ȘIRURI ȘI SERII DE FUNCȚII

Studiați convergența simplă și uniformă pentru șirurile de funcții (ex. 1 – 9):

1. $f_n:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{1}{nx+1}$, pentru $n\geq 0$

2. $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=nx(1-x)^n$, pentru $n\geq 0$

3. $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n-x^{2n}$, pentru $n\geq 0$

4. $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$, pentru $n>0$

5. $f_n:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}$, pentru $n\geq 0$

6. $f_n:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x}{nx^2+1}$, pentru $n\geq 0$

7. $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+n(n+1)x^2}$, pentru $n>0$

8. $f_n:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n\cdot e^{-nx}$, pentru $n\geq 0$

9. $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n+x}$, pentru $n\geq 0$

10. Fie $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x+\dfrac{1}{n}$, cu $n>0$. Să se studieze convergența simplă și uniformă pentru $f_n(x)$ și pentru $f_n^2(x)$.

11. Se consideră seria de funcții $\sum\limits_{n\geq 1} n^{-x}$, cu $x\in\mathbb{R}$. Studiați convergența simplă și uniformă și decideți dacă se poate deriva termen cu termen.

12. Se consideră seria de funcții $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n\dfrac{e^{-nx}+\sqrt{n}}{n}$, cu $x\in\mathbb{R}$. Studiați convergența simplă și absolut convergența seriei.

13. Se consideră seria de funcții $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{\sin(nx)}{n^3}$, cu $x\in\mathbb{R}$. Studiați convergența uniformă a seriei, proprietatea de transfer a continuității și decideți dacă se poate deriva termen cu termen.

14. Se consideră seria de funcții $\sum\limits_{n\geq 1}(1-x)x^n$, cu $x\in(0,1)$. Studiați convergența simplă și uniformă a seriei.

15. Se consideră seria de funcții $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2+n+1}x^n$, cu $x\in[-1,1]$. Studiați convergența simplă și uniformă a seriei.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. C.S: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, deci $f_n(x)\xrightarrow{s}0$; C.U: Fie $g(x)=|f_n(x)-0|=\dfrac{1}{nx+1}$, cu

$\sup\limits_{x\in(0,1)} g(x)\ge g(0)=1$ (se deduce din studiul variației funcției $g(x)$ pe $(0,1)$, cu $g'(x)=-\dfrac{n}{(nx+1)^2}$), și

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in(0,1)}|f_n(x)-0|\right)=1\ne 0$, deci $f_n(x)\cancel{\xrightarrow{u}}0$;

2. C.S: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ (se folosește criteriul raportului pentru șiruri), pentru $x\in(0,1]$ deci $f_n(x)\xrightarrow{s}0$ pentru $x\in(0,1]$; C.U: Se studiază tot pe intervalul $(0,1]$; Fie $g(x)=|f_n(x)-0|=nx(1-x^n)$, cu

$\sup\limits_{x\in(0,1]} g(x)\ge g\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n}{n+1}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n$ (se deduce din studiul variației funcției $g(x)$ pe $(0,1]$, cu

$g'(x)=n(1-x)^{n-1}\left[1-x(n+1)\right]$), și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in(0,1)}|f_n(x)-0|\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\dfrac{1}{e}\ne 0$, deci

$f_n(x)\cancel{\xrightarrow{u}}0$; Pentru $x=0$ avem $f_n(0)=0$ (funcția constantă).

3. C.S: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty} x^n(1-x^n)=0$, pentru $x\in[0,1]$ deci $f_n(x)\xrightarrow{s}0$;

C.U: Fie $g(x)=|f_n(x)-0|=x^n(1-x^n)$, cu $\sup\limits_{x\in[0,1]} g(x)\ge g\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)=\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n\left(1-\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n\right)$(se deduce din studiul variației funcției $g(x)$ pe $[0,1]$, cu $g'(x)=nx^{n-1}(1-2x^n)$), și

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0|\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n\left(1-\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n\right)=\dfrac{1}{4}\ne 0$, deci $f_n(x)\cancel{\xrightarrow{u}}0$;

4. C.S: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x^2}=|x|$, pentru $x\in\mathbb{R}$ deci $f_n(x)\xrightarrow{s}|x|$;

C.U: $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|f_n(x)-|x|\right|=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{x^2}\right|=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|\dfrac{1}{n^2\left(\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{x^2}\right)}\right|\ge\dfrac{1}{n}$(deoarece maximul funcției este atins pentru $x=0$), și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|f_n(x)-|x|\right|\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, deci $f_n(x)\xrightarrow{u}|x|$;

5. C.S: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=-1$, deci $f_n(x)\xrightarrow{s}-1$; C.U: Fie $g(x)=|f_n(x)+1|=\dfrac{2e^{nx}}{e^{nx}+1}$, cu

$\sup\limits_{x<0} g(x)\ge g(0)=1$ (se deduce din studiul variației funcției $g(x)$ pe $(-\infty,0)$, cu $g'(x)=\dfrac{2ne^{nx}}{(e^{nx}+1)^2}$), și

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)+1|\right)=1\ne 0$, deci $f_n(x)\cancel{\xrightarrow{u}}-1$;

6. C.S: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, pentru $x\in[-1,1]$ deci $f_n(x)\xrightarrow{s}0$; C.U: Fie $g(x)=|f_n(x)-0|=\dfrac{x}{1+nx^2}$, cu

$\sup\limits_{x\in[-1,1]} g(x)\ge g\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ (se deduce din studiul variației funcției $g(x)$ pe $[-1,1]$, cu $g'(x)=\dfrac{1-nx^2}{\left(1+nx^2\right)^2}$), $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in[-1,1]}\left|f_n(x)-0\right|\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{n}}=0$, deci

$f_n(x)\xrightarrow{u}0$;

7. C.S: $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$, pentru $x\in\mathbb{R}$ deci $f_n(x)\xrightarrow{s}0$;

C.U: $g(x)=\left|f_n(x)-0\right|=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+n(n+1)x^2}$, cu $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}g(x)\geq g\left(\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2\sqrt{n(n+1)}}$ (se deduce din studiul variației funcției $g(x)$ pe $\mathbb{R}$, cu $g'(x)=\dfrac{1-n(n+1)x^2}{x^2+\left(1+n(n+1)x^2\right)^2}$), și

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|f_n(x)-0\right|\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2\sqrt{n(n+1)}}\right)=0$, deci $f_n(x)\xrightarrow{u}0$;

8. C.S: $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$, pentru $x\geq 0$ deci $f_n(x)\xrightarrow{s}0$;

C.U: $g(x)=\left|f_n(x)-0\right|=x^n\cdot e^{-nx}$, cu $\sup\limits_{x\geq 0}g(x)\geq g(1)=\dfrac{1}{e^n}$ (se deduce din studiul variației funcției $g(x)$ pe $[0,+\infty)$, cu $g'(x)=n\cdot x^{n-1}\cdot e^{-nx}(1-x)$), și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\geq 0}\left|f_n(x)-0\right|\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{e^n}=0$, deci

$f_n(x)\xrightarrow{u}0$;

9. C.S: $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=x$, pentru $x\in[0,1]$ deci $f_n(x)\xrightarrow{s}x$;

C.U: Fie $g(x)=\left|f_n(x)-x\right|=\left|\dfrac{-x-x^2}{1+n+x}\right|=\dfrac{x+x^2}{1+n+x}$, cu $\sup\limits_{x\in[0,1]}g(x)\geq g(1)=\dfrac{2}{2+n}$ (se deduce din studiul variației funcției $g(x)$ pe $[0,1]$, cu $g'(x)=\dfrac{x^2+2x(n+1)+n+1}{(1+n+x)^2}$), și

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)-x\right|\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{2+n}=0$, deci $f_n(x)\xrightarrow{u}x$;

10. Pentru $f_n(x)$: C.S: $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=x$, pentru $x\in\mathbb{R}$ deci $f_n(x)\xrightarrow{s}x$;

C.U: $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|f_n(x)-x\right|=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|\dfrac{1}{n}\right|\xrightarrow{n\to\infty}0$, deci $f_n(x)\xrightarrow{u}x$;

Pentru $f_n^2(x)=\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^2$: C.S: $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=x^2$, pentru $x\in\mathbb{R}$ deci $f_n^2(x)\xrightarrow{s}x^2$;

C.U: Fie $g(x)=\left|f_n^2(x)-x^2\right|=\dfrac{2x}{n}+\dfrac{1}{n^2}$, cu $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}g(x)\geq g(+\infty)=+\infty$ (se deduce din studiul variației funcției $g(x)$ pe $\mathbb{R}$, cu $g'(x)=\dfrac{2}{n}$, $g(x)$ este strict crescătoare), deci $f_n^2(x)\not\xrightarrow{u}x^2$;

11. C.S: seria converge simplu pentru $x\in(1,+\infty)$ (seria armonică generalizată); C.U. Se folosește criteriul lui Weierstrass (pentru $x\in(1,+\infty)$), cu $u_n=\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ și va rezulta că seria este uniform convergentă pe $[\alpha,+\infty)$ cu $\alpha>1$. Pentru ca seria de funcții să se poată deriva termen cu termen, pentru $x\in(1,+\infty)$, se verifică că $f_n(x)=n^{-x}$ este de clasă C^1, am arătat că $\sum\limits_{n\ge 0} f_n \xrightarrow{s} f$ și mai avem de arătat că $\sum\limits_{n\ge 0} f_n' \xrightarrow{u} g$.

Seria derivatelor este $\sum\limits_{n\ge 0} f_n' = -\sum\limits_{n\ge 0} n^{-x}\ln n$ și folosim criteriul lui Weierstrass:

$\left|n^{-x}\ln n\right| \le n^{-x} = \dfrac{1}{n^x} = u_n$, seria $\sum\limits_{n\ge 0}\dfrac{1}{n^x}$ este convergentă pentru $x\in(1,+\infty)$, deci $\sum\limits_{n\ge 0} f_n' \xrightarrow{u} g$.

12. C.S. Se aplică criteriul lui Leibniz (de la serii numerice) pentru $u_n = \dfrac{e^{-nx}+\sqrt{n}}{n}$ și rezultă $\sum\limits_{n\ge 0} f_n \xrightarrow{s} f$.

Absolut convergența: $\left|f_n(x)\right| = \dfrac{1}{e^{nx}} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n}} = u_n$, seria $\sum\limits_{n\ge 0} u_n$ este divergentă (seria armonică generalizată, cu $\alpha \le 1$), deci $\nexists\, x\in\mathbb{R}$ pentru care seria $\sum\limits_{n\ge 0} f_n(x)$ să fie absolut convergentă.

13. Vom studia direct convergența uniformă (care va implica convergența simplă) - folosim criteriul lui Weierstrass: $\left|\dfrac{\sin nx}{n^3}\right| \le \dfrac{1}{n^3} = u_n$, seria $\sum\limits_{n\ge 0} u_n$ este convergentă (seria armonică generalizată, cu $\alpha > 1$), deci $\sum\limits_{n\ge 0} f_n \xrightarrow{u} f$, ceea ce implică și $\sum\limits_{n\ge 0} f_n \xrightarrow{s} f$. Pentru transferul de continuitate: $f_n(x)$ sunt funcții continue și seria $\sum\limits_{n\ge 0} f_n \xrightarrow{u} f$, deci f este continuă. Pentru ca seria de funcții să se poată deriva termen cu termen, se verifică că $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^3}$ este de clasă C^1, am arătat că $\sum\limits_{n\ge 0} f_n \xrightarrow{s} f$ și mai avem de arătat că $\sum\limits_{n\ge 0} f_n' \xrightarrow{u} g$. Seria derivatelor este $\sum\limits_{n\ge 0} f_n' = \sum\limits_{n\ge 0}\dfrac{\cos nx}{n^2}$ și folosim criteriul lui Weierstrass: $\left|\dfrac{\cos nx}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2} = u_n$, seria $\sum\limits_{n\ge 0} u_n$ este convergentă, deci $\sum\limits_{n\ge 0} f_n' \xrightarrow{u} g$.

14. C.S: Se aplică criteriul raportului (de la serii numerice) pentru $u_n = (1-x)x^n$ și rezultă $\sum\limits_{n\ge 0} f_n \xrightarrow{s} f$.

C.U: Criteriul lui Weierstrass: $\left|f_n(x)\right| = \left|(1-x)x^n\right| = (1-x)x^n \le x^n = u_n$, seria $\sum\limits_{n\ge 0} u_n$ este convergentă (seria geometrică cu $x\in(0,1)$), deci $\sum\limits_{n\ge 0} f_n \xrightarrow{u} f$.

15. C.S: Se aplică criteriul comparației cu inegalități (de la serii numerice) pentru $x\in(-1,1)$:

$u_n = \dfrac{1}{n^2+n+1}x^n \le x^n = v_n$, seria $\sum\limits_{n\ge 0} v_n$ este convergentă (seria geometrică cu $x\in(-1,1)$); pentru $x=-1$ avem seria numerică alternantă $\sum\limits_{n\ge 0}(-1)^n\dfrac{1}{n^2+n+1}$ care este convergentă (se arată cu criteriul lui Leibniz) iar pentru $x=1$ avem seria numerică $\sum\limits_{n\ge 0}\dfrac{1}{n^2+n+1}$ care este convergentă (se arată cu criteriul de comparație la limită). Rezultă că $\sum\limits_{n\ge 0} f_n \xrightarrow{s} f$ pentru $x\in[-1,1]$. C.U: Criteriul Weierstrass: $\left|f_n(x)\right| \le x^n = u_n$, seria $\sum\limits_{n\ge 0} u_n$ este convergentă (seria geometrică cu $x\in(-1,1)$), deci $\sum\limits_{n\ge 0} f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $x\in(-1,1)$.