l < d$. Care este prob ca acul să intersecteze una dintre linii.



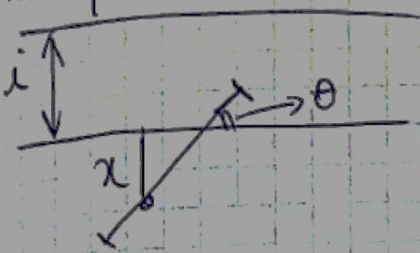

Pentru a modela poz acului ne vom interesa la următorii param:

- $\theta$ - unghiul ascuțit format de axa acului cu dreptele paralele
- $X$ : distanța de la mij acului la

cea mai apropiată dreaptă paralelă

Presupunem că perechea $(X,\theta)$ este uniform repartizată pe mulțimea

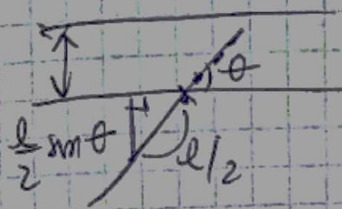
uniform repartizata



$$A = \{(x,\theta) \mid 0 \le x \le \frac{d}{2},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$$

$$f_{(X,\theta)}(x,\theta) = \begin{cases} \frac{4}{\pi d}, & 0 \le x \le d/2 \\ & 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

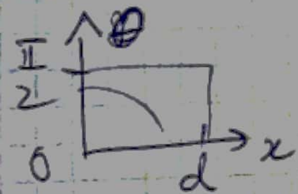
Acul intersectează una dintre linii dacă și numai dacă $X \le \frac{l}{2}\sin\theta$.



Vrem să calc prob că $X \le \frac{l}{2}\sin\theta$

$$P\left(X \le \frac{l}{2}\sin\theta\right)$$

v.a



$$P\left(X \le \sin\theta\,\frac{l}{2}\right) = P((X,\theta) \in B) = \iint_B f_{X,\theta}(x,\theta)\,dx\,d\theta$$

$$B = \{(x,\theta) \in A \mid x \le \frac{l}{2}\sin\theta\}$$

$$= \iint_B \frac{4}{\pi d}\,\mathbb{1}_{[0,\frac{d}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]}(x,\theta)\,dx\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{l}{2}\sin\theta} \frac{4}{\pi d}\,dx\,d\theta =$$

$$= \frac{4}{\pi d}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{l}{2}\sin\theta} dx\,d\theta = \frac{4}{\pi d}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2}\sin\theta\,d\theta = \frac{2l}{\pi d}(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2l}{\pi d}$$

**Def** Fie $X$ și $Y$ două v.a pe $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Definim funcția de rep. a cuplului $(X,Y)$ prin

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv$$

$F_{X,Y}(x, y)$ functia de repartitie a cuplulu (X, Y)

**Obs** Densitatea este

densitatea $f_{x,y}(x, y)$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$$

Lù: Media unei fcți $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Z = g(X,Y)$ este

media

$$\boxed{E[g(X,Y)] = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\,f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy}$$

241 LABORATOR

① Fie X v.a care să reprezinte cantitatea de recoltă dintr-o zi
Y v.a. care ne dă starea meteo

$$Y = \begin{cases} a, & \text{bate vântul} \\ b, & \text{nu bate vântul, dar plouă} \\ c, & \text{nu bate vântul și nici nu plouă} \end{cases}$$

A – {afară bate vântul} $\{Y=a\} = A$
B – {afară plouă} $\{Y=b\} = A^c \cap B$
$\{Y=c\} = A^c \cap B^c$

Din ipoteză avem:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(B/A^c) = \frac{3}{10}$$

$$\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A^c) \cdot \mathbb{P}(B/A^c) = (1-\mathbb{P}(A)) \cdot \mathbb{P}(B/A^c)$$
$$= \frac{5}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(A^c) \cdot \mathbb{P}(B^c/A^c) = \mathbb{P}(A^c) \cdot (1-\mathbb{P}(B/A^c))$$
$$= \frac{5}{6} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{12}.$$

Am obținut

$$Y \sim \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1/6 & 1/4 & 7/12 \end{pmatrix}$$

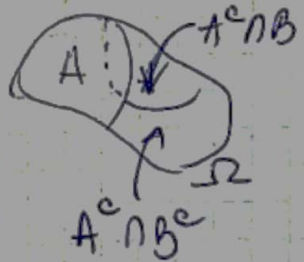
Legătura dintre cantitatea de recoltă și starea vremii

$$\left.\begin{array}{l} X = 0 \text{ dacă } Y = a \\ X/Y=b \sim \mathcal{U}([4,6]) \\ X/Y=c \sim \mathcal{U}([1,9]) \end{array}\right\} \text{f. o partiție pe } \Omega \,!$$

$$\underbrace{\mathbb{P}(X \le x)}_{F_X(x)} \underset{\substack{\text{formula} \\ \text{prob. totale}}}{=\!=} \mathbb{P}(X \le x / Y=a)\,\mathbb{P}(Y=a) + \mathbb{P}(X \le x/Y=b)\,\mathbb{P}(Y=b)$$
$$+ \mathbb{P}(X \le x / Y=c)\,\mathbb{P}(Y=c)$$

formula probabilitatii totale

În același mod putem să scriem cu repr. cu $A_1 = A$
$A_2 = A^c \cap B$
$A_3 = A^c \cap B^c$

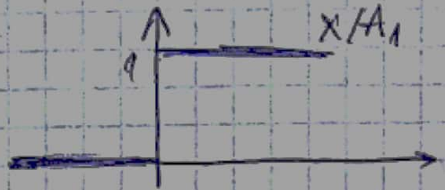



$$\mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(X \le x \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(X \le x \mid A_2)\,\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(X \le x \mid A_3)\,\mathbb{P}(A_3)$$

"putem face asta ↑ pt că ev. formează o partiție // dacă mulț. $A_4 = \Omega \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

Știm că $X|A_1 = 0$, $X|A_2 \sim \mathcal{U}([4,6])$, $X|A_3 \sim \mathcal{U}([1,9])$

$$\mathbb{P}(X \le x \mid A_1) = \mathbb{P}(X \le x \mid y = a) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$$

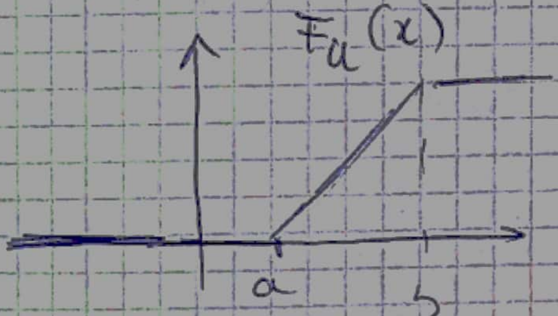


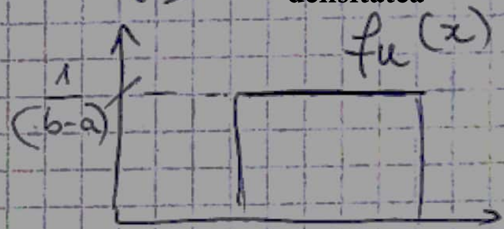

Dacă $U \sim \mathcal{U}([a,b])$ atunci

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ 1, & x \ge \end{cases}$$

**Functia de repartitie**

**densitatea**




fcția de repartiție

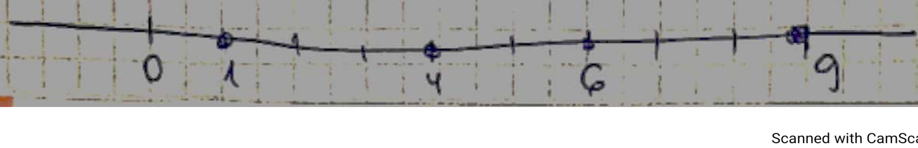
densitatea

$X|A_2 \sim \mathcal{U}([4,6])$

$$\mathbb{P}(X \le x \mid A_2) = \begin{cases} 0, & x < 4 \\ \dfrac{x-4}{2}, & 4 \le x \le 6 \\ 1, & x \ge 6 \end{cases}$$

$X|A_3 \sim \mathcal{U}([1,9])$

$$=6)+ \quad \mathbb{P}(X \le x \mid A_3) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \dfrac{x-1}{8}, & 1 \le x \le 9 \\ 1, & x \ge 9 \end{cases}$$



$$\mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(X \le x / A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(X \le x / A_2)\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(X \le x \mid A_3)\mathbb{P}(A_3)$$
$\Downarrow$
$x \in \mathbb{R}$

Daca $x < 0$ atunci $\mathbb{P}(X \le x) = 0$

Dacă $x \in [0,1)$

$$\mathbb{P}(X \le x) = 1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{7}{12} = \frac{1}{6}$$

Dacă $x \in [1,4)$ liniară

$$\mathbb{P}(X \le x) = 1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{4} + \frac{x-1}{8} \cdot \frac{7}{12} = \frac{1}{6} + \frac{7}{12}\left(\frac{x-1}{8}\right)$$

Dacă $x \in [4,6)$

$$\mathbb{P}(X \le x) = 1 \times \frac{1}{6} + \frac{x-4}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{x-1}{8} \times \frac{7}{12} = \frac{1}{6} + \frac{x-4}{8} + \frac{7}{12}\left(\frac{x-1}{8}\right.$$

Dacă $x \in [6,9)$

$$\mathbb{P}(X \le x) = 1 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{4} + \frac{x-1}{8} \times \frac{7}{12} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{7}{12}\left(\frac{x-1}{8}\right)$$

Dacă $x \ge 9$

$$\mathbb{P}(X \le x) = 1 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{7}{12} = 1.$$

**Media conditionata**

$$\mathbb{E}[X/A] = \begin{cases} \sum_x x\, p_{X/A}(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X/A}(x)\, dx \end{cases}$$

Media
$$\sum x\, p_X(x)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)$$

$$\mathbb{P}(X \in B \mid A) = \int_B f_{X/A}(x)\, dx$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X/A_i]\,\mathbb{P}(A_i)$$

În cazul nostru:

$\mathbb{E}[X/A_1] = 0$ pt că $X/A_1 = 0$

$\mathbb{E}[X/A_2] = 5$

$\mathbb{E}[X/A_3] = 5.$

$U \sim \mathcal{U}[a,b]$ atunci

$$\mathbb{E}[U] = \frac{b+a}{2}$$

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}[X|A_1]\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{E}[X|A_2]\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{E}[X|A_3]\mathbb{P}(A_3)$$
$$= 0 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{4} + 5 \times \frac{7}{12} = \frac{50}{12}$$

$Var(X) = ?$

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[g(x)|A_i]\mathbb{P}(A_i)$$

$g(x) = x^2$ atunci $\mathbb{E}[X^2] = \sum \mathbb{E}[X^2|A_i]\mathbb{P}(A_i)$

$\mathbb{E}[X^2|A_1] = 0$ $\qquad X|A_2 \sim \mathcal{U}([4,6])$

$\mathbb{E}[X^2|A_2] =$

$U \sim \mathcal{U}([a,b]) \Rightarrow \mathbb{E}[U^2$

$$\mathbb{E}[U^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_a^b$$
$$= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$\mathbb{E}[X^2|A_2] = \frac{4^2+4\times 6+6^2}{3}$$

$$\mathbb{E}[X^2|A_3] = \frac{1+1\times 9+9^2}{3}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = 0 \times \frac{1}{6} + \frac{76}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{91}{3}\times\frac{7}{12}$$

$$Var(X) = \left(\frac{50}{12}\right)^2 \ldots$$

trasăm fct de rep pe $(-1, 10)$

Ex Să se det probabilitatea ca suma a 2 v.a. luate la întâmplare în $[0,1]$ să nu depășească val 1, iar prod să nu depășească val 2/9.

$X, Y \sim \mathcal{U}[0,1]$ independente

$$\mathbb{P}\left(X+Y \leq 1,\ x\cdot y \leq \frac{2}{9}\right)$$

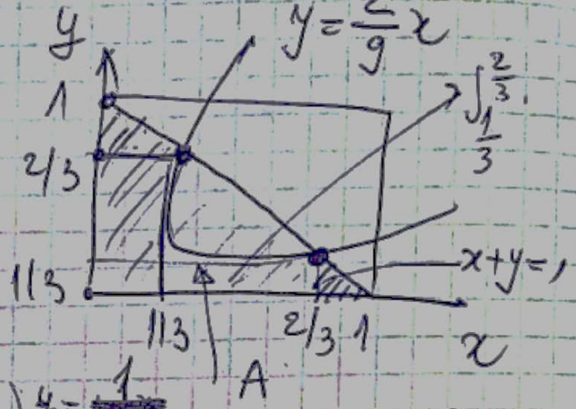
$P\{(x,y)\in[0,1]^2 \mid x+y\le 1,\ xy\le 2/9\}$

**Probabilitate si produs intre variabile**

$\mathbb{P}((x,y)\in A) = \iint_A f_{XY}(x,y) = \iint_A 1_{[0,1]}(y)\, 1_{[0,1]}(x)\, dx\, dy$

$0 < x \le 1-y$ $\qquad (x+y)^2$

$\iint_A$




$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{2}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ y^2-y+\frac{2}{9}=0 \end{cases} \begin{matrix} y_1=\frac{1}{3} \\ y_2=\frac{2}{3} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{2}{3} \\ x_2=1/3 \end{cases}$

$\hookrightarrow$ Calcul temă!

CURS

## Repartiții condiționate

**Curs13 - repartitii conditionate**

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ câmp de probabilitate și $X:\Omega\to\mathbb{R}$ v.a. continuă și $A$ un eveniment (din $\mathcal{F}$) cu $\mathbb{P}(A)>0$.

Definim densitatea cond a lui $X$ la $A$, funcția $f_{X/A}\ge 0$ care satisface relația

**densitatea conditionata a lui X la A - P(X ap B | A)**

$$\mathbb{P}(X\in B/A) = \int_B f_{X/A}(x)\,dx \quad , \forall B\subseteq\mathbb{R}$$

În particular, dacă $B=\mathbb{R}$ atunci $\mathbb{P}(X\in\mathbb{R}/A=1)$ și

$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X/A}(x)\,dx = 1$ ceea ce înseamnă că $f_{X/A}$ este o densitate de probabilitate

**legatura cu densitatea de probabilitate**

În cazul special în care $A\to\{X\in A\}$ și $\mathbb{P}(X\in A)>0$ atunci

$$\mathbb{P}(X\in B/X\in A) = \frac{\mathbb{P}(X\in B, X\in A)}{\mathbb{P}(X\in A)} = \frac{\mathbb{P}(X\in A\cap B)}{\mathbb{P}(X\in A)}$$

$$= \frac{\int_{A\cap B} f_X(x)\,dx}{\mathbb{P}(X\in A)}$$

Pe de altă parte avem

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{P}(X\in B \mid X\in A) = \int_B f_{X\mid\{X\in A\}}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{X\mid X\in A}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{\mathbb{P}(X\in A)}, & x\in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Exp (cazul rep. uniforme) cazul repartitiei uniforme

$X \sim \mathcal{U}([a,b])$, $[c,d]\subset[a,b]$

$$f_{X\mid X\in[c,d]}(x) = ? \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{\mathbb{P}(X\in[c,d])}, & x\in[c,d] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

$$\mathbb{P}(X\in[c,d]) = \int_c^d f_X(x)\,dx = \frac{d-c}{b-a}$$

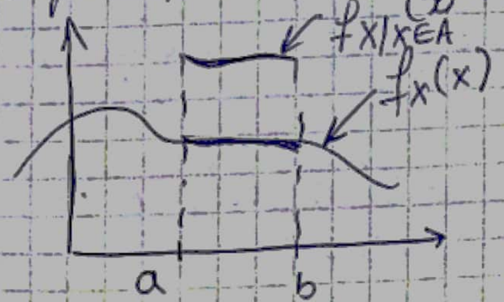
Astfel,

$$f_{X\mid X\in[c,d]}(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)}{\frac{d-c}{b-a}}, & x\in[c,d] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$\| $$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{d-c}, & x\in[c,d] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Altfel spus $X\mid X\in[c,d] \sim \mathcal{U}([c,d])$




formula probabilitatii totale

Dacă evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formează o partiție pe $\Omega$,

atunci $\boxed{f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{X\mid A_i}(x)\,\mathbb{P}(A_i)}$ formula prob. totale

Pt a verif relația anterioară putem să observăm că:

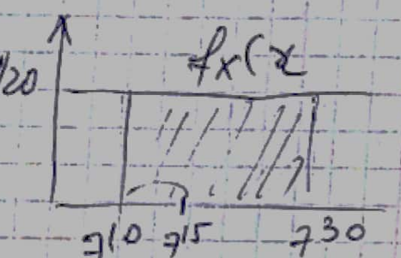
$$\mathbb{P}(\underbrace{X \le x}_{B}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\underbrace{X \le x / A_i}_{B}) \mathbb{P}(A_i)$$

Avem:
$$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{x} f_{X/A_i}(t)\,dt \cdot \mathbb{P}(A_i)$$

și prin derivare după $x$ avem relația două.

Exp: Metroul circula la intervale de 15 min începând cu ora $5^{00}$ dimineata. Presupunem că voi ajungeți in stație între ora $7^{10}$ - $7^{30}$ uniform pe acest interval. Ne interesăm la densitatea timpului de așteptare până la sosirea primului metrou.

$X$ - timpul de sosire al studentului $\sim \mathcal{U}([7^{10} - 7^{30}])$




$Y$ - timpul de așteptare până la sosirea primului metrou

$A = \{7^{10} \le X \le 7^{15}\} = \{$urcăm în metroul $7^{15}\}$

$B = \{7^{15} < X \le 7^{30}\} = \{$urcăm în metroul $7^{30}\}$

$$f_Y(y) = f_{Y/A}(y)\mathbb{P}(A) + f_{Y/B}(y)\mathbb{P}(B)$$ functia de repartitie in functie de 2 evenimente

$\mathbb{P}(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ Știind că $A$ s-a realizat, timpul de așteptare $Y$ este uniform pe $[0,5]$

$\mathbb{P}(B) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ Știind că $B$-ul s-a realizat, timpul de așteptare $Y$ este uniform pe $[0,15]$

$f_{Y/A}(y) = \frac{1}{5}, \quad 0 \le y < 5$

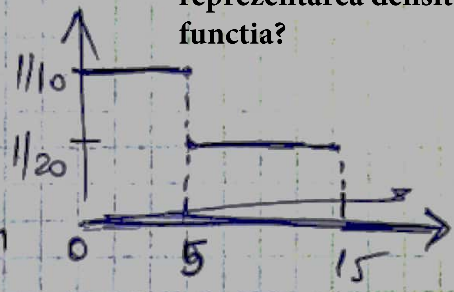
$f_{Y/B}(y) = \frac{1}{15}, \quad 0 \le y \le 15$

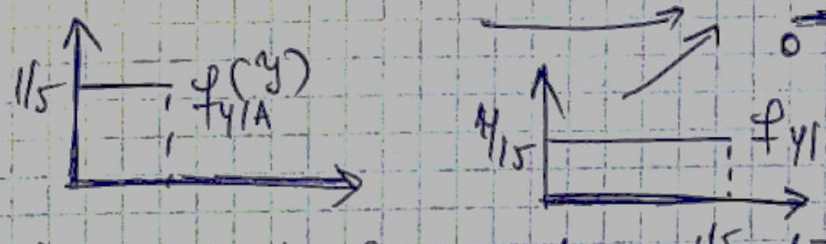
$$f_Y(y) = f_{Y/A}(y)\mathbb{P}(A) + f_{Y/B}(y)\mathbb{P}(B) = \begin{cases} \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{15} \cdot \frac{3}{4}, & 0 \le y < 5 \\ 0 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{15} \cdot \frac{3}{4}, & 15 < y \le 15 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1_{[0,5]}(y) \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{15} \cdot 1_{[0,15]}(y) \cdot \frac{3}{4}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & 0 \le y \le 5 \\ \frac{1}{20}, & 5 < y \le 15 \end{cases}$$

**reprezentarea densitatii pe toata functia?**



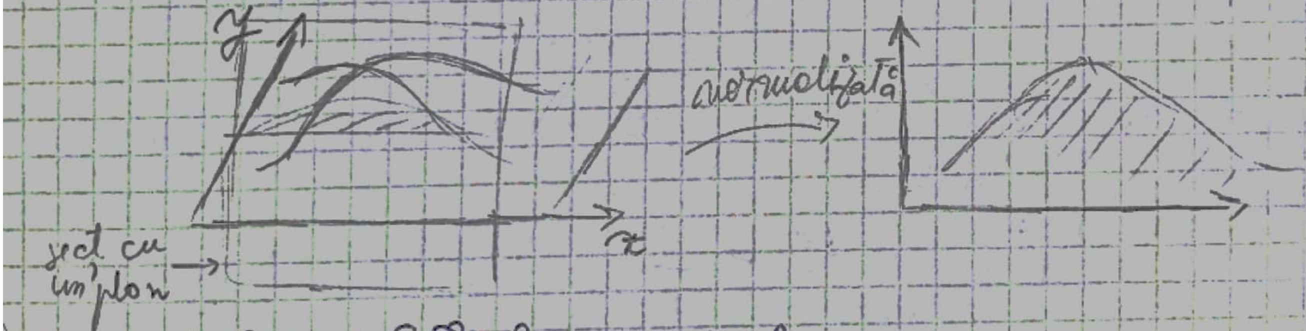

Fie $X, Y$ două v. a cont cu densitatea comună $f_{X,Y}(x,y)$.
Pentru fiecare $y$ a.î. $f_Y(y) > 0$, definim densitatea cond. a lui $X$ la $Y = y$ prin

**densitatea conditionata a lui X la Y**

$$\boxed{f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}}$$

Disc.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$




$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx$$

Atunci $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}\, dx =$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx}{f_Y(y)} = \frac{f_Y(y)}{f_Y(y)} = 1$$

Astfel densitatea cond. $f_{X|Y}(x|y)$ este o densitate de prob.

Avem:
$$\boxed{\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y) \\ &= f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x) \end{aligned}}$$

$\le y \le 5$

$\le 15$

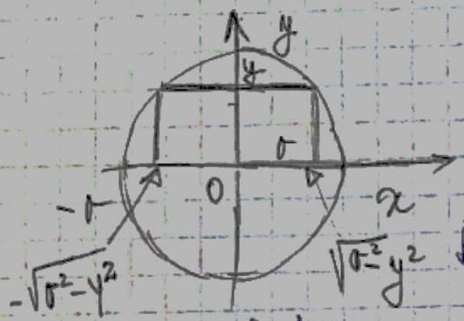
Scanned with CamScanner

**Exp** (Uniformă pe disc)

Presupunem că avem un disc de rază $r$ centrat în origine
$$D = \{ (x,y) \mid x^2+y^2 \le r^2 \} \quad // (x-a)^2+(y-b)^2 \le r^2$$

$(X,Y)$ repartizat uniform pe disc $D$
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{Aria(D)}, & x^2+y^2 \le r^2 \\ 0, & altfel \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2 \le r^2 \\ 0, & altfel \end{cases}$$

Vrem să calculăm $f_{X|Y}(x|y) = ?$



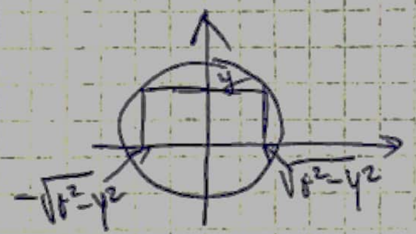

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$ ex densitate marginala

Densitatea marginală a lui $Y$: $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi r^2} \mathbb{1}_D(x,y)\,dx = \frac{1}{\pi r^2}\int_D dx$$

Rezolvând ecuația $x^2+y^2=r^2$ pt $x$ avem sol $\pm\sqrt{r^2-y^2} \Rightarrow$
$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dx = \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2}, \quad -r \le y \le r$$

În mod similar, $f_X(x) = \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2}, \quad -r \le x \le r$

$X, Y$ nu sunt rep uniform pe $[-r, r]$ ex nu avem repartitie uniforma
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{\pi r^2}\mathbb{1}_D(x,y)}{\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2}\,\mathbb{1}_{[-r,r]}(y)} = \frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}$$




Astfel, pentru $Y$ fixat, $f_{X|Y}$ este densitatea uniformă.

restrictionare pentru a avea uniformitate

**Obs** Cum putem genera puncte rep uniforme pe $D$:
- generăm un pct $Y$ cu densitatea $f_X(y) = \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2}$
- dat fiind un pct $Y$ / $Y=y$ / generăm uniform pe

Intervalul $[-\sqrt{a^2-y^2}, \sqrt{a^2-y^2}]$ un punct $x$
- perechea $(x, y)$ este $\mathcal{U}(D)$

Obs Având densitatea condiționată $f_{X|Y}(x|y)$ putem...

Independenta v.a cont independenta variabilelor aleatoare continue

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de prob și $X$ și $Y$ două v.a. continue. Spunem că $X$ și $Y$ sunt independente și notăm $X \perp\!\!\!\perp Y$, dacă $\boxed{f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y), \forall x, y}$

Am văzut că $f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)$, ceea ce ar implica faptul că $\boxed{f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)}$ $\forall y$ a.î. $f_Y(y) > 0$ $\forall x$

În mod similar, $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$ $\forall x$ a.î. $f_X(x) > 0$ $\forall y$

Obs Dacă $X$ și $Y$ sunt indep atunci $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$ $\forall A, B \subset \mathbb{R}$

Daca X si Y sunt independente, atunci functia de repartitie va fi

Avem: $F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y)$
$= F_X(x) F_Y(y)$

conditie independenta

(P) Dacă densitatea comună a lui $X$ și $Y$ se poate factoriza sub forma $f_{X,Y}(x,y) = g(x) h(y)$, $\forall x, y$, atunci $X \perp\!\!\!\perp Y$.

proprietati independenta

(P) Dacă $X$ și $Y$ sunt indep atunci media
$$\mathbb{E}[g(X) h(Y)] = \mathbb{E}[g(X)]\,\mathbb{E}[h(Y)]$$
$\forall$ functie $g, h$

Particularizând: a) $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$
b) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

**Formula lui Boyes**

# Formula lui Boyes

$$\xrightarrow[f_X(x)]{X} \boxed{\text{Zgomot}} \xrightarrow[f_{Y|X}(y|x)]{Y} \boxed{\text{Inferență}} \longrightarrow f_{X|Y}(x|y)$$

$$\left.\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y) \\ &= f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x)}{f_Y(y)}}$$

Prin integrare și ținând cont că $\int_{\mathbb{R}} f_{X|Y}(x,y)\,dx = 1$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x)\, dx$$

* Formula lui Bayes

Formula lui Bayes

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x')\, f_X(x')\, dx'}}$$

Cazul hibrid

Cazul hibrid (o v.a. cont și una discretă)

$$\xrightarrow[0,1]{\text{Semnal discret}} \boxed{\begin{matrix}\text{Zgomot} \\ N(0,1)\end{matrix}} \xrightarrow[\text{cont}]{Y}$$

$$\mathbb{P}(Y=y)=0$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \mid Y=y) &\simeq \mathbb{P}(A \mid Y \in [y, y+dy]) \\ &= \frac{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(Y \in [y, y+dy] \mid A)}{\mathbb{P}(Y \in [y, y+dy])} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A) \int_y^{y+dy} f_{Y|A}(t)\,dt}{\int_y^{y+dy} f_Y(t)\,dt} \simeq \frac{\mathbb{P}(A)\, f_{Y|A}(y)\,dy}{f_Y(y)\,dy}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A \mid Y=y) = \mathbb{P}(A)\,\frac{f_{Y|A}(y)}{f_Y(y)}}$$

*

$f_Y(y) = P(A) f_{Y|A}(y) + P(A^c) + f_{Y|A^c}(y)$

$$\boxed{P(A|Y=y) = \frac{f_{Y|A}(y)P(A)}{P(A)f_{Y|A}(y) + P(A^c) f_{Y|A^c}(y)}} \quad *$$

Să ne imaginăm că $A = \{X = x\}$ unde $X$ este o v.a discretă

$$P(X=x | Y=y) = \frac{P(X=x) f_{Y|X=x}(y)}{P(X=x) f_{Y|X=x}(y) + P(X\neq x) f_{Y|X\neq x}(y)}$$

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$

$*$ $$= \frac{P(X=x) f_{Y|X}(y|x)}{\sum_{i=1} P(X=x_i) f_{Y|X}(y|x_i)}$$

Formula lui Bayes: discreta si continua

**Formula lui Bayes:**

| X\|Y | disc | cont |
|---|---|---|
| disc | $P(Y=y|X=x) = \frac{P(X=x|Y=y)P(Y=y)}{P(X=x)}$ | $f_{Y|X}(y|x) = \frac{P(X=x|Y=y) f_Y(y)}{P(X=x)}$ |
| cont | $P(Y=y|X=x) = \frac{f_{X|Y}(x|y) P(Y=y)}{f_X(x)}$ | $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)}{f_X(x)}$ |

Formula probabilitatii totale discreta si continua

**Formula prob totale:**

| X\|Y | disc | cont |
|---|---|---|
| disc | $P(X=x) = \sum_y P(X=x|Y=y)P(Y=y)$ | $P(X=x) = \int P(X=x|Y=y) f_Y(y)\,dy$ |
| cont | $f_X(x) = \sum_y f_{X|Y}(x|y) P(Y=y)$ | $f_X(x) = \int f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)\,dy$ |

LABORATOR

Rep discrete
- → Uniformă
- → Bernoulli, Binomială
- → Geometrica
- → Poisson
- → Hipergeometrică

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} x_1 & , 0 < u \le p_1 \\ x_2 & p_1 < u \le p_1 + p_2 \\ x_3 & , p_1 + p_2 \le u \le p_1 + p_2 + p_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_k & , p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1} < u \le p_1 + p_2 + \dots + p_k \\ \vdots & \\ x_n & , p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} \le u < 1 \end{cases}$$

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{(p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1}, p_1 + \dots + p_i]}(u) \\ p_0 = 0 . \end{cases}$$

$U \sim U(0,1) \rightarrow$ cev e int u care se află?

$x_1 \; x_2 \dots x_n$

$1 \; 2 \dots n$

$p_1 \; p_2 \dots p_n \rightarrow$ arbitrar descr.

CURS Curs 14

Exp Să presupunem că sunt două companii A și B care produc becuri inteligente. Becurile produse de compania A au o durată de viață rep. $Exp(\lambda_0)$ iar cele fabricate de B au o durată de viață rep. $Exp(\lambda_1)$ cu $\lambda_0 < \lambda_1$. Am primit un bec inteligent (pe care nu este inscripționată firma). Știm că un bec ales aleator provine de la compania A cu prob $p_0$ și de la B cu prob $p_1 = 1 - p_0$.

Fie T durata de viață a becului primit.

a) Care este fct de rep și densitatea de rep a lui T

b) Are v.a. T proprietatea lipsei de memorie?

c) Fie I v.a. definită prin $I = 1$ dacă becul a fost prods de compania B. Det rep. condiționată a lui I la $T = t$. ("care e prob că becul să fie produs de B, știind că durata de viață este t)

Sol a) T o v.a. continuă

$I = \begin{cases} 1, & \text{dacă becul a fost produs de comp } B \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$ - V.a. discretă

Din ipoteză știm că $T \mid I=0 \sim Exp(\lambda_0)$

$T \mid I = 1 \sim Exp(\lambda_1)$

Mai știm că $\mathbb{P}(I=1) = p_1 = 1 - p_0$, $I \sim B(p_1)$

Funcția de rep. a variabilei $t$ — formula prob. totale

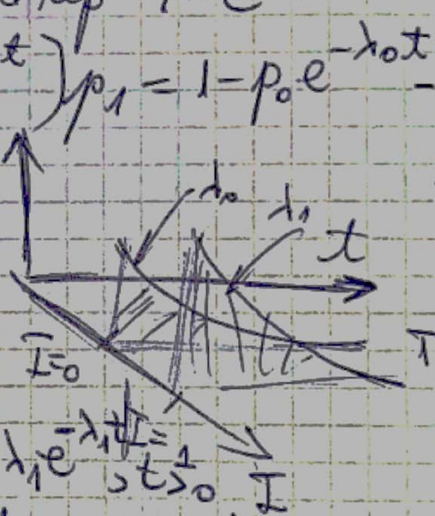
$\hookrightarrow F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}(T \leq t \mid I=0)\,\mathbb{P}(I=0) + \mathbb{P}(T \leq t \mid I=1)\,\mathbb{P}(I=1)$

În cazul unei v.a. rep. $Exp(\lambda)$ avem densitatea $\lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 1$

fct de rep $1 - e^{-\lambda t}$

$\mathbb{P}(t \leq t) = (1 - e^{-\lambda_0 t})\,p_0 + (1 - e^{-\lambda_1 t})\,p_1 = 1 - p_0 e^{-\lambda_0 t} - p_1 e^{-\lambda_1 t}$, $p_1 = 1 - p_0$

Densitatea comună a lui $(T, I)$




Densitatea lui $T$:

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = p_0 \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} + p_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}, \quad t \geq 0$$

b) Cum $\lambda_0 \neq \lambda_1$, forma $p_0\lambda_0 e^{-\lambda_0 t} + p_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$ nu se reduce la o expresie de tipul $\lambda e^{-\lambda t}$ ceea ce înseamnă că v.a. $T$ nu este rep. exponențial.

c) Vom folosi formula lui Bayes pt o v.a. cont și una discretă

$$\mathbb{P}(T=1 \mid T=t) = \frac{f_{T|I}(t \mid 1) \cdot \mathbb{P}(T=t)}{f_T(t)} \quad \text{(Formula lui Bayes)}$$

$f_{T|I}(t \mid 1)$ - este densitatea cond a lui $T$ știind că $I=1$

Cum $T \mid I = 1 \sim Exp(\lambda_1)$ atunci

$$\mathbb{P}(I=1 \mid T=t) = \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \cdot p_1}{p_0 \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} + p_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}} = \frac{p_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}}{p_0 \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} + p_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}}$$

Dacă $t \to \infty$, atunci $\mathbb{P}(I=1 \mid T=t) \to 0$

*Covarianta si corelatia variabilelor aleatoare ; "gradul de liniaritate"

## Covarianta și corelatia v.a. „gradul de liniaritate"

**Def** Fie $X$ și $Y$ două v.a. Se numește covarianța dintre $X$ și $Y$

* formula Covariantei Cov(X, Y)

$$\boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))]}$$

**Obs** Intuitiv, covarianța a două v.a. măsoară tendința celor două variabile aleatoare de a crește simultan sau de a scădea simultan.

**Obs** Avem că $\boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}$ Cov(X, Y)

P(I=1))

În particular, $Cov(X,X) = Var(X) \geq 0$.

X si Y sunt necorelate

**Def** Spunem că v.a. $X$ și $Y$ sunt necorelate dacă $Cov(X,Y)=0$

* **Obs** Dacă două v.a. $X$ și $Y$, $X \perp Y$ (independente) atunci $Cov(X,Y)=0$
(! reciproca nu e adev.)

Necorelarea nu implica independenta

**Exp** (Necorelarea nu implică independența)

$$\left.\begin{matrix} X \sim N(0,1) \\ Y = X^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^3] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x)\,dx = 0$$

normala de medie 0; f ete pară; f ete impară

$\mathbb{E}[X] \times \mathbb{E}[Y] = 0$ (media lui $X$ ~~este~~ e 0)

$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0 \to X$ și $Y$ sunt necorelate, dar $X$ și $Y$ nu sunt independente

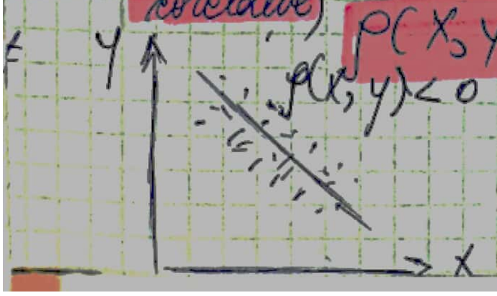
① Avem următoarele proprietăți: Proprietati covarianta Cov

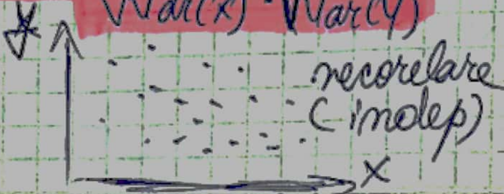
1) $Cov(X,X) = Var(X)$
2) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$ (simetrie)
3) $Cov(X,a) = 0$, $a = const$ $(a - \mathbb{E}[a] = 0)$
4) $Cov(aX+b, Y) = a\,Cov(X,Y)$
5) $Cov(X+Y, Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$
6) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$
7) $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$

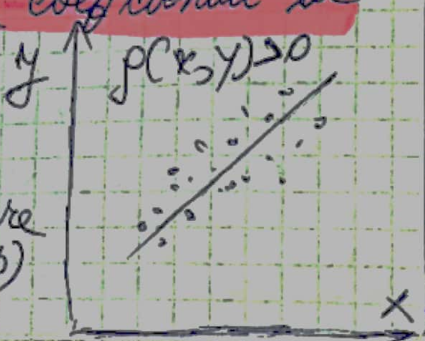
corelatia dintre X si Y

**Def** Se numește corelația dintre $X$ și $Y$ (coeficientul de corelație) Ro(X, Y)

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\cdot\sqrt{Var(Y)}}$$



necorelare (dependență)

proprietate coeficient de covalenta: inegalitatea

P) Coeficientul de corelație verifică inegalitatea $|\rho(X,Y)| \le 1$

Avem egalitate doar în cazul în care există o combinație afină între X și Y.
$(Y = aX + b$ sau $X = aY + b)$

**Dem** Putem presupune că X și Y au medie 0 și varianță 1.

Fie $E[X] = \mu_x$, $E[Y] = \mu_y$ iar $Var(X) = \sigma_x^2$ și $Var(Y) = \sigma_y^2$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}{\sigma_x \sigma_y} =$$

$$= E\left[\left(\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\right)\cdot\left(\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}\right)\right]$$

variabile aleatoare normalizate

v.a. $\frac{X-\mu_X}{\sigma_x}$ și $\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_y}$ se numesc normalizate (centrate și reduse – au media 0 și varianța 1)

Astfel, dacă X și Y ar fi fost v.a. de medie 0 și var 1, atunci $\rho(X,Y) = E[X \cdot Y]$

proprietati variabile aleatoare normalizate??

Avem că $E[(X+\lambda Y)^2] \ge 0 \quad \forall \lambda$

$$\lambda^2 E[Y^2] + 2\lambda E(XY) + E[X^2] \ge 0 \quad \forall \lambda$$

$$\Delta < 0, \quad \Delta = 4E(XY)^2 - 4E[X^2]E[Y^2] \le 0$$

Cum $Var(X) = Var(Y) = 1$, $E[X] = E[Y] = 0$ $\Rightarrow E[X^2] = E[Y^2] = 1$

Astfel din $\Delta \le 0$ avem: $\underbrace{E[XY]}_{\rho}^2 \le 1 \Rightarrow \rho^2 \le 1 \Rightarrow |\rho(X,Y)| \le 1$

Să presupunem $\rho(X,Y) = 1$, $\Delta = 4\rho^2(X,Y) - 4$ $\Rightarrow \Delta = 0$

$$\Rightarrow \lambda^2 \underbrace{E[Y^2]}_{1} + 2\lambda \underbrace{E[XY]}_{1} + \underbrace{E[X^2]}_{1} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$$

$$E[(X+\lambda Y)^2] = (\lambda+1)^2 \ge 0$$

Dacă $\lambda = -1 \Rightarrow E[(X-Y)^2] = 0 \Rightarrow P(X=Y) = 1$

Daca coeficientul de corelatie este 1 atunci avem combinatia afina intre X si Y

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X} = \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) = 1 \rightarrow \boxed{Y = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} X + \frac{\mu_Y \sigma_X - \mu_X \sigma_Y}{\sigma_X}}$

$\underbrace{\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}}_{a} X + \underbrace{\frac{\mu_Y \sigma_X - \mu_X \sigma_Y}{\sigma_X}}_{b}$

*Inegalitatea Cauchy-Schwartz

(T) **Ineg. Cauchy-Schwartz**, cu variante finite

Daca X și Y sunt 2 v.a. atunci $|\mathbb{E}[XY]| \le \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}[Y^2]}$

Obs Daca $Y=1$ atunci $\mathbb{E}[X]^2 \le \mathbb{E}[X^2] \Rightarrow Var(X) \ge 0$

Media conditionata a unei variabile aleatoare X la A

## Media condiționată

Fie A un eveniment de probabilitate pozitivă ($\mathbb{P}(A)>0$)

Definim media condiționată a v.a. X la A:

$$\mathbb{E}(X|A) = \begin{cases} \sum_x x\,\mathbb{P}(X=x|A), & x \text{ discretă} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|A}(x)\,dx, & X \text{ cont} \end{cases}$$

Media conditionata a lui X la Y = y

Definim media cond a lui X la $Y=y$ prin

$$\mathbb{E}[X|Y=y] = \begin{cases} \sum_x x\,\mathbb{P}(X=x|Y=y), & \text{v.a. discrete} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x|y), & \text{v.a. cont.} \end{cases}$$

inegalitati si teoreme limita

## Inegalități și teoreme limită

Ce se întâmplă dacă nu putem evalua de manieră exactă o anumită prob. sau nu putem calcula media unei v.a?

Putem rezolva prin:

1) Simulare
2) Mărginirea probabilității căutate (inegalități)
3) Aproximări la limită

**Ineg. Cauchy-Schwartz**,

$$|\mathbb{E}[XY]| \le \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]}$$

Metoda momentului de ordin 2

Exp (Metoda momentului de ordin 2) și vrem să mărginim

$X$ - o v.a. pozitivă, $X \ge 0$ și vrem să mărginim $\mathbb{P}(X=0)$

i) $X$ - nr. de exb care Ionel răspunde greșit atunci cu $\{X=0\}$ - Ionel a răspuns perfect (a luat nota maximă)

ii) $X$ - nr de perechi care au aceeași zi de naștere sau diferă printr-o zi

$\{X=0\}$ - perechile care au zile de naștere la cel puțin două zile distanță

$$X = \begin{cases} 0, & X = 0 \\ X, & X > 0 \end{cases} = \underset{X}{\underset{=}{X}} \underset{Y}{\underset{=}{\mathbb{1}_{\{X>0\}}}}$$

Din ineg Cauchy-Schwartz: $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{\{X>0\}}] \le \sqrt{\mathbb{E}[X^2] \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}^2_{\{X>0\}}]}$

$= \sqrt{\mathbb{E}[X^2] \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X>0\}}]}$

! | $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$
$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$
$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

$= \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\mathbb{P}(X>0)}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X>0) \ge \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X]}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X=0) = 1 - \mathbb{P}(X>0) \le 1 - \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]} = \frac{Var(X)}{\mathbb{E}[X^2]}$

## Inegalitatea lui Jensen

* Inegalitatea lui Jenses

(P) Fie X o v.a. și g o fct convexă. Atunci

$$\mathbb{E}[g(X)] \ge g(\mathbb{E}[X])$$

Dacă g este concavă:

$$\mathbb{E}[g(X)] \le g(\mathbb{E}[X])$$

Obs a) $g(x) = x^2 \Rightarrow \mathbb{E}[X^2] \ge [\mathbb{E}(X)]^2$

b) $g(x) = |x| \Rightarrow \mathbb{E}[|X|] \ge |\mathbb{E}[X]|$

c) $g(x) = \log x$ (concavă) $\Rightarrow \mathbb{E}[\log X] \le \log[\mathbb{E}(X)]$

CURS 15

Curs 15 - inegalitati, legea numerelor mari, teorema limita centrala

## Inegalități, Legea numerelor mari, Teorema Limită Centrală

(T) (Inegalitatea lui Cauchy-Schwartz)

Inegalitatea lui Cauchy-Schwartz

Pentru orice două v.a. X, Y cu $Var(X) < \infty$, $Var(Y) < \infty$, atunci

$$|\mathbb{E}[XY]| \le \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]}$$

Ineg lui Jensen:

Inegalitatea lui Jenses

g convexă: $\forall x, y$ și $\forall t \in [0,1]$

($g'' \ge 0$) $g(tx + (1-t)y) \le t g(x) + (1-t) g(y)$

($g'' \le 0$) g concavă: $\forall x, y$ și $\forall t \in [0,1]$: $g(tx + (1-t)y) \ge t g(x) + (1-t) g(y)$

**(T) (Inegalitatea lui Jensen)**

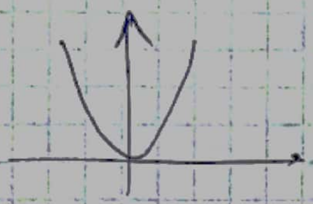
Fie X o v.a. și g o funcție. Dacă g este convexă, atunci

$$\mathbb{E}[g(X)] \geq g(\mathbb{E}[X])$$

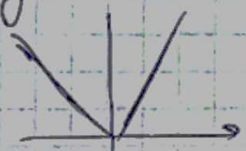
Dacă g este concavă, atunci: $\mathbb{E}[g(X)] \leq g(\mathbb{E}[X])$

Avem egalitate dacă și numai dacă g este o fct afină, $g(x) = a + bx$

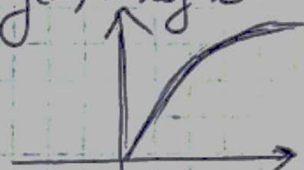
Exp $g(x) = x^2$



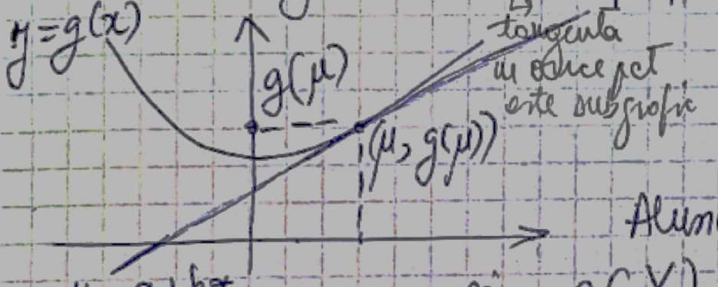
$g(x) = |x|$



$g(x) = \log x$



Dem: Dacă g este convexă și fie $\mu = \mathbb{E}[X]$ și dreapta $y = a + bx$ tangentă la graficul lui g în punctul de coordonate $(\mu, g(\mu))$.




Atunci $g(x) \geq a + bx, \forall x$

și $g(X) \geq a + bX$ // X - v.a.

și aplicăm media (prop. de monotonie este verificată)

$$\Rightarrow \mathbb{E}[g(X)] \geq \mathbb{E}[a + bX] = a + b\,\mathbb{E}[X] = a + b\mu = g(\mu)$$

$$g(\mu) = g(\mathbb{E}[X])$$

Să presupunem că avem egalitate $\mathbb{E}[g(X)] = g(\mathbb{E}[X])$

și $Y = g(X) - a - bX \geq 0$

$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[g(X) - a - bX] = 0$ $\Bigg\} \Rightarrow \mathbb{P}(Y = 0) = 1$

$\Rightarrow \mathbb{P}(g(X) = a + bX) = 1 \Rightarrow$ g este afină

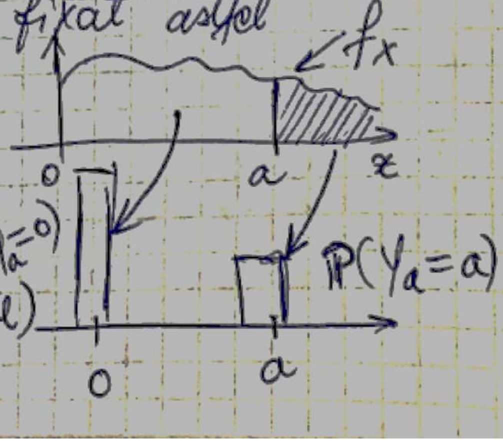
**(T) (Ineg. lui Markov)** ** Inegalitatea lui Markov

Dacă X este o v.a. pozitivă ($X \geq 0$) atunci

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}, \forall a > 0$$

Dem. Definim v.a. $Y_a$, pentru $a > 0$ fixat astfel

$$Y_a = \begin{cases} 0, & X < a \\ a, & X \geq a \end{cases}$$




Avem: $Y_a \leq X$ proprietatea de monotonie

aplicăm media: (prop de monotonie)

$$\mathbb{E}[Y_a] \leq \mathbb{E}[X]$$

$0 \times P(Y_a=0) + a \times P(Y_a=a) \Rightarrow E[X] \geq a\,P(Y_a=a)$
$= a\,P(X \geq a)$
$\Rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$

**Exp** $X \sim \mathcal{U}[0,4] \to E[X] = \frac{4}{2} = 2$

Ineg lui Markov: $P(X \geq 1) \leq \frac{E[X]}{1} = \frac{2}{1} = 2$

$\frac{1}{2} = P(X \geq 2) \leq \frac{E[X]}{2} = 1$

$\int_3^4 \text{densitate} \leftarrow \frac{1}{4} = P(X \geq 3) \leq \frac{E[X]}{3} = \frac{2}{3} = 0,66\ldots$

$0 = P(X \geq 4) \leq \frac{E[X]}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$

Ⓣ **Ineg. (Chebyshev) Cebîșev** Inegalitatea Cebisev / Chebyshev

Dacă $X$ este o v.a. de medie $\mu$ și varianță $\sigma^2$, atunci
$$P(|X-\mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}, \forall a > 0$$

**Dem.** Fie $Y = (X-\mu)^2 = (X - E[X])^2$. Din inegalitatea lui Markov,
$$P(Y \geq a^2) \leq \frac{E[Y]}{a^2} = \frac{E[(X-E[X])^2]}{a^2} = \frac{Var(X)}{a^2}$$
$$P(Y \geq a^2) = P((X-\mu)^2 \geq a^2)$$
$$= P(|X-\mu| \geq a) \quad (a>0)$$

**Obs** Dacă $a < k\sigma$ atunci
$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(k\sigma)^2} = \frac{1}{k^2}$$

Dacă $X \sim N(0,1)$ atunci

Ineg lui Cebîșev $1 \geq P(|X-\mu| \geq \sigma) = 1 - \underbrace{P(|X-\mu| < \sigma)}_{\approx 68\%} \approx 32\%$

$\frac{1}{4} \geq P(|X-\mu| \geq 2\sigma) = 1 - \underbrace{P(|X-\mu| < 2\sigma)}_{\approx 95\%} \approx 5\%$

$\frac{1}{9} \geq P(|X-\mu| \geq 3\sigma) = 1 - \underbrace{P(|X-\mu| \leq 3\sigma)}_{\approx 99,7\%} \approx 0.3\%$

Ⓣ **Ineg. lui Chernoff** Inegalitatea lui Chernoff

Pentru orice v.a. $X$ și constantele $a>0$, $t>0$ avem
$$P(X \geq a) \leq \frac{E[e^{tX}]}{e^{ta}}$$
functie generatoare de moment (fcție generatoare de moment)

Scanned with CamScanner

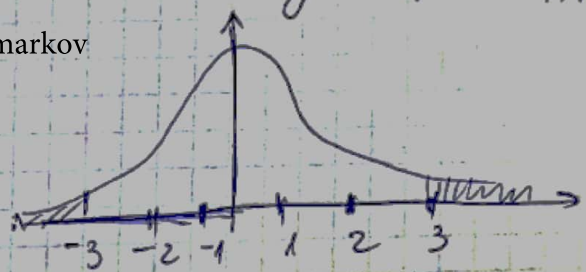
Dem $g(x) = e^{tx}$ (funcție crescătoare și bijectivă)

$P(X \geq a) = P(e^{tX} \geq e^{ta}) \leq \frac{E[e^{tX}]}{e^{ta}}$ Ineg. lui Markov

Exp Fie $Z \sim N(0,1)$ și încercăm să aproximăm prob. ca $P(|Z|>3)$ folosind ineg lui Markov, Chebyshev și Chernoff

a) Ineg lui Markov

aplicatie markov




$$P(|Z|>3) \leq \frac{E[|Z|]}{3}$$

Avem $P(|Z| \geq 3) \simeq 0{,}003$

$$E[|Z|] = \int_{-\infty}^{\infty} |z| f(z)\, dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Fcție pară: $g(z) = g(-z)$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(-e^{-\frac{z^2}{2}}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$P(|Z|>3) \leq \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \simeq 0.27$$

aplicatie Chebyshev

b) Inegalitatea lui Chebyshev

$$P(|Z|>3) = P(|Z-\underset{\mu}{0}| > 3 \cdot \underset{\sigma}{1}) \leq \frac{1}{9} \simeq 0.11$$

c) Ineg lui Chernoff

aplicatie chernoff

$P(|Z|>3) = 2P(Z>3)$ due simetriei reg. normale

$$\leq 2 \cdot \frac{E[e^{tZ}]}{e^{3 \cdot t}}$$

$$E[e^{tZ}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2} + t \cdot z} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2tz)} dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(z^2 + 2tz + t^2 - t^2)} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-t)^2}{2} + \frac{t^2}{2}} dz$$

$$= e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(z-t)^2}{2}} dz = e^{\frac{t^2}{2}}$$

densitatea unei normale de medie t si dispersie 1

densitatea unei normale de medie t și dispersie 1

Astfel, $\mathbb{P}(|Z|>3) = 2\mathbb{P}(Z>3) < 2\dfrac{e^{\frac{t^2}{2}}}{e^{3t}} = 2\cdot e^{t^2/2-3t}, \forall t>0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{2}-3t\right) = t-3 = 0 \Rightarrow t=3$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(|Z|>3) < 2e^{-\frac{9}{2}} \approx 0.022$$

iid - independente si identic distribuite

**Legea nr. mari** L.N.M

Legea numerelor mari LNM

Fie $X_1, X_2, \dots$, un șir de v.a. i.i.d (independente și identic distribuite) cu media $\mathbb{E}[X_1]=\mu$ și varianța $Var(X_1)=\sigma^2<\infty$

Definim

media esantionului

$$\overline{X}_n = \frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n} \rightarrow \text{media eșantionului } X_1, X_2, \dots, X_n$$

$$\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mathbb{E}\left[\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}\right] = \frac{1}{n}\left(\mathbb{E}[X_1]+\dots+\mathbb{E}[X_n]\right)$$

$$= \frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu = \mu$$

$$Var(\overline{X}_n) = Var\left(\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}Var(X_1+\dots+X_n)$$

$$\overset{\text{indep}}{=} \frac{1}{n^2}\Big[\underbrace{Var(X_1)}_{\sigma^2}+\underbrace{Var(X_2)}_{\sigma^2}+\dots+\underbrace{Var(X_n)}_{\sigma^2}\Big] = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

→ legea slabă a nr mari

→ legea tare a nr mari

---

(T) (LNM-tare) Fie $X_1, X_2, \dots$ un șir de v.a. i.i.d cu $\mathbb{E}[X_1]=\mu$ și $Var(X_1)=\sigma^2<\infty$. Atunci

Legea tare a numerelor mari
LNM - tare

$$\mathbb{P}(\overline{X}_n \to \mu) = 1$$

i.e. $\overline{X}_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu, \forall \omega\in\Omega_0, \mathbb{P}(\Omega_0)=1$

Avem convergență punctuală (în sensul convergenței de la fct) în toate punctele cu excepția eventual a unei mulțimi de prob. egală cu 0.

Legea slaba a numerelor mari
LNM - slaba

(T) (LNM-slabă) Fie $X_1, X_2, \dots$ un șir de v.a. i.i.d. de medie $\mu$ și varianță $\sigma^2<\infty$. Atunci $\forall \varepsilon>0$ avem

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n-\mu|>\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

**Dem.** Ineg lui Chebyshev:

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n-\mu|>\varepsilon) \le \frac{Var(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}, \ \forall \varepsilon>0$$

Pentru $n\to\infty$, avem că $\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0 \Rightarrow \mathbb{P}(|\bar{X}_n-\mu|>\varepsilon)\to 0$

**Exp** Să presupunem că avem un eveniment $A$ cu $\mathbb{P}(A)=p$.
Să considerăm n repetiții independente ale experimentului și să notăm cu $X_i = \begin{cases} 1, & \omega\in A \\ 0, & \text{altfel}\end{cases}$

$$\bar{X}_n = \frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n} = \text{frecvența de apariție a ev. } A \text{ în cele } n \text{ repetiții ale experimentului}$$

$\simeq$ frecvența relativă de ap. a evem. A

frecventa de aparitie a evenimentului A in cele n repetitii

Din LNM: $\mathbb{P}(|\bar{X}_n-\mu|>\varepsilon)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \ \forall\varepsilon>0$

frecventa relativa

$\mu = \mathbb{E}[X_1] = \mathbb{P}(A) = p$

interpretarea frecventionista

Interpretarea frecvenționistă: prob unui eveniment $\simeq$ frecvența relativă

**Def** Fie $(X_n)_n$ un șir de variabile aleatoare și $X$ o v.a. Spunem că șirul $X_n$ converge în probabilitate la $X$, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, dacă $\forall\varepsilon>0$, $\mathbb{P}(|X_n-X|>\varepsilon)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

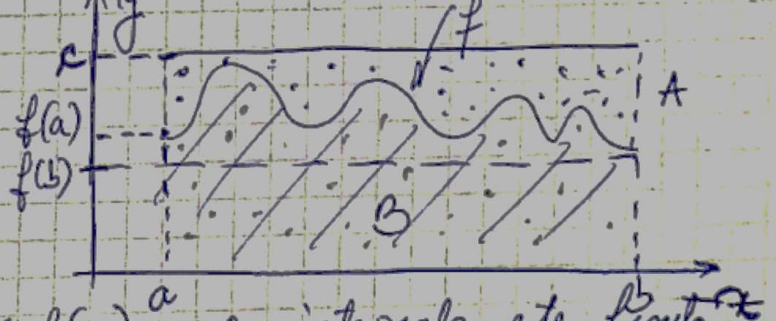
sirul xn conerge in probabilitate la X

În general, vom considera că v.a. $X$ este constantă.

<u>LNM</u> $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$ (versiunea slabă)

**Exp** (Integrarea de tip Monte-Carlo) Integrarea de tip Monte-Carlo

Să presupunem că avem o funcție $f$ și vrem să aproximăm $\int_a^b f(x)\,dx$.




Să presupunem că $0\le f(x)\le c$, integrala este finită

$A = \{(x,y) \mid a\le x\le b, 0< y< c\}$

$B = \{(x,y) \mid a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$

<u>Idee</u> generăm puncte rep. unif în $A$ și calculăm proporția punctelor care au căzut în regiunea $B$.

Scanned with CamScanner

Fie $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \dots (X_n, Y_n) \sim \mathcal{U}(A)$ (rep. unif pe $A$)

Fie $I_j = \begin{cases} 1, & (X_j, Y_j) \in B \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

Avem că densitatea lui $(X,Y) \sim \mathcal{U}(A)$ : $f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{c(b-a)}, & (x,y) \in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

V.a. $I_j$ sunt independente și identic repartizate, $I_j \sim \mathcal{B}(p)$

unde $p = \mathbb{P}(I_j = 1)$

$$= \mathbb{P}((X_j, Y_j) \in B) = \frac{\mathcal{A}(B)}{\mathcal{A}(A)} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{c\,(b-a)}$$

Din LNM: $\dfrac{I_1 + I_2 + \dots + I_n}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}[I_1]$

Astfel, putem aproxima integrala    aproximarea integrala

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \simeq c(b-a)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_j}$$


## CURS 16    Curs 16 - Teorema limita centrala

### Teorema limită centrală

$X_1, X_2, \dots$ iid de medie $\mu$ și dispersie $\sigma^2 < \infty$ atunci din LNM $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$.

Definim v.a.

$$Z_n = \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_n) - \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \dots + X_n]}{\sqrt{Var(X_1 + X_2 + \dots + X_n)}}$$

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

variabile normalizate (z - scor)

$$Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}}$$ – variabile normalizate (Z-scor)

$\mathbb{E}[Z_n] = 0$ și $Var(Z_n) = 1$

Scanned with CamScanner

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$ pentru că media $E[S_n] = E[X_1] + \dots + E[X_n] = n\mu$

$Var(S_n) \overset{\text{indep.}}{=} Var(X_1) + \dots + Var(X_n) = n\sigma^2$

(T) Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un șir de variabile aleatoare indep. i.i.d cu media comună $\mu$ și varianța $\sigma^2 < \infty$.

* Atunci are loc

$$\lim_{n \to \infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

unde $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, iar $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

În practică:

Fie $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, cu $X_i$ iid de medie $\mu$ și var $\sigma^2$ atunci pentru $n$ suficient de mare:

$$P(S_n \leq c) = P\left( \underbrace{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}_{Z_n \sim N(0,1)} \leq \frac{c - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \right)$$

$$\cong P\left(Z \leq \frac{c - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right), \quad Z \sim N(0,1)$$

$$= \Phi\left(\frac{c - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{n\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right)}{\sigma\sqrt{n}} = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right)$$

TLC

TLC $\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right) \xrightarrow{d} N(0,1)$, unde „$\xrightarrow{d}$" înseamnă

$$P\left(\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right) \leq z\right) \to \Phi(z) \quad \forall z$$

Exp Încărcăm un avion cu 100 de pachete a căror greutate este modelată prin intermediul unor v.a. iid repartizate uniform pe $[5, 50]$ kg. Care este probabilitatea ca greutatea să depășească 3000 kg?

$X_1, X_2, \dots, X_n$ – greutățile pachetelor încărcate în avion cu $X_i \sim U([5,50])$

$S_{100} = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$ – greutatea totală a pachetelor

Vrem să calculăm $P(S_{100} > 3000) = ?$

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{50 \times 5}{2} = 27.5 \text{ kg}$$

$$Var(X_i) = \frac{(50-5)^2}{12} = \frac{45^2}{12}$$

$$\mathbb{P}(S_{100} > 3000) = \mathbb{P}\left(\frac{S_{100} - 10\mu}{\sigma\sqrt{100}} > \frac{3000 - 100\mu}{\sigma\sqrt{100}}\right)$$

unde $\mu = 27.5$ și $\sigma = \sqrt{\frac{45^2}{12}} = \frac{45}{2\sqrt{3}}$

Avem $\mathbb{P}(S_{100} > 3000) = \mathbb{P}\left(Z_{100} > \frac{3000 - 2750}{\frac{45}{2\sqrt{3}} \cdot 10}\right)$

Din TLC: $Z_{100} \simeq N(0,1)$

și avem că $\mathbb{P}(S_{100} > 3000) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{50\sqrt{3}}{45}\right)$

$$\simeq 1 - 0.9726 \simeq 0.0274$$

Exp. Un parking al unui imobil nou cu 200 de apartamente este proiectat. Presupunem că nr de mașini per apartament este 0, 1 sau 2 cu probabilitățile 0.1, 0.6 și respectiv 0.3. Care este nr minim de locuri de parcare pe care constructorul trebuie să le prevadă dacă vrea să se asigure cu o prob de 95% că sunt locuri suficiente pentru toți potențialii viitori locatari.

Fie $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$ v.a care corespunde la nr de mașini per apartament

Nr total de mașini

$$S_{200} = X_1 + X_2 + \dots + X_{200}$$

Vrem să determinăm $y$ pentru care $\mathbb{P}(S_{200} \le y) \ge 0,95$

Din TLC avem că

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$\mathbb{P}(S_{200} \le y) = \mathbb{P}\left(\frac{S_{200} - 200\mu}{\sigma\sqrt{200}} \le \frac{y - 200\mu}{\sigma\sqrt{200}}\right) \text{ unde}$$

$\mu = \mathbb{E}[X]$ iar $\sigma^2 = Var(X)$

$E[X] = 1,2 = \mu$

$Var(X) = \sigma^2 = (0^2 \times 0,1 + 0,6 \cdot 1^2 + 2^2 \cdot 0,3) - 1,2^2 = 1,8 - 1,44 = 0,36$

$$P(S_{200} \leq y) = P\left(\frac{S_{200} - 200 \times 1,2}{\sqrt{200 \cdot 0,36}} \leq \frac{y - 200 \cdot 1,2}{\sqrt{200 \cdot 0,36}}\right)$$

$$\overset{TLC}{\simeq} \Phi\left(\frac{y - 200 \cdot 1,2}{\sqrt{200 \cdot 0,36}}\right) = 0,95$$

$$\Rightarrow \frac{y - 240}{6\sqrt{2}} \simeq \Phi^{-1}(0,95) = 1,64 \longrightarrow [q.norm(\ )] \to R$$

$$\Rightarrow y \simeq 240 + 6\sqrt{2} \times 1,64 \simeq 254$$

* Aproximarea de Moivre-Laplace a binomului

## Aproximarea de Moivre-Laplace a binomialei

Fie $S_n \sim B(n, p)$, $S_n$ poate fi văzută ca o sumă de $n$ v.a. i.i.d Bernoulli de parametru $p$

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad X_i \sim B(p), \ X_i \text{ indep.}$$

$\mu = E[X_i] = p$

$\sigma^2 = Var(X_i) = p(1-p)$

Vrem să aproximăm $P(k \leq S_n \leq l) = ?$

Vom folosi teorema limită centrală: folosirea TLC

$$P(k \leq S_n \leq l) = P\left(\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{l - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Din TLC:

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \simeq N(0,1)$$

$$P(k \leq S_n \leq l) \simeq \Phi\left(\frac{l - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Observăm că pt a calcula $P(S_n = k)$, $k = l$, obținem $P(S_n = k) = 0$ ceea ce este fals.

Sugerăm următoarea corecție conventie

$$P(S_n = k) \simeq P\left(k - \frac{1}{2} \leq S_n \leq k + \frac{1}{2}\right)$$

Înlocuim în formula de aproximare de mai sus, găsim că

aproximarea normală a binomialei cu factor de corecție

$$\boxed{P(k \leq S_n \leq l) \simeq \Phi\left(\frac{l + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)}$$

Aproximarea normala a binomului cu factor de corectie

Exp $S_n \sim B(36, 0.5)$

$P(S_n \le 21) = 0.8785$ (pbinom())

aproximare → $P(S_n \le 21) \simeq \Phi\left(\frac{21 - 36 \cdot 0,5}{\sqrt{36 \cdot 0.5 \cdot 0.5}}\right) = 0.8413$

→ $P(S_n \le 21) \simeq \Phi\left(\frac{21.5 - 36 \times 0.5}{\sqrt{36 \times 0.5 \times 0,5}}\right) = 0.879$

$k - \frac{1}{2}$ $\quad k \quad$ $k + \frac{1}{2}$

## Statistică

statistica

populatie

**Def** Numim populație o mulțime de elemente similare care este cercetată din punct de vedere a uneia sau mai multor proprietăți.

- Elementele populației s.n. indivizi.

indivizi

**Exp** Pb de prob: știm că 14% dintre bilele dintr-o urnă, care conține bile albe și negre, sunt albe, extragem 20 de bile cu întoarcere și ne întrebăm care este prob să obținem 5 bile negre?

Pb de statistică: am extras 20 de bile din urnă (cu întoarcere) și am constatat că 5 sunt de culoare neagră. În ce măsură această informație mă ajută să estimez proporția de bile albe din urnă?

Statistică → frecvenționistă - parametrul care modelează populația este const necunoscută

→ bayesiană - parametrul care modelează prop. este o v.a.

**Def** Numim model statistic o familie de câmpuri de prob $(\Omega, \mathcal{F}, P_\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq R^*$, $\Theta$ s.n. sp. parametrilor

esantion aleator de volum n

**Def** Se numește eșantion aleator de volum n (de talie n) un șir de n v.a. independente și identic repartizate. Repartiția comună s.n. repartiție teoretică (lege mamă) a eșantionului

$X_1, X_2, \dots, X_n$ - iid (eșantion aleator)

**Notație** $X_1, X_2, \dots, X_n \sim f_\theta$ (sau $F_\theta$) cu $\theta \in \Theta$

- Fie $X_1, X_2, \dots X_n$ un eşantion de volum $n$ dintr-o populaţie $f_\theta$ (cu densitatea / fcţia de masă $f_\theta$)

$x_1, x_2, \dots, x_n$ - s.u. eşantion realizat (datele)

$X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)$

**Def.** Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eşantion de volum $n$. Se numeşte statistică orice funcţie $T(X_1, \dots, X_n)$ cu valori reale sau vectoriale

$$T_n = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Exp 1) $T(X_1 \dots X_n) = 1$, $T_n = 1$

2) $T(X_1, \dots, X_n) = X_1$, $T_n = X_1$

3) $T(X_1 \dots X_n) = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ Media, varianta si momentele empirice

## Media, varianţa şi momentele empirice

**Def** Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eşantion dintr-o populaţie. Se numeşte media empirică (media eşantionului) statistica

media esantionului

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

varianta empirica

Se numeşte varianţa empirică, $V_n^2$,

$$V_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$$

varianta esantionului

varianţa eşantionului, $S_n^2$,

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$$

moment empiric de ordin r

Se numeşte moment empiric de ordin $r$, $M_r$,

$$M_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^r$$

Moment centrat empiric: $M_r' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^r$

**LABORATOR**

Aproximarea Poisson şi Normala a binomialei

$X \sim B(n, p)$

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^k$$

a) Aprox. Poisson: $n \to \infty$ și $p \to 0$ a.î. $np \to \lambda$ atunci

$$\mathbb{P}(X=k) \simeq \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

aproximarea normala cu factor de corectie

b) Aproximarea Normală (cu factor de corecție)

$$\mathbb{P}(X=k) \simeq \Phi\left(\frac{k+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

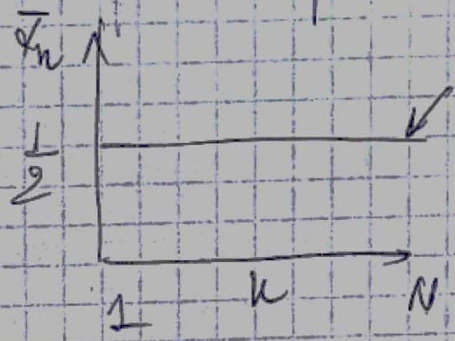
O funcție $n, p, k$

| k | Bin | Poisson | Err Poisson | Norm. | Err Norm |
|---|---|---|---|---|---|
| a | | | | | |
| a+1 | | | | | |
| ⋮ | | | | | |
| b | | | | | |

$X_1, X_2, \dots, X_N \sim \mathcal{U}([0,1])$

$n \longrightarrow \overline{X_n}$

$\overline{X_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{2}$




$(\cos x)' = -\sin x$

$$I = \int_0^1 e^x \sin(2x)\cos 2x \, dx$$

$$= \int_0^1 e^x \frac{\sin 4x}{2} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right)' = -\frac{e^x}{2}\cdot\frac{1}{4}\cos 4x \Big|_0^1 +$$

$$+ \int_0^1 \frac{e^x}{2}\cdot\frac{1}{4}\cos 4x = \cancel{\int_0} ($$

$$\frac{1}{8}\left(e^x \cdot \cos 4x \Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^x \sin 4x\right)$$