



Arhitectura sistemelor de calcul

- Prelegerea 5 -

Funcții și circuite logice

Ruxandra F. Olimid

Facultatea de Matematică și Informatică

Universitatea din București

Cuprins

1. Recapitulare

1. Logica booleană
2. Operații de bază (NOT, OR, AND, XOR)

2. Funcții logice (booleene)

1. Forma normal disjunctivă (forma canonică)
2. Forma normal conjunctivă

3. Circuite combinaționale

1. Porți
2. Reprezentarea funcțiilor logice

Logica booleană

- Logică cu 2 valori de adevăr: *True* (1) si *False* (0)
- Operații în logica booleană:

P	NOT P
0	1
1	0

NOT (negația)

P	Q	P AND Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

AND (conjuncția)

P	Q	P OR Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OR (disjuncția)

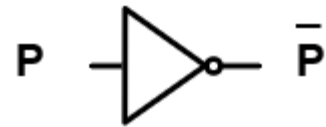
P	Q	P XOR Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

XOR (disjuncția exclusivă)

Operația și poarta NOT

P	NOT P
0	1
1	0

Tabelul de adevăr

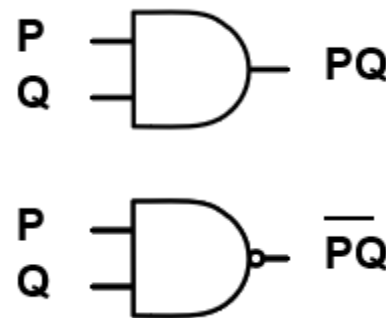


Reprezentarea porții NOT

Operația și poarta AND / NAND

P	Q	P AND Q	P NAND Q
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Tabelul de adevăr



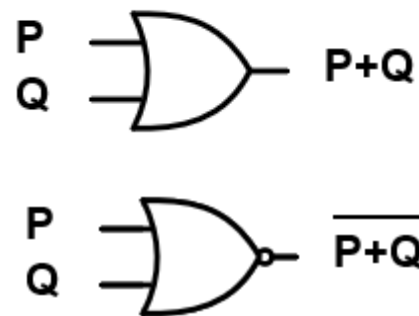
Reprezentarea porților AND și NAND

- Observați că AND realizează înmulțirea pe 1 bit
- De aceea *a AND b* se reprezintă și ca produsul *ab*

Operația și poarta OR / NOR

P	Q	P OR Q	P NOR Q
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Tabelul de adevăr



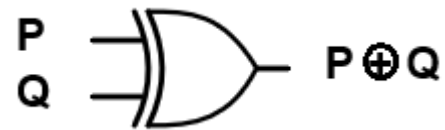
Reprezentarea porților OR și NOR

➤ $a \text{ OR } b$ se reprezintă și ca suma $a+b$

Operația și poarta XOR

P	Q	P XOR Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabelul de adevăr



Reprezentarea porții XOR

- Observați că XOR realizează adunarea pe 1 bit (fără transport)

Funcție booleană (funcție logică)

- O *funcție booleană* (logică) o funcție

$$f: \{0,1\}^m \rightarrow \{0,1\}^n$$

- În acest caz se spune că funcția are **m** intrări și **n** ieșiri
- Funcțiile booleene pot fi reprezentate sub forma tabelor de adevăr întrucât atât domeniul cât și codomeniul acestora sunt finite
- Există $(2^n)^{2^m}$ funcții logice cu m intrări și n ieșiri
- În general, dacă $f: A \rightarrow B$, atunci există $card(B)^{card(A)}$ funcții f , unde $card(A), card(B)$ este cardinalul lui A, respectiv B

Funcție booleană (funcție logică)

➤ *Întrebare:* Care este tabelul de adevăr pentru funcția de mai jos?

$$f: \{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$$
$$f(a, b, c) = a\bar{b} + c$$

➤ *Răspuns:*

a	b	c	\bar{b}	$a\bar{b}$	f
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1

Funcție booleană (funcție logică)

➤ *Întrebare:* Care este reprezentarea cu porți a funcției de mai jos?

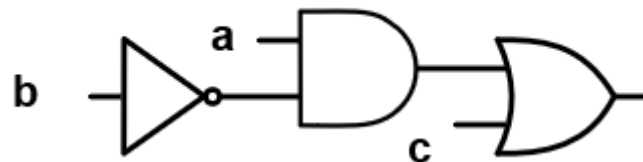
$$f: \{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$$
$$f(a, b, c) = a\bar{b} + c$$

➤ *Răspuns:*

Negația se reprezintă printr-o poartă NOT

Produsul se reprezintă printr-o poartă AND

Suma se reprezintă printr-o poartă OR



Funcție booleană (funcție logică)

- Toate *funcțiile booleene (logice)*

$$f: \{0,1\}^m \rightarrow \{0,1\}^n$$

pot fi construite prin operațiile de bază (AND, OR, NOT), respectiv de porțile aferente

Forme normale

- Fie funcția booleană definită prin următorul tabel de adevăr:

a	b	c	$f(a, b, c)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Conform tabelului, funcția ia valoarea 1 dacă și numai dacă:

- ✓ $a=0$ și $b=0$ și $c=1$
sau
- ✓ $a=0$ și $b=1$ și $c=1$
sau
- ✓ $a=1$ și $b=0$ și $c=0$
sau
- ✓ $a=1$ și $b=0$ și $c=1$
sau
- ✓ $a=1$ și $b=1$ și $c=1$

- Exprimând matematic, se obține *forma canonică (FC)* sau *forma normal disjunctivă (FND)*:

$$f(a, b, c) = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + abc$$

Forme normale

➤ *Forma canonică (FC)* sau *forma normal disjunctivă (FND)*:

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>f(a, b, c)</i>
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$f(a, b, c) = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + abc$$

- Forma canonică se obține ușor din tabela de adevăr astfel:
- ✓ fiecărei valori **1** pe care o ia funcția îi corespunde un termen în **sumă (disjuncție)**;
 - ✓ un termen este produsul (conjuncția) literalilor în care aceștia apar negați dacă le corespunde 0 sau nu dacă le corespunde 1

Forme normale

➤ Forma normal conjunctivă (FNC):

a	b	c	$f(a, b, c)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$f(a, b, c) = (a + b + c)(a + \bar{b} + c)(\bar{a} + \bar{b} + c)$$

➤ FNC se obține ușor din tabela de adevăr astfel:

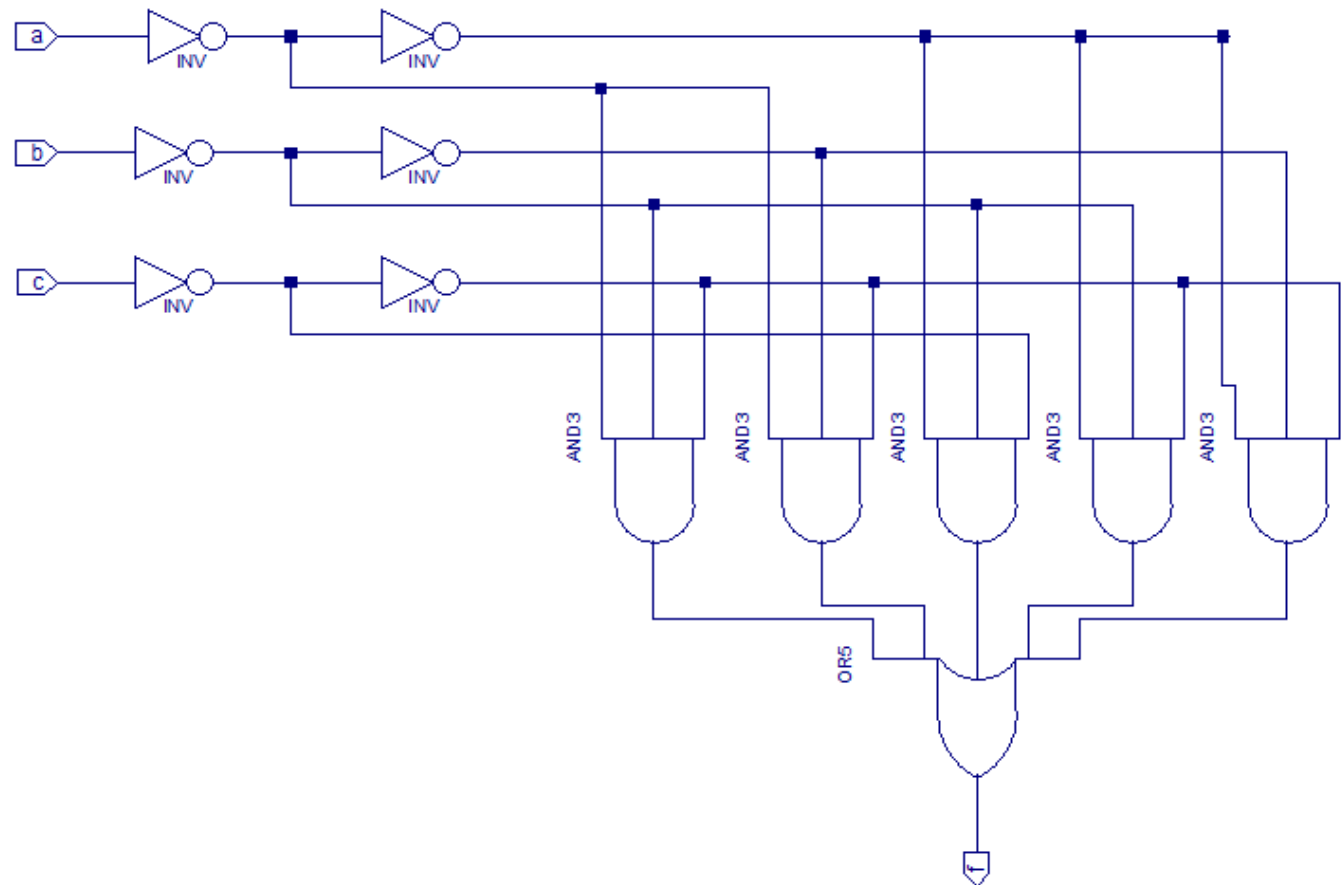
- ✓ fiecărei valori **0** pe care o ia funcția îi corespunde un termen în **produs (conjuncție)**;
- ✓ un termen este suma (disjuncția) literalilor în care aceștia apar negați dacă le corespunde 1 sau nu dacă le corespunde 0

Forme normale

- *Întrebare:* Cum se reprezintă cu ajutorul porților logice FND obținută?

$$f(a, b, c) = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + abc$$

- *Răspuns:*

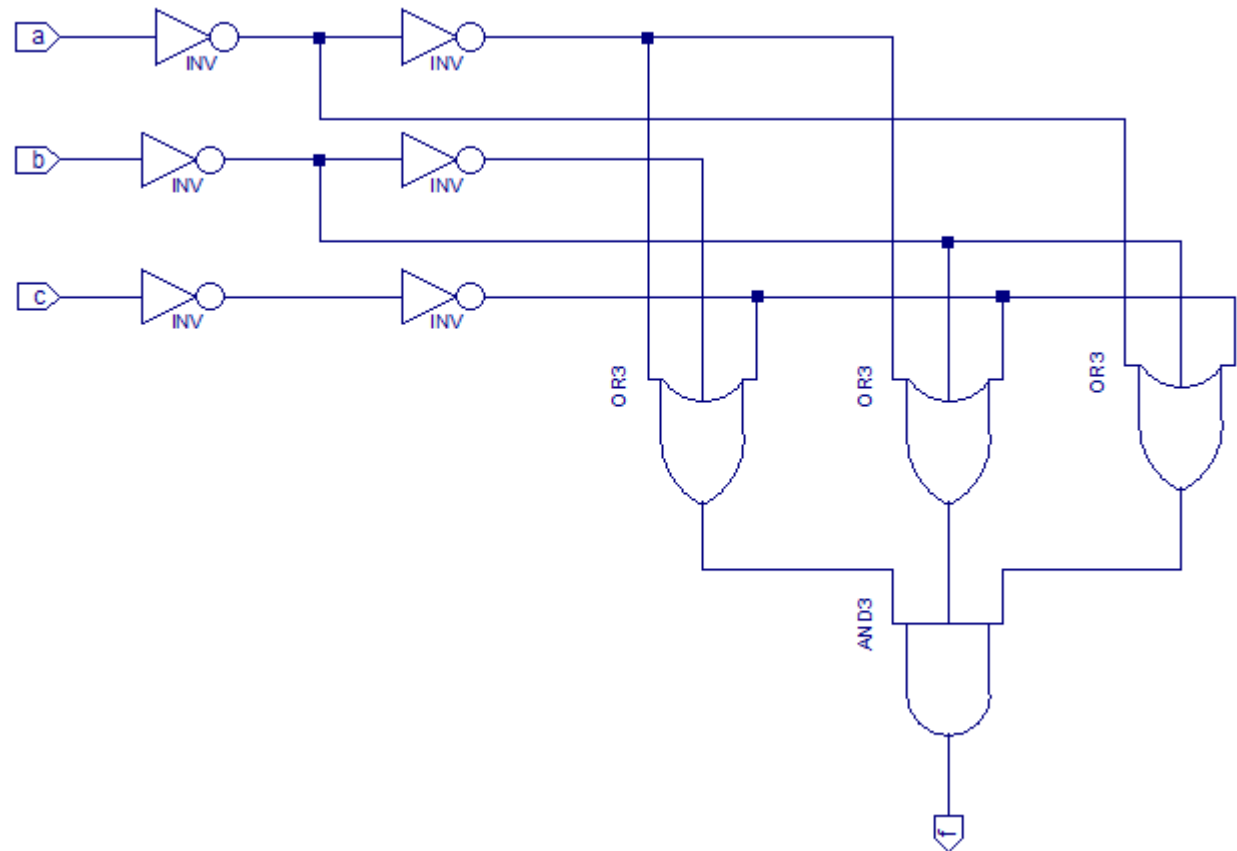


Forme normale

- *Întrebare:* Cum se reprezintă cu ajutorul porților logice FNC obținută?

$$f(a, b, c) = (a + b + c)(a + \bar{b} + c)(\bar{a} + \bar{b} + c)$$

- *Răspuns:*



Forme normale

- *Forma normal disjunctivă* (FND) este *unică*, făcând abstracție de o permutare a termenilor sau a factorilor (datorită comutativității sumei și produsului)
- Deci, 2 expresii logice sunt *echivalente* dacă au aceeași formă normal disjunctivă FND
- Este deci util să avem un algoritm de aducere a unui funcții la FND
- Vom folosi intens FND la crearea circuitelor logice

Forme normale

Aducerea funcțiilor la forma normal disjunctivă

- *Pas 1:* Se scrie expresia / funcția ca sumă de termeni
- *Pas 2:* Se elimină produsele care se repetă
- *Pas 3:* Se examinează fiecare produs. Dacă este minterm, se trece la următorul. Dacă nu, se completează prin înmulțire cu $(x + \bar{x})$ pentru variabilele care lipsesc
- *Pas 4:* Se efectuează calculele și se elimină termenii redundanți

Forme normale

Aducerea funcției $f(a, b, c) = a + b(\bar{b} + \bar{c})$ la FND:

➤ *Pas 1:* Se scrie expresia / funcția ca sumă de termeni

➤ *Pas 2:* Se elimină produsele care se repetă

$$f(a, b, c) = a + b\bar{c}$$

➤ *Pas 3:* Se examinează fiecare produs. Dacă este minterm, se trece la următorul. Dacă nu, se completează prin înmulțire cu $(x + \bar{x})$ pentru variabilele care lipsesc

$$f(a, b, c) = a(b + \bar{b})(c + \bar{c}) + (a + \bar{a})b\bar{c}$$

➤ *Pas 4:* Se efectuează calculele și se elimină termenii redundanți

$$f(a, b, c) = abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c}$$