Prin urmare $A' = [0;2]$.

$Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = ([0;2] \cup \{3;4\}) \setminus (0;2) = \{0;2;3;4\}$

$izo(A) = \bar{A} \setminus A' = ([0;2] \cup \{3;4\}) \setminus ([0;2]) = \{3;4\}$

CURS 10

06.12.2018

Teoremă (Fermat) - Fie $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ și $c \in (a;b)$ a.î. $\exists f'(c)$ și c să fie punct de extrem local. Atunci $\Rightarrow f'(c) = 0$

Dem: pp. că c este un punct de minim local $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ a.î. pt. $\forall x \in (c-\varepsilon; c+\varepsilon) \Rightarrow f(x) \geq f(c)$

dacă $x \in (c-\varepsilon; c) \Rightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \Rightarrow f'(c) = \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x<c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$

dacă $x \in (c; c+\varepsilon) \Rightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \Rightarrow f'(c) = \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x>c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(c) = 0$

Teoremă (Rolle) - Fie $f:[a;b] \to \mathbb{R}$ derivabilă pe $(a;b)$, continuă în a și b (f este cont. pe $[a;b]$) și $f(a) = f(b)$. Atunci $\exists\, c \in (a;b)$ a.î. $f'(c) = 0$

Dem: f este cont. pe $[a;b] \Rightarrow$ este mărginită pe $(a;b)$

$M = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x)\ (\in \mathbb{R})$ $\quad m = \inf\limits_{x \in [a;b]} f(x)$

Vom avea 3 cazuri

C1 $M > f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in (a;b)$ a. î. $f(c) = M \Rightarrow$
$\Rightarrow c$ este punct de extrem local $\overset{T.F.}{\Rightarrow} f'(c) = 0$

C2 $m < f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in (a;b)$ a. î. $f(c) = m \Rightarrow$
$\Rightarrow c$ este punct de maxim local $\overset{T.F.}{\Rightarrow} f'(c) = 0$

C3 $M = m = f(a) = f(b) \Rightarrow f$ este constantă $\Rightarrow f'(c) = 0$
$\forall\, c \in (a;b)$

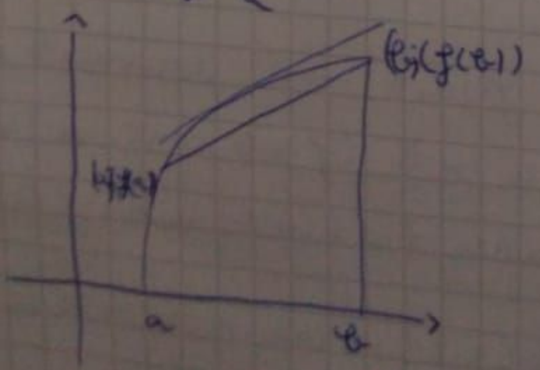
ma lui Lagrange: Fie $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ a. î. f să fie continuă pe $[a;b]$ și derivabilă pe $(a;b)$.
Atunci $\exists\, c \in (a;b)$ a. î. $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

: Fie $h : [a;b] \to \mathbb{R}$. ~~[illegible]~~ dată de $h(x) = f(x) - \alpha x$
h este cont. pe $[a;b]$ și derivabilă pe $(a;b)$
~~[illegible]~~

$h(a) = h(b) \Leftrightarrow f(a) - \alpha a = f(b) - \alpha b \Leftrightarrow \alpha(b - a) = f(b) - f(a) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$\overset{T.R.}{\Rightarrow} \exists\, c \in (a;b)$ a. î. $h'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \alpha = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(c) = \alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$



<u>Obs</u>: Fie $f: (a;b) \to \mathbb{R}$ derivabilă. Atunci:

1) $f' = 0 \iff f$ este constantă

2) $f' \geq 0 \iff f$ este crescătoare

3) f este strict crescătoare $\iff f' \geq 0$ și $\{x \mid f'(x) > 0\}' = (a;b)'$ ($\cap (a;b)$) (mulț punctelor de acumulare)

<u>Teoremă</u> (Cauchy) - Fie $f, g : [a;b] \to \mathbb{R}$, derivabile pe $(a;b)$ și continue pe $[a;b]$ a.î. $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a;b)$. Atunci $g(b) \neq g(a)$ și $\exists\, c \in (a;b)$ a.î.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$g(x) = x \Rightarrow$ T.L.

<u>Dem</u>: Din T.L. pentru fct. g pe $[a;b] \Rightarrow \exists\, d \in (a;b)$ a.î.

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(d) \neq 0 \Rightarrow g(a) \neq g(b)$$

Fie $h: [a;b] \to \mathbb{R}$. $h(x) = f(x) - \alpha \cdot g(x) \Rightarrow$

h este continuă pe $[a;b]$ și este derivabilă pe $(a;b)$

$h(a) = h(b)$ (pt. a putea aplica T.R) $\iff$

$\iff f(a) - \alpha \cdot g(a) = f(b) - \alpha \cdot g(b) \iff \alpha = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

T.R $\Rightarrow \exists\, c \in (a;b)$ a.î. $h'(c) = 0 \iff f'(c) - \alpha \cdot g'(c) = 0 \iff$

$$\iff \frac{f'(c)}{g'(c)} = \alpha = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Teoremă - Fie $f:(a;b)\to\mathbb{R}$. ~~Atunci~~ derivabilă. Atunci f are proprietatea lui Darboux. (PD)

Dem: $a<c<b<d$. $\alpha=f'(c)$ și $\beta=f'(d)$

PP. $\alpha<\beta$.

Fie $\gamma\in(\alpha;\beta)$

Considerăm $g:(a;b)\to\mathbb{R}$ $g(x)=f(x)-\gamma\cdot x$.

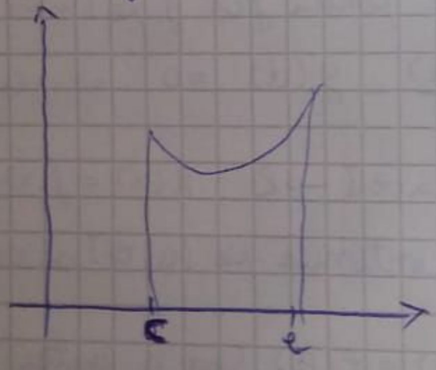
$g'(x)=f'(x)-\gamma$

$g:[c;d]\to\mathbb{R}$

$\exists\, x_0\in[c;d]$ a.î. $g(x_0)=\inf\limits_{x\in[c;d]} g(x)$

Dacă $x_0\in(c;d) \Rightarrow x_0$ este punct de extrem local pentru g

$\Rightarrow g'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=\gamma$



$g'(c)=f'(c)-\gamma=\alpha-\gamma<0$

$$g'(c)=\lim_{\substack{x\to c\\ x>c}}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}=\alpha-\gamma<0.$$

Atunci $\Rightarrow \varepsilon>0$ a.î. pt. $\forall x\in(c;c+\varepsilon)\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{g(x)-g(c)}{x-c}<\dfrac{\alpha-\gamma}{2}<0 \Rightarrow g(x)<g(c)$.

$g(c)\neq\inf\limits_{x\in[c;d]} g(x)=g(x_0)$

$\Rightarrow x_0\neq c$

Analog $x_0\neq d$

Teorema L'H: Fie $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, derivabile pe $(a; b)$ cu $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a; b)$

pp. că $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} g(x) = \alpha$ și $\alpha \in \{0; \infty\}$ și

$\exists \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$.

Atunci $\exists \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Cazuri

$\ell \begin{cases} \in \mathbb{R} \\ \{\pm\infty\} \end{cases}$

$b \begin{cases} \to \in \mathbb{R} \\ \to \pm\infty \end{cases}$

$\alpha \begin{cases} \to 0 \\ \to \infty \end{cases}$

C1 $\alpha = 0$, $b \in \mathbb{R}$. Fie $\tilde{f}, \tilde{g} : (a; b] \to \mathbb{R}$ dată de

$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a; b) \\ 0, & x = b \end{cases}$ $\quad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x < b \\ 0, & x = b \end{cases}$

$\tilde{f}, \tilde{g}$ der pe $(a; b)$ cont. în b

T.C. pt. $\tilde{f}, \tilde{g}$ pe $[x; b]$ (unde $x \in (a; b)$) $\Rightarrow c_x \in (x; b)$ a.î.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(b)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(b)} = \frac{\tilde{f}'(c_x)}{\tilde{g}'(c_x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

$x \to b \Rightarrow c_x \to b$

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to b \\ x < a}} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \ell.$$

(C2) $\alpha = \infty \quad b \in \mathbb{R} \quad \ell \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ a.î. } x \in (b-\delta_\varepsilon; b)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| < \varepsilon$$

$$b - \delta_\varepsilon < x_0 < x < b \qquad x \to b$$

T.C. pt. f, g pe $[x_0; x] \Rightarrow \exists\ c_x \in (x_0; x)$ a.î.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - \ell \right| < \varepsilon \quad | : g(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}} - \ell \right| < \varepsilon$$

$\lim_{x \to b} g(x) = \infty \Rightarrow \exists \delta'_\varepsilon \in (0; \delta_\varepsilon)$ a.î. $\left| \frac{f(x_0)}{g(x)} \right| < \varepsilon$

și $\left| \frac{g(x_0)}{g(x)} \right| < \varepsilon$ pt. $\forall x \in (b - \delta'_\varepsilon; b)$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - \ell \cdot \frac{g(x_0)}{g(x)} \right| \le \varepsilon \left(1 + \left| \frac{g(x_0)}{g(x)} \right| \right) \le \varepsilon + \varepsilon^2$$

$$\cancel{\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| = \ell + \ell_\varepsilon + \left| \frac{f(x_0)}{g(x)} \right| + \left| \ell \cdot \frac{g(x_0)}{g(x)} \right|}$$

$$\cancel{\le \varepsilon + \varepsilon\ell + \varepsilon}$$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\ell\right| \le \varepsilon+\varepsilon^2+\left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right|+\left|\frac{\ell\, g(x_0)}{g(x)}\right| \le \varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon+\varepsilon\ell =$$

$$= \varepsilon(1+2\ell+\varepsilon)$$

$h=\infty$ $\quad f,g:(a;+\infty)\to\mathbb{R} \quad a>0$

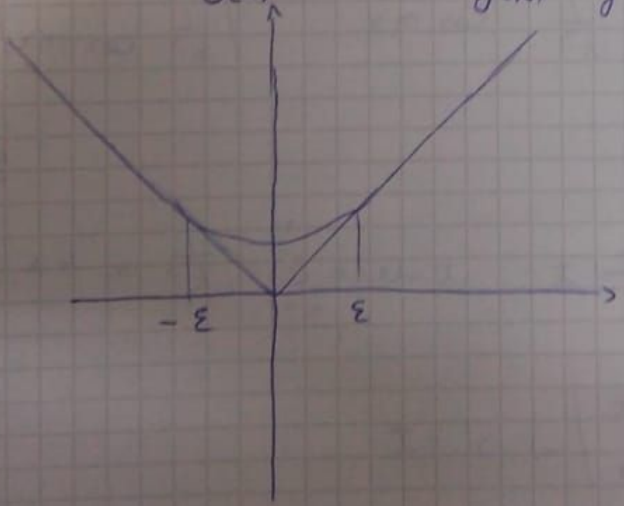
$F,G:(0;\frac{1}{a})\to\mathbb{R} \quad F(x)=f(\frac{1}{x})$

$G(x)=g(\frac{1}{x})$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\cancel{-\frac{1}{x^2}}\cdot f'(\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to y})}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}\cdot g'(\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to y})}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(y)}{g'(y)}=\ell$$

T. L'H. $\ell\in\mathbb{R}$

$$\ell=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\frac{1}{x})}{g(\frac{1}{x})}=\lim_{y\to\infty}\frac{f(y)}{g(y)}$$



$f(x)=|x|$ (nu $\exists f'(0)$)

g deriv. pe $\mathbb{R}$

$\sup|f(x)-g(x)|<\varepsilon$

<u>Teoremă</u> - Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $f_n:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile a.î.

1) $\exists\, g:(a,b)\to\mathbb{R}$ a.î. $f_n'\xrightarrow{u} g$

2) $\exists\, c\in(a,b)$ a.î. $(f_n(c))_{n\ge1}$ să fie convergente

Atunci $\exists\, f:(a,b)\to\mathbb{R}$ a.î. ① $f'=g$

② $f_n\xrightarrow{u} f$

exemplu

$s(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} \sin nx \quad \in C^2 \quad \exists\, s'$ și este cont.

$\left|\frac{1}{n^4} \cdot \sin nx\right| \leq \frac{1}{n^4} \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \left|\frac{1}{n^4} \cdot \sin nx\right| \leq \sum \frac{1}{n^4} \cdot \sin nx$

serie este absolut conv. $\forall x \in \mathbb{R}$

$s_m(x) = \sum_{k \geq 1}^{m} \frac{1}{k^4} \cdot \sin kx \rightarrow |s(x) - s_m(x)| \leq$

$\leq \sum_{k \geq m+1} \left|\frac{1}{k^4} \sin kx\right| \leq \sum_{k \geq m+1} \frac{1}{k^4} \searrow 0$

$\Rightarrow s_n \xrightarrow{u} 0$

s_m cont. $\Big| \Rightarrow s$ cont.

$t(x) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n^4} \sin nx\right)' =$

$= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3} \cos nx \qquad \left|\frac{1}{n^3} \cdot \cos nx\right| \leq \frac{1}{n^3}$

$\sum \frac{1}{n^3}$ conv.

$t_m \xrightarrow{u} t \qquad t_m(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \cdot \cos kx$

$s_m' \xrightarrow{u} t$

$s_m \xrightarrow{u} s \Big| \Rightarrow s' = t$

$\sum$

$$u(t) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n^4} \sin nx \right)'' = \sum \frac{1}{n^2} \cdot (-\sin nx)$$

$$\left| -\frac{1}{n^2} \cdot \sin nx \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ este conv.

$\Rightarrow u_n \xrightarrow{u} u \qquad u_n(x) = \sum_{k=1} -\frac{1}{k^2} \cdot \sin kx$

$\quad ||$

(T2) $t_n' \xrightarrow{u} u$

$$\left. \begin{array}{l} t_n \longrightarrow t \quad \Rightarrow t' = u \\ \qquad\qquad\quad s' = t \end{array} \right| \Rightarrow s'' = u$$

(T1) $\left. \begin{array}{l} u_n \xrightarrow{u} u \\ u_n \text{ cont.} \end{array} \right| \Rightarrow u$ cont.