LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

02.06.2013

Numele .... Grupa ....

1. a) Definiţi noţiunea de transpoziţie şi arătaţi că orice transpoziţie este o permutare impară.

b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 4 & 7 & 5 & 10 & 9 & 8 & 12 & 6 & 11 & 13 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^3, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\mathrm{ord}(\sigma)$ şi σ^{1255}.

2. a) Teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri: enunţ şi demonstraţie.
b) Precizaţi dacă grupurile $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Q}$ sunt sau nu ciclice. Justificări!

3. a) Definiţi noţiunile de inel integru şi element nilpotent al unui inel.
b) Determinaţi idealele şi, până la izomorfism, inelele factor ale inelului $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Q}$.

LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

02.06.2013

Numele .... Grupa ....

1. a) Definiţi subgrupul generat de o submulţime şi arătaţi că

$$S_n = \langle (1,2), (2,3), \ldots, (n-1,n) \rangle.$$

b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 11 & 10 & 7 & 12 & 1 & 2 & 5 & 4 & 13 & 6 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^3, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\mathrm{ord}(\sigma)$ şi σ^{2455}.

2. a) Teorema lui Lagrange: enunţ şi demonstraţie.
b) Determinaţi elementele de ordin 50 din $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{25}$.

3. a) Ideale: definiţie, exemple.
b) Determinaţi elementele idempotente de grad cel mult 5 din $\mathbb{Z}_{700}[X]$.

LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

03.02.2014

Numele .... Grupa ....

1. a) Definiţi noţiunea de funcţie injectivă şi precizaţi dacă funcţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(a) = 5a + 3$ este sau nu surjectivă.

b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 4 & 7 & 6 & 9 & 8 & 11 & 10 & 13 & 12 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^4, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\mathrm{ord}(\sigma)$ şi σ^{1402}

2. a) Teorema lui Lagrange: enunţ şi demonstraţie.
b) Descompuneţi numărul $2^{48} + 1$ în produs de cel putin trei factori (neunitari).

3. a) Demonstraţi că $\widehat{a} \in \mathbb{Z}_n$ este divizor al lui zero dacă şi numai dacă $(a, n) \neq 1$.
b) Determinaţi numărul elementelor idempotente de grad cel mult 5 din $\mathbb{Z}_{116}[X]$.

LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

03.02.2014

Numele .... Grupa ....

1. a) Definiţi noţiunea de funcţie surjectivă şi precizaţi dacă funcţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(a) = |a - 5|$ este sau nu injectivă.

b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 10 & 9 & 2 & 11 & 12 & 13 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^3, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\mathrm{ord}(\sigma)$ şi σ^{2014}.

2. a) Construcţia grupului factor.
b) Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_{601}$ ecuaţia $327\,x + 208 = 0$.

3. a) Demonstraţi că $\widehat{a} \in \mathbb{Z}_n$ este inversabil dacă şi numai dacă $(a, n) = 1$.
b) Determinaţi numărul elementelor inversabile de grad cel mult 5 din $\mathbb{Z}_{116}[X]$.

LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

09.02.2014

Numele .... Grupa ....

1. a) Grupuri ciclice: definiţie, proprietăţi, exemple.

b) Considerăm grupurile $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9$ şi $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{10}$. Decideţi dacă ele sunt sau nu ciclice. Justificări!

2. a) Arătaţi că $S_n = \langle (1,2), (2,3), \ldots (n-1,n) \rangle$.

b) Considerăm următoarea permutare $\sigma \in S_{17}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 17 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^4, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\mathrm{ord}(\sigma)$ şi σ^{2014}.

3. a) Definiţi noţiunea de funcţie polinomială şi daţi exemplu de două polinoame diferite cărora le corespunde aceeaşi funcţie polinomială.

b) Este 65537 număr prim? Justificare!

LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

18.09.2013

Numele .... Grupa ....

1. a) Definiţi noţiunea de subgrup şi precizaţi care sunt subgrupurile lui $\mathbb{Z}_{20}$.

b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 9 & 10 & 1 & 6 & 8 & 2 & 3 & 11 & 7 & 12 & 5 & 4 & 13 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^3, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\mathrm{ord}(\sigma)$ şi σ^{1907}.

2. a) Demonstraţi că, date fiind $m, n \in \mathbb{N}^*$, dacă $\mathbb{Z}_{mn} \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ atunci $(m, n) = 1$.
b) Determinaţi elementele de ordin 12 din $\mathbb{Z}_{180}$.

3. a) Daţi un exemplu de ideal la dreapta care nu este ideal la stânga.
b) Determinaţi elementele idempotente ale inelului $\mathbb{Z}_{900}$.

LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

18.09.2013

Numele .... Grupa ....

1. a) a) Definiţi noţiunea de subgrup normal şi precizaţi care sunt subgrupurile normale ale lui $\mathbb{Z}$.

b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 2 & 12 & 10 & 6 & 9 & 8 & 4 & 7 & 5 & 11 & 3 & 13 & 1 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^3, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\mathrm{ord}(\sigma)$ şi σ^{90125}.

2. a) Teorema lui Euler: enunţ şi demonstraţie.
b) Determinaţi elementele de ordin 45 din $\mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_9$.

3. a) Daţi un exemplu de divizor al lui zero nenul şi un exemplu de element nilpotent nenul.
b) Determinaţi idealele şi, până la izomorfism, inelele factor ale inelului $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{12}$.

LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

31.01.2014

Numele .... Grupa ....

1. a) Definiţi noţiunea de subgrup normal şi precizaţi care sunt subgrupurile normale ale lui $\mathbb{Z}$.

b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 13 & 5 & 10 & 3 & 8 & 9 & 1 & 2 & 12 & 4 & 7 & 6 & 11 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^3, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\mathrm{ord}(\sigma)$ şi σ^{4102}.

2. a) Mica teoremă a lui Fermat: enunţ şi demonstraţie.
b) Determinaţi elementele de ordin 50 din $\mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_{10}$.

3. a) Daţi un exemplu de ideal la dreapta care nu este ideal la stânga.
b) Determinaţi elementele idempotente ale inelului $\mathbb{Z}_{1125}$.

LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

31.01.2014

Numele .... Grupa ....

1. a) a) Definiţi noţiunea de subgrup şi precizaţi care sunt subgrupurile lui $\mathbb{Z}_{75}$.

b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 10 & 5 & 1 & 6 & 8 & 4 & 7 & 11 & 9 & 12 & 13 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^4, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\operatorname{ord}(\sigma)$ şi σ^{2014}.

2. a) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţi că dacă $(m, n) = 1$ atunci $\mathbb{Z}_{mn} \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.
b) Determinaţi elementele de ordin 18 din $\mathbb{Z}_{540}$.

3. a) Daţi un exemplu de divizor al lui zero nenul şi un exemplu de element nilpotent nenul.
b) Determinaţi idealele şi, până la izomorfism, inelele factor ale inelului $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_{116}$.

LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

01.06.2014

Numele .... Grupa ....

1. a) Definiţi noţiunea de transpoziţie şi arătaţi că orice transpoziţie este o permutare impară.

b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 13 & 9 & 12 & 1 & 8 & 2 & 10 & 11 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^4, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\mathrm{ord}(\sigma)$ şi σ^{2345}.

2. a) Teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri: enunţ şi demonstraţie.
b) Precizaţi dacă grupurile $\mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{29}$, $\mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{30}$, $\mathbb{R}$ sunt sau nu ciclice. Justificări!

3. a) Definiţi noţiunile: domeniu de integritate, element idempotent al unui inel.
b) Determinaţi idealele şi, până la izomorfism, inelele factor ale inelului $\mathbb{C} \times \mathbb{Z}_{25}$.

LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

01.06.2014

Numele .... Grupa ....

1. a) Definiţi subgrupul generat de o submulţime şi arătaţi că

$$S_n = \langle (1,2), (1,3), \dots, (1,n) \rangle.$$

b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 11 & 12 & 3 & 13 & 1 & 2 & 10 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^4, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\mathrm{ord}(\sigma)$ şi σ^{3456}.

2. a) Teorema lui Lagrange: enunţ şi demonstraţie.
b) Determinaţi elementele de ordin 18 din $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{30}$.

3. a) Definiţi noţiunea de ideal şi descrieţi idealele lui $\mathbb{Z}$.
b) Determinaţi elementele idempotente din $\mathbb{Z}_{1080}$.

LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

01.06.2014

Numele .... Grupa ....

1. a) Definiţi noţiunea de subgrup şi precizaţi care sunt subgrupurile lui $\mathbb{Z}_{50}$.

b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 6 & 7 & 9 & 12 & 1 & 2 & 3 & 13 & 5 & 10 & 11 & 8 & 4 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^4, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\mathrm{ord}(\sigma)$ şi σ^{4567}.

2. a) Teorema lui Euler: enunţ şi demonstraţie.
b) Considerăm în S_3 subgrupurile $H = \langle(1,2)\rangle$ şi $K = \langle(1,3,2)\rangle$. Pentru fiecare din ele, decideţi dacă este sau nu normal, iar în caz afirmativ descrieţi grupul factor corespunzător.

3. a) Este $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_4)$ un inel integru?
b) Determinaţi caracteristica inelului $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$.

LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

01.06.2014

Numele .... Grupa ....

1. a) Definiţi noţiunea de subgrup normal şi precizaţi care sunt subgrupurile normale ale lui $\mathbb{Z}_{34}$.

b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 13 & 12 & 2 & 9 & 8 & 7 & 10 & 4 & 5 & 1 & 3 & 11 & 6 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^4, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\mathrm{ord}(\sigma)$ şi σ^{1234}.

2. a) Construcţia grupului factor.
b) Determinaţi elementele de ordin 17 şi pe cele de ordin 18 din $\mathbb{Z}_{540}$.

3. a) Definiţi noţiunea de corp şi precizaţi de ce $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ nu este corp.
b) Câte elemente inversabile de grad 5 are inelul $\mathbb{Z}_{72}[X]$?

LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

14.09.2014

Numele .... Grupa ....

1. a) Demonstraţi că ordinul oricărui element al unui grup finit divide ordinul respectivului grup.

b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 8 & 1 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^3, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\text{ord}(\sigma)$ şi σ^{2014}.

2. a) Teorema lui Euler: enunţ şi demonstraţie.
b) Precizaţi dacă grupurile $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{11}$, $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{C}$ sunt sau nu ciclice. Justificări!

3. a) Definiţi noţiunea de inel integru şi precizaţi dacă $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_4)$ este sau nu inel integru.
b) Câte elemente inversabile de grad 4 are inelul $\mathbb{Z}_{80}[X]$?

LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

14.09.2014

Numele .... Grupa ....

1. a) Demonstraţi că pentru orice grup finit G şi pentru orice subgrup H al lui G are loc relaţia $|(G/H)_s| = |(G/H)_d|$.

b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 10 & 5 & 3 & 7 & 8 & 2 & 1 & 11 & 13 & 4 & 6 & 12 & 9 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^4, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\mathrm{ord}(\sigma)$ şi σ^{1234}.

2. a) Teorema de structură a grupurilor ciclice.
b) Arătaţi că $U_7 = \{z \in \mathbb{C} : z^7 = 1\}$ este un subgrup al lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
c) Arătaţi că $(U_7, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}_7, +)$.

3. a) Definiţi noţiunea de corp şi precizaţi dacă $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ este sau nu corp.
b) Determinaţi idealele şi, până la izomorfism, inelele factor ale inelului $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9$.

LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

27.01.2015

Numele .... Grupa ....

1. a) Construcţia grupului factor.
Considerăm grupul $\mathbf{Q} = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ al cuaternionilor.
b) Arătaţi că $\{1, -1\} \leq \mathbf{Q}$
c) Arătaţi că $\{1, -1\} \trianglelefteq \mathbf{Q}$
d) Descrieţi grupul factor $\dfrac{\mathbf{Q}}{\{-1, 1\}}$.

2. a) Definiţi următoarele noţiuni: morfism de grupuri, izomorfism de grupuri, nucleul unui morfism de grupuri.
b) Arătaţi că grupul $\mathbb{Q}$ nu e ciclic.
c) Determinaţi $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_8)$.

3. a) Definiţi noţiunea de transpoziţie şi arătaţi că orice transpoziţie este o permutare impară.

b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 4 & 7 & 8 & 9 & 6 & 3 & 10 & 13 & 12 & 11 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^4, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\mathrm{ord}(\sigma)$ şi σ^{2015}.

LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

27.01.2015

Numele .... Grupa ....

1. a) Teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri: enunţ şi demonstraţie.
Considerăm $f : \mathbb{C}^* \to S^1 = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$ dată prin $f(z) = \dfrac{z}{|z|}$.
b) Arătaţi că f este morfism de grupuri.
c) Determinaţi $\ker f$ şi $\operatorname{Im} f$.

d) Demonstraţi că $\dfrac{\mathbb{C}^*}{\mathbb{R}_+^*} \simeq S^1$.

2. a) Definiţi noţiunea de grup ciclic şi enunţaţi teorema de structură a grupurilor ciclice.
b) Arătaţi că grupul $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nu este ciclic.
c) Determinaţi $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

3. a) Demonstraţi că $S_n = <(1,2),(2,3),\ldots,(n-1,n)>$.

b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 3 & 12 & 5 & 2 & 7 & 8 & 9 & 4 & 11 & 13 & 1 & 6 & 10 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^4, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\operatorname{ord}(\sigma)$ şi σ^{5102}.

LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

06.02.2015

Numele .... Grupa ....

1. a) Definiţi noţiunea de funcţie injectivă. Precizaţi (cu argumente!) dacă funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3xe^y$ este sau nu surjectivă.

Considerăm pe $\mathbb{R}$ relaţia $x\rho y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x^2 + 7x = y^2 + 7y$.

b) Arătaţi că ρ este o relaţie de echivalenţă.

c) Determinaţi $\dfrac{\sqrt{2}}{\rho}$.

d) Descrieţi mulţimea factor $\dfrac{\mathbb{R}}{\rho}$.

e) Descrieţi un sistem complet şi independent de reprezentanţi pentru relaţia ρ.

2. a) Definiţi următoarele noţiuni: relaţie reflexivă, închidere reflexivă a unei relaţii. Dată fiind o relaţie ρ pe o mulţime A, care este închiderea sa reflexivă?

b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^4, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\text{ord}(\sigma)$ şi σ^{1025}.

3. a) Teorema lui Euler: Enunţ şi demonstraţie.

b) Decideţi dacă grupurile $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$ şi $\mathbb{R}$ sunt sau nu ciclice. Justificaţi răspunsurile date!

LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

06.02.2015

Numele .... Grupa ....

1. a) Definiţi noţiunea de funcţie surjectivă. Precizaţi (cu argumente!) dacă funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3x + e^y$ este sau nu injectivă.

Considerăm pe $\mathbb{C}$ relaţia $x\rho y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} |x| = |y|$.

b) Arătaţi că ρ este o relaţie de echivalenţă.

c) Determinaţi $\dfrac{i}{\rho}$.

d) Descrieţi mulţimea factor $\dfrac{\mathbb{C}}{\rho}$.

e) Descrieţi un sistem complet şi independent de reprezentanţi pentru relaţia ρ.

2. a) Definiţi următoarele noţiuni: relaţie simetrică, închidere simetrică a unei relaţii. Dată fiind o relaţie ρ pe o mulţime nevidă A, care este închiderea sa simetrică?

b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 9 & 8 & 7 & 10 & 11 & 2 & 13 & 12 & 1 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^4, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\mathrm{ord}(\sigma)$ şi σ^{5120}.

3. a) Arătaţi că dacă grupurile $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ şi $\mathbb{Z}_{mn}$ sunt izomorfe, atunci $(m,n) = 1$.

b) Determinaţi elementele de ordin 20 din grupul $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$.

LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

06.06.2015

Numele .... Grupa ....

1. a) Definiţi noţiunea de funcţie injectivă şi precizaţi dacă funcţia $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(a, b) = 17a - 24b$ este sau nu surjectivă.

b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 4 & 7 & 6 & 9 & 8 & 11 & 10 & 13 & 12 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^4, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\text{ord}(\sigma)$ şi σ^{1402}

2. a) Teorema lui Lagrange: enunţ şi demonstraţie.
b) Descompuneţi numărul $2^{48} + 1$ în produs de cel putin trei factori (neunitari).

3. a) Enunţaţi teorema de structură a grupurilor ciclice.
b) Determinaţi numărul elementelor de ordin 600 din $\mathbb{Z}_{180000}$.

LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

06.06.2015

Numele .... Grupa ....

1. a) Definiţi noţiunea de funcţie surjectivă şi precizaţi dacă funcţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(a) = |3a - 5|$ este sau nu injectivă.

b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 10 & 9 & 2 & 11 & 12 & 13 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^3, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\mathrm{ord}(\sigma)$ şi σ^{2014}.

2. a) Construcţia grupului factor.
b) Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_{601}$ ecuaţia $237\,x + 208 = 0$.

3. a) Definiţi ordinul unui element dintr-un grup.
b) Precizaţi dacă grupurile $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{15}$ şi $\left(\left\{\frac{a}{2} + \frac{b}{3} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}, +\right)$ sunt sau nu ciclice. Justificări!

LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

20.09.2015

Numele .... Grupa ....

1. a) Definiţi următoarele noţiuni: relaţie simetrică, închidere simetrică a unei relaţii. Dată fiind o relaţie ρ pe o mulţime A, care este închiderea sa simetrică?

b) Câte elemente de ordin 200 conţine grupul $\mathbb{Z}_{40} \times \mathbb{Z}_{450}$?

2. a) Definiţi noţiunea de transpoziţie şi arătaţi că orice transpoziţie este o permutare impară.

b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 10 & 6 & 1 & 3 & 13 & 8 & 4 & 11 & 9 & 7 & 2 & 12 & 5 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^4, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\mathrm{ord}(\sigma)$ şi σ^{2015}.

3. a) Teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri: Enunţ şi demonstraţie.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Notăm $U_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$.
b) Arătaţi că U_n este subgrup al lui $\mathbb{C}^*$.

Considerăm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$, $f(k) = \cos \dfrac{2k\pi}{n} + i \sin \dfrac{2k\pi}{n}$.
c) Arătaţi că f este morfism de grupuri.
d) Determinaţi $\ker f$ şi $\mathrm{Im}\, f$.
e) Arătaţi că $U_n \simeq \mathbb{Z}_n$.

LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

06.02.2015

Numele .... Grupa ....

1. a) Definiţi următoarele noţiuni: relaţie tranzitivă, închidere tranzitivă a unei relaţii. Dată fiind o relaţie ρ pe o mulţime nevidă A, care este închiderea sa tranzitivă?

b) Câte elemente de ordin 300 conţine grupul $\mathbb{Z}_{60000}$?

2. a) Definiţi noţiunea de sistem de generatori pentru un grup şi demonstraţi că $S_n = \langle (1,2), (2,3), \ldots, (n-1,n) \rangle$.

b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 13 & 12 & 11 & 2 & 9 & 8 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 & 10 & 3 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^4, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\mathrm{ord}(\sigma)$ şi σ^{2015}.

3. a) Enunţaţi şi demonstraţi teorema de structură pentru grupuri ciclice.

b) Care dintre grupurile $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{21}$ şi $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}$ sunt ciclice? Dar finit generate? Justificări!