Examen - Statistică și Probabilități

① Într-un magazin se găsesc 100 de calculatoare de același tip: 30 de la furnizorul F_1, 50 de la furnizorul F_2 și 20 de la furnizorul F_3. S-a observat că apar defecțiuni în perioada de garanție la 2% dintre calculatoarele fabricate de F_1, la 4% dintre cele produse de F_2 și la 5% dintre cele provenind de la F_3. Să se determine probab. ca:

a) un calculator din magazin să se defecteze în perioada de garanție

b) un calculator care se defectează în perioada de garanție să provină de la al doilea furnizor.

Soluție: Notăm cu A_i evenimentul ca un calculator din magazin să provină de la furnizorul F_i; $i=\overline{1,3}$ și cu X evenimentul ca un calculator luat la întâmplare din magazin să se defecteze în perioada de garanție

$P(A_1)=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$; $P(A_2)=\frac{5}{10}$; $P(A_3)=\frac{2}{10}$.

$P(X/A_1)=\frac{2}{100}$; $P(X/A_2)=\frac{4}{100}$; $P(X/A_3)=\frac{5}{100}$.

$A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall\, i\neq j \ i,j=\overline{1,3}$; $\bigcup_{i=1}^{3} A_i = \Omega$.

$P(X)=P(A_1)P(X/A_1)+P(A_2)P(X/A_2)+P(A_3)\cdot P(X/A_3)$

$=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{100}+\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{100}+\frac{2}{10}\cdot\frac{5}{100}=\frac{36}{1000}=0{,}036$

b) $P(A_2/X)=$ formula lui Bayes:

$$P(A_2/X)=\frac{P(A_2)\cdot P(X/A_2)}{P(X)}=\frac{\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{100}}{\frac{36}{1000}}=0{,}555$$

a) 0,0036 ; b) 0,555

② Dintre cele 30 de subiecte recomandate pentru examen de către profesorul de curs, un student a pregătit 20 de subiecte, pe care le poate prezenta perfect. La examen fiecare subiect este scris pe câte un bilet, iar studentul trebuie să extragă 5 bilete la întâmplare și să prezinte cele 5 subiecte aflate pe bilete. Știind că pentru fiecare subiect la care răspunde corect va primi 2 puncte și că nu se acordă nici un punct pentru rezolvări parțiale, să se determine probabilitatea ca:

a) studentul să primească nota 10
b) studentul să primească nota 6
c) studentul să nu promoveze.

Soluție:

a) $$\frac{C_{20}^{5} \cdot C_{10}^{0}}{C_{30}^{5}} = 0{,}027$$

b) $$\frac{C_{20}^{3} \cdot C_{10}^{2}}{C_{30}^{5}} = 0{,}359$$

c) $$\frac{C_{20}^{0} \cdot C_{10}^{5}}{C_{30}^{5}} + \frac{C_{20}^{1} \cdot C_{10}^{4}}{C_{30}^{5}} + \frac{C_{20}^{2} \cdot C_{10}^{3}}{C_{30}^{5}} = 0{,}272$$

③ Un magazin își îndeplinește planul de desfacere a produselor pe o lună cu probabilitatea 0.75.

Se cere probabilitatea ca magazinul să-și îndeplinească planul în 8 din cele 12 luni ale unui an.

Soluție: $C_{12}^{8} \cdot (0,75)^{8} \cdot (0,25)^{4} = 0,193.$

④ Dintr-un lot ce conține 4 piese corespunzătoare și 3 piese defecte se extrag simultan 3 piese în vederea controlului de calitate.

Fie X v.a. care indică numărul de piese coresp. obținute în cele 3 extrageri. Să se determine:

a) repartiția v.a. X

b) probab. ca cel puțin 2 dintre piesele extrase să fie corespunzătoare

a) $P(X=0) = \dfrac{C_4^0 \cdot C_3^3}{C_7^3} = \dfrac{1}{35}$

b) $P(X=1) = \dfrac{C_4^1 \cdot C_3^2}{C_7^3} = \dfrac{12}{35}$

c) $P(X=2) = \dfrac{C_4^2 \cdot C_3^1}{C_7^3} = \dfrac{18}{35}$

d) $P(X=3) = \dfrac{C_4^3 \cdot C_3^0}{C_7^3} = \dfrac{4}{35}$

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{35} & \frac{12}{35} & \frac{18}{35} & \frac{4}{35} \end{pmatrix}$$

b) $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = \frac{22}{35}$

⑤ Se știe că un anumit furnizor livrează către beneficiarii săi produse corespunzătoare calitativ cu probabilitatea 0,9. Se selectează la întâmplare un eșantion de 20 de unități din produsele livrate de ~~furn~~ furnizorul respectiv și fie X variabila aleatoare care reprezintă numărul produselor coresp. calitativ. Să se determine:

a) repartiția v.a. X

b) numărul mediu de produse corespunzătoare și abaterea medie pătratică a numărului de piese corespunzătoare din eșantionul considerat.

Soluție:

a) $p = 0,9 \quad n = 20 \qquad X: \begin{pmatrix} k \\ C_{20}^{k} \cdot (0,9)^{k} (0,1)^{20-k} \end{pmatrix}_{k=\overline{0,20}}$

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & 20 \\ & & C_{20}^{k} \cdot (0,9)^{k} (0,1)^{20-k} & & \end{pmatrix}$$

b) $E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0,9 = 18.$

$Var(X) = npq = 1,8.$

$Sd(X) = \sqrt{Var(X)}$

⑥ Se aruncă o monedă de 4 ori. Să se scrie repartiția v.a. X care ia ca valori numărul de apariții ale stemei:

Soluție: $P(X=k) = C_n^k \cdot p^k q^{n-k}$; $k=\overline{0,4}$

unde $p = q = \frac{1}{2}$

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^4 & C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 & C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 & C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^4 & \left(\frac{1}{2}\right)^4 \end{pmatrix}.$$

⑦ Se aruncă un zar și se notează cu X numărul de aruncări efectuate până la prima apariție a feței cu un punct. Să se scrie repartiția v.a. X:

Soluție: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6^2} & \frac{5^2}{6^3} & \dots & \frac{5^{n-1}}{6^n} & \dots \end{pmatrix}$

deci X urmează o repartiție geometrică de parametru 1/6.

⑧ Se fac trageri asupra unui obiect până când acesta este doborât. Pentru doborârea lui este suficientă o singură tragere reușită. La fiecare tragere în parte, probabilitatea de succes este $\frac{1}{3}$.

Se cer valoarea medie și dispersia numărului de trageri.

Soluție:

Tabloul rep. v.a. X:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3^2} & \frac{2^2}{3^3} & \dots & \frac{2^{k-1}}{3^k} & \dots \end{pmatrix}$$

$$E(X) = \frac{1}{3}\left(1 + 2\cdot\frac{2}{3} + 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \dots\right)$$

$$\boxed{E(X) = 3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(3)$$

$$X^2: \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3^2} & \frac{2^2}{3^3} & \dots \end{pmatrix}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{3}\left(1^2 + 2^2\cdot\frac{2}{3} + 3^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots\right)$$

$$\boxed{Var(X) = 6}$$

---

(9). Profitul anual al unei firme este rezultatul acțiunii a două grupuri de factori U și V ale căror modele probabilistice sunt: $U = 3X - 2Y$; $V = X + 5Y$, unde X și Y sunt variabile aleatoare independente

$X \sim Bi(10;\ 0,8)$

$Y \sim Poisson(1)$

Să se calculeze: $E(2U+3V)$; $Var(U)$; $Var(V)$

Soluție:

$X \sim Bi(10;\ 0.8) \Rightarrow E(X) = 10 \cdot 0,8 = 8.$

$Var(X) = 1,6$

$Y \sim Po(1) \Rightarrow E(Y) = Var(Y) = 1.$

$E(2U+3V) = E(9X+11Y) = 9E(X) + 11E(Y) =$

$= 9 \cdot 8 + 11 \cdot 1 = 83.$

Deoarece X, Y sunt independente

$Var(U) = Var(3X-2Y) = 9Var(X) + 4Var(Y)$

$Var(U) = 18,4.$

$Var(V) = Var(X+5Y) = Var(X) + 25Var(Y) = 26,6$

---

10. O societate de asigurări încheie polițe de asigurare de bunuri. În ipoteza că numărul solicitărilor de despăgubire înregistrate anual pentru astfel de polițe urmează o repartiție Poisson ~~de~~ de parametru 4, să se determine

a) rep. v.a. X care indică numărul solicitărilor de despăgubire înregistrate anual

b) probabilitățile evenimentelor

A: în cursul unui an să fie înregistrate exact 2 cereri de despăgubire

B: în cursul unui an să fie înregistrate cel puțin 3 cereri de despăgubire

Soluție:

a) $X: \begin{pmatrix} k \\ e^{-4} \cdot \frac{4^k}{k!} \end{pmatrix} \quad k \in N$

b) $P(X=2) = e^{-4} \cdot \frac{4^2}{2!} = 0,14652$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X=0) - P(X=2)$

$= 1 - \frac{13}{e^4} = 0,76189$