Curs 1

* $\Omega \to$ spațiul stărilor (toate rez. posibile ale unui e. a.)
* $\mathcal{P}(\Omega) = \{A \mid A \subseteq \Omega\} \to$ m. tuturor even. posibile
* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ - m. tuturor even. pos. asociate even. aleator
* Algebră: a) $\emptyset \in \mathcal{F}$
  b) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
  c) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$
* σ-Algebră: c') $(A_n)_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

CURS 2

* $N(A)$ - nr. de apariții ale even. A în N repetări ale unui exp.

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{N(A)}{N} \in [0,1]$$

↳ frecvența relativă a apariției even. A

* $\begin{cases} N(A \cup B) = N(A) + N(B) \\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \end{cases}$, $A \cap B = \emptyset$
* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to$ câmp de probabilitate. Proprietăți:

a) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

b) $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ → monotonie

c) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

d) FORMULA LUI POINCARE: $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

e) INEGALITATEA LUI BOOLE: $(A_n)_n \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

* Modelul lui Laplace: $N \geq 1$; $\Omega = \{\omega_1, \dots \omega_N\}$; $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0;1)$

$\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{N}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}}$

↳ echirepartiție

↳ $\frac{\text{cazuri fav.}}{\text{cazuri pos.}}$

* $|A \cup B| = |A| + |B|$, $A \cap B = \emptyset$
* Principiul includerii-excluderii:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

Scanned with CamScanner

CURS 3

* FORMULA PRODUSULUI: $|A\times B| = |A|\cdot|B|$

$$|A_1\times\ldots\times A_m| = |A_1|\cdot\ldots\cdot|A_m|$$

$$|A^m| = |A|^m$$

* Schema extragerii cu/fără revenire
* Nr. de părți de cond. K al unei m. de cond. $m = \boxed{C_m^k} = \binom{m}{k}$; $\frac{m!}{k!(m-k)!}$
* $\frac{m!}{m_1!\cdot m_2!\cdot\ldots\cdot m_k!}$ → coef. multinomial

↳ nr. de șiruri de lungime m care conțin m_1 elem. de tipul 1, ... m_k elem. de tipul K a.î. $m_1+\ldots m_k = m$

CURS 4

* Probabilitatea condiționată a lui A la B:

$$\mathbb{P}(A\backslash B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \quad \mathbb{P}(B)>0$$

* $\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2\backslash A_1)\mathbb{P}(A_3\backslash A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot$
$\cdot\mathbb{P}(A_m\backslash A_1\cap\ldots\cap A_m)$

* Formula probabilității totale: $0<\mathbb{P}(B)<1$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\backslash B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A\backslash B^c)\,\mathbb{P}(B^c)$$

Dacă $B_1,\ldots,B_m$ formează o partiție pe Ω cu $\mathbb{P}(B_i)>0$:

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{m}\mathbb{P}(A\backslash B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}$$

* Formula lui Bayes:

$$\mathbb{P}(B\backslash A) = \frac{\mathbb{P}(A\backslash B)\cdot\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A\backslash B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A\backslash B)\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A\backslash B^c)\mathbb{P}(B^c)}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B_i\backslash A) = \frac{\mathbb{P}(A\backslash B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{m}\mathbb{P}(A\backslash B_j)\mathbb{P}(B_j)}}$$

CURS 5

* Formula lui Bayes în care condiționăm încă o dată

$A, B, C \in \mathcal{F}$ a.î. $\mathbb{P}(A \cap C) > 0$ și $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$

$$\boxed{\mathbb{P}(A \mid B, C) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A, C)\,\mathbb{P}(A \mid C)}{\mathbb{P}(B \mid C)}}$$

* $Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid A)$
* $Q(A \mid B) = \dfrac{Q(B \mid A)\, Q(A)}{Q(B)}$, $Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid C)$
* A, B indep. $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B$
* $A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B^c$, $B^c \perp\!\!\!\perp A$, $A^c \perp\!\!\!\perp B^c$
* variabilă aleatoare (v.a) $\rightarrow$ asoc. unui e.en. a val. num.

$$X : \underset{\omega}{\Omega} \rightarrow \underset{X(\omega)}{\mathbb{R}}$$

* v.a. X este discretă dacă $X(\Omega)$ este cel mult numărabilă

v.a. X este continuă, altfel

* $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \mid X(\omega) \in A\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$

↳ preimaginea lui A

CURS 6

* Repartiția lui X: $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P} \circ X^{-1}$
* **Funcția de repartiție** a lui X:

$F : \mathbb{R} \rightarrow [0;1]$ $\quad F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

a) F crescătoare

b) F continuă la dreapta $\left(\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} F(x) = F(x_0) \right)$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ și $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

Prop: d) $\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - F(x)$

e) $\mathbb{P}(x < X \leq y) = \mathbb{P}(X \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x) = F(y) - F(x)$

f) $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x) = F(x) - \lim\limits_{\substack{y \to x \\ y < x}} F(y)$

* **Funcția de masă a unei v.a. discrete**

$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(masa totală este 1)

* Variabila indicator: $\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

* V.a. binomiale: X = nr. total de realizări ale ev. A. în n experimente ($\mathbb{P}(A)=p$). Notație: $X \sim B(n,p)$ (cu întoarcere)

  $n=1 \Rightarrow X$ este o v.a. Bernoulli $= B(p)$

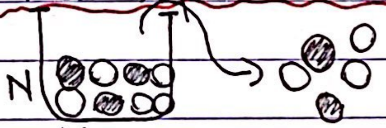
• $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{-k}$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

  n ↳ când avem $\binom{n}{k}$ secvențe de lungime n cu k valori = c

• $\sum_{k=0} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{-k}$

! **CURS 7**

* V.a. repartizate hipergeometric (fără întoarcere)



→ X - nr. de bile negre după cele n bile extrase

Notația: $X \sim HG(n, N, M)$

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$ funcția de masă

* V.a. X este repartizată uniform pe D ($X \sim \mathcal{U}(D)$) dacă

  $\mathbb{P}(X=x) = \frac{1}{|D|}$, $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ f.d.m.

* V.a. repartizate geometric și negativ binomial

  • $\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$ f.d.m. $X \sim Geom(p)$

  (nr. de încercări până la primul succes)

  • $\mathbb{P}(X=k) = \binom{k-1}{r-1} (1-p)^{k-r} p^r$ f.d.m. $X \sim NB(r,p)$

  (nr. de încercări până la $r \geq 1$ succese)

  ! $X = X_1 + X_2 + \dots + X_r$, $X_i \sim Geom(p)$

* V.a. Poisson $X \sim Pois(\lambda)$

  $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ f.d.m.

  (șansa de real. a unui even. e f. mică, dar nr. de even. pe unit. de timp/spațiu e f. mare)

* funcții de v.a. (+C8)

CURS 8

* V.a. X și Y discrete sunt independente ($X \perp\!\!\!\perp Y$) dacă:

$$\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y)$$

X, Y indep. $\Leftrightarrow \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\,\mathbb{P}(Y \leq y)$

* Media și momentele v.a. discrete

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \to \text{media aritmetică}$$

$$m \simeq \frac{1}{N} \sum_{x} x N f(x) = \sum_{x} x f(x) \to \text{suma ponderată}$$

$E[X] = \sum_{x} x f(x) \to$ media v.a. discrete

Prop: a) Dacă $X = c \Rightarrow E[X] = c$

b) $X \geq 0 \Rightarrow E[X] \geq 0$; $X \geq Y \Rightarrow E[X] \geq E[Y]$

c) $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow E[aX + bY] = a E[X] + b E[Y]$

Prop: Dacă $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow E[XY] = E[X]\,E[Y]$

Prop.: Dacă X v.a.d. și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci $Y = g(X)$ are media:

$$E[Y] = E[g(X)] = \sum_{x} g(x)\,\mathbb{P}(X = x)$$

- Moment de ordin k: $E[X^k]$
- Moment centrat în a de ordin k: $E[(X - E[X])^k]$

Dacă $a = E[X]$, atunci $E[(X - E[X])^k]$ s.n. mom. centrat de or. k

- Varianța: $Var(X) = E[(X - E[X])^2]$ $\to k = 2$

$\hookrightarrow$ gradul de împrăștiere a datelor

- Abaterea standard: $SD(X) := \sigma = \sqrt{Var(X)}$

Prop.: a) $Var(X + a) = Var(X)$

b) $Var(a \cdot X) = a^2 Var(X)$

c) X, Y indep. $\Rightarrow Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

d) $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$