

Drumuri minime de la un vârf s dat  
la celelalte vârfuri  
(de sursă unică)

# Algoritmul lui BELLMAN – FORD

## ► Ipoteză:

Arcele pot avea și cost negativ

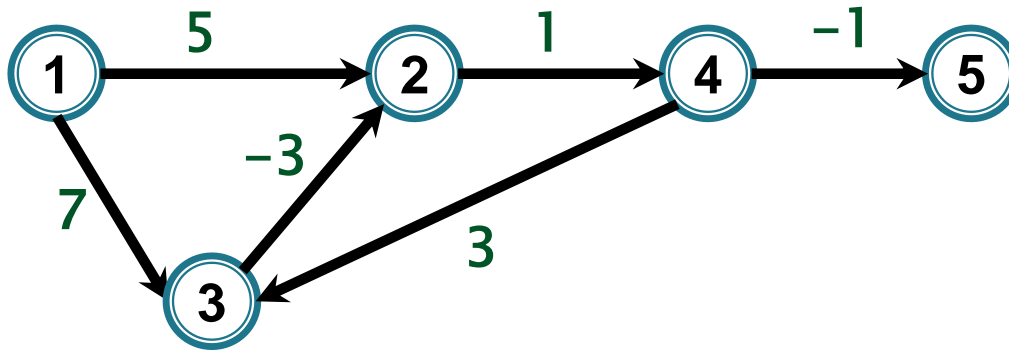
Graful nu conține circuite de cost negativ

(dacă există – algoritmul le va detecta  $\Rightarrow$  nu soluție)

Toate vârfurile sunt accesibile din s

# Algoritmul Bellman Ford

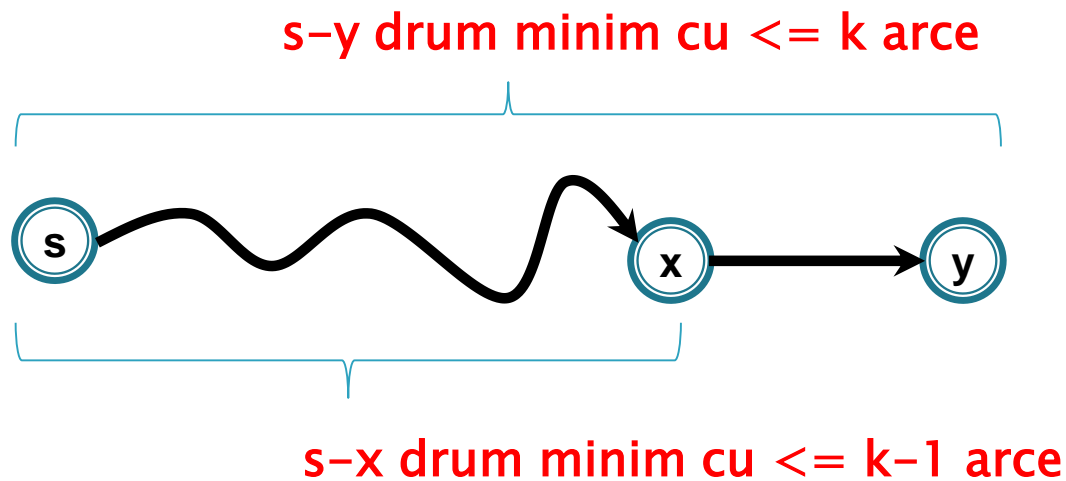
# Algoritmul lui BELLMAN – FORD



Algoritmul lui Dijkstra – doar pentru ponderi nenegative

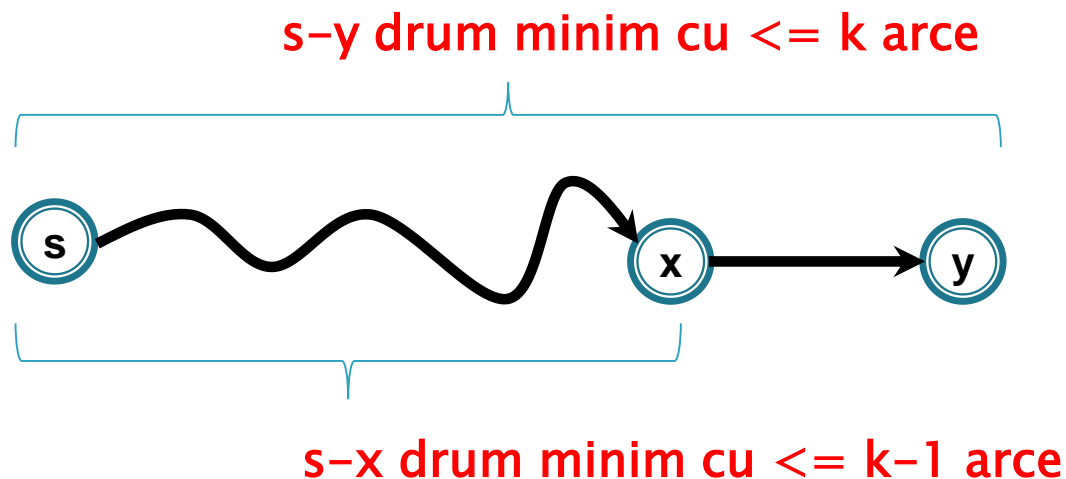
# Algoritmul lui BELLMAN – FORD

- ▶ **Idee:** La un pas relaxăm toate arcele
- ▶ De câte ori?



# Algoritmul lui BELLMAN – FORD

- ▶ **Idee:** La un pas relaxăm toate arcele
- ▶ De câte ori?



Dacă  $P$  este s-y drum minim cu  $\leq k$  arce  $\Rightarrow$

$[s \underline{P} x]$  este s-x drum minim cu  $\leq k-1$  arce

Un drum minim are cel mult  $n-1$  arce  $\Rightarrow n-1$  etape

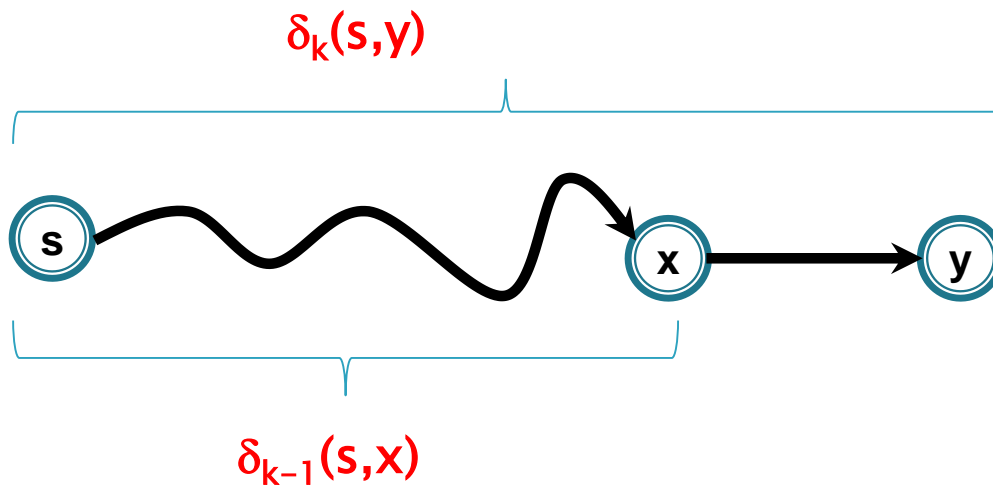
# Algoritmul lui BELLMAN – FORD

- ▶ **Idee:** La un pas relaxăm toate arcele  
(nu relaxăm arcele dintr-un vârf selectat  $u$ , ci **din toate vârfurile**)
  - ▶  **$n-1$  etape** – după  $k$  etape  $d[u] \leq$  costul minim al unui drum de la  $s$  la  $u$  cu cel mult  $k$  arce (**programare dinamică**)
- $\Rightarrow$  după  $k$  etape sunt corect calculate etichetele  $d[u]$  pentru acele vârfuri  $u$  pentru care **există un  $s-u$  drum minim cu cel mult  $k$  arce**

# Algoritmul lui BELLMAN – FORD

## ► Notăm

$\delta_k(s, x)$  = costul minim al unui s–x drum cu cel mult k arce

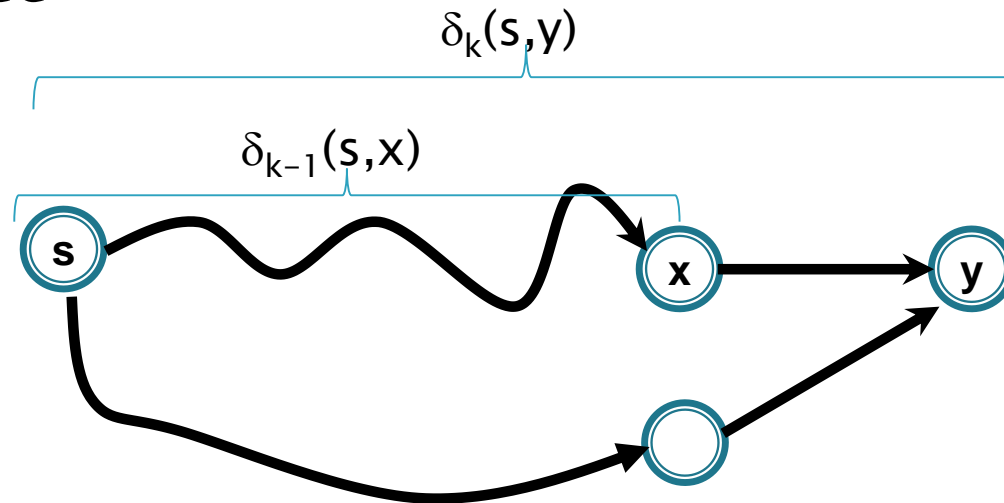




# Algoritmul lui BELLMAN – FORD

## ► Notăm

$\delta_k(s,x)$  = costul minim al unui s-x drum cu cel mult k arce



Avem

$$\delta_k(s,y) = \min\{\delta_{k-1}(s,y), \min\{\delta_{k-1}(s,x) + w(xy) \mid xy \in E\}\}$$

# Algoritmul lui BELLMAN – FORD

pentru fiecare  $u \in V$  executa

$d[u] = \infty$ ;  $tata[u] = 0$

$d[s] = 0$

pentru  $i = 1, n-1$  executa

pentru fiecare  $uv \in E$  executa

daca  $d[u] + w(u, v) < d[v]$  atunci

$d[v] = d[u] + w(u, v)$

$tata[v] = u$

# Algoritmul lui BELLMAN – FORD

pentru fiecare  $u \in V$  executa

$d[u] = \infty$ ;  $tata[u] = 0$

$d[s] = 0$

pentru  $i = 1, n-1$  executa

pentru fiecare  $uv \in E$  executa

daca  $d[u] + w(u, v) < d[v]$  atunci

$d[v] = d[u] + w(u, v)$

$tata[v] = u$

Complexitate:  $O(nm)$

# Algoritmul lui BELLMAN – FORD

- ▶ Optimizări

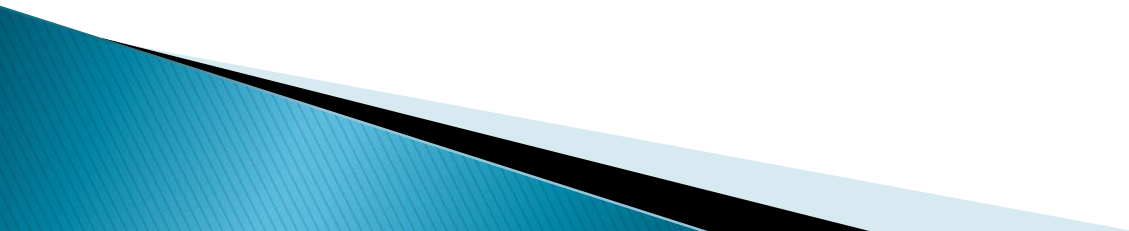
La un pas este suficient să relaxăm arcele din vârfuri ale căror etichetă s-a modificat anterior=>

# Algoritmul lui BELLMAN – FORD

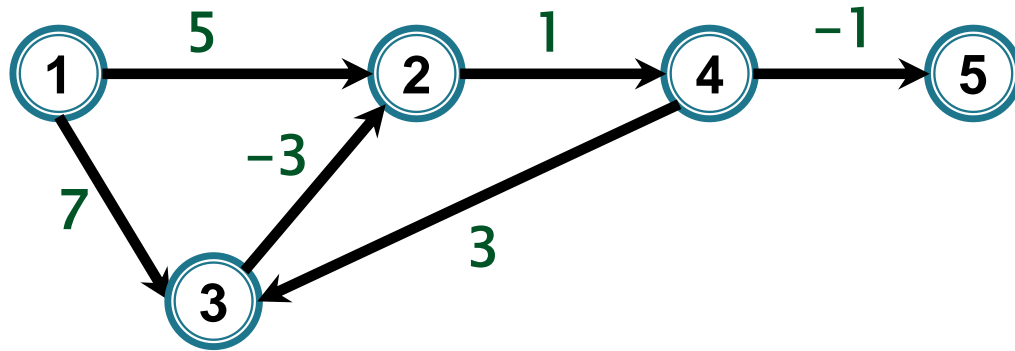
## ► Optimizări

La un pas este suficient să relaxăm arcele din vârfuri ale căror etichetă s-a modificat anterior=>  
coadă cu vârfurile ale căror etichetă s-a actualizat

Detalii – laborator



# Etapa 1

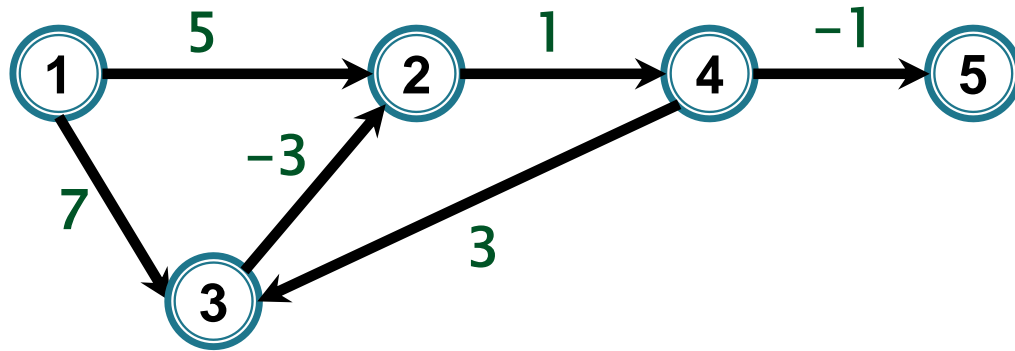


Relaxăm

1 2  
1 3

	1	2	3	4	5
d	0	5	7	$\infty$	$\infty$

# Etapa 1

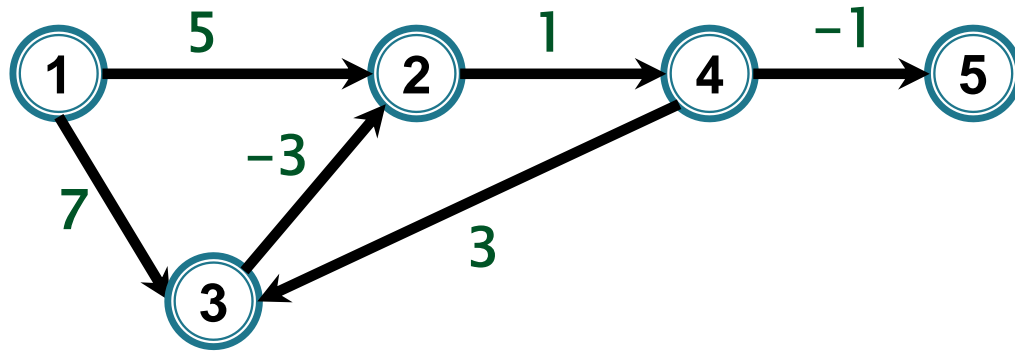


Relaxăm

1 2  
1 3  
2 4

	1	2	3	4	5
d	0	5	7	6	$\infty$

# Etapa 1



Relaxăm

1 2

1 3

2 4

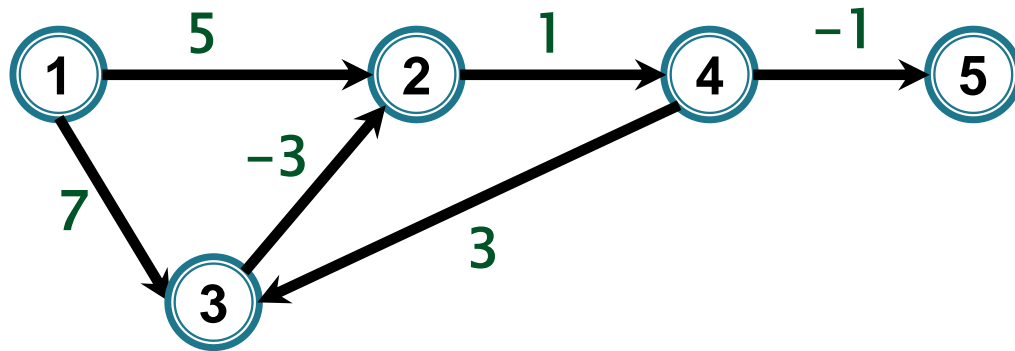
4 3

4 5

	1	2	3	4	5
d	0	5	7	6	5



# Etapa 1



Relaxăm

1 2

1 3

2 4

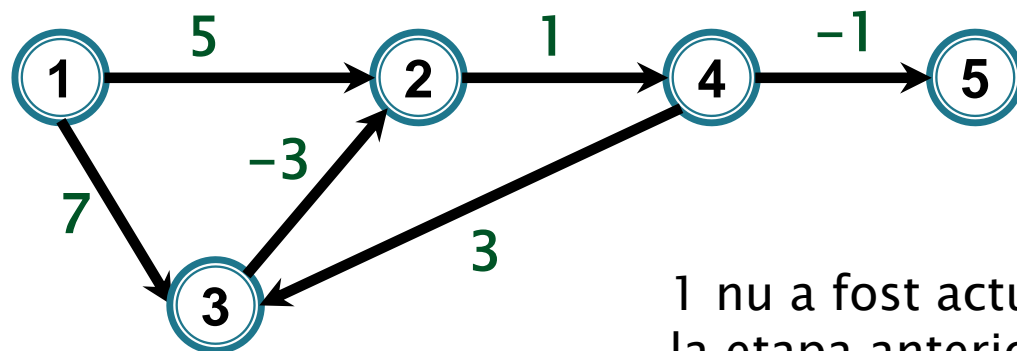
4 3

4 5

3 2

	1	2	3	4	5
d	0	4	7	6	5

## Etapa 2



1 nu a fost actualizat  
la etapa anterioara,  
le putem ignora

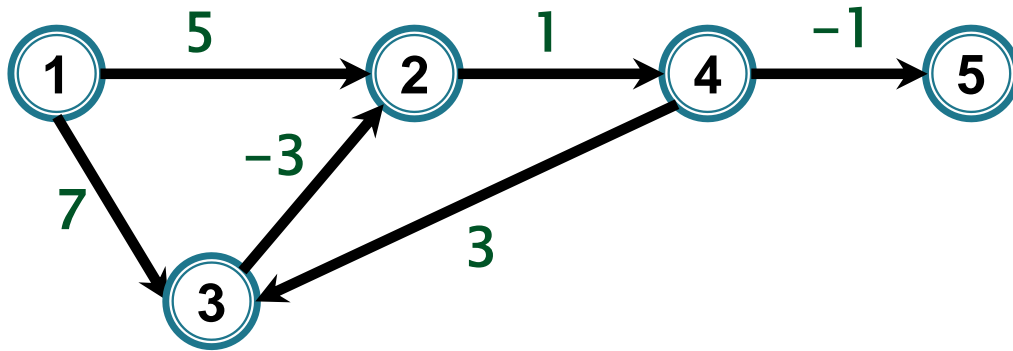
Relaxăm

1 2  
1 3

	1	2	3	4	5
d	0	4	7	6	5

## Etapa 2

Relaxăm



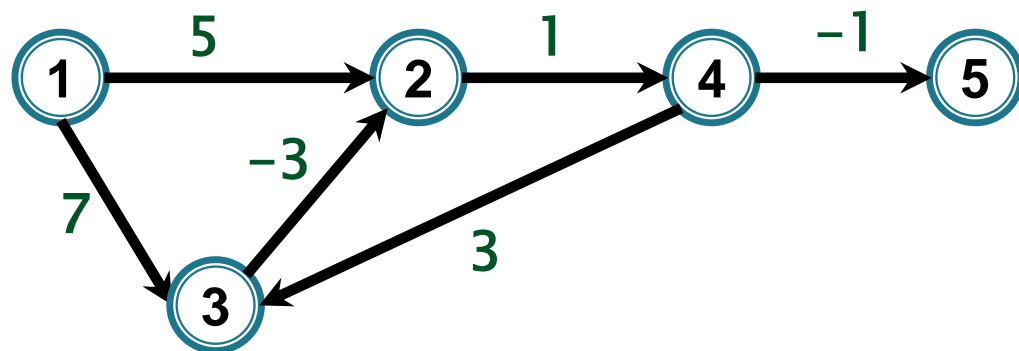
1 2

1 3

2 4

	1	2	3	4	5
d	0	4	7	5	5

## Etapa 2



Relaxăm

1 2

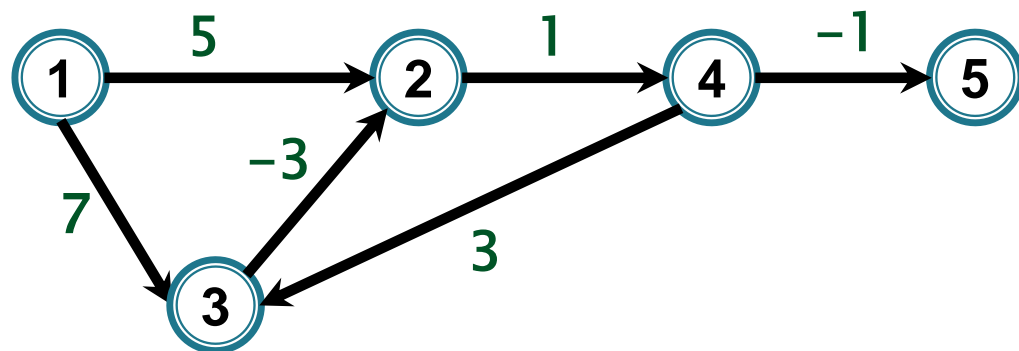
1 3

2 4

4 3

	1	2	3	4	5
d	0	4	7	5	5

## Etapa 2



Relaxăm

1 2

1 3

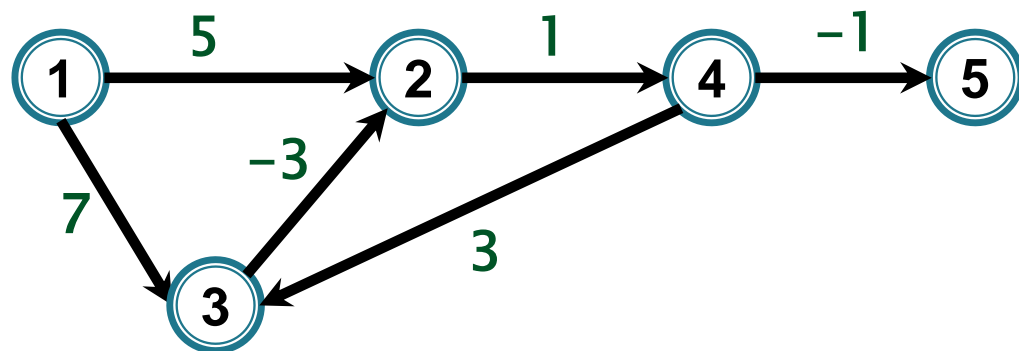
2 4

4 3

4 5

	1	2	3	4	5
d	0	4	7	5	4

## Etapa 2



Relaxăm

1 2

1 3

2 4

4 3

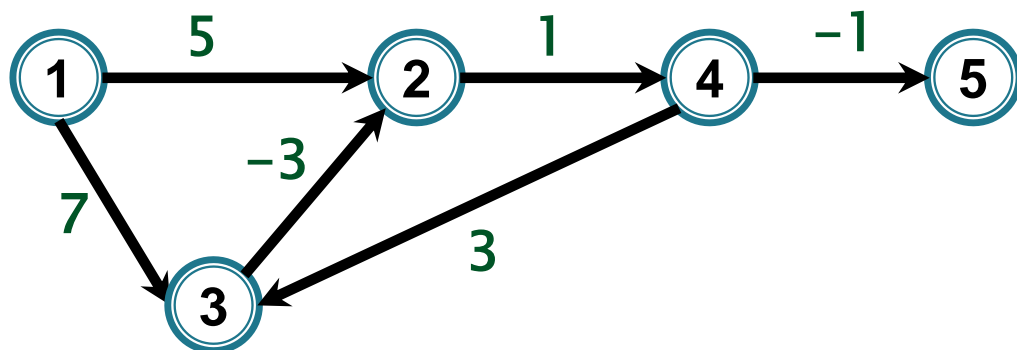
4 5

3 2

	1	2	3	4	5
d	0	4	7	5	4

## Etapa 3

Relaxăm



1 2

1 3

2 4

4 3

4 5

3 2

Nu se mai actualizează nimic – stop

	1	2	3	4	5
d	0	4	7	5	4

# Corectitudinea Algoritmului lui Bellman–Ford





# Corectitudine

- ▶ **Lema 1 (comună).** Pentru orice  $u \in V$ , la orice pas al algoritmului avem:
  - a) dacă  $d[u] < \infty$ , există un drum de la  $s$  la  $u$  în  $G$  de cost  $d[u]$  și acesta se poate determina din vectorul  $tata$ :  
 $tata[u] =$  predecesorul lui  $u$  pe un drum de la  $s$  la  $u$  de cost  $d[u]$
  - b)  $d[u] \geq \delta(s, u)$

# Corectitudine

- ▶ **Demonstrație:** Inducție după numărul de etape (o etapa = relaxarea tuturor muchiilor):

După  $k$  iterații

$$d[x] \leq \delta_k(s, x)$$

= costul minim al unui  $s$ - $x$  drum cu cel mult  $k$  muchii

# Corectitudine

- ▶  $d[x] \leq \delta_k(s, x)$

= costul minim al unui s-x drum cu cel mult k muchii

- ▶  $k = 0: d[s] = 0 = w([s])$


- ▶  $k-1 \Rightarrow k$ . Presupunem că înainte de iterația k

$$d[x] \leq \delta_{k-1}(s, x) \text{ pentru orice } x$$

Eticheta unui vârf y la iterația k se actualizează astfel:

# Corectitudine

ipoteza de inducție

$$d[y] \leq \min\{d[y], \min\{d[x] + w(x, y) \mid xy \in E\}\} \leq$$


# Corectitudine

ipoteza de inducție

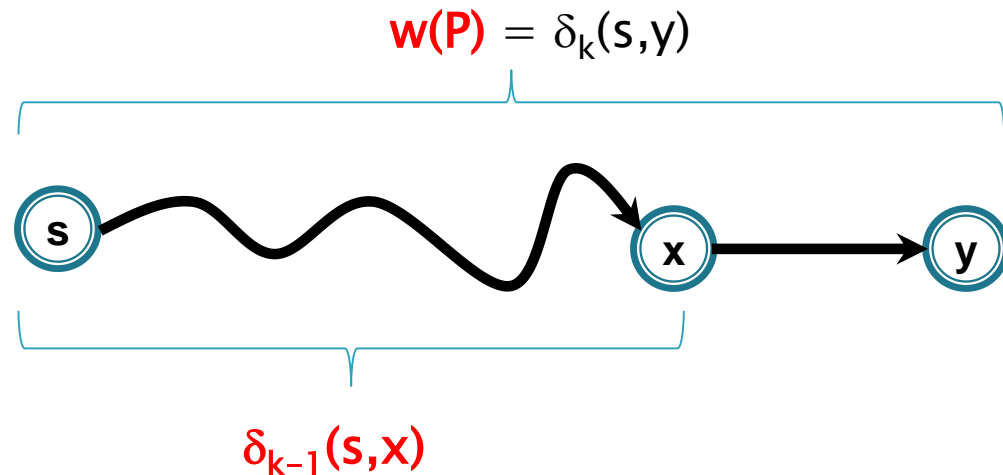
$$\begin{aligned} d[y] &\leq \min\{d[y], \min\{d[x] + w(x, y) \mid xy \in E\}\} \leq \\ &\leq \min\{\delta_{k-1}(s, y), \min\{\delta_{k-1}(s, x) + w(x, y) \mid xy \in E\}\} = \\ &= \delta_k(s, y) \end{aligned}$$

# Corectitudine

- ▶  $k-1 \Rightarrow k$ . Presupunem că înainte de iterația  $k$

$$d[x] \leq \delta_{k-1}(s, x) \text{ pentru orice } x$$

**Varianta 2.** Fie  $P$  un  $s$ - $y$  drum cu cost minim printre cele cu cel mult  $k$  arce (  $w(P) = \delta_k(s, y)$  )



# Corectitudine

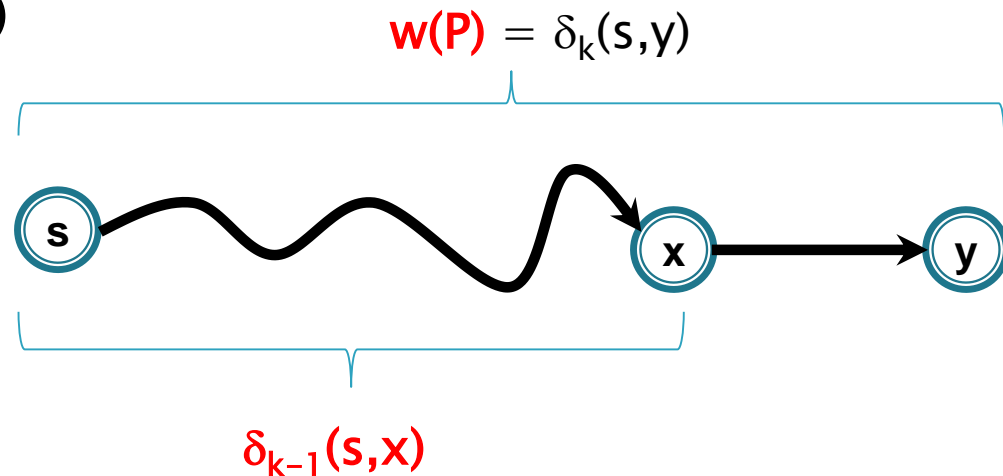
- ▶  $k-1 \Rightarrow k$ . Presupunem că înainte de iterația  $k$

$$d[x] \leq \delta_{k-1}(s, x) \text{ pentru orice } x$$

**Varianta 2.** Fie  $P$  un  $s$ - $y$  drum cu cost minim printre cele cu cel mult  $k$  arce (  $w(P) = \delta_k(s, y)$  )

$\Rightarrow$   $[s \underline{P} x]$  este  $s$ - $x$  drum cu cost minim printre cele cu cel mult  $k-1$  arce, deci are cost  $\delta_{k-1}(s, x)$

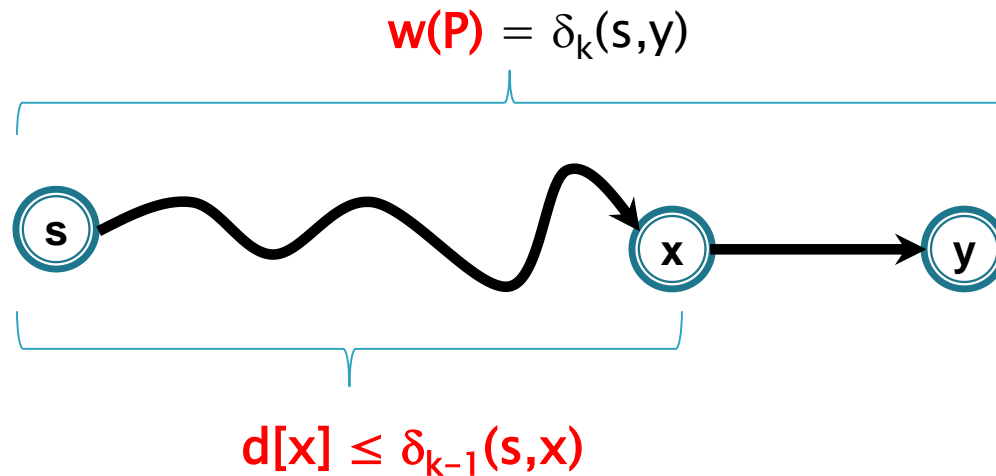
$$\Rightarrow d[x] \leq \delta_{k-1}(s, x)$$



# Corectitudine

După relaxarea arcului  $xy$ :

$$\begin{aligned} d[y] &\leq d[x] + w(xy) \leq \\ &\leq \delta_{k-1}(s, x) + w(xy) = \\ &= w([s \underline{P} x]) + w(xy) = w(P) = \delta_k(s, y) \end{aligned}$$





# Detectarea de circuite negative

# Detectarea de circuite negative

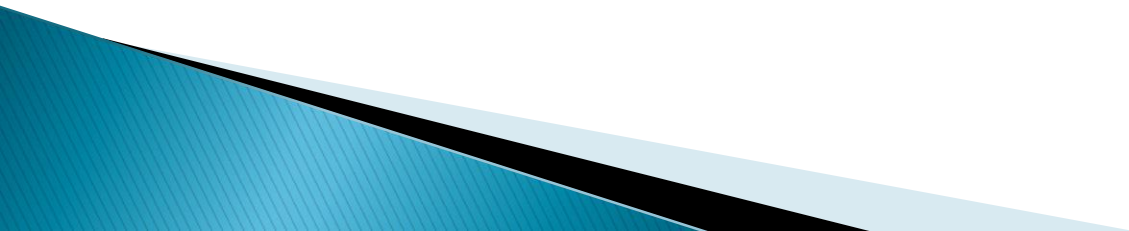
- ▶ Există un circuit negativ în  $G$  (accesibil din  $s$ )  $\Leftrightarrow$  dacă algoritmul ar mai face o iterație  $s$ -ar mai actualiza etichete de distanță
- $\Leftrightarrow$  După  $n-1$  iterații există un arc  $uv$  cu
$$d[v] > d[u] + w(uv)$$

# Detectarea de circuite negative

**Demonstrație:** Arătăm că

nu există circuite negative (accesibile din  $s$ )  $\Leftrightarrow$

nu se mai fac actualizări la pasul  $n$



# Detectarea de circuite negative

**Demonstrație:** Arătăm că

nu există circuite negative (accesibile din  $s$ )  $\Leftrightarrow$

nu se mai fac actualizări la pasul  $n$

- ▶ Dacă nu există circuite negative  $\Rightarrow$  nu se mai fac actualizări la pasul  $n$  (din corectitudine)

# Detectarea de circuite negative

**Demonstrație:** Arătăm că

nu există circuite negative (accesibile din  $s$ )  $\Leftrightarrow$

nu se mai fac actualizări la pasul  $n$

- ▶ Dacă nu există circuite negative  $\Rightarrow$  nu se mai fac actualizări la pasul  $n$  (din corectitudine)
- ▶ Dacă nu se mai fac actualizări la pasul  $n$ , pentru orice circuit  $C=[v_0, \dots, v_p, v_0] \Rightarrow d[v_{i+1}] \leq d[v_i] + w(v_i v_{i+1})$

Însumând pe circuit:

# Detectarea de circuite negative

**Demonstrație:** Arătăm că

nu există circuite negative (accesibile din  $s$ )  $\Leftrightarrow$

nu se mai fac actualizări la pasul  $n$

- ▶ Dacă nu există circuite negative  $\Rightarrow$  nu se mai fac actualizări la pasul  $n$  (din corectitudine)
- ▶ Dacă nu se mai fac actualizări la pasul  $n$ , pentru orice circuit  $C=[v_0, \dots, v_p, v_0] \Rightarrow d[v_{i+1}] \leq d[v_i] + w(v_i v_{i+1})$

Însumând pe circuit:

$$d[v_0] + \dots + d[v_p] \leq d[v_0] + \dots + d[v_p] + w(v_0 v_1) + \dots + w(v_p v_0)$$

$$\Rightarrow 0 \leq w(v_0 v_1) + \dots + w(v_p v_0) = w(C)$$

# Detectarea de circuite negative

**Afişarea circuitului negativ detectat – folosind tata:**



# Algoritmul lui BELLMAN – FORD

pentru fiecare  $u \in V$  executa

$d[u] = \infty$ ;  $tata[u] = 0$

$d[s] = 0$

pentru  $i = 1, n-1$  executa

pentru fiecare  $uv \in E$  executa

daca  $d[u] + w(u, v) < d[v]$  atunci

$d[v] = d[u] + w(u, v)$

$tata[v] = u$

pentru fiecare  $uv \in E$  executa

daca  $d[u] + w(u, v) < d[v]$  atunci

$d[v] = d[u] + w(u, v)$

$tata[v] = u$

STOP, exista circuit negativ



# Detectarea de circuite negative

**Afișarea circuitului negativ detectat – folosind tata:**

- ▶ Fie  $v$  un vârf al cărui etichetă s-a actualizat la pasul suplimentar  $n$

# Detectarea de circuite negative

**Afișarea circuitului negativ detectat – folosind tata:**

- ▶ Fie  $v$  un vârf al cărui etichetă s-a actualizat la pasul suplimentar  $n$
- ▶ Facem  $n$  pași înapoi din  $v$  folosind vectorul  $tata$  (către  $s$ ) ;  
fie  $x$  vârful în care am ajuns
- ▶ Afișăm circuitul care conține pe  $x$  folosind  $tata$  (din  $x$  până ajungem iar în  $x$ )