Bibliografie Se primim de la șefi (mail)

- grad de generalitate foarte mare

$$A = \{x / p(x)\}$$

Definiții: Fie $\Sigma \neq \emptyset$ o mult. finită, nevidă, numită alfabet

$$(\mathbb{Z}_2, +, \hat{0}) = \frac{(\mathbb{Z}, +, 0)}{Congr(\{(0,2)\})}$$

$(M, \cdot)$ monoid ρ rel. pe M, i.e. $\rho \subset M \times M$ a.î. ρ s.n. echivalență dacă este refl., sim., tranz.

congruență stg/dr. dacă este de echivalență &

$\forall x, y \in \mathbb{N}$ $x \rho y$ $(x,y) \in \rho$ $\Rightarrow \forall u \in \mathbb{N}$ $(ux \rho uy)$

$x v \rho y v$

$\exists \ell \in \mathbb{R}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_\varepsilon$ $(|x_n - \ell| \leq \varepsilon)$

$\forall u, v\ (uxv\ \rho\ uyv)$

Σ^* monoidul liber generat de Σ

$\Sigma = \{a, b\}$ $\Sigma^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \dots\}$

$L \in \mathcal{P}(\Sigma^*) = 2^{\Sigma^*}$ se num. limbaj / limbaj formal

Operații cu cuvinte

- concatenarea (op. în Σ^*)

  Ex: ab, bba $\quad ab \cdot bba = abbba$

- putere $w \in \Sigma^*$, $\begin{cases} w^0 = \lambda \\ w^{n+1} = w^n w \end{cases}$

- mirror $mi(abc) = cba$ $\underline{\text{se mai}}$ not $w^T = {}^T w$

Operații cu limbaje

- Concatenare $L_1 L_2 = \{ xy / \substack{x \in L_1 \\ y \in L_2} \}$

  Ex.: $L_1 = \{a, ba\}$

  $L_2 = \{b, cc\}$

  $L_1 L_2 = \{ab, acc, bab, bacc\}$

- Puterea: $L^0 = \{\lambda\}$

  $L^{n+1} = L^n L$

- Operația * $w^* = \{w^n / n \geq 0\}$ - numită

  $L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$

  Ex.: $w = abc$ $w^* = \{\lambda, abc, abcabc, (abc)^3, ..$

  $\Sigma = \{a, b\}$
  $L = \{a, b\}$
  $L^* = \Sigma^*$

  $L = \{a^2, b^2\}$ $L^* = \{\lambda, a^2, b^2, a^4, a^2b^2, b^2a^2$
  $b^4, \ldots\}$

- Operația pref.: $pref(w) = \{ x / \exists y_{\in \Sigma^*} \text{ a.î. } (xy = w)\}$

  Ex.: $w = abcd$

  $pref(w) = \{\lambda, a, ab, abc, abcd\}$

  $pref(L) = \{x / \exists y_{\in \Sigma^*} \text{ a.î. } (xy \in L)\}$

- Operația suf.

2^{Σ^*} - mulțimea tuturor limbajelor peste Σ

$\mathcal{L}_3$ - familia limbajelor regulate

$\mathcal{L}_{Lin}$ - familia limbajelor liniare

$\mathcal{L}_2$ - familia limbajelor independente de context

$\mathcal{L}_1$ - familia limbajelor dependente de context

$\mathcal{L}_0$

$\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_{lin} \subsetneq \mathcal{L}_2 \neq \mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_0 \neq \mathcal{L}$

ierarhia lui Chomsky (1956)

ALFA-GO
ALFA-O
DIRECTOR CREATIVITATE GOOGLE

nedecidabilă:

se dau două liste $\exists k \; \exists i_1, \dots, i_k \; \cancel{a.î.} \; (x_{i_1}, \dots, x_{i_k} = y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k})$

$x_1, \dots, x_n$

$y_1, \dots, y_n$

Gramatici formale

S.n. gramatică (formală) $G = (N, \Sigma, S, P)$, unde

N - mulț. fin. și nevidă, num. neterminalelor / variabelelo

Σ fin, $\neq \emptyset$, mulț. terminalelor

$S \in N$ - num. simbol de start / axiome

P fin., $\subset (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$ - Mulț. Producțiilor

regulă de producție

$(u, v) \in P$ se notează $u \to v$

Ex.: $G \begin{cases} N = \{S\} \\ \Sigma = \{a\} \\ P^S = \{S \xrightarrow{1} aS, \; S \xrightarrow{2} \lambda\} \end{cases}$

$S \rightsquigarrow aS \rightsquigarrow a^2S \rightsquigarrow a^2$

$L(G) = a^*$

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{1} & aS & \xrightarrow{1} & a^2S \to \dots \\ & & 2\downarrow & & 2\downarrow \\ & & a & & a^2 \end{array}$$

$\boxed{\text{Def}}$ S.n. relația de derivare într-un pas (în G)

$$\Rightarrow \subset (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$$

$$\alpha \Rightarrow \beta \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha = \alpha_1 u \alpha_2 \\ \beta = \alpha_1 v \alpha_2 \\ (u \to v) \in P \\ \alpha_1, \alpha_2 \in (N \cup \Sigma)^* \end{cases}$$

ACOPERIREA COMPATIBILĂ ~~...~~ CTĂ

$\overset{k}{\Rightarrow}$, $\overset{*}{\Rightarrow}$ $\overset{+}{\Rightarrow}$

închid. refl. și tranzitiva
(num. rel. derivare în mai mulți pași)

$$L(G) = \{ w \,/\, w \in \Sigma^*, \ S \overset{*}{\Rightarrow} w \}$$

Limbajul gen. de gramat. G

LFA
CURS 02

Limbaje Regulate

[$G=(N, \Sigma, S, P)$

P rel. binară pe $(N \cup \Sigma)^*$

$(u, v) \in P$ s.notează $u \to v$ num. producție
trece

- neterminale $A_1, A_2, \dots, B$
- terminale $a_1, a_2, \dots, b, \dots, 0, 1, 2$

$u \to \lambda$ s.n. λ-producție
$A \to v$ s.n. A-producție

$\Rightarrow$ rel. de derivare într-un pas

$\alpha \Rightarrow \beta \Leftrightarrow$ $\alpha = \alpha_1 u \alpha_2$
$\beta = \alpha_1 v \alpha_2$
$(u \to v) \in P$
$\alpha_1, \alpha_2 \in (N \cup \Sigma)^*$

rel derivare 1,2... pași

$\overset{*}{\Rightarrow}$ $\overset{+}{\Rightarrow}$, $\overset{K}{\Rightarrow}$ rel. derivare k pași

$$L(G) = \{ w \mid w \in \Sigma^*; S \overset{+}{\Rightarrow} w \}$$

1 Gramatici regulate

este o gramatică pt. care orice producție este de forma

$A \to aB$
$A \to a$
$S \to \lambda$, caz în care S nu apare în membr. drept al niciunei altei producții

Obs: Rezultă că def $L^{...}$

$L = (a^2)^* = \{\lambda, a^2, a^4, a^6, \dots\}$

$G = \{ S \to aA / \lambda, A \to aA / a, B \to aA \}$

$S \Rightarrow aA \Rightarrow a^2B \Rightarrow a^3A \Rightarrow a^4B$

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$

$\lambda \quad a^2 \quad a^4 \quad L(G)$

$A \to \alpha_1 / \alpha_2 / \alpha_3 \dots$

pt $\to \alpha_1, A \to \alpha_2$

$A \to \alpha_3, \dots$

$G_1 \simeq G_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} L(G_1) = L(G_2)$

Notăm $\mathcal{L}_3 = \{ L / L \in 2^{\Sigma^*}, \exists G_3 \in \mathcal{G}_3 (L(G) = L) \}$

unde $\mathcal{G}_3$ - mulț. gram. regulate

② Automate finite deterministe (DFA)

Definiție. S.n. automat finit determinist un cvintuplu

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ unde

Q mfin $\neq \emptyset$ s.n. mulț. stărilor

Σ - -"- alfabetul de intrare

$q_0 \in Q$ - stare inițială

$F \subseteq Q$ m. stărilor finale

$\delta : Q \times \Sigma \to Q$ funcție de tranziție

Putem face un automat care să genereze cuv. dintr-o limbă cu nr. minim de stări

- $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$

Def. recursiv $\delta^*(q, \lambda) = q$

$\delta^*(q, wa) = \delta(\delta^*(q, w), a)$

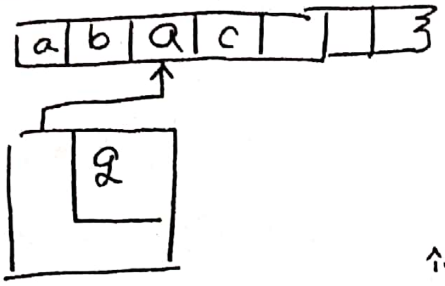
pt. $w \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$

obj. recunoscut / acceptat de ~~A~~ DFA-ul M

$$L(M) = \{ w \mid w \in \Sigma^*,\ \delta^*(q_0, w) \in F \}$$

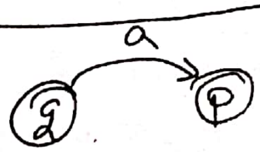
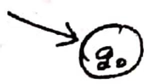
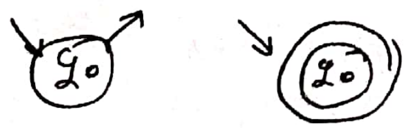
Descrieri intuitive

I



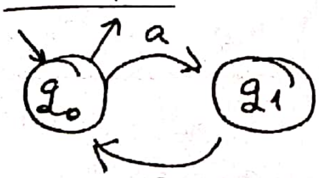
$\delta(q,a)=p \Rightarrow q$ se transformă în p (își schimbă starea)

II Graf etichetat

în M	în graf
$\delta(q,a)=p$	
$\delta(q,\ )=q$	
q_0	
$q\in F$	
$q_0 \in F$	

machina aflată în starea q, citind cuv. a, trece în starea p

exemplu:



a^+

III

$$\begin{array}{c|ccccccc}
\delta & \overbrace{a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_j \quad \dots \quad a_n}^{\Sigma} \\
\hline
\to q_0 & & & & \vdots & & \\
q_1 & & & & \vdots & & \\
\vdots & & & & & & \\
q_i & \dots & \dots & & \delta(q_i, a_j) & & \\
\vdots & & & & & & \\
q_n & & & & & &
\end{array}$$

Q

vector F

Notație $\mathcal{L}_{DFA} = \{ L / L \in 2^{\Sigma^*}, \exists M_{DFA} (L(M) = L) \}$

③ NFA - automat finit nedeterminist

Def.: S.n. NFA, $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

unde $\cancel{\delta}$ Q, Σ, q_0, F ca la DFA și

$\delta : Q \times \Sigma \mapsto 2^Q$

δ^* ~~la fel~~ analog ca la DFA

$L(M) = \{ w / w \in \Sigma^*, \delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \}$

traiectoria automatului („drumul" pe graf)

$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_{DFA} = \mathcal{L}_{NFA} = REG$

Mathematica WOLFRAM

9/10.

INFO = combinatorică mai elevată

(th) $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_{DFA} = \mathcal{L}_{NFA}$

$A = B = C \iff A \subseteq B \subseteq C \subseteq A$ (mulțimi)

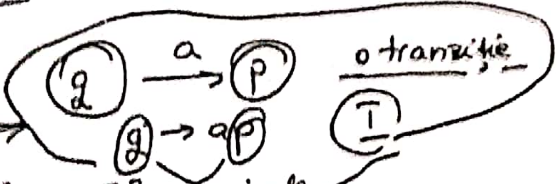
(th 1) $\mathcal{L}_{DFA} \subseteq \mathcal{L}_3$

Fie $L \in \mathcal{L}_{DFA}$ fie AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a.î. $L(M) = L$

Construim $G \in \mathcal{G}_3$ a.î. $\boxed{L(G) = L}$

$G = (Q, \Sigma, q_0, P)$

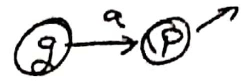
unde:



alde =

$$P = \begin{cases} \{q \to ap \mid \delta(q,a) = p\} \cup \{q \to a \mid \delta(q,a) \in F\} & \text{, pt. } q_0 \notin F \ (\lambda \notin L) \\ \text{— " — " —} \cup \{q_0 \to \lambda\} & \text{pt. } q_0 \in F \end{cases}$$

neterminale



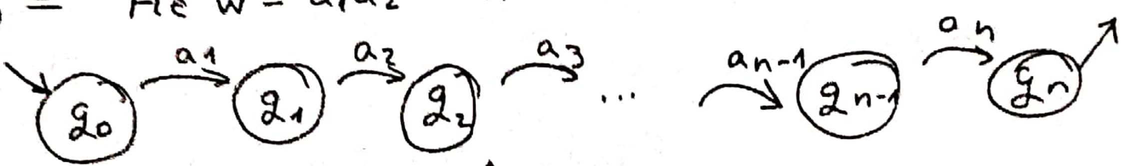
$q \to ap$
$q \to a$ [se introduc ambele

5 minute

$q_0 \to \lambda$ de adaugă

$L(G) = L(M)$

„$\supseteq$" Fie $w = a_1 a_2 \dots a_n \in L(M)$



deci $\exists\, q_1, \dots, q_n$ a.î. $\Uparrow$ să existe

$$\exists\, q_1, \dots, q_n \left(\begin{array}{l} q_n \in F \\ \forall i = \overline{1,n} \ (\delta(q_{i-1}, a_i) = q_i) \end{array} \right)$$

$\Downarrow$

$q_0 \to a_1 q_1 \in P$ $\quad$ $q_1 \to a_2 q_2 \in P$ $\quad$ $q_{n-2} \to a_{n-1} q_{n-1} \in P$ $\quad$ $q_{n-1} \to a_n \in P$ din vit II

$q_0 \Rightarrow a_1 q_1$ $\quad$ $q_0 \Rightarrow a_1 a_2 q_2$ $\quad$ $\vdots$ $\quad$ $q_0 \overset{n}{\Rightarrow} a_1 \dots a_n$

Deci $w \in L(G)$

$\mathcal{G}_3$, $G=(N,\Sigma,S,P)\in\mathcal{G}_{3d}$

ddc $A\to aB$
sau
$A\to a$
sau
$A\to aB$
sau
$S\to\lambda$

$\Rightarrow$ SAU $\underset{G}{\Rightarrow}$

a terminale $\quad A$ neterminale

$\overset{k}{\Rightarrow}$, $\overset{+}{\Rightarrow}$ tranz, $\overset{*}{\Rightarrow}$ refl și tranz

DESPRE GRAMATICĂ

$L(G)=\{w / w\in\Sigma^*, S\overset{+}{\Rightarrow} w\}$

Obs. ① $\lambda\in L(G) \Leftrightarrow (S\to\lambda)\in P$

② $w\in L(G)$

$w=a_1\ldots a_n\in L(G) \Leftrightarrow$ ~~$S\Rightarrow A$~~ A

$S\Rightarrow a_1 A\Rightarrow a_1a_2A_2\Rightarrow a_1\ldots a_{n-1}A_{n-1}\Rightarrow w$

$\mathcal{L}_{DFA}$, DFA $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$

$\delta: Q\times\Sigma\to Q$

$\delta^*: Q\times\Sigma^*\mapsto Q$

$\delta^*(q,\lambda)=q$

$\delta^*(q,wa)=\delta(\delta^*(q,w),a)$

$L(M)=\{w/ w\in\Sigma^*, \delta^*(q_0,w)\in F\}$

Obs. ① $\lambda\in L(M) \Leftrightarrow q_0\in F$

② $w=a_1a_2\cdots a_n\in L(M) \Leftrightarrow$ există un drum în graful asoc.

de forma $\to q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \xrightarrow{a_3} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n \to$

$\mathcal{L}_{NFA}$, NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ $\quad \delta : Q : Q \times \Sigma \to 2^Q$

δ^* .. la fel

Obs. ① la fel

$\not\subseteq \quad \mathcal{L}_3 = \{ L \mid \exists G \in \mathcal{G}_3 \ (L(G) = L) \}$

Th $\quad \mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_{DFA} = \mathcal{L}_{NFA} \overset{se}{\underset{not.}{=}} REG$

$\mathcal{L}_{DFA} \overset{th\,1}{\subseteq} \mathcal{L}_3$

th3 $\cup\!\!\mid \quad /\!/$ th 2

$\mathcal{L}_{NFA}$

th1 $\quad$ Fie $L \in \mathcal{L}_{DFA}$ $\quad$ fie DFA-ul $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a.î. $L(M) = L$

Construim $G \in \mathcal{G}_3$ a.î. $L(G) = L(M)$

$G = (Q, \Sigma, q_0, P)$, unde

$$P = \begin{cases} \{ q \to ap \mid \delta(q,a) = p \} \cup \{ q \to a \mid \delta(q,a) \in F \} & \text{dacă } \lambda \notin L(M) \ \boxed{\Leftrightarrow q_0 \notin F} \\ \text{———} \ '' \ \text{———} \ '' \ \text{———} \ '' \ \text{———} \\ \cup \{ q_0 \to \lambda \}, & \text{dacă } \lambda \in L(M) \end{cases}$$

$q \xrightarrow{a} p \quad \delta(q,a).$

$q \to ap$

$q \longrightarrow p \quad \delta(q,a) \in F$

în G: $q \to ap$ & $q \to a$

$\not\subseteq$ · pt cuvântul vid, este evident. în echivalență

„$\subseteq$" Fie $w = a_1 \dots a_n \in L(G)$, deci există derivarea în G

$$q_0 \Rightarrow a_1 q_1 \Rightarrow a_1 a_2 q_2 \Rightarrow a_1 a_2 a_3 q_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 \dots a_{n-1} q_{n-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1 \dots a_n$$

$q_0 \to a_1 q_1,\ q_1 \to a_2 q_2 \quad \dots \quad q_{n-2} \to a_{n-1} q_{n-1},\ q_{n-1} \to a_n$

Deci

$\delta(q_0, a_1) = q_1,\ \delta(q_1, a_2) = q_2 \quad \dots \quad \delta(q_{n-2}, a_{n-1}) = q_{n-1},\ \delta(q_{n-1}, a_n) = q_n \in F$

$\to q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \xrightarrow{a_3} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n \to$, deci $w \in L(M)$

„⊇" $a_1 a_2 \dots a_n \in L(M) \Rightarrow$ există un drum ...

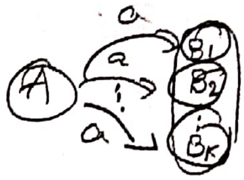
th2 $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_{NFA}$

Dem: Fie $L \in \mathcal{L}_3$, fie $G = (N, \Sigma, S, P) \in \mathcal{G}_3$ cu $L(G) = L$

Construim un NFA $M = (N \cup \{X\}, \Sigma, \delta, S, F)$

Unde $\delta(A, a) = \begin{cases} \{B \mid (A \to aB) \in P\} \cup \{X\} & \text{dacă } (A \to a) \in P \\ \text{—||—} \ (\text{fără } \{X\}) & \text{dacă } (A \to a) \notin P \end{cases}$

în G	în NFA M
$A \to aB_1$ $A \to aB_2$ ... $A \to aB_k$ $A \to a$	$\delta(A, a) = \{B_1, B_2, \dots, B_k, X\}$

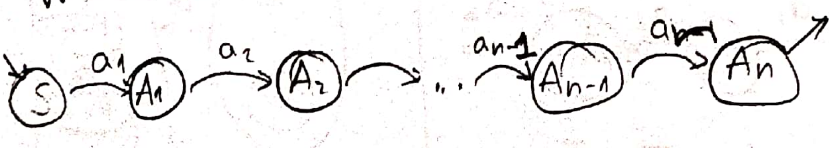


$F = \begin{cases} \{X\} & \text{dc. } \lambda \notin L(G) \ ((S \to \lambda) \notin P) \\ \{X, S\} & \text{dc. } \lambda \in L(G) \ ((S \to \lambda) \in P) \end{cases}$

$L(M) = L(G)$

- $\lambda \in L(M) \Leftrightarrow \lambda \in L(G)$ evident

„⊆" $w = a_1 a_2 \dots a_n \in L(M)$ deci ex. un drum:



„⊇" $w = a_1 a_2 \dots a_n \in L(G)$, deci ex derivarea în G

$$S \Rightarrow a_1 A_1 \Rightarrow a_1 a_2 A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 \dots a_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow a_1 \dots a_n$$

deci

Punem în evidență producțiile

$$S \to a_1 A_1,\ A_1 \to a_2 A_2,\ \dots,\ A_{n-1} \to a_n$$

Rezulta

$$A_1 \in \delta(S, a_1),\ A_2 \in \delta(A_1, a_2),\ \dots,\ A_{n-2} \in \delta(A_{n-3}, a_{n-2}),$$

th 3 $\mathcal{L}_{NFA} \subseteq \mathcal{L}_{DFA}$

Fie un NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$

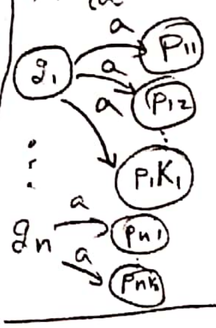
Construim un DFA M' a.î. $L(M') = L(M)$

$M' = (2^Q, \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$, $F' = \{A \mid A \in 2^Q, A \cap F \neq \emptyset\}$

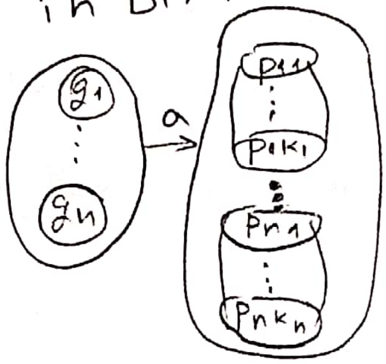
$$\delta'(A, a) = \bigcup_{q \in A} \delta(q, a)$$

În NFA: M

$A = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$



În DFA: M'



DEM.:

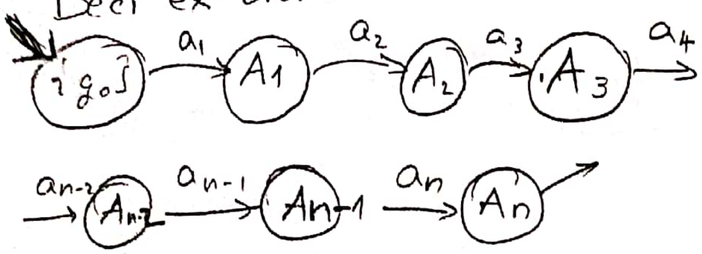
$L(M') = L(M)$ $\lambda \in L(M) \iff q_0 \in F$

$\Downarrow$

$\lambda \in L(M') \Leftarrow \{q_0\} \cap F \neq \emptyset$

„⊆" $w = a_1 \dots a_n \in L(M')$

Deci ex drumul:



$\delta'(\{q_0\}, a_1) = A_1$,

$\delta'(A_1, a_2) = A_2$,

$\delta'(A_2, a_3) = A_3$

...

$\delta'(A_{n-2}, a_{n-1}) = A_{n-1}$

$\delta'(A_{n-1}, a_n) = A_n \wedge A_n \in F'$

$A_1 = \delta(q_0, A_1)$, $A_2 = \bigcup_{q \in A_1} \delta(q, a_2)$

$A_3 = \bigcup_{q \in A_2} (q, a_3) \dots \quad A_{n-2} = \bigcup_{q \in A_{n-3}} \delta(q, a_{n-2})$

$A_{n-1} = \bigcup_{q \in A_{n-2}} \delta(q, a_{n-1})$, $A_n = \bigcup_{q \in A_{n-1}} (q, a_n) \wedge A_n \cap F \neq \emptyset$

Deci ~~ex.~~ $\exists q_n \in A_n = \bigcup_{q \in A_{n-1}} \delta(q, a_n) \wedge q_n \in F$

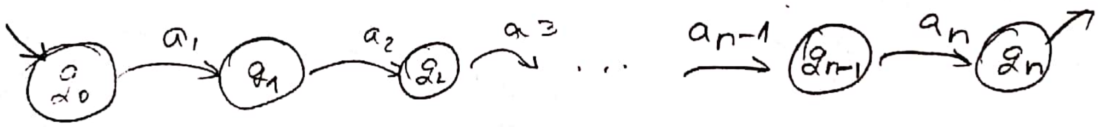
deci $\exists q_{n-1} (q_{n-1} \in A_{n-1} \wedge q_n \in \delta(q_{n-1}, a_n))$

$A_{n-1} = \bigcup_{q \in A_{n-2}} \delta(q, a_{n-2})$

. . .

deci $\exists q_2 (q_2 \in A_2 = \bigcup_{q \in A_1} \delta(q, a_2) \wedge q_3 \in \delta(q_2, a_3))$

$\exists q_1 (q_1 \in A_1 = \delta(q_0, a_1) \wedge q_2 \in \delta(q_1, a_2))$



Deci $W \in L(N)$

T

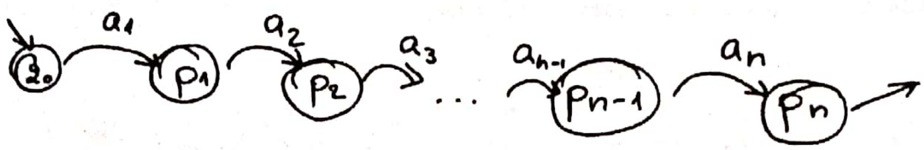
λ - NFA

Aut. Fin. Nedeterminante cu λ depl. **JFLAP**

Def. S.n. λNFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$,

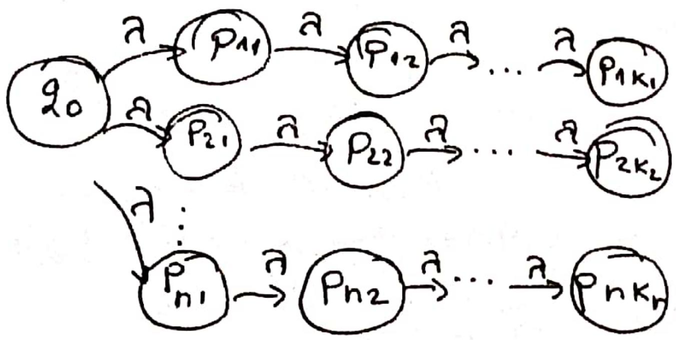
$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \longmapsto 2^Q$$

$$L(M) = \{ w \mid w \in \Sigma^*, \exists \underset{\in Q}{p_1, p_2, \dots, p_n} \text{ şi } \exists \underset{\in \Sigma \cup \{\lambda\}}{a_1, a_2, \dots, a_n} \left(\underset{i=\overline{1,n}}{\forall} \left(p_i \in \delta(p_{i-1}, a_i)\right)\right), p_n \in F, p_0 = q_0 \}$$



λ - closure $: Q \to 2^Q$, $\lambda\text{-closure}(q) = \{q\} \cup \{ p \mid \exists \underset{\in Q}{p_0, p_1, \dots, p_K}$ $\left(p_0 = q, p_K = p, \underset{i=\overline{1,K}}{\forall} p_i \in \delta(p_{i-1}, \lambda) \right) \}$.

poză



$\lambda\text{-closure}(q) = \{q\} \cup \{p_{ij} \mid i = \overline{1,n}, j = \overline{1,K_i}\}$

2 λ-NFA s.n. echivalente $\Leftrightarrow L(M_1) = L(M_2)$

Obs. $\lambda \in L(M) \Leftrightarrow \lambda\text{-closure}(q_0) \cap F \neq \emptyset$

(th) $\mathcal{L}_{\lambda\text{-NFA}} = \mathcal{L}_{NFA}$ „$\supseteq$" - evidentă

„$\subseteq$" fie λ-NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Construim NFA $M' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F')$

$$\delta'(q,a) = \delta(q,a) \cup \{p \mid \exists r \in \lambda\text{-closure}(q) \; (p \in \delta(r,a))\}, \quad p \in Q$$
$a \in \Sigma$

$F' = \cancel{F \cup} \{q \mid \lambda\text{-closure}(q) \cap F \neq \phi\}$

Demonstrăm
$\boxed{L(M') = L(M)}$

$\lambda \in L(M) \iff \lambda\text{-closure}(q_0) \cap F \neq \phi \iff q_0 \in F' \Rightarrow \lambda \in L(M')$

„$\supseteq$" Fie $w = a_1 a_2 \cdots a_n \in L(M)$ cu $\forall (a_i \in \Sigma) \Rightarrow$ ex. în graful asoc. lui M un drum

$$\to q_0 \xrightarrow{\lambda} p_{01} \xrightarrow{\lambda} p_{02} \xrightarrow{\lambda} \cdots \xrightarrow{\lambda} p_{0k_0} \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{\lambda} p_{11} \xrightarrow{\lambda} \cdots \xrightarrow{\lambda} p_{1k} \xrightarrow{a_2} q_2$$
$$\cdots \xrightarrow{a_{n-1}} q_{n-1} \xrightarrow{\lambda} p_{n-1,1} \xrightarrow{\lambda} p_{n-1,2} \xrightarrow{\lambda} \cdots \xrightarrow{\lambda} p_{n-1,k_{n-1}} \xrightarrow{a_n} q_n \xrightarrow{\lambda} p_{n1}$$
$$\xrightarrow{\lambda} p_{n2} \xrightarrow{\lambda} \cdots \xrightarrow{\lambda} p_{nk_n} \to$$

$$\underbrace{p_{0k_0} \in \lambda\text{-closure}(q_0)}_{q_1 \in \delta'(q_0, a_1)} \qquad \underbrace{p_{1k_1} \in \lambda\text{-closure}(q_1)}_{q_2 \in \delta'(q_1, a_2)}$$

~~$q_1 \in \lambda$-closure~~

$$\ldots \quad \underbrace{p_{n-1k_{n-1}} \in \lambda\text{-closure}(q_{n-1})}_{q_n \in \delta'(q_{n-1}, a_n)}$$

$p_{nk_n} \in \lambda\text{-closure}(q_n)$

$q_n \in F'$

Deci avem în graful asoc. lui M' drumul

$$\to q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \xrightarrow{a_3} \cdots \xrightarrow{a_n} q_n \to$$, deci $w \in L(M')$

„$\subseteq$" $w \in L(M')$, $w = a_1 a_2 \dots a_n$, $\forall i (a_i \in \Sigma)$ deci

$$\to q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \xrightarrow{a_3} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n$$

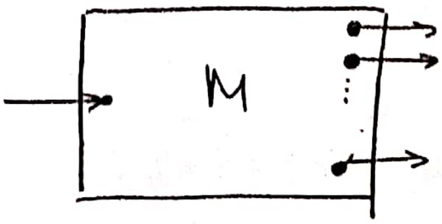
Fie $q_{i-1} \xrightarrow{a_i} q_i$ are ce nu este în graful lui M

$q_i \in \delta'(q_i, a_i)$, ~~$= \delta(q_i, a_i) \cup \{p / \exists$ re λ-closure~~

DECI $q_{i-1} \xrightarrow{\lambda} p_1 \xrightarrow{\lambda} p_2 \xrightarrow{\lambda} \dots \xrightarrow{\lambda} p_n \xrightarrow{a_i} q_i$ în M,

deci $w \in L(M)$

λ-NFA



NNFA $M = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$

Def s.n. câtul st(dr.) al limbajului L prin lbj. L_0, Limbajul definit astfel $L_0^{-1}L = \{w / \exists u_{\in L_0} (uw \in L)\}$

$(LL_0^{-1} = \{w / \exists u_{\in L_0} (wu \in L)\}$

(th) Propr. de închidere ale lui $\mathcal{L}_3$ (complem)

(i) $\mathcal{L}_3$ închis la $\cup, \cap, \overline{}, -$

(ii) $\mathcal{L}_3$ închis la $\cdot, *, +,$ mi

(iii) $\mathcal{L}_3$ închis la cât st. şi dr cu lbj. oarecare (orice parte a lui Σ^*)

$mi(\overbrace{a_1 \dots a_n}^{w}) = \overbrace{a_n \dots a_1}^{w^T}$

$mi(L) = \{mi(w) / w \in L\}$

$pref(w) - \{\lambda, a_1, a_1a_2, \dots, a_{\dots}$

suf

(LV) $\mathcal{L}$ închis la pref, suf, fact

$fact(a_1 \cdots a_n) = \{\lambda, a_1, a_2, \dots, a_n, a_1a_2, a_2a_3, \dots, \dots a_1 \cdots$

DEM:

(i) cu DFA: fie $M_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_{0i}, F_i)$ $i = \overline{1,2}$ DFA

$M_X = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta_i, (q_{01}, q_{02}), F_X)$, unde $X \in \{\cup, \cap, ^{-}, -\}$

$\delta_1((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$

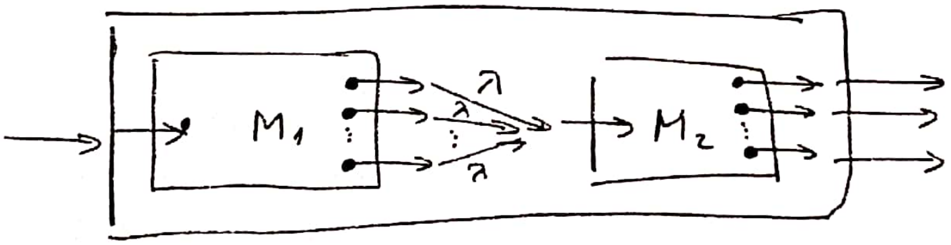
$F_\cap = F_1 \times F_2$

$F_\cup = (F_1 \times Q_2) \cup (F_2 \times Q_1)$

$F_- = F_1 \times (Q_2 - F_2)$

(ii) λ-NFA-uri

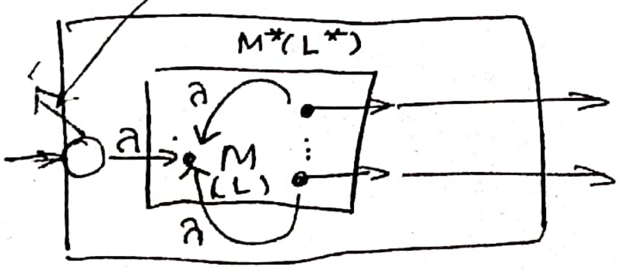
Fie λ-NFA-urile $M_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_{0i}, F_i)$, $i = \overline{1,2}$



$L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$, $L^0 = \{\lambda\}$

$L^+ = \bigcup_{n \geq 1} L^n$

fără săgeată pt L^+



(iii) Fie DFA-ul $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ şi $L_0 \in \mathcal{L}$

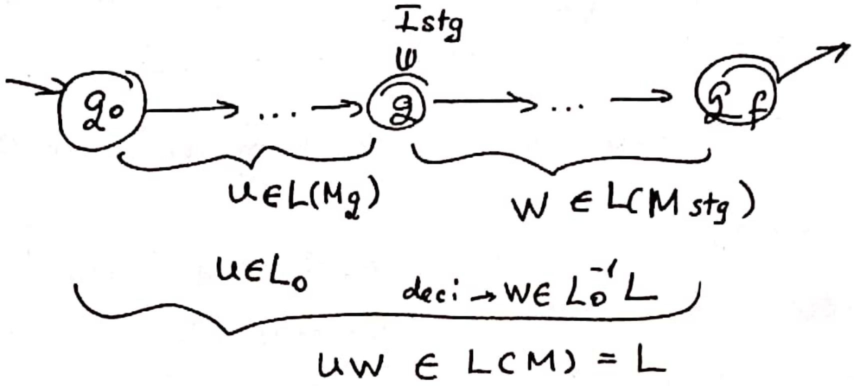
- pt. fiecare stare din Q definim

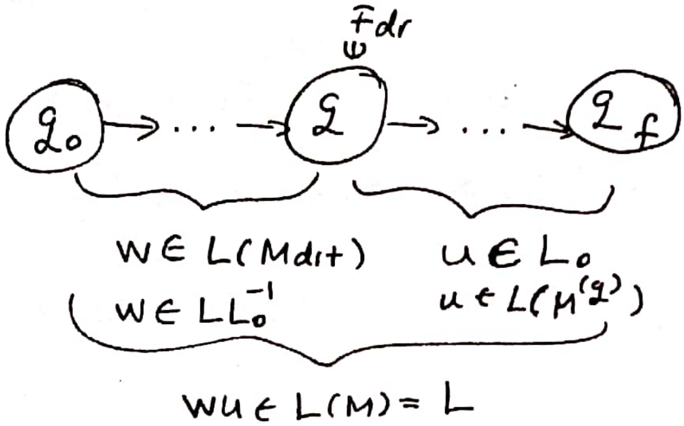
$M_q = (Q, \Sigma, \delta, \delta_0, \{q\})$

$M^{(q)} = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$ $\exists u \in \Sigma^* \left(\begin{smallmatrix} uw \in L(M_q \\ u \in L_0 \end{smallmatrix} \right.$

$M_{stg} = (Q, \Sigma, \delta, I_{std}, F)$, $I_{stg} = \{q / \cancel{q \in M_q} \wedge$

$M_{drt} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F_{drt})$ $F_{drt} = \{q / \exists u \in \Sigma^* \left(\begin{smallmatrix} u \in L(M^{(q)}) \\ u \in L_0 \end{smallmatrix} \right) \}$

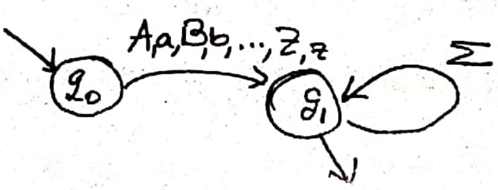




(iv) Consecinţă a lui (iii)

~~fact(L) =~~
$pref(L) = L(\cancel{\Sigma}^*)^{-1}$
suf

$\Sigma = \{A, a, B, b, \dots, Z, z, 0, 1, \dots, 9, \_\}$



2.11.24

DFA minimal

LFA
CURS 05

REM: $A \neq \emptyset$, $\rho \subseteq A \times A$

- ρ s.n. echiv. $\Leftrightarrow$ ρ refl. $\wedge$ ρ sim $\wedge$ ρ tranz
- ρ echiv pe A, ρ s.n. de index finit $\Leftrightarrow$ $|A/\rho| < \infty$
- $(A, \cdot, 1)$ monoid ρ echiv. pe A
- ρ s.n. congr. dr. pe A $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in A$ $(x \rho y \Rightarrow \forall u \in A\,(xu \rho yu))$
- — " — " — " — " — $ux \rho uy$
- ρ s.n. cong. pe a $\Leftrightarrow$ ρ congr. st. și dr.

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

$M_q = (Q, \Sigma, \delta, q_0 ...$

Def • DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ s.n. DFA minimal $\Leftrightarrow$ orice alt DFA echiv. are cel puțin [illegible]

ddc $\equiv$ i.i.f. $M^{(q)}(\ldots q, F)$

• Fie $L \in 2^{\Sigma^*}$. Definim rel. bin. pe Σ^* $\equiv_L$ definită:

$$x \equiv_L y \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} x^{-1}L = y^{-1}L$$ (by definition)

$x^{-1}L = \{w / xw \in L\}$

Obs! 1) $\equiv_L$ congr. dr pe $(\Sigma^*, \cdot, \lambda)$

th (Myhill-Nerode) $L \in \mathcal{L}_3 \Leftrightarrow$ $\equiv_L$ de index finit

Dem.:

„$\Rightarrow$" Fie $L \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow$ fie DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ cu $L(M) = L$

Să obs.: $\Sigma^* = \bigcup_{q \in Q} L(M_q)$, reuniune disj.

$\Rightarrow \{L(M_q)\}_{q \in Q}$ partiție finită a lui Σ^*

Fie ρ echiv. pe Σ^* corespunzător

Avem $x \rho y \Leftrightarrow \exists q\,(x, y \in L(M_q)) \Leftrightarrow \exists q \ldots$

$\Leftrightarrow \delta^*(q_0, x) = \delta^*(q_0, y) \Rightarrow \forall w \in \Sigma^*\ \delta^*(q_0, xw) = \delta^*(q_0, yw) \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \forall w \in \Sigma^*, (xw \in L$ ddc $yw \in L) \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^* (w \in x^{-1}L \Leftrightarrow w \in y^{-1}L) \Leftrightarrow x^{-1}L = y^{-1}L$

$\Leftrightarrow x \equiv_L y$, deci $\rho \subset \equiv_L$, deci $\left|\Sigma^*/_{\equiv_L}\right| \le \left|\Sigma^*/_{\rho}\right| \le |Q|$ (cardinal)

„⇐" fie L a.î. $\equiv_L$ de index finit . Definim | Temă: Propr. (DEM

$$M_L = \left(\frac{\Sigma^*}{\equiv_L}, \Sigma, \delta_L, \hat{\lambda}, \{\hat{x} \mid x \in F\}\right), \text{ unde } \delta_L(\hat{x}, a) = \widehat{xa}$$

- $\hat{x} = \hat{y} \iff x^{-1}L = y^{-1}L \Rightarrow a^{-1}(x^{-1}L) = a^{-1}(y^{-1}L) = (xa)^{-1}L = (ya)^{-1}L$

$\iff xa \equiv_L ya \iff \widehat{xa} = \widehat{ya}$

$L(M_L) = L$

Dem.:

$\lambda \in L(M_L) \iff \hat{\lambda} \in \{\hat{x} \mid x \in F\} \iff \lambda \in L$

$w = a_1 a_2 \dots a_n \in L(M_L) \iff$

$\iff \hat{w} \in \{\hat{x} \mid x \in L\} \iff w \in L$

$\Rightarrow$ evid.

$\Leftarrow$?

Obs! ① $x^{-1}L = L(M_L^{(\delta_L^*(q_0, x))})$

(ii) M_L minimal. Rezultă din „⇒" (th. M.N)

(iii) M_L —— " —— este unic . Rez. din „⇐" (—"—)

| Def.: DFA $M_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_{0i}, F_i)$

$i = \overline{1,2}$ s.n. izomorfe

$M_1 \cong M_2$ ddc $\exists f: Q_1 \to Q_2$ (f bij.

$f(q_{01}) = f(q_{02})$

$f(F_1) = f(F_2)$

$\forall q \in Q_1 \; \forall a \in \Sigma \; (f(\delta_1(q,a)) = \delta_2(f(\dots$

(iv) $x \equiv_L y \iff x^{-1}L = y^{-1}L$

$M_L = (\{x^{-1}L / x \in \Sigma^*\}, \Sigma, \delta', \lambda^{-1}L, \{x^{-1}L / x \in L\})$

[Să scriem DFA pt. $L = (abc^2)^* \Rightarrow M_L$. Cine sunt stările ?]

$\delta'(x^{-1}L, a) = a^{-1}(x^{-1}L) = .$

Def fie $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA

Def. pt. toți $k \in \mathbb{N}$ $\overset{k}{\equiv} \subset Q \times Q$, $p \overset{k}{\equiv} q \iff \forall w, |w| \le k \; (\delta^*(p,w) \in F \iff \delta^*(q,w) \in F$)

$\equiv \subset Q \times Q$

$p \equiv q \iff \forall w \; (\underbrace{\delta^*(p,w) \in F}_{w \in L(M^{(p)})} \iff \underbrace{\delta^*(q,w) \in F}_{w \in L(M^{(q)})})$

Obs (i) $p \equiv q \iff L(M^{(p)}) = L(M^{(q)})$

(ii) $\overset{k}{\equiv}, \equiv$ echivalențe pe Q

(iii) $\overset{0}{\equiv} \supseteq \overset{1}{\equiv} \supseteq \dots \supseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overset{k}{\equiv} = \equiv$

deci $\left|\frac{Q}{\overset{0}{\equiv}}\right| \leq \left|\frac{Q}{\overset{1}{\equiv}}\right| \leq \dots \leq \left|\frac{Q}{\equiv}\right| \leq |Q|$

deci $\exists k_0$ a.î. $\forall k \geq k_0 \ (\overset{k}{\equiv} = \overset{k_0}{\equiv})$

(iv) $\overset{k_0}{\equiv} = \overset{k_0+1}{\equiv} \Rightarrow \forall k \geq k_0 \ (\overset{k}{\equiv} = \overset{k_0}{\equiv})$

(th) Construcția DFA minimal al unui DFA dat

Dacă $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA

at: $M' = (\frac{Q}{\equiv}, \Sigma, \delta', \hat{q_0}, \{\hat{q} \mid q \in F\})$ unde

$\delta'(\hat{q}, a) = \widehat{\delta(q, a)}$

(i) este bine definit

(ii) $M' \equiv M_L$

Dem.: (i) δ' bine definită

$\hat{p} = \hat{q} \iff p \equiv_L q \iff \forall w (\delta^*(p, w) \in F \iff \delta^*(q, w) \in F) \iff$

$\overset{w = au}{\Longrightarrow} \forall u (\delta^*(p, au) \in F \iff \delta^*(q, au) \in F) \iff \forall u (\delta^*(\delta^*(p, a), u) \in F \iff$
$\delta^*(\delta^*(q, a), u) \in F)$

$\Rightarrow \delta(p, a) \equiv \delta(q, a) \Rightarrow \delta'(\hat{p}, a) = \delta'(\hat{q}, a)$

(ii) Fie $f: \{x^{-1}L \mid x \in \Sigma^*\} \to Q/\equiv$, $f(x^{-1}L) = \delta'^*(\hat{q}, x) = \widehat{\delta^*(q_0, x)}$

f bine definită

$x^{-1}L = y^{-1}L \iff \forall w (w \in x^{-1}L \iff w \in y^{-1}L) \iff \forall w (xw \in L \iff yw \in L$

$\iff \forall w (\delta^*(q_0, xw) \in L \iff \delta^*(q_0, yw) \in L) \iff \forall w (\delta^*(\delta^*(q_0, x), w) \in L \iff$
$\delta^*(\delta^*(q_0, y), w) \in L) \iff$

$\Leftrightarrow \delta^*(q_0, x) \equiv \delta^*(q_0, y) \Leftrightarrow \widehat{\delta^*(q_0 x)} = \widehat{\delta^*(q_0 y)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x^{-1}L) = f(y^{-1}L)$

$f(\lambda^{-1}L) = \widehat{\delta^*(q_0, \lambda)} = \widehat{q_0}$

pt. $x \in L$, avem $f(x^{-1}L) = \widehat{\delta^*(q_0, x)} \in \{\widehat{x} \mid x \in F\}$

$f(\delta_L(\underbrace{x^{-1}L, \underset{\in\Sigma}{a}}_{(xa)^{-1}L})) = \cancel{\overbrace{\delta^*(q_0, (xa)^{-1}L)}^{\in F}} =$

$f((xa)^{-1}L) = \delta^*(\widehat{q_0}, xa) = \widehat{\delta^*(q_0, xa)}$

$= \widehat{\delta^*(\delta^*(q_0, x), a)} = \widehat{\delta(\delta^*(q_0, x), a)} = \delta'(\widehat{\delta^*(q_0, x)}, a) = \delta'(f(x^{-1}L),$

Expresii regulate

Def.: S.n. familia expresiilor regulate peste Σ și se not. $REX(\Sigma)$ / REX mulț. de cuv. peste alfabetul simbolurilor $\Sigma \cup \{(,),+,\cdot,*,\lambda,\phi\}$ def. recursiv astfel:

(i) $\phi, \lambda \in REX$; $a \in REX$, pt. $a \in \Sigma$

(ii) $e_1, e_2 \in REX \Rightarrow (e_1 + e_2) \in REX$

(iii) —"— $\Rightarrow (e_1 \cdot e_2) \in REX$

(iv) $e \in REX \Rightarrow e^* \in REX$

- s.n. familia expresiilor regulate extinse, $EREX(\Sigma)$ / $EREX$ mulț. cuv. peste alf. $\Sigma \cup \{(,),+,\cdot,*,\neg,\cap,\phi,\lambda\}$

(i)-(iv) ca mai sus și în plus

(v) $e_1, e_2 \in EREX \Rightarrow (e_1 \cap e_2) \in EREX$

(vi) $e \in EREX \Rightarrow \bar{e} \in EREX$

- s.n. limbajul notat sau def. de $e \in REX$ (resp. $e \in EREX$) limbajul $L(e) \in 2^{\Sigma^*}$ def. recursiv astfel:

(i) $L(\phi) = \phi$, $L(\lambda) = \{\lambda\}$, $L(a) = \{a\}$, pt. $a \in \Sigma$

(ii) $L(e_1 + e_2) = L(e_1) \cup L(e_2)$

(iii) $L(e_1 \cdot e_2) = L(e_1) \cdot L(e_2)$

(iv) $L(e^*) = (L(e))^*$

(resp. (i)-(iv), plus

(v) $L(e_1 \cap e_2) = L(e_1) \cap L(e_2)$

(vi) $L(\bar{e}) = \overline{L(e)}$)

- $e_1 \equiv e_2 \stackrel{def}{\Leftrightarrow} L(e_1) = L(e_2)$
atât pt. REX cât și pt. EREX

Ex: $a b$, $(a+b) \cdot c$ $(ab + c)^* d$ s.a.

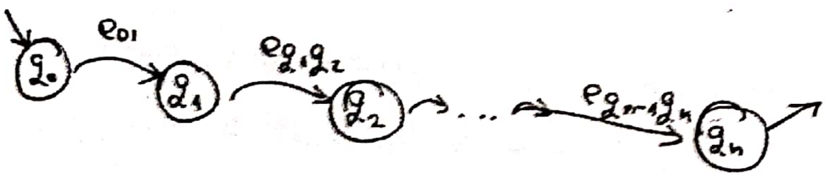
FORMA POLONEZA INVERSA $\overline{L} = \Sigma^* - L$

- considerăm precedența $^{-}, *, \cdot, \cap, +$
- s.n. automat finit extins EFA, $M = (Q, \Sigma, e, q_0, F)$

  $e : Q \times Q \to REX(\Sigma)$; dacă ~~$e_{p,q}$~~ $e_{pq} = \emptyset$, arcul nu se mai desen.

$L(M) =$

$$\{ w \in \Sigma^* / \exists \underset{\in Q}{q_1, \dots, q_n} \, \exists \underset{\in \Sigma^*}{w_1, \dots, w_n} \left(\begin{array}{l} w = w_1 \cdots w_n \\ q_n \in F \\ \forall i (w_i \in L(e_{q_{i-1}, q_i})) \end{array} \right) \}$$



cu $w_i \in L(e_{q_{i-1}} q_i)$

Obs. ① DFA, NFA, λ-NFA sunt cazuri particulare de EFA

② $\mathcal{L}_{REX} \overset{(i)}{\subseteq} \mathcal{L}_3 \overset{(ii)}{\subseteq} \mathcal{L}_{EFA}$ evidentă

b/c cuz close

(th) $\mathcal{L}_{EFA} \subseteq \mathcal{L}_{REX}$ (Alg. de elim. a stărilor unui EFA)

Dem: (Schiță)

intrare: EFA $M = (Q, \Sigma, e, q_0, F)$

ieșire: $e \in REX(\Sigma)$ cu $L(e) = L(M)$

pas 1: ⓐ dc. $q_0 \in F \vee \underset{\in Q}{\exists q} (e_{q q_0} \neq \emptyset)$

~~pas 2:~~ at. se introduce o nouă stare q_i care va fi noua stare finală și arcul $e_{q_i q_0} = \lambda$

b) dc. $|F| > 1$, at. se introduce o nouă stare q_F care va fi unica stare finală a lui M și arcele $e_{q q_F} = \lambda, \forall q \in$

pas 2: dc $Q = \{q_i, q_f\}$ at: $e = e_{q_i q_f} \cdot e^*_{q_f q_f}$, STOP

pas 3: se alege o stare $q \neq q_i, q \neq q_f$ și se elimină împreună cu toate arcele adiacente.

- se modif. / recalc. toate etichetele rămase astfel:

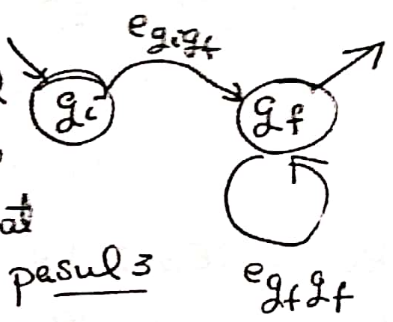
$$e'_{pr} = e_{pr} + e_{pq} e_{qq}^* e_{qr}$$

- se trece la <u>pasul 2</u>

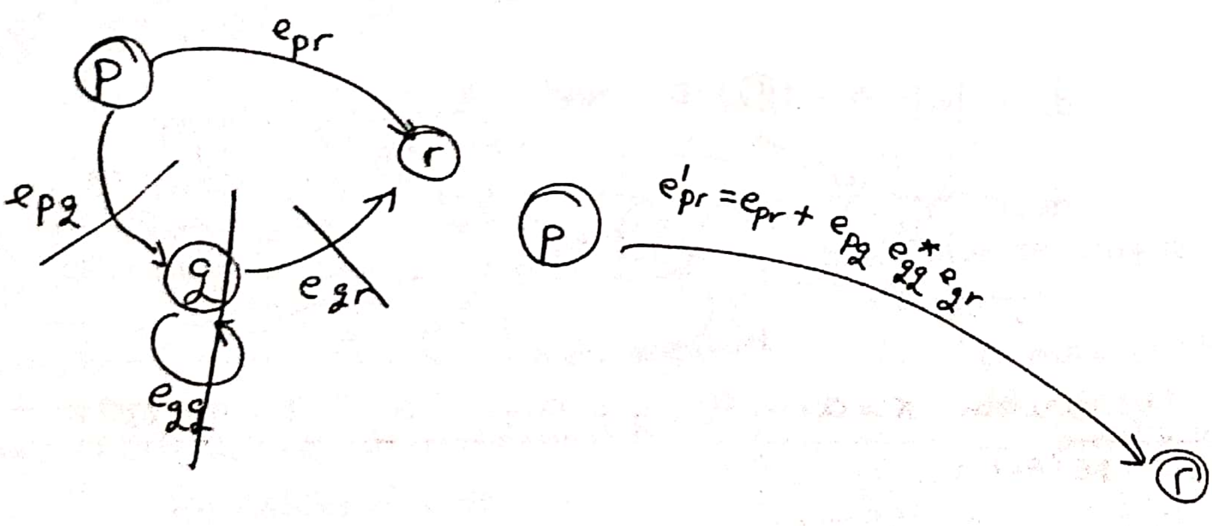
Se obsv. că: - alg. se oprește

- automatul care rezultă din <u>pasul 1</u> este echiv. cu automatul de la intrare și, în plus, starea inț. nu este și finală, în starea inițială nu intră arce și starea finală este unică

- dacă la un moment aut. la care s-a ajuns are numai două stări, at. automatul def. la pasul 2 def limbajul



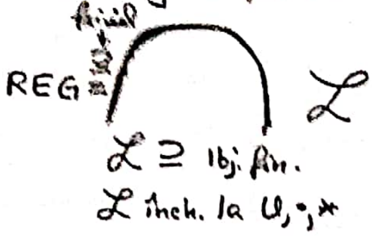
- se obs. că automatul rezultat ~~rez~~ din <u>pasul 3</u> are exact o stare mai puțin decât automatul care a intrat în <u>pasul 3</u> și este echiv. cu acesta.



$\mathcal{L}_{DFA} = \mathcal{L}_{NFA} = \mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_{REX} \xlongequal{\text{se notă}} \underline{REG}$

<u>th Kleene</u> REG este cea mai mică ($\subseteq$) familie de lbj-e care conține limbajele finite și este închisă la $\cup, \cdot, *$

<u>Dem.:</u>



„$\subseteq$" ~~lema de pompare~~

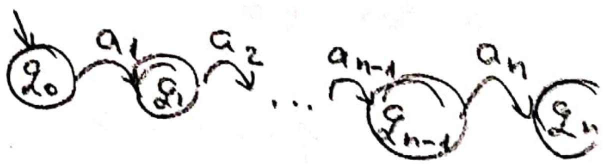
(th) Lema de pompare pt. REG

<u>dc.</u> $L \in REG(\Sigma)$

<u>at.:</u> $\underset{\in \mathbb{N}}{\exists K}\ \underset{\substack{\in L \\ |w| \geq K}}{\forall w}\ \underset{\in \Sigma}{\exists x, y, z}$ $\left(\begin{array}{ll} (i) & w = xyz \\ (ii) & w \neq \lambda \\ (iii) & |xy| \leq K \\ (iv) & \underset{\in \mathbb{N}}{\forall i} (xy^i z \in L) \end{array} \right)$ (*)

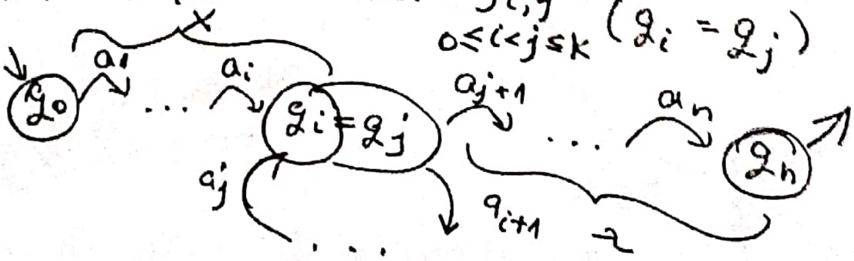
<u>Dem.:</u> fie $L \in REG(\Sigma)$ și fie DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ fie $L(M) = L$. Luăm $K = |Q|$

fie $w = a_1 a_2 \dots a_n \in L = L(M)$.



dim $|w| = n \geq |Q| \Rightarrow$ ~~rez.~~ $\underset{0 \leq i < j \leq K}{\exists i, j} (q_i = q_j)$

deci



Luăm $x = a_1 \dots a_i$, $y = a_{i+1} \dots a_j$, $z = a_{j+1} \dots a_n$

DETALII:

Obs.: Lema de pompare dă o cond. necesară, dar nu și suficientă de regularizare

$L = \{a^p / p \text{ prim}\} \notin REG$

pp. $L \in REG$ rez. $\exists K \dots$ ⊗

alegem $w = a^{p_K} = xyz = a^m a^n a^p = a^{m+p} a^n$

alegem $i = m+p$ $\Rightarrow$ $w_i = xy^iz = a^{m+p} a^{ni}$

$= a^{(m+p)(n+1)}$

Rem.: $f : \Sigma \mapsto \Delta^*$ $f^* : (\Sigma^*, \lambda) \mapsto \Delta^*, \cdot, \lambda)$.

$f^*(a_1 a_2 \dots a_n) = f(a_1) \dots f(a_n)$

de. $\varphi : \Sigma^* \to \Delta^*$ morf φ^{-1} morf. invers $: \Delta^* \to 2^{\Sigma^*}$

$\varphi^{-1}(v) = \{u / \varphi(u) = v\}$

- $s : \Sigma \to 2^{\Delta^*}$ se prelungește în mod unic la un morf de monoizi: $s^* : (\Sigma^*, \cdot, \lambda) \mapsto (2^{\Delta^*}, \cdot, \{\lambda\})$

s^* s.n. substituție

- φ morfism λ-liber ddc. $\forall a$, $\varphi(a) \neq \lambda$

o substituție λ-liberă ddc $\forall a (\lambda \notin \sigma(a))$

$\sigma : \Sigma^* \to 2^{\Delta^*}$

σ subst. finită ddc $\forall a$ $|\sigma(a)| < \infty$

σ subst. regulată ddc $\forall a (\sigma(a) \in REG)$

th REG închis (morfisme, morf. λ-libere, morf. inverse, subst. λ-libere, subst. finite,) subst. regulate

cazuri particl de ~~morfism~~ substituție

Dem.: REG închisă la morfism inv.

fie $L \in REG$ și DFA

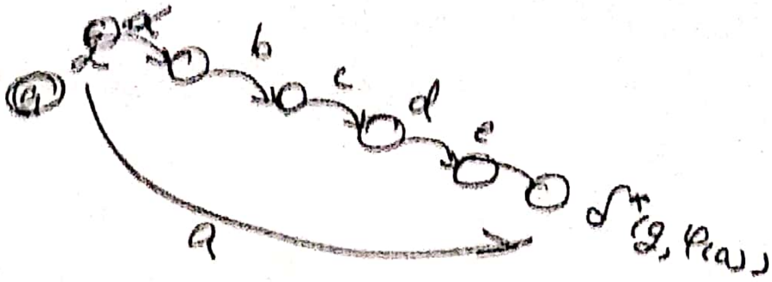
$M = (Q, \Delta, \delta, q_0, F)$ cu $L(M) = L$

fie $\varphi : \Sigma^* \to \Delta^*$ morf.

a.i. că $\varphi^{-1}(L) \in REG$. Const DFA M' cu $L(M') = \varphi^{-1}(L)$

dp' $M' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F)$ unde $\delta'(q, a) = \delta^*(q, \varphi(a))$

Detalii:



REG închis la substituție regulată

fie $L \in REG$ fie DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ cu $L(M) = L$

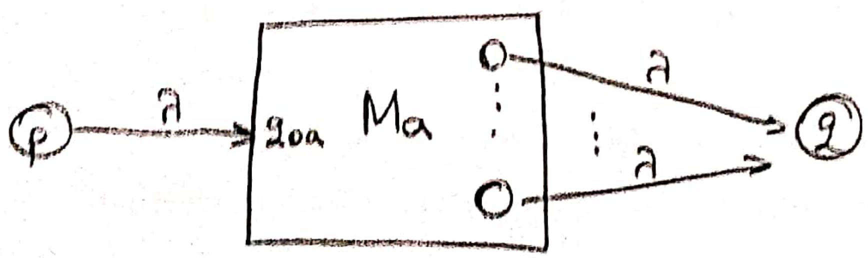
$\sigma : \Sigma^* \to 2^{\Delta^*}$ substituție regulată, deci $\forall_{a \in \Sigma} (\sigma(a) \in REG(\Delta))$

pt. fiecare $a \in \Sigma$ fie DFA $M_a = (Q_a, \Delta, q_{0a}, F_a)$ cu $L(M_a) = \sigma(a)$

Constr. λ-NFA, $M' = (Q \cup \bigcup_{a \in \Sigma} Q_a, \Delta, \delta', q_0, F)$

Pt. fiecare $a \in \Sigma$ și pt. fiecare arc din graf(M) de forma

$(p) \xrightarrow{a} (q)$. Înlocuim ac. arc cu:



Expl: de lbj. care satisface (*), dar nu este regulat

$L = \{a^p / p \text{ prim}\} \notin REG$

$L' = b^+ L = \{ba^2, ba^3, ba^5, \dots, b^2a^2, b^2a^3, \dots, \dots\}$

Satisface (*) pt. $k = 1$ și $x = \lambda$, $y = b$,

$w = \underbrace{b}_{y} \underbrace{b^n a^p}_{z}$ $\qquad \varphi : \{a, b\}^* \to \{a, b\}^*$ morf $\begin{cases} \varphi(a) = a \\ \varphi(b) = \lambda \end{cases}$

NEREGULAT: $\notin$ REG pt.că. Dacă $\in$ REG $\Rightarrow \varphi(L') = L \overset{\text{închis}}{\underset{\text{morf}}{\Rightarrow}} L$ regulat

Limbaje independente de context

- Gramatică (formală) $G = (N, \Sigma, S, P)$

  $P \subset (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$

- $\underset{G}{\Rightarrow}$ sau $\Rightarrow$, $(\alpha \Rightarrow \beta) \overset{def.}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha = \alpha_1 u \alpha_2 \\ \beta = \alpha_1 v \alpha_2 \\ uv \in P \end{cases}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in (N \cup \Sigma)^*$

- $(u, v) \in P$ se notz. $u \to v$

- $\overset{k}{\Rightarrow}, \overset{+}{\Rightarrow}, \overset{*}{\Rightarrow}$ inchideri ale lbj.

- $L(G) = \{ w / w \in \Sigma^*, S \overset{+}{\Rightarrow} w \}$

- $G_1 \sim G_2 \overset{def.}{\Leftrightarrow} L(G_1) = L(G_2)$

- Cazuri particulare imp.
  - gramatică regult., orice prod este de formă $A \to aB$ sau $A \to a$

    $\mathcal{G}_3$ num. şi de tip 3

    SAU $S \to \lambda, A \to aB, A \to A$ când $B \neq S'$ pt $L(G) \ni \lambda$

  - liniară, $A \to w_1 B w_2$ sau $A \to w$

    $\mathcal{G}_{lin}$ unde $\begin{cases} w, w_1, w_2 \in \Sigma^* \\ A \in N \end{cases}$

  - independentă de context $A \to v$ cu $A \in N, v \in (N \cup \Sigma)$

    ... $\mathcal{G}_2$ num. şi de tip 2

    ...

- $A \to v$ s.n. A-producţie
- $A \to \lambda$ s.n. λ-producţie
- $A \to w$, $w \in \Sigma^*$ s.n. producţie terminală
- $w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n$ — derivare de lg. n

$w_{i-1} \Rightarrow w_i$ prod. fol., $A \to \gamma$ a.î. $w_{i-1} = \alpha A \beta$, $w_i = \alpha \gamma \beta$

- derivare terminală: de forma $w \overset{+}{\Rightarrow} w$ cu $w \in \Sigma^*$
- derivare stânga: dde la fiecare pas, prod. fol. s-a aplica celui mai din ~~stg~~ ~~det.~~ neterminal din membrul stâng al pasului de derivare

- O prod. de forma $A \to B$ s.n. redenumire

Lemă 1 (eliminarea axiomei din membrul drept al prod.

dc $G = (N, \Sigma, S, P) \in \mathcal{G}_x$, cu $x \in \{3, 2, 1, 0, lin\}$ a.î.

$G' = (N \cup \{S'\}, \Sigma, S', P \cup \{S' \to \alpha \mid (S \to \alpha) \in P)$

$\in \mathcal{G}_x$, $G' \sim G$ și axioma nu apare în membr. dr. al vreunei producții

$S \to$

$S \to \alpha S \beta$

Lemă 2 (eliminarea redenumirilor)

dc. $G = (N, \Sigma, S, P) \in \mathcal{G}_2$ ($\underset{\text{context free G}}{\text{CFG}}$) a.î.

$G' = (N, \Sigma, S, P_1 \cup P_2)$, unde

$P_1 = \{A \to \alpha \mid (A \to \alpha) \in P, \alpha \notin N\}$

$P_2 = \{A \to \beta \mid \underset{\in N}{\exists B} \left(\begin{matrix} (B \to \beta) \in P_1 \\ (A \overset{+}{\Rightarrow} B) \end{matrix} \right) \}$

N FINIT, deci este algoritm

este fără redenumiri, $G' \sim G$, $G \in \mathcal{G}_2$

Lemă 3 (esența ~~indo~~ CF)

dc $G = (N, \Sigma, S, P) \in \mathcal{G}_2$

a.î. $\underbrace{\underset{\in \mathbb{N}}{\forall n} \; \forall w_1 \overset{n}{\Rightarrow} w', \underset{\substack{\in \mathbb{N} \\ \geq 1}}{\forall k} \; \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_k}_{P(n)}$ ($\underset{\neq \lambda}{w = \alpha_1 \ldots \alpha_k}$) $\exists \underset{\in (N \cup \Sigma)^*}{\beta_1, \ldots, \beta_k}$ $\left(\begin{matrix} ① \; w' = \beta_1 \ldots \beta_k \\ ② \; \forall i \; (\alpha_i \overset{n_i}{\Rightarrow} \beta_i) \\ ③ \; \sum_{i=1}^{k} n_i = n \end{matrix} \right)$

29/36

$$w \overset{n}{\Longrightarrow} w'$$

$$\boxed{\alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \alpha_3} \qquad \boxed{\beta_1 \mid \beta_2 \mid \beta_3}$$

Dem.

Dem. prin inducție, asupra lui n. (lg. derivării), P(n)

$n=0$ $\quad w \overset{0}{\Rightarrow} w'$, evident

$n \to n+1$

fie $w \overset{n+1}{\Longrightarrow} w'$

fie $\quad k \geq 1,\ w = \alpha_1, \dots, \alpha_k,\ \alpha_i \neq \lambda$

punem în evidență ultimul pas al deriv.

$$w \overset{n}{\Longrightarrow} w'' \Longrightarrow w'$$

cf. ipotezei de inducției, $\exists\ \gamma_1, \dots, \gamma_k \in (N \cup \Sigma)^*$

a.î. $\left(\begin{array}{l} w'' = \gamma_1 \dots \gamma_k \\ \forall i = \overline{1,k}\ (\alpha_i \overset{n_i}{\Rightarrow} \gamma_i) \\ \sum_{i=1}^{k} n_i = n \end{array} \right)$

$$w = \alpha_1 \dots \alpha_k \overset{n}{\Longrightarrow} \overbrace{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k}^{w''} \Longrightarrow w' = \gamma_1 \dots \gamma_{k_0} = \underset{\beta_1}{\gamma_1} \dots \underset{\beta_{k_0}}{\underbrace{\gamma v \gamma'}} \dots \underset{\beta_k}{\gamma_k}$$

fie γ_{k_0} factorul lui w'' care conține neterminalul pe care s-a aplicat ultima producție.

deci, fie $\begin{cases} A \to v \text{ ult. prod. aplicată} \\ \gamma_{k_0} = \gamma A \gamma' \end{cases}$

Luăm $\begin{cases} \beta_i = \gamma_i \text{ pt. } i \neq k_0 \\ \beta_{k_0} = \gamma v \gamma' \end{cases}$

evident are loc (1) (din construcție)

avem imediat $\forall i\ \alpha_i \overset{n_i}{\Longrightarrow} \beta_i,\ i \neq k_0$ și $\alpha_{k_0} \overset{n_{k_0}+1}{\Longrightarrow} \beta_{k_0}$

$$\sum_{i=1}^{K} n_i + 1 = n+1$$

lema 4 (existența derivărilor terminale stg)

dc. $G = (N, \Sigma, S, P) \in \mathcal{G}_2$

at. $\underbrace{\forall A \xRightarrow[G]{n} w \in \Sigma^*, \exists \text{ (există } A \xRightarrow[stg]{n} w)}_{P(n)}$

Dem. prin ind. asupra lg. n a derivării

$n = 1$ evident

pasul de ind. fie $A \xRightarrow{n+1} w$ cu $w \in \Sigma^*$

Punem în evid. primul pas al derivr.

$A \Rightarrow \omega \xRightarrow{n} w$

Punem în evidență în ω toate simbolurile neterminale

~~$A \Rightarrow w_0 A_1 w_1 A_2 \dots$~~

$\underbrace{w_0 A_1 w_1 A_2 \dots A_k w_k}_{\omega} \xRightarrow{n} w$

Cf. lemei 3, avem $\begin{cases} w = w_0 v_1 w_1 v_2 \dots v_k w_k \\ \forall_{i=\overline{1,k}} (A_i \xRightarrow{n_i} v_i),\ v_i \in \Sigma^* \\ \sum_{i=1}^{k} n_i = n \end{cases}$

Cum $\forall i (n_i \leq n)$ se aplică ip. de ind. și avem $\forall_{i=\overline{1,k}}\ A_i \xRightarrow[stg]{n_i} v_i$

construim o derivare stângă de lg $n+1$ $A \xRightarrow[stg]{n+1} w$

astfel:

$A \xRightarrow[stg]{} w_0 A_1 w_1 A_2 w_2 \dots A_k w_k \xRightarrow[stg]{n_1} w_0 v_1 w_1 A_2 \dots A_k w_k \xRightarrow[stg]{n_2} w_0 v_1 \dots A_k$

$\dots \xRightarrow[stg]{n_k} w_0 v_1 w_1 v_2 \dots v_k w_k = w$

lema 5 (Elim. λ-producțiilor)

Dacă $G = (N, \Sigma, S, P)$ CFG

at ① Ne definim recursiv șirul $N_0 = \emptyset$, $N_{i+1} = N_i \cup \{A \mid A \in N, \exists \omega \in N_i^* (A \to \omega \in P)\}$

at. (1°) $N_0 \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq N$ deci $\exists K \forall_{j \geq K} (N_j = N_K)$

(1°2) De. $K_0 = \min\{K / N_K = N_{K+1}\}$

$\emptyset^* = \{\lambda\}$

at. (a) $\forall_{K \geq K_0} N_K = N_{K_0}$

(b) $N_{K_0} = \{A \in N / \cancel{\exists B (A \xRightarrow{+} B)}$ $A \xRightarrow{+} \lambda\}$ $\xrightarrow{\text{notam}} N_\lambda$

(2°) $G' = (N, \Sigma, S, P')$, unde $P' = \left\{ A \to \beta \;\middle|\; (A \to \alpha) \in P \text{ şi } \beta \text{ se ob din } \alpha \ldots \right.$

... prin ştergerea a 0, uneia sau mai multor apariţii ale unui sau mai multor neterminale din N_λ

G nu are λ-producţii, este CF, $L(G') = L(G) \setminus \{\lambda\}$

Lema 6 (Elim. neterminalelor inutile) + (problema trivialităţii pt. CF pe lângă)

A neterminal inutil

A terminal util dacă $\exists$ o derivare $A \xRightarrow{+} w$ cu $w \in \Sigma^*$

De. $G = (N, \Sigma, S, P)$ CFG

de. definim recursiv şirul $N_0 = \emptyset$

$N_{i+1} = N_i \cup \{A \in N / \exists_{\omega \in (N_i \cup \Sigma)^*} ((A \to \omega) \in P)\}$

at. (1°1) $N_0 \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq N$, Deci $\exists K \forall_{j \geq K} N_j = N_K$

(1°2) De. $K_0 = \min\{K / N_K = N_{K+1}\}$

at. (a) $\forall_{K \geq K_0} N_K = N_{K_0}$ (**) (cel mai dificil)

(b) N_{K_0} = mulţ. neterminalelor utile notăm N_{util}

(c) $L(G) \neq \emptyset \Leftrightarrow S \in N_{util}$

(2°) dc $L(G) \neq \emptyset$ at $G' = (N \cap N_{util}, \Sigma, S, P \cap (N_{util} \times (N_{util} \cup \Sigma)^*))$

are proprietăţile $G' \in \mathcal{G}_2$

$G' \sim G$

G' nu are neterminale inutile

lema 6 (Eliminarea simb. inaccesibile în CFG)

de. $G=(N,\Sigma,S,P)$ GFG

at. ① De. def. recursiv șirul $V_0=\{S\}$

$$V_{i+1}=V_i\cup\{X \mid X\in N\cup\Sigma, \exists \underset{\in P}{(A\to\omega)} (A\in V_i, \omega \text{ c } X)$$

at. ①' $V_0\subseteq V_1\subseteq\ldots\subseteq N\cup\Sigma$

$$\exists K\ \forall_{j\geq K}(V_j=V_K)$$

①'2 a) de. $K_0=\{K \mid V_K=V_{K+1}\}$

at. $\forall K\geq K_0$, avem $V_K=V_{K_0}$

b) $V_{K_0}=\{X \mid X\in N\cup\Sigma,\ X \text{ accesibil}\}\overset{\text{notăm}}{=}V_{acc}$

② $G'=(N\cap V_{acc}, \Sigma\cap V_{acc}, S, P\cap(V_{acc}\times V_{acc}^*))$ are propr.:

(i) G' este CFG, (ii) G' nu are simb. inacc.

(iii) $G'\sim G$

FORMĂ NORMALĂ CHOMSKI

Def.: o CFG, $G=(N,\Sigma,S,P)$ este în FNC $\leftrightarrow$ ddc orice prod este de forma

I $A\to BC$ sau $A\to a$

sau

II $A\to BC$ sau $\boxed{A\to A}$ sau $S\to\lambda$

$B,C\neq S$

Th. (F.NC.) ~~Pt. orice CFG~~

$$\underset{\in CFG}{\forall G}\ \underset{\in CFG}{\exists G'}\left(\begin{matrix}G'\sim G\\ G' \text{ în FNC}\end{matrix}\right)$$

Dem.: faza 1. G se transformă în G'' cu producț. de forma:

$A\to A_1A_2\ldots A_n$, sau $A\to a$

pt orice producție $A\to a_{11}a_{12}\ldots a_{1K_1}A_1\ldots a_{n1}\ldots a_{nK_n}A_n$ se înlocuiește

$$\begin{cases} A \to Z_{11}Z_{12}\dots Z_{1k_1}A_1Z_{21}\dots Z_{2k_2}A_2\dots A_nZ_{n1}\dots Z_{nk_n} \\ Z_{ij}\to a_{ij}\end{cases}$$

<u>faza 2</u> G'' se transformă în G' în FNC

Orice prod. de forma $A\to A_1A_2\dots A_n$ cu $n\geq 3$ se înloc. cu

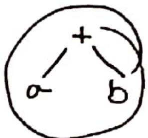
$$A \to \langle A_1\dots A_{n-1}\rangle A_n$$

$$\langle A_1\dots A_{n-1}\rangle \to \langle A_1\dots A_{n-2}\rangle A_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$\langle A_1A_2\rangle \to A_1A_2$$

ARBORE PT. PROIECT



+ab
ab+
a+b

Def.: Fie $G=(N,\Sigma,S,P)$ CFG

S.n. arbore de derivare în G un arbore ordonat T cu propr.

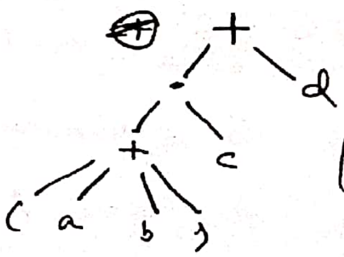
1. Răd. este etichet. cu S
2. nodul et. cu X are descendenții et. cu $X_1,\dots,X_n\in N\cup\Sigma$ dde $X\to X_1X_2\dots X_n$ este prod.
3. Dacă un nod este et. cu λ, at. el este nod terminal (i.e. leaf) și nu are frați

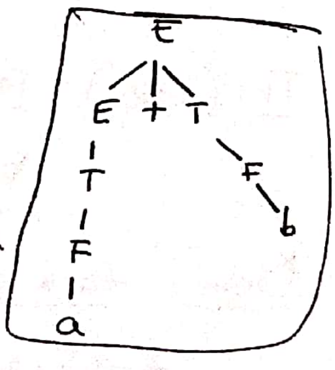
$\boxed{+,\cdot,-,\div \text{ cu } x,y,z}$

$$E \to E+T \mid E-T \mid T$$
$$T \to T\cdot F \mid T:F \mid F$$
$$F \to (E) \mid x \mid y \mid z \mid a \mid \dots \mid z$$

$e = (a+b)c:d$

$E \Rightarrow \cancel{E+T} \Rightarrow$





Fie $G_A = (N, \Sigma, A, P)$

S.n. frontiera unui arb. de derivare T şi se not $\partial(T)$ cuvântul peste $N \cup \Sigma$ obt. prin concatenarea în ordinea st-dr a et. frunzelor lui T.

S.n. frontieră interioară a unui a.d. T cuv. obţ. prin concat. st-dr a et. nodurilor unei secţiuni din arb. T

Th. dc. (N, Σ, S, P) CFG, $A \in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$
dt. sunt. echiv.

1° $A \overset{m}{\underset{G}{\Rightarrow}} \alpha$

2° $\exists T$ (i) T arb. der. în G_A
ii) frontiera lui T este α
iii) T are m noduri interioare) (*)

Dem.:

1° $\Rightarrow$ 2° prin. ind. după lungimea derivării

$P(n)$: $\underset{\in N}{\forall A}$ $\underset{\in (N\cup\Sigma)^*}{\forall \alpha}$ $\left(A \overset{m}{\underset{G}{\Rightarrow}} \alpha,\ m \leq n \Rightarrow (*) \right)$

$n=1$, $n=2$ evidente. $(n \to n+1)$

Fie $\underset{\in N}{A}$, $\underset{\in (N\cup\Sigma)^*}{\alpha}$, $A \overset{n+1}{\underset{G}{\Rightarrow}} \alpha$

Fie

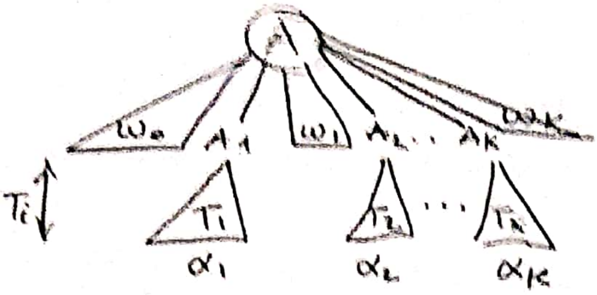
$A \overset{1}{\Rightarrow} \omega \overset{n}{\Rightarrow} \alpha$

Punem în evidenţă neterminalele din ω

$\cancel{A \Rightarrow}\ \omega = \omega_0 A_1 \omega_1 A_2 \omega_2 \dots A_K \omega_K$, cu $\omega_i \in \Sigma^*$, $A_i \in N$

cf. lemei (esenţa CF) rezultă $\exists$ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K$ a.î. $\alpha = \omega_0 \alpha_1 \dots \alpha_K$
$\forall A_i \overset{n_i}{\underset{G}{\Rightarrow}} \alpha_i$
$\sum_{i=1}^{K} n_i = n$

evident. $\forall i$ $(n_i \leq n)$ deci cf. ip. ind. pt. $\forall i = \overline{1,K}$



~~pare~~ pur

$\partial(T) = \omega_0 \alpha_1 \omega_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \omega_k = \alpha$

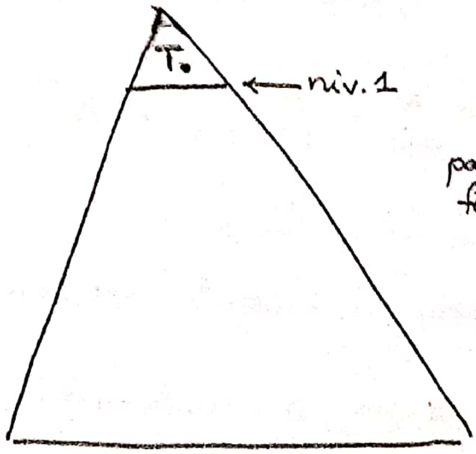
(2°) $\Rightarrow$ (1°) prin ind. asupra înălțimii arb. de der.

$P(n)$: $\forall A \in N$ $\forall \alpha \in (N \cup \Sigma)^*$ $\left[\forall T \begin{cases} \text{(i) } T \text{ a.d. în } G_A \\ \text{(ii) } \partial(T) = \alpha \\ \text{(iii) } T \text{ are } m \text{ noduri intr.} \\ \text{(iv) } h(T) \leq n \end{cases} \rightarrow A \overset{m}{\underset{G}{\Rightarrow}} \alpha \right]$

$n = 1$, evident. $\boxed{n \rightarrow n+1}$

fie $A \in N$ și $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$ și T $\begin{cases} \text{arb. der. în } G_A \\ \partial(T) = \alpha \\ T \text{ are } m \text{ noduri int.} \\ h(T) = n+1 \end{cases}$

temă:



pas de deriv. p fiecare arbore
TEMĂ

Lemă: dc. $G = (N, \Sigma, S, P)$ CFG în FNC

T arb. deriv. în G

at: $|\partial(T)| \leq 2^{h(T)}$

$2^n + 2^n = 2^{n+1}$, ne poate cere la EXAM

th

Lema (de pompare pt. CF)

dc $L \in CF$

at $\exists k \in \mathbb{N}$ $\forall w (\Rightarrow) \in L$, $|w| > 0$ $\exists (u, x, y, z, v) \in \Sigma^*$ (
(i) $w = uxyzv$
(ii) $|xz| > 0$
(iii) $|xyz| \leq k$
(iv) $\forall i \in \mathbb{N} (ux^i yz^i v \in L)$
)

Dem.: fie $G = (N, \Sigma, S, P)$ CFG în FNC cu $L(G) = L$

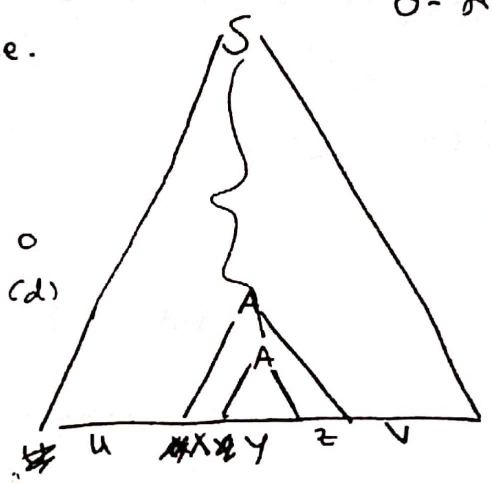
luăm $k = 2^{|N|}$. fie $w \in L$ cu $|w| > k = 2^{|N|}$

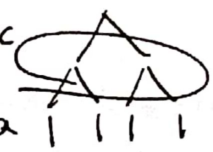
∂ - frontieră

fie T a.d. terminal pentru w, i.e.

$\partial(T) = w$

deci $h(T) \geq card(N)$, deci există un drum (d) de la răd. la o frunză de lung. $> card(N)$. pe (d) sunt cel puțin $card(N)+1$ noduri



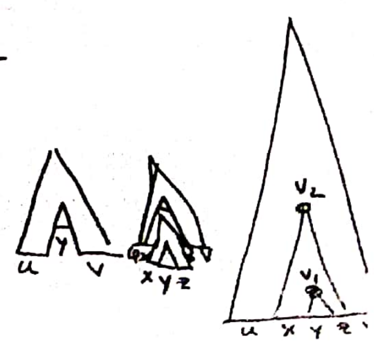


Pe drumul (d) $\exists$ două noduri et. cu aceeași neterminal.

Fie v_1 și v_2 primele noduri pt. care se întâmplă asta, pornind de jos. leaf-

Notăm T_1, arb. de root $= v_1$ și T_2 arb. de root $= v_2$

luăm $\begin{cases} y = \partial(T_1), \\ xyz = \partial(T_2) \end{cases}$



$\vdash_M \subseteq \varphi \times \varphi$

↳ relația de tranziție într-un pas

$(q_1, w_1, \alpha_1) \vdash_M (q_2, w_2, \alpha_2) \overset{Def}{\Longleftrightarrow}$

$$\overset{Def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} w_1 = a w_2, & a \in \Sigma \cup \{\lambda\} \\ \alpha_1 = Z\beta & \\ \alpha_2 = \alpha\beta, & Z \in \Gamma, \beta \in \Gamma^* \\ (q_2, \alpha) \in \delta(q, a, Z) & \end{cases}$$

$\vdash_M^K$ ↳ puterea K

$\vdash_M^+$ ↳ includerea tranzitivă (1, 2, ..., sau mai mulți pași)

$\vdash_M^*$ ↳ includerea tranzitivă și reflexivă (0, 1, 2, ..., sau mai mulți pași)

! Moduri de recunoaștere

$L_f(M) = \{w \mid w \in \Sigma^*, \exists q \in F, \exists \alpha \in \Gamma^* \text{ a.î. } (q_0, w, Z_0) \vdash_M^* (q, \lambda, \alpha)\}$

↳ starea finală

$L_\lambda(M) = \{w \mid w \in \Sigma^*, \exists q \in Q \; ((q_0, w, Z_0) \vdash_M^* (q, \lambda, \lambda))\}$

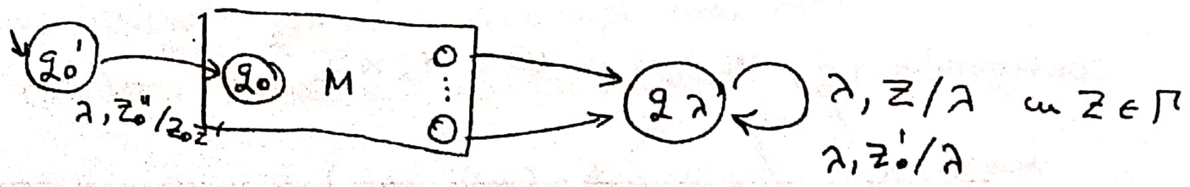
Th

dc. $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ PDA

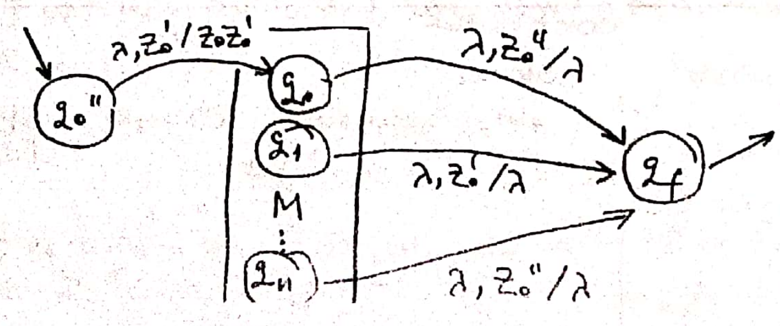
at. 1° $\exists M'$ PDA $(L_\lambda(M') = L_f(M))$

2° $\exists M''$ PDA $(L_f(M'') = L_\lambda(M) = L_\lambda(M''))$

1°



2°



CURS 09

Automate push-down (PDA)

- PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

Q, Σ, Γ finite și nevide

Q - mulț. stărilor ; Σ - alfabetul de intrare

Γ - alfabetul intern / al stivei

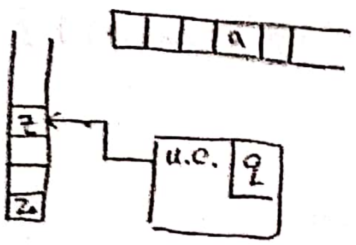
δ - fct. de tranziție

q_0 - starea inițială

Z_0 - simbolul inițial din stivă

F - mulț. stărilor finale

$$\begin{cases} \delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Gamma^*) \\ \Sigma \subseteq \Gamma,\ Z_0 \in \Gamma - \Sigma \end{cases}$$



$$q \xrightarrow{a, Z/\alpha} p$$

$\delta(q, a, Z) \ni (p, \alpha)$ → cuvânt

- cuvântul $x_1 x_2 \cdots x_n$ este băgat în stivă astfel:

$$\begin{matrix} x_n \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \end{matrix}$$

configurație $(q, w, \alpha) \in \mathcal{C} = Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$

q → starea curentă

w → cuvânt încă necitit de pe stivă

α → conținutul stivei

CURS 10

(th) Propr. de închidere CFG

1° CFG închisă la substituții (CF)
2° —"— la morfisme
3° —"— la $\cup, \cdot, +, *$
4° —"— $mi(\cdot)$ ———imed
5° CF nu este închisă la $\cap$, $\overline{}$
6° CF este închisă la ~~int~~ $\cap$ cu lbj. regulate

$\sigma : \Sigma^* \mapsto 2^{\Delta^*}$ subst. $\iff$ $\forall_{u,v \in \Sigma^*}$ $\sigma(u,v) = \sigma(u)\sigma(v)$;

σ subst. CF $\iff$ $\forall_{a \in \Sigma} (\sigma(a) \in CF)$

REM.

1° Fie $L \in CF$ și CFG $G = (N, \Sigma, S, P)$ a.î. $L(G) = L$

$\sigma : \Sigma^* \longrightarrow 2^{\Delta^*}$ subst. CF

~~și~~ fie pt. fiecare $a \in \Sigma$, CFG $G_a = (N_a, \Delta, S_a, P_a)$ cu $L(G_a) = \sigma(a)$

Definim GFG $G' = (N, \Sigma' = \{S_a | a \in \Sigma\}, S, P' = \{A \rightarrow \varphi(\alpha) | (A \rightarrow \alpha) \in P\})$

unde $\varphi : (N \cup \Sigma)^* \longrightarrow (N \cup \Sigma')^*$ morf. definit pe generatori

$$\begin{cases} \varphi(A) = A, \text{ pt. } A \in N \\ \varphi(a) = S_a \text{ pt } a \in \Sigma \end{cases}$$

Se observă:

$L(G') = \varphi(L(G)) = \varphi(L) = \{ S_{a_1}, \dots, S_{a_n} / a_1, \dots, a_n \in L \}$

Definim CFG G'' a.î. $L(G'') = \sigma(L)$

$$G'' = (N \cup \bigcup_{a \in \Sigma} N_a, \Delta, S, P' \cup \bigcup_{a \in \Sigma} P_a)$$

avem $L(G'') = \sigma(L)$

DUBLĂ INCLUZIUNE, sau echiv. cu o impl. mai dificilă:

$w \in \sigma(L) \iff \exists_{w \in L}$ a.î. $w \in \sigma(w) \iff$

$\iff \exists_{w = a_1 \dots a_n \in L}$ a.î. $(w \in \sigma(w) = \sigma(a_1)\sigma(a_2)\dots\sigma(a_n)) \iff$

$\iff \exists_{w = a_1 \dots a_n \in L} \exists_{w_1, w_2, \dots, w_n \in \Delta^*}$ a.î. $\begin{pmatrix} \forall i (w_i \in \sigma(a_i)) \\ w = w_1 w_2 \dots w_n \end{pmatrix}$

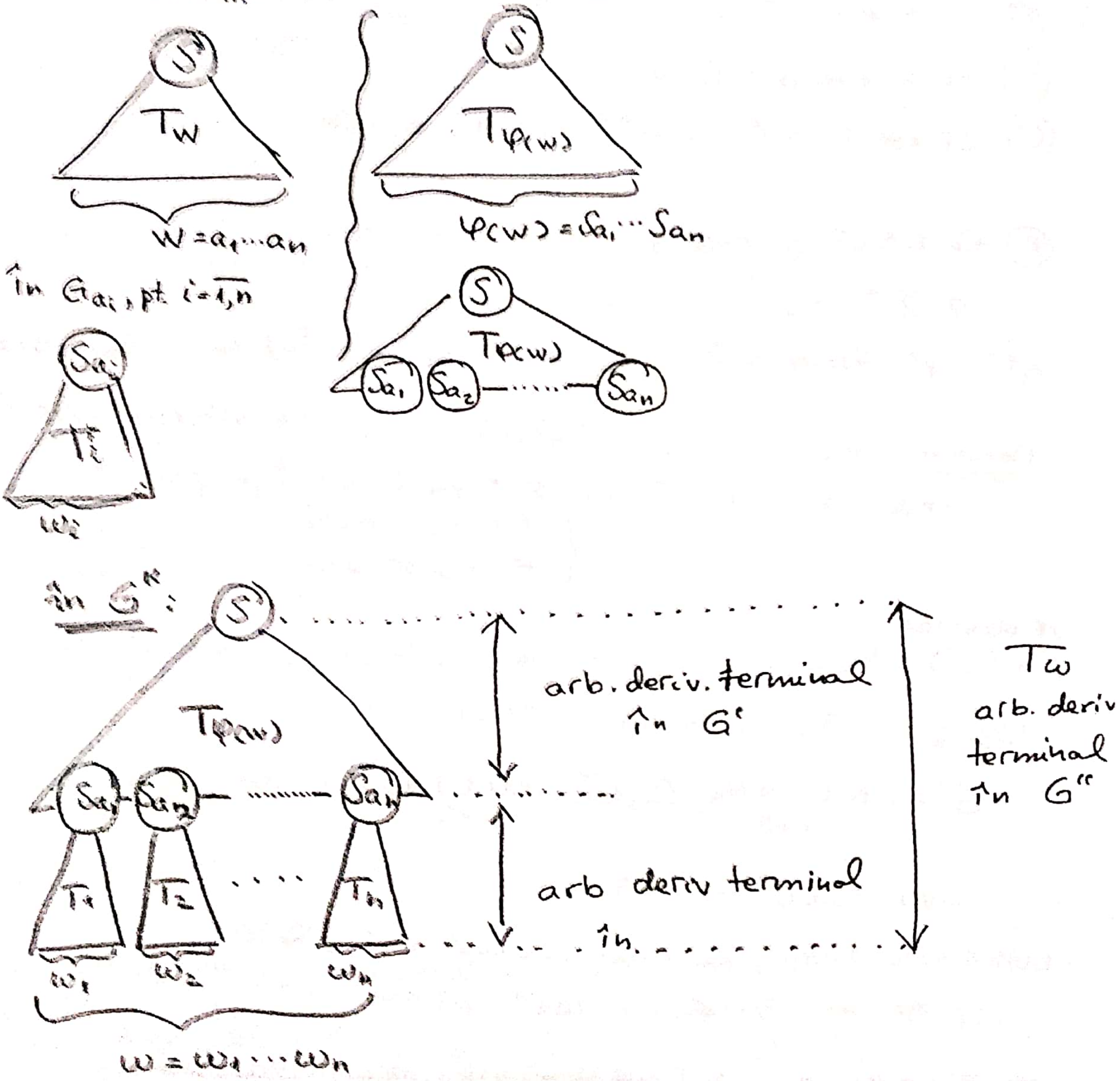
$\iff \exists_{w = a_1 a_2 \dots a_n \in \Sigma^*} \exists_{w_1, w_2, w_n \in \Delta^*}$ a.î.
① $w = w_1 \dots w_n$
② ex. T_w arb. deriv. terminal în G a
$\partial(T_w) = w$
③ $\forall i$ $\exists$ T_i arb. deriv. în G_{a_i} a.î. $\partial(T_i)$:

(iv) $\exists\, T_{\varphi(w)}$ arb. deriv. în G' a.î. $\delta(T_{\varphi(w)}) = \varphi(w) = S_{a_1}S_{a_2}\cdots S_{a_n}$ /

$\Rightarrow$ $w \in L(G'')$

"$\subseteq$"

În G avem ~~un arbore de derivare~~ G':



« ⊙ »
$\Leftarrow$

$w \in L(G'')$
$\Rightarrow$ ($\exists$ un arb. deriv T_w terminal în G'' cu $\partial(T_w) = w$) et. de la L→R
$\Leftrightarrow$ ex. ~~$\alpha = S_{a_1} S_{a_2} \cdots S_{a_n}$~~ ~~se~~ o secțiune unică $D = \{S_{a_1}, \dots, S_{a_n}\}$

~~a.î.~~ Fie $\alpha = S_{a_1} S_{a_2} \cdots S_{a_n} = \partial(D)$

fie $w = \varphi^{-1}(\alpha) = a_1 a_2 \cdots a_n$
fie T_i subarborele lui T_w de rădăcină nodul et. cu S_{a_i} din D
Acești T_i arbori de deriv. terminali în G_{a_i}

5°
$L_1 = \{a^m b^m c^n \mid m,n \geq 1\}$
$L_2 = \{a^m b^n c^n \mid m,n \geq 1\}$ $\Big\} \in CF$
$L = L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} \notin CF$

o CFG pt. L_1: $G_1 = \begin{cases} S \to AC \\ A \to aAb \mid ab \\ C \to cC \mid c \end{cases}$

$L \notin CF$. Se demonstrează cu lema de pompare pt. CF.

Temă

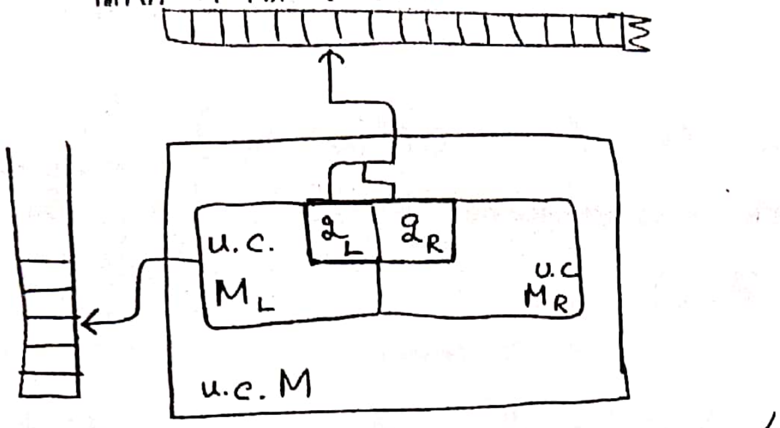
$L = L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1 \cap L_2}} = \overset{CT}{\overline{(\overline{L_1} \cup \overline{L_2})}}$
CF

α_6 CFR

6° Fie $L \in CF$ și fie PDA $M_L = (Q_L, \Sigma, \Gamma, \delta_L, q_{0L}, Z_0, F_L)$
a.î. $L_f(M_L) = L$
$R \in REG$ și fie DFA, $M_R = (Q_R, \Sigma, \delta_L, q_{0R}, F_R)$ a.î. $L(M_R) =$

Construim PDA M a.î. $L_f(M) = L \cap R$
$M = (Q_L \times Q_R, \Sigma, \Gamma, \delta, (q_{0L}, q_{0R}), Z_0, F_L \times F_R)$

(iv) ∃ T... arh. decis...

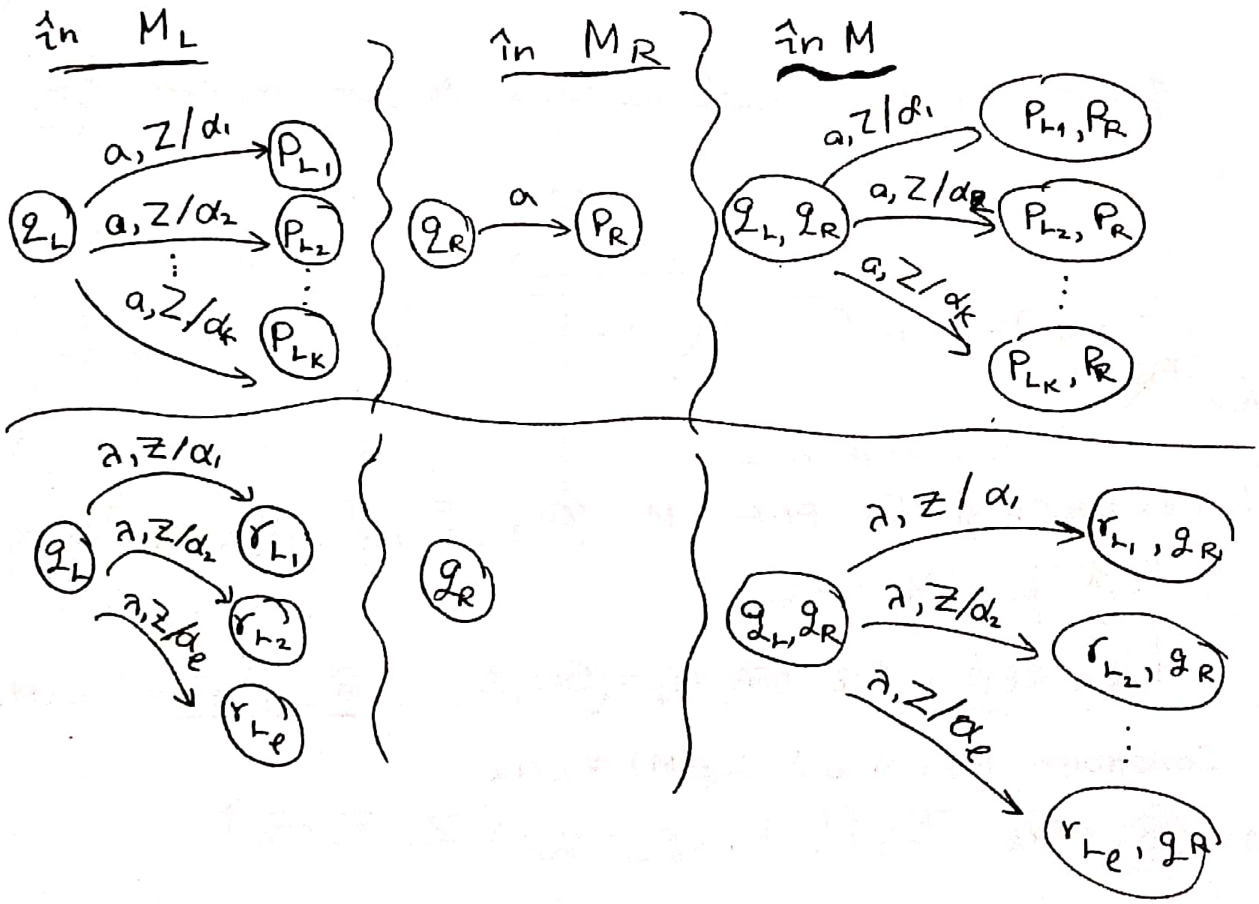


$$\delta((q_L,q_R),a,Z) = \left\{ ((p_L,p_R),\alpha) \;\middle|\; \begin{array}{l}(p_L,\alpha)\in\delta_L(q_L,a,Z) -\\ p_R = \delta_R(q_R,a)\end{array} \right\}$$

pt. $q_L \in Q_L,\ q_R \in Q_R,\ a \in \Sigma,\ Z \in \Gamma$

$$\delta((q_L,q_R),\lambda,Z) = \{((p_L,q_R),\alpha) / (p_L,\alpha) \in \delta_L(q_L,\lambda$$

$q_L \in Q_L,\ q_R \in Q_R,\ Z \in \Gamma$



(determinist)

Def. S.n. DPDA un PDA $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$

cu propr.:

1° $\underset{\in Q}{\forall q}\ \underset{\in \Sigma\cup\{\lambda\}}{\forall a}\ \underset{\in\Gamma}{\forall Z}\left(card(\delta(q,a,Z))\le 1\right)$

2° $\underset{\in Q}{\forall q}\ \underset{\in\Gamma}{\forall Z}\ \left(\delta(q,\lambda,Z)\neq\emptyset \Rightarrow \underset{\in\Sigma}{\forall a}\left(\delta(q,a,Z)=\emptyset\right)\right)$

th determined → DCF $\subsetneq$ CF

Dem. $L=\underbrace{\{a^nb^n / n\geq 0\}}_{\in CF}\cup\underbrace{\{a^nb^{2n} / n\geq 0\}}_{\in CF}\in CF\boxed{\setminus DCF}$

$\in CF$

Presupunem că $L\in DCF$

atunci fie DPDA $M=(Q,\{a,b\},\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$ cu $L_f(M)=L$

Definim DPDA

$M'=(Q'=\{q'/\forall q\in Q\},\{a,c\},\Gamma,\delta',q_0',Z_0,F'=\{q'/q\in F\})$

$M''=(Q\cup Q',\{a,b,c\},\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F')$

$L_f(M'')=\{a^nb^nc^n / n\geq 0\}\in CF$

GRAMATICI FORMALE

$G = (N, \Sigma, S, P)$; N - neterminale, $\neq \emptyset$, finită
Σ - terminale, $\neq \emptyset$, finită.
S - simbol de start $\in N$
P - mulțimea de producții $\subseteq (N \cup \Sigma)^* \cup (N \cup \Sigma)^*$

$L(G) = \{ w \mid w \in \Sigma^*, S \xRightarrow{*} w \}$.

S.n. relația de derivare într-un pas:
$\Rightarrow \subset (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$
$\alpha \Rightarrow \beta \iff \begin{cases} \alpha = \alpha_1 u \alpha_2 \\ \beta = \alpha_1 v \alpha_2 \\ (u \to v) \in P; \ \alpha_1, \alpha_2 \in (N \cup \Sigma)^* \end{cases}$

$\xRightarrow{k}$, puterea k a unei relații
$\xRightarrow{*}$, închiderea simetrică + reflexivă
$\xRightarrow{+}$ închiderea tranzitivă

GRAMATICĂ REGULATĂ

Def: O gramatică pt care orice producție este de forma
$S \to aB$
$A \to a$
$S \to \lambda$

Ex. $L = (a^2)^* = \{\lambda, a^2, a^4, a^6, \ldots\}$.

$S \to aA \mid \lambda$
$A \to aB \mid a$
$B \to aA$.

$\Rightarrow G = \{ S \to aA \mid \lambda, A \to aB \mid a, B \to aA \}$.

$\boxed{\lambda \in L \Rightarrow S \to \lambda \in P}$

AUTOMATE FINITE DETERMINISTE (DFA).

S.n DFA un cvintuplu $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ unde
Q - mulțimea stărilor $\neq \emptyset$, fin
Σ - alfabetul de intrare
δ - funcție de tranziție, $\delta : Q \times \Sigma \to Q$.
$F \subseteq Q$ mult. de stări finale; q_0 - starea inițială.

$\delta^*: Q \times \Sigma^* \to Q$, definită recursiv:

$\delta^*(q, \lambda) = q$

$\delta^*(q, wa) = \delta(\delta^*(q, w), a)$ $\forall w \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$.

$L(M)$ = limbajul acceptat de automat

$L(M) = \{w \mid w \in \Sigma^*, \delta^*(q_0, w) \in F\}$.

$\mathcal{L}_{DFA}$ = familia limbajelor recunoscute de DFA. =

$= \{L \mid \boxed{L \in 2^{\Sigma^*}}, \boxed{\exists M \in DFA}$ a.î. $\boxed{L(M) = L}\}$.

AUTOMATE FINITE NEDETERMINISTE.

S.n. NFA un cvintuplu $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ unde

Q, Σ, q_0, F – ca la DFA

$\delta: Q \times \Sigma \to 2^Q$; δ^*

$L(M) = \{w \mid w \in \Sigma^*, \delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$.

IERARHIA CHOMSKI

$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_{DFA} = \mathcal{L}_{NFA} = REG$. fam. limbajelor regulate.

Dem $\mathcal{L}_{DFA} \underset{th1}{\subseteq} \mathcal{L}_3 \underset{th2}{\subseteq} \mathcal{L}_{NFA} \underset{th3}{\subseteq} \mathcal{L}_{DFA}$

TH1 Fie $L \in \mathcal{L}_{DFA}$.

Fie DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a.î. $L(M) = L$

Construim $G \in \mathcal{G}_3$ a.î. $L(G) = L$.

$G = (Q, \Sigma, q_0, P)$ cu $P =$
1) $\{q \to ap \mid \delta(q, a) = p\} \cup \{q \to a \mid \delta(q, a) \in F\}$ pt $q_0 \notin F$ (i.e. $\lambda \notin L$)
2) " ______ " $\cup \{q_0 \to \lambda\}$ pt $q_0 \in F$

I $q \xrightarrow{a} p$

$q \to ap$

II $q \xrightarrow{a} p$

$q \to ap$

$q \to a$

III $\to q_0$ $q_0 \to \lambda$.

$L(G) = L(M)$

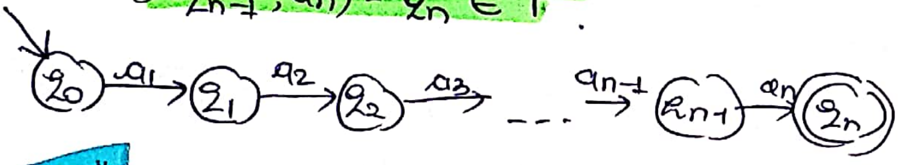
„$\subseteq$"

Fie $w = a_1 \dots a_n \in L(G)$, deci $\exists$ derivarea în G:

$$q_0 \Rightarrow a_1 q_1 \Rightarrow a_1 a_2 q_2 \Rightarrow a_1 a_2 a_3 q_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 \dots a_{n-1} q_{n-1} \Rightarrow a_1 \dots a_n = w.$$

deci $q_0 \to a_1 q_1$, $q_1 \to a_2 q_2$, $q_2 \to a_3 q_3$, $\dots$, $q_{n-2} \to a_{n-1} q_{n-1}$,
$q_{n-1} \to a_n$.

deci $\delta(q_0, a_1) = q_1$;
$\delta(q_1, a_2) = q_2$
$\vdots$
$\delta(q_{n-2}, a_{n-1}) = a_{n-1}$
$\delta(q_{n-1}, a_n) = q_n \in F$.



„$\supseteq$" $a_1 a_2 \dots a_n \in L(M) \Rightarrow$ există un drum ... (Luăm „$\subseteq$" invers).

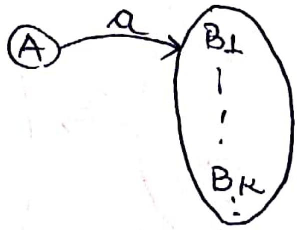
TH2 $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_{NFA}$

Fie $L \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow$ Fie $G = (N, \Sigma, S, P) \in \mathcal{G}_3$ a.î. $L(G) = L$.

în G	în NFA-ul M.
$A \to aB_1$	$\delta(A, a) = \{B_1, \dots, B_k\}$.
$A \to aB_2$	

$A \to aB_k$	

$A \to a$	



Construim un NFA $M = (N \cup \{\lambda\}, \Sigma, \delta, S, F)$, unde

$$\delta(A, a) = \begin{cases} \{B \mid (A \to aB) \in P\} \cup \{\lambda\} & \text{dacă } A \to a \in P \\ \{B \mid (A \to aB) \in P\} & \text{dacă } A \to a \notin P \end{cases}$$

$$F = \begin{cases} \{\lambda\}, & \text{dacă } \lambda \notin L(G) \\ \{\lambda, S\} & \text{dacă } \lambda \in L(G) \end{cases}$$

$L(M) = L(G)$.

„$\subseteq$" $w = a_1 a_2 \dots a_n \in L(M)$, deci $\exists$ un drum

$$\to (S) \xrightarrow{a_1} (A_1) \xrightarrow{a_2} (A_2) \xrightarrow{a_3} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} (A_{n-1}) \xrightarrow{a_n} (A_n) \to$$

$\Downarrow$

$S \to a_1 A_1 \dots$ $\quad A_{n-1} \to a_n A_n$, $A_n \to \lambda$.

$\Rightarrow w \in L(G)$

„$\supseteq$" $w = a_1 a_2 \dots a_n \in L(G)$ deci $\exists$ derivare în G.

$$S \Rightarrow a_1 A_1 \Rightarrow a_1 a_2 A_2 \Rightarrow a_1 a_2 a_3 A_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 \dots a_{n-1} A_{n-1}$$
$$\Rightarrow a_1 \dots a_n$$

deci $S \to a_1 A_1$, $A_1 = a_2 A_2$, $A_2 = a_3 A_3$, ..., $A_{n-1} \to a_n$

$A_1 \in \delta(S, a_1)$, $A_2 \in \delta(A_1, a_2)$ ....

TH3 $\quad \mathcal{L}_{NFA} \subseteq \mathcal{L}_{DFA}$.

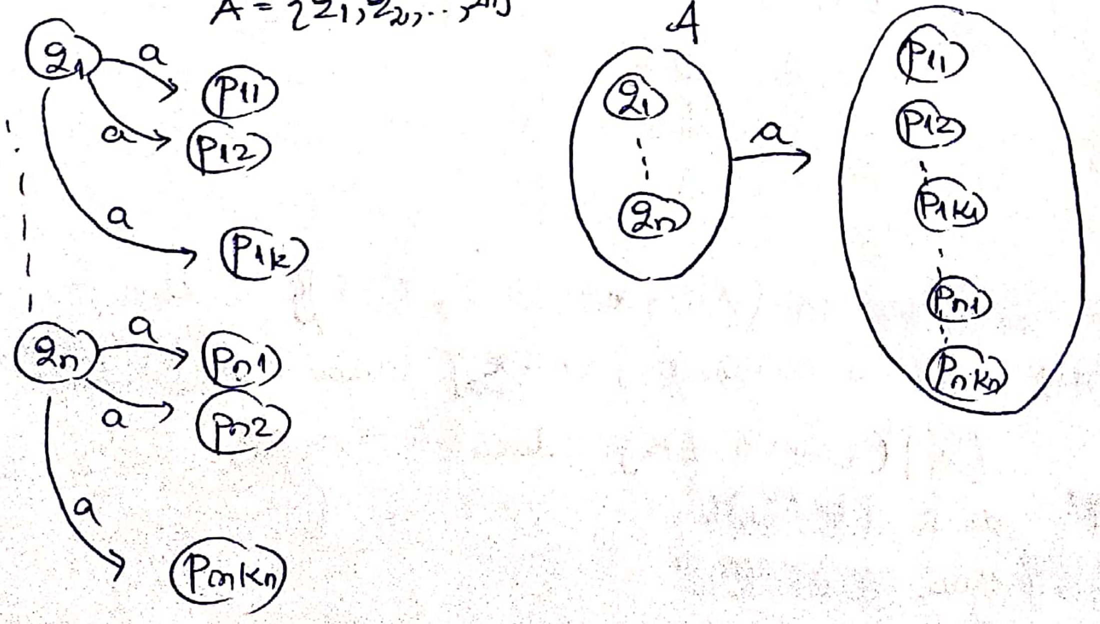
Fie un NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ $\quad \delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$.

Construim un DFA M' a.î. $L(M') = L(M)$.

$M' = (2^Q, \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$, $F' = \{A \mid A \in 2^Q$ și $A \cap F \neq \emptyset\}$

$$\delta'(A, a) = \bigcup_{q \in A} \delta(q, a).$$

în NFA M $\quad A = \{q_1, q_2, \dots q_n\}$ $\quad$ în DFA M'



Demonstrăm $L(M') = L(M)$.

$\lambda \in L(M) \Leftrightarrow q_0 \in F \Leftrightarrow \{q_0\} \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow \{q_0\} \in F' \Leftrightarrow \lambda \in L(M')$

„$\subseteq$" $w = a_1 \dots a_n \in L(M')$ deci există drumul

$$\to q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} A_2 \xrightarrow{a_3} \cdots \xrightarrow{a_{n-2}} A_{n-2} \xrightarrow{a_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{a_n} A_n$$

deci $\delta'(\{q_0\}, a_1) = A_1$,

$\delta'(A_1, a_2) = A_2$

$\vdots$

$\delta'(A_{n-1}, a_n) = A_n$

și $A_n \in F'$

$\Leftrightarrow$

$A_1 = \delta(q_0, a_1)$

$A_2 = \bigcup_{q \in A_1} \delta(q, a_2)$.

$\vdots$

$A_{n-1} = \bigcup_{q \in A_{n-2}} \delta(q, a_{n-1})$

$A_n = \bigcup_{q \in A_{n-1}} \delta(q, a_n)$. și $A_n \cap F \neq \emptyset$.

deci $\exists q_n \left(q_n \in A_n = \bigcup_{q \in A_{n-1}} \delta(q, a_n) \wedge q_n \in F\right)$

deci $\exists q_{n-1} \left(q_{n-1} \in A_{n-1} = \bigcup_{q \in A_{n-2}} (q, a_{n-1})\right.$ și $\left. q_n \in \delta(q_{n-1}, a_n)\right)$

------

deci $\exists q_2 \left(q_2 \in A_2 = \bigcup_{q \in A_1} (q, a_2)\right.$ și $\left. q_3 \in \delta(q_2, a_3)\right)$.

deci $\exists q_1 \left(q_1 \in A_1 = \delta(q_0, a_1) \wedge q_2 \in \delta(q_2, a_2)\right)$.

$$\to q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \xrightarrow{a_3} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n \to \Rightarrow$$

$\Rightarrow w \in L(M)$.

„$\supseteq$"

AUTOMATE FINITE cu λ-deplasări. λ-NFA.

Def S.n λNFA un automat $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

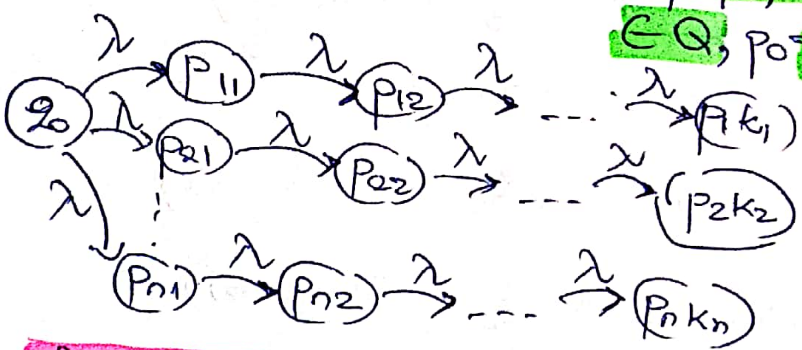
Q, Σ, q_0, F - ca la NFA

$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to 2^Q$

$L(M) = \{ w \mid w \in \Sigma^*, \ \exists\, p_1, p_2, \dots, p_n \in Q, \ p_n \in F, p_0 = q_0$ și $\exists\, a_1, a_2, \dots, a_n \in \Sigma \cup \{\lambda\}$ $(\forall i = \overline{1,n} \ (p_i \in \delta(p_{i-1}, a_i))) \}$

λ-closure : $Q \to 2^Q$

λ-closure$(q) = \{q\} \cup \{ p \mid \exists\, p_0, p_1, \dots, p_k \in Q, \ p_0 = q, \ p_k = p$ $(\forall i = \overline{1,k} \ p_i \in \delta(p_{i-1}, \lambda)) \}$



2 λNFA s.n echivalente $\iff L(M_1) = L(M_2)$.

$\lambda \in L(M) \iff \lambda$-closure$(q_0) \cap F \neq \emptyset$.

$\boxed{\text{TH} \quad \mathcal{L}_{\lambda\text{-NFA}} = \mathcal{L}_{NFA}}$ „$\supseteq$" evidentă.

„$\subseteq$" Fie λ-NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Construim NFA $M' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F')$

$\delta'(q, a) = \delta(q, a) \cup \{ p \in Q \mid \exists\, r \in \lambda\text{-closure}(q) \ (p \in \delta(r, a)) \}$

$F' = \{ q \mid \lambda\text{-closure}(q) \cap F \neq \emptyset \}$.

Demonstrăm că $\boxed{L(M') = L(M)}$

$\lambda \in L(M) \Leftrightarrow \lambda\text{-closure}(q_0) \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow q_0 \in F' \Leftrightarrow \lambda \in L(M')$.

„$\supseteq$" Fie $w = a_1 \dots a_n \in L(M)$ cu $\forall i (a_i \in \Sigma) \Rightarrow$
$i = \overline{1,n}$

$\Rightarrow (\exists)$ în graful asociat lui M un drum

$$\to q_0 \xrightarrow{\lambda} p_{01} \xrightarrow{\lambda} p_{02} \xrightarrow{\lambda} \dots \xrightarrow{\lambda} p_{0k_0} \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{\lambda} p_{11} \xrightarrow{\lambda} p_{12} \xrightarrow{\lambda} \dots$$

$p_{0k_0} \in \lambda\text{-closure}(q_0)$

$$\xrightarrow{\lambda} p_{1k_1} \xrightarrow{a_2} q_2 \xrightarrow{\lambda} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} q_{n-1} \xrightarrow{\lambda} p_{n-1\,1} \xrightarrow{\lambda} \dots \xrightarrow{\lambda} p_{n-1\,k_{n-1}} \xrightarrow{a_n} q_n$$
$$\xrightarrow{\lambda} \dots \xrightarrow{\lambda} p_n k_n \to$$

Deci avem în graful asociat lui M' un drum

$$\to q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} q_n \to$$

„$\subseteq$" $w \in L(M')$, $w = a_1 a_2, \dots a_n$ $\forall i\ (a_i \in \Sigma)$ deci

$$\to q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n \to$$

Fie $q_{i-1} \xrightarrow{a_i} q_i$ arc ce nu este în graful asoc. lui M.

$q_i \in \delta'(q_{i-1}, a_i) = \delta(q_i, a_i) \cup \{p \mid \exists r \in \lambda\text{-closure}\}$

$$q_{i-1} \xrightarrow{\lambda} p_1 \xrightarrow{\lambda} \dots \xrightarrow{\lambda} p_n \xrightarrow{a_i} q_i \text{ în } M.$$

$\Rightarrow w \in L(M)$.

Def Câtul stâng (drept) al limbajului L prin limbajul L_0 s.n limbajul definit astfel:

$$L_0^{-1} L = \{w \mid \exists_{u \in L_0} (uw \in L)\}$$
$$(L L_0^{-1} = \{w \mid \exists_{u \in L_0} (wu \in L)\})$$

(T1) Prop de închidere ale lui $\mathcal{L}_3$.

i) $\mathcal{L}_3$ închisă la $\cup, \cap, \bar{\ }, -$

ii) $\mathcal{L}_3$ închisă la $\cdot, *, +, mi$

iii) $\mathcal{L}_3$ închisă la cât stânga și dreapta cu lbj oarecare (orice parte a lui Σ^*)

iv) $\mathcal{L}_3$ închisă la pref, suf, fact

fact$(a_1 a_2 \ldots a_n) = \{\lambda, a_1, \ldots, a_n, a_1a_2, a_2a_3, \ldots, a_{n-1} \ldots, a_1a_2a_3 \ldots a_n$

Dem

① Cu DFA:

Fie DFA $M_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_0, F_i)$, $i = \overline{1,2}$

$M_x = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta_x, (q_{01}, q_{02}), F_x)$ $x \in \{\cup, \cap, \bar{\ }, -\}$.

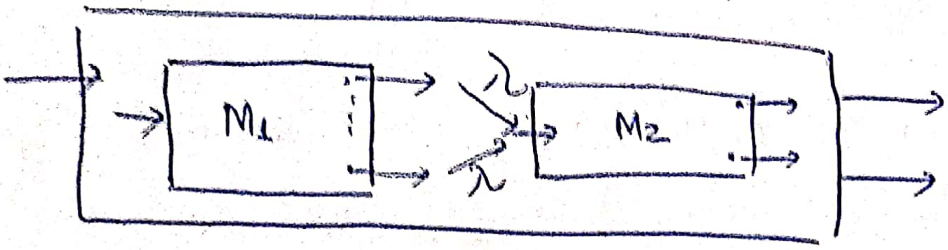
$\delta_x((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$.

$F_\cap = F_1 \times F_2$ $F_\cup = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$

$F_- = F_1 \times (Q_2 - F_2)$.

② Cu λ-NFA:

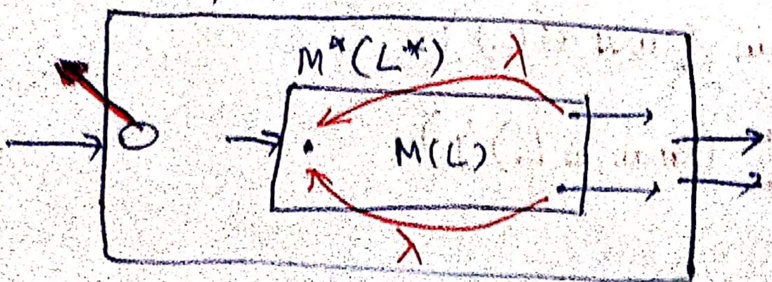
Fie $M_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_{0i}, F_i)$ $i = \overline{1,2}$



concatenare.

$L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$ $L^0 = \{\lambda\}$.

$L^+ = \bigcup_{n \geq 1} L^n$ $L^n = L \cdot L^{n-1}$



(Pt + e fără săgeata roșie)

iii) Fie DFA-ul $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ și $L_0 \in 2^Q$.

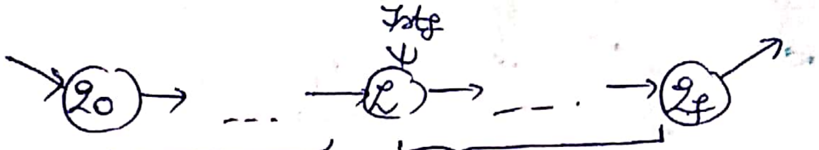
Pt. fiecare stare din Q definim:

$M_Q=(Q,\Sigma,\delta,q_0,\{q\})$

$M^{(q)}=(Q,\Sigma,\delta,q,F)$.

$M_{stg}=(Q,\Sigma,\delta,I_{stg},F)$ unde $I_{stg}=\{p \mid \exists u\in\Sigma^*;\ (u\in L(M_q),\ u\in L_0)\}$

$M_{drt}=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F_{drt})$, $F_{drt}=\{q \mid \exists u \in\Sigma^*\ (u\in L(M^{(q)}),\ u\in L_0)\}$



$u\in L(M_q)$ $\quad$ $w\in L(M_{stg})$

$u\in L_0$ $\quad$ deci $\to$ $w\in L_0^{-1}L$

$uw\in L(M)=L$.

$w\in L(M_{drt})$ $\quad$ $u\in L_0$

$w\in LL_0^{-1}$ $\quad$ $u\in L(M^{(q)})$.

$wu\in L(M)=L$

(iv) consecință a lui iii

$pref(L)=L(\Sigma^*)^{-1}$.

AUTOMATUL DFA MINIMAL

(Def) DFA $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ s.n DFA minimal $\Leftrightarrow$ orice alt DFA echiv. are cel puțin $|Q|$.

(TH) Myhill - Nerode

$L \in \mathcal{L}_3 \Leftrightarrow \equiv_L$ de index finit.

(TH) Construcția DFA minimal al unui DFA dat

Dacă $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA.

atunci $M' = (\frac{Q}{\equiv}, \Sigma, \delta', \hat{q_0}, \{\hat{q} \mid q \in F\})$ unde

$\delta'(\hat{q}, a) = \widehat{\delta(q,a)}$

i) este bine definit

ii) $M' \equiv M_L$

EXPRESII REGULATE.

(Def) S.n familia expresiilor regulate peste Σ $REX(\Sigma)$ mulțimea de cuvinte peste alfabet $\Sigma \cup \{(,), +, \cdot, *, \lambda, \emptyset\}$, def. recursiv astfel.

(i) $\emptyset, \lambda \in REX$; $a \in REX, \forall a \in \Sigma$.

(ii) $e_1, e_2 \in REX \Rightarrow (e_1 + e_2) \in REX$

(iii) $e_1, e_2 \in REX \Rightarrow (e_1 \cdot e_2) \in REX$.

(iv) $e \in REX \Rightarrow e^* \in REX$

(Def) S.n fam. expr. regulate extinse $EREX(\Sigma)$ mult. cuv. peste alfabetul $\Sigma \cup \{(,), +, \cdot, *, \bar{\ }, \cap, \emptyset, \lambda\}$

i - iv ca mai sus

(v) $e_1, e_2 \in EREX \Rightarrow e_1 \cap e_2 \in EREX$.

(vi) $e \in EREX \Rightarrow \bar{e} \in EREX$.

Def S.n limbajul notat sau definit de $e \in REX$ (resp $e \in EREX$) limbajul $L(e) \in 2^{\Sigma^*}$ definit recursiv astfel:

(i) $L(\emptyset) = \emptyset$, $L(\lambda) = \{\lambda\}$, $L(a) = \{a\}$ pt $a \in \Sigma$

(ii) $L(e_1 + e_2) = L(e_1) \cup L(e_2)$

(iii) $L(e_1 e_2) = L(e_1) \cdot L(e_2)$

(iv) $L(e^*) = (L(e))^*$

(resp pt EREX, în plus: (v) $L(e_1 \cap e_2) = L(e_1) \cap L(e_2)$

(vi) $L(\overline{e}) = \overline{L(e)}$.

$\boxed{\overline{L} = 2^{\Sigma^*} - L}$

$e_1 \sim e_2 \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} L(e_1) = L(e_2)$

Def CONSIDERĂM PRECEDENȚA $\overline{}, *, \cdot, \cap, +$

Sn. automat finit extins EFA, $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

$e: Q \times Q \to REX(\Sigma)$, dacă $e_{pq} = \emptyset$, arcul nu se va mai desena.

$$L(M) = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \underset{\in Q}{\exists\, q_1, \ldots, q_n},\ \underset{\in \Sigma^*}{\exists\, w_1, \ldots, w_n} \left(\begin{array}{l} w = w_1 \ldots w_n \\ q_n \in F \\ \forall i\ (w_i \in L(e_{q_{i-1}, q_i})) \end{array} \right) \right\}$$

$$\to q_0 \xrightarrow{e_{01}} q_1 \xrightarrow{e_{q_1 q_2}} q_2 \to \cdots \xrightarrow{e_{q_{n-1} q_n}} q_n \to \quad \text{cu } w_i \in L(e_{q_{i-1} q_i})$$

DFA, NFA, λ-NFA sunt cazuri particulare de EFA.

$\mathcal{L}_{REX} \subseteq \mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_{EFA}$

TH $\mathcal{L}_{EFA} \subseteq \mathcal{L}_{REX}$ $\to$ $\mathcal{L}_{EFA} = \mathcal{L}_{REX} = \mathcal{L}_3 \overset{not}{=\!=} REG$.

Th Kleene REG este cea mai mică fam. de limbaje care conține limbajele finite și e închisă la $\cup, \cdot, *$

Dem $REG = \bigcap_{\substack{\mathcal{L} \supseteq \text{limbaj finit} \\ \mathcal{L} \text{ închise la } \cup, *, \cdot}} \mathcal{L}$

„$\supseteq$" participă la intersecție

„$\subseteq$" din modul în care a fost definite recursiv REX.

TH) Lema de pompare pt REG

Dacă $L \in REG(\Sigma)$.

Atunci $\exists k \in \mathbb{N}$ $\forall w \in L$, $|w| \geq k$ $\exists x, y, z \in \Sigma^*$
$$\left(\begin{array}{l} (i)\ w = xyz \\ (ii)\ w \neq \lambda \\ (iii)\ |xy| \leq k \\ (iv)\ \forall i \in \mathbb{N}\ (xy^iz \in L) \end{array} \right)$$

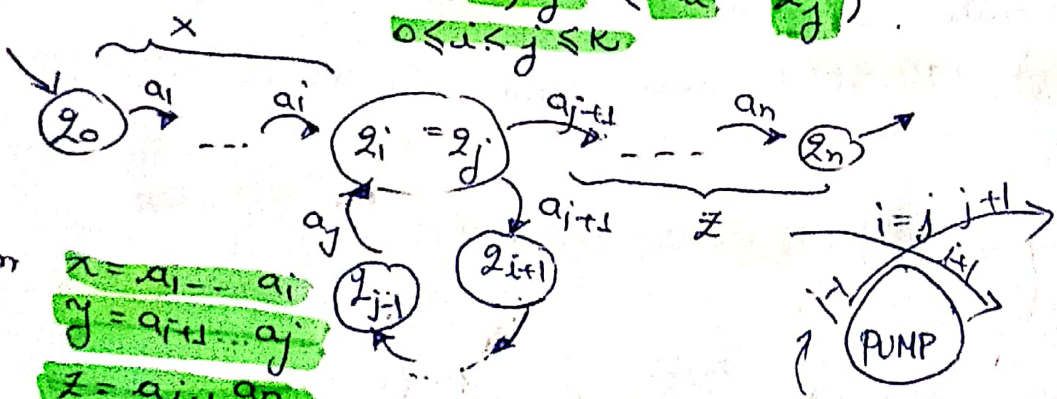
Dem: Fie $L \in REG(\Sigma)$ şi fie DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Fie $L(M) = L$. Luăm $k = |Q|$.

Fie $w = a_1 a_2 \dots a_n \in L = L(M)$, deci $\to q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \dots q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n \to$

Din $|w| = n \geq |Q| \Rightarrow \exists i, j$ $(q_i = q_j)$.
$0 \leq i < j \leq k$

deci



Luăm $x = a_1 \dots a_i$
$y = a_{i+1} \dots a_j$
$z = a_{j+1} \dots a_n$

TH REG închisă la morfisme λ-libere, morf. inverse, substituţii λ-lib, substituţii finite, subst. regulate.

Dem) REG închisă la morfisme inverse.

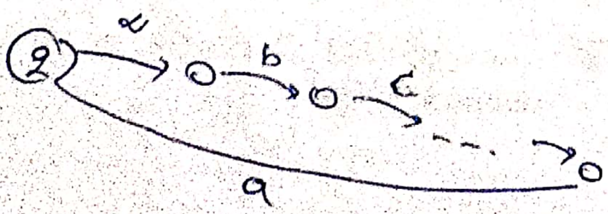
Fie $L \in REG$ şi DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ cu $L(M) = L$.

Fie $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ morfism

Ar. că $f^{-1}(L) \in REG$.

Constr. DFA M' cu $L(M') = f^{-1}(L)$

$M' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F)$ unde $\delta'(q, a) \doteq \delta^*(q, f(a))$.



LIMBAJE INDEP. DE CONTEXT.

G_c ; $A \to \gamma$; $A \in N$, $\gamma \in (N \cup \Sigma)^*$

$A \to B$ p.n. redenumire

Derivare stângă: $w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \ldots \Rightarrow w_n$ (derivare de lg. n) ddacă la fiecare pas prod. fol. s-a aplicat celui mai din stg. neterminal din membrul stg. al pasului de derivare

Derivare terminală: de forma $\boxed{w \overset{+}{\Rightarrow} w}$ cu $\boxed{w \in \Sigma^*}$

Def: CFG, $G = (N, \Sigma, S, P)$ este în FNC ddacă orice prod. este de forma

I $A \to BC$ sau $A \to a$

II $A \to BC$, sau $A \to A$, sau $S \to \lambda$,
$B, C \neq S$.

$\boxed{\text{TH FNC}}$ $\forall G \in CFG$ $\exists G' \in CFG$ $\left(\begin{array}{l} G' \sim G \\ G' \text{ în FNC} \end{array} \right)$

Dem

$\to$ faza 1: G se transformă în G" cu producții de forma

$A \to A_1 A_2 \ldots A_n$ sau $A \to a$.

Orice producție $A \to a_{11} a_{12} a_{13} \ldots a_{1k_1} A_1 \ldots a_{n1} \ldots a_{nk_n} A_n$ se înlocuiește

$\begin{cases} A \to Z_{11} Z_{12} \ldots Z_{1k_1} A_1 Z_{21} \ldots Z_{2k_2} A_2 \ldots A_n Z_{n1} \ldots Z_n \\ Z_{ij} \to a_{ij} \end{cases}$

$\to$ faza 2: G" se transf. în G' (FNC)

Orice prod. cu $n \geq 3$ de forma $A \to A_1 A_2 \ldots A_n$ se înlocuiește cu $A \to \langle A_1 \ldots A_{n-1} \rangle A_n$

$\langle A_1 \ldots A_{n-1} \rangle \to \langle A_1 \ldots A_{n-2} \rangle A_{n-1}$

$\vdots$

$\langle A_1 A_2 \rangle \to A_1 A_2$

Def $G = (N, \Sigma, S, P)$ CFG.

S.n **arbore de derivare** în G un **arbore ordonat T** cu prop:

① Răd $= S$

② nodul cu etichetă X are descendenții et. cu $X_1, \ldots, X_n \in N \cup \Sigma$ <u>ddacă</u> $X \to X_1 X_2 \ldots X_n$ este producție.

③ Dacă un nod are et. λ, at. el este nod terminal și nu are frați.

Def $G_A = (N, \Sigma, A, P)$

S.n. **frontiera unui arbore de derivare** T și se not. $\partial(T)$ cuvântul peste ~~care~~ $N \cup \Sigma$ obținut prin concatenarea în ord. st-dr. a etichetelor frunzelor lui T.

TH Dacă (N, Σ, S, P) CFG, $A \in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$ atunci UAIC.

① $A \xRightarrow[G]{m} \alpha$

② $\exists T$ i) T arb. de derivare în G_A
ii) frontiera lui G este α
iii) T are m noduri interioare.

<u>LEMĂ</u>: $G = (N, \Sigma, S, P)$ CFG în FNC, T arb deriv în G $\Rightarrow$ $\boxed{|\partial(T)| \leq 2^{h(T)}}$

TH LEMA DE POMPARE PT CF.

Dacă $L \in CF$

Atunci $\boxed{\exists k \in \mathbb{N}}$ $\boxed{\forall w \in L, |w|>0}$, $\boxed{\exists u, x, y, z, v \in \Sigma^*}$ $\boxed{w = uxyzv}$ $\boxed{|xz|>0}$ $\boxed{|xyz| \leq k}$ $\boxed{\forall i \in \mathbb{N} \quad ux^iyz^iv \in L}$

ex. un nr. nat de dc. f mare

a.î. pt orice cuv. din limbaj cu card. > 0

îl putem separa în u, x, y, z, v în așa fel încât

prin concat lor obț cuv inițial

pomparea se face pe substringuri nevide

mijlocul are dim ≤ k

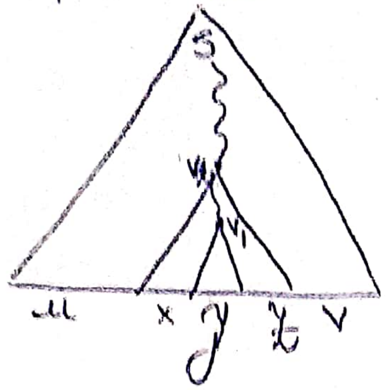
putem pompa de oricâte ori substringurile x și z și tot vom obț un cuv din L.

Dem Fie $G = (N, \Sigma, S, P)$ CFG în FNC cu $L(G) = L$.

Luăm $k = 2^{|N|}$. Fie $w \in L$ cu $|w| > k = 2^{|N|}$

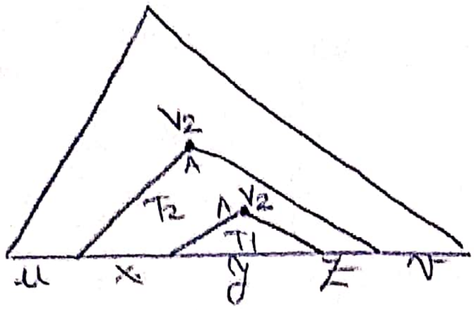
Fie T a.d. terminal pt w, i.e. $\partial(T) = w$.

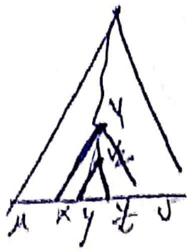
deci $h(T) \geq card(N)$, deci $\exists$ un drum (d) de la răd. la o frunză de lungime mai mare decât $|N|$, pe (d) sunt cel puțin $|N|+1$ noduri (Principiul cutiei)



Pe drumul (d) $\exists$ două noduri etichetate cu același neterminal. Fie V_1 și V_2 primele noduri pt care se întâmplă asta, pornind de la frunze la root. Notăm T_1 arb. de root V_1 și T_2 arb. de root V_2.

Luăm $y = \delta(T_1)$,
$xyz = \delta(T_2)$





AUTOMATE PUSH-DOWN (PDA)

PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

Q, Σ, Γ finite și nevide.

Q - mult. stărilor; Σ - alfabetul de intrare.

Γ - alfabetul intern al stivei

δ - funcție de tranziție.

q_0 - starea inițială

Z_0 - simbolul inițial din stivă

F - mult. stărilor finale

$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Gamma^*)$

$\Sigma \subseteq \Gamma$

$Z_0 \in \Gamma - \Sigma$

Configuratie $(q, w, \alpha) \in \mathcal{C}$

$\mathcal{C} = Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$

sirul citit

continutul memoriei de pe stiva

sf. stivei

$\delta(q, a, Z)$

$\vdash_M \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}$

↳ relatia de tranzitie intr-un pas.

DEF
$$\begin{cases} w_1 = a w_2, \ a \in \Sigma \cup \{\lambda\} \\ \alpha_1 = Z\beta \\ \alpha_2 = \gamma\beta, \ Z \in \Gamma, \beta \in \Gamma^* \\ (q_2, \gamma) \in \delta(q_1, a, Z) \end{cases}$$

$\vdash^k_M$ ↳ puterea k

$\vdash^+_M$ inchiderea tranzitiva (1, 2, ... mai multi pasi)

$\vdash^*_M$ inchiderea tranz. si refl.

Moduri de recunoastere

$L_f(M) = \{ w \mid w \in \Sigma^*, \ \exists q \in F \ \exists \alpha \in \Gamma^* \text{ a.î. } (q_0, w, Z_0) \vdash^*_M (q, \underline{\lambda}, \alpha) \}$

starea finala

$L_\lambda(M) = \{ w \mid w \in \Sigma^*, \ \exists q \in F \ ((q_0, w, Z_0) \vdash^*_M (q, \lambda, \lambda)) \}$.

(TH) Fie $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ PDA.

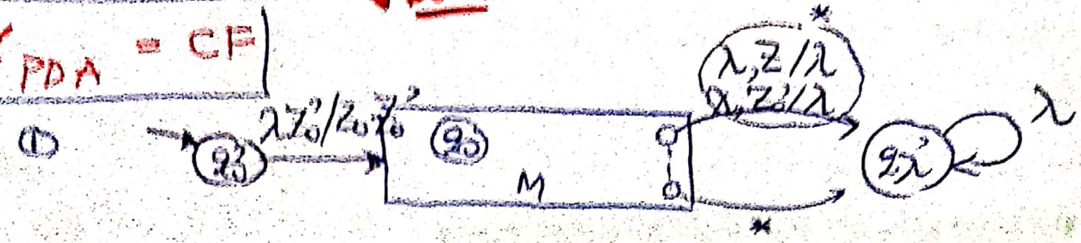
atunci ① $\exists M'$ PDA $(L_\lambda(M') = L_f(M))$.

② $\exists M''$ PDA $L_f(M'') = L_\lambda(M) = L_\lambda(M'')$

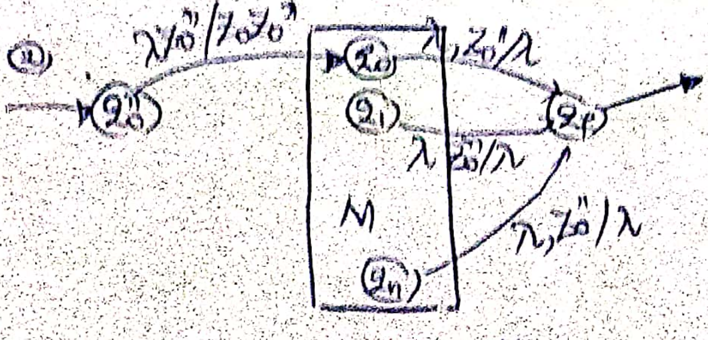
↓ DEM

(TH) $\mathcal{L}_{PDA} = CF$

①



②

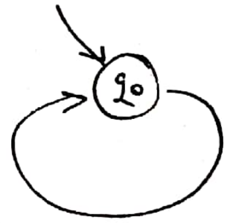


$\boxed{\text{th} \quad \mathcal{L}_{PDA} = CF}$

Dem.: "$\supseteq$" fie $L \in CF$ și CFG $G = (N, \Sigma, S, P)$ cu $L(G) = L$

Construim PDA M' a.î. $L_\lambda(M') = L$

$M' = (\{q_0\}, \Sigma, N \cup \Sigma, \delta, q_0, S, \emptyset)$



$\lambda, A / \alpha$ pt. $(A \to \alpha) \in P$

$a, a / \lambda$ pt. $a \in \Sigma$

"$\subseteq$" fie $L \in \mathcal{L}_{PDA}$ și PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$

facem stivă

construim CFG $G = (Q \times \Gamma \times Q \cup \{S\}, \Sigma, S, P_1 \cup P_2 \cup P_3)$

WHERE

$P_1 = \{ S \to \langle q_0, Z_0, q \rangle \mid q \in Q \}$

$P_2 = \{ \langle q, Z, q_n \rangle \to a \langle r, x_1, q_1 \rangle \langle q_1, x_2, q_2 \rangle \ldots \langle q_{n-1}, x_n, q_n \rangle$

$/ \; (r, x_1 x_2 \cdots x_n) \in \delta(q, a, Z)$; $q_i \in Q$ pt. $i = \overline{1,n}$; $Z \in \Gamma$, $r \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$ $\}$ — când înălțimea stivei crește sau rămâne ct.

$P_3 = \langle q, Z, r \rangle \to a \; / \; (r, \lambda) \in \delta(q, a, Z)$; $q, r \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$; $Z \in \Gamma$ $\}$

th (proprietatea de închidere ale CF)

1° CF este închis la substituție (cu CF)

$\sigma : \Sigma^* \mapsto 2^{\Delta^*}$ substituție

$\forall u v, \sigma(uv) = \sigma(u)\sigma(v)$

$\forall a \in \Sigma \; (\sigma(a) \in CF)$

2° —— // —— // —— morfisme

3° —— // —— // —— $\cup, \cdot, +, *$ $\}$ cauze imediate ale lui 1°

4° CF este închis la $mi(\cdot)$ ⟵ mirror

5° $\begin{cases} \text{CF } \underline{\underline{\text{NU}}} \text{ este închis la } \cap \\ \text{CF } \underline{\underline{\text{NU}}} \text{ este închis la } \overline{} \end{cases}$ ⟵ complementar

6° CF e închis la $\cap$ cu REG

Dem.: 1° ⟹ 3°

fie $L_1, L_2 \in CF(\Sigma)$

fie substituția $\sigma : \{1,2\}^* \mapsto 2^{\Sigma^*}$

$\sigma(\{1,2\}) = L_1 \cup L_2$ pt. $\cup$

$\sigma(12) = L_1 L_2$ pt. $\cdot$

$\sigma(1^+) = L_1^+$ pt. $+$

$\sigma(1^*) = L_1^*$ pt. $*$

4° de. $G = (N, \Sigma, S, P)$
CFG

at. $G' = (N, \Sigma, S, P')$

unde $P' = \{ A \to mi(\alpha) \mid (A \to \alpha) \in P \}$

$L(G') = mi(L(G))$

DEFINIȚII

GRAMATICI FORMALE

$G=(N,\Sigma,S,P)$

- N - neterminale, fin, nevidă
- Σ - terminale, fin, nevidă
- S - simbolul de start $\in N$
- P : mulțimea de producții $\subset (N\cup\Sigma)^* \times (N\cup\Sigma)^*$

$L(G)=\{w \mid w\in\Sigma^*, S \overset{*}{\Rightarrow} w\}$

DERIVARE ÎNTR-UN PAS

$\Rightarrow \subset (N\cup\Sigma)^* \times (N\cup\Sigma)^*$

$\alpha \Rightarrow \beta \iff \begin{cases} \alpha = \alpha_1 u \alpha_2 \\ \beta = \beta_1 v \beta_2 \\ (u \to v) \in P ; \alpha_1,\alpha_2 \in (N\cup\Sigma)^* \end{cases}$

GRAMATICĂ REGULATĂ

→ O gramatică pt care orice producție este de forma

$S \to aB$

$A \to a$

$S \to \lambda$

AUTOMATE FINITE DETERMINISTE

S.n. DFA un cvintuplu $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ unde

- Q - mulțimea stărilor, fin, nevidă
- Σ - alfabetul de intrare, fin, nevidă
- δ - funcția de tranziție
  $\delta : Q\times\Sigma \to Q$
- $F\subseteq Q$ - mulțimea stărilor finale
- q_0 - starea inițială

$\delta^* : Q\times\Sigma^* \to Q$, definită recursiv: $\begin{cases} \delta^*(q,\lambda)=q \\ \delta^*(q,wa)=\delta(\delta^*(q,w),a) \end{cases}$ $\forall w\in\Sigma^*, a\in\Sigma$

Limbajul acceptat de automat:

$L(M)=\{w \mid w\in\Sigma^*, \delta^*(q_0,w)\in F\}$

Familia limbajelor recunoscute de DFA

$\mathcal{L}_{DFA} = \{\underset{\in 2^{\Sigma^*}}{L} \mid \underset{DFA}{\exists M} \text{ aî } L(M)=L\}$.

2^{Σ^*} = mulț. tuturor limbajelor peste alf. Σ.

AUTOMATE FINITE NEDETERMINISTE

S.n. NFA un cvintuplu $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ unde

Q, Σ, q_0, F – ca la DFA.

$\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$

$L(M) = \{ w \mid w \in \Sigma^*, \quad a.î. \quad \delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \}$.

REG:

$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_{DFA} = \mathcal{L}_{NFA} = \mathcal{L}_{\lambda-NFA} = REG$ IERARHIA CHOMSKY

AUTOMATE FINITE CU λ – DEPLASĂRI

S.n λ– NFA un cvintuplu $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Q, Σ, q_0, F – ca la NFA

$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\})^* \to 2^Q$.

$L(M) = \{ w \mid w \in \Sigma^*, \ \exists\, p_1, p_2, \dots, p_n \in Q, \ p_0 = q_0, \ p \in F$ și $\exists\, a_1 \dots a_n \in \Sigma \cup \{\lambda\}$ a.î. $\forall i = \overline{1,n} \ \ p_i \in \delta(p_{i-1}, a_i) \}$

$\to (q_0) \xrightarrow{a_1} (q_1) \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} (q_n) \to$

λ – CLOSURE

$\lambda\text{-closure} : Q \to 2^Q$

$\lambda\text{-closure}(q) = \{q\} \cup \{ p \mid \exists\, p_0, p_1, \dots, p_k \in Q, \ p_0 = q, \ p_k = p \ (\forall i = \overline{1,n} \ \ p_i \in \delta(p_{i-1}, \lambda)) \}$

2 λNFA s.n echivalent $\Leftrightarrow L(M_1) = L(M_2)$.

CÂTUL STÂNG (DREPT) al lb.

Câtul stg/dr al limbajului prin limbajul L_0 s.n limbajul def. astfel

$L_0^{-1}L = \{ w \mid \exists\, u \in L_0 \ \ a.î. \ \ uw \in L \}$

$LL_0^{-1} = \{ w \mid \exists\, u \in L_0 \ \ a.î. \ \ wu \in L \}$.

PROP. DE ÎNCHIDERE A LUI $\mathcal{L}_3$.

1) $\mathcal{L}_3$ închis la
- → $\cup, \cap, \bar{\ }, -$
- → $\cdot, *, +, mi$
- → cât stg. & dr. cu limbaj oarecare
- → pref, suf, fact (fact$(a_1a_2..a_n) = \{\lambda, a_1, ..., a_n, a_1a_2, ..., a_1a_n, ----, a_1a_2...a_n\}$.

AUTOMATUL MINIMAL

DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ s.n DFA minimal ddacă orice alt DFA echivalent cu el are cel puțin $|Q|$ stări.

MYHILL - NERODE Th.

$L \in \mathcal{L}_3 \iff \equiv_L$ de index finit.

CONSTRUCȚIA UNUI DFA - MINIMAL DINTR-UN DFA DAT.

Dacă $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA,
atunci $M' = (\frac{Q}{\equiv}, \Sigma, \delta', \hat{q_0}, \{\hat{q} \mid q \in F\})$ unde
$(\hat{q}, a) = \widehat{\delta(q, a)}$

EXPRESII REGULATE

S.n familia expresiilor regulate peste Σ REX(Σ) mulț. de cuvinte peste alfabetul $\Sigma \cup \{(,), +, \cdot, *, \lambda, \emptyset\}$, def. recursiv astfel:

- $\emptyset, \lambda \in REX$; $a \in REX$, $\forall a \in \Sigma$.
- $e_1, e_2 \in REX \Rightarrow (e_1 + e_2) \in REX$.
- $e_1, e_2 \in REX \Rightarrow (e_1e_2) \in REX$
- $e \in REX \Rightarrow e^* \in REX$.

S.n FAM. EXPR. REGULATE EXTINSE EREX(Σ) mulț. cuvintelor peste alfabetul $\Sigma \cup \{(,), +, \cdot, *, \lambda, \emptyset, \cap, \bar{\ }\}$ def. rec astfel:

- ca mai sus primele 5, plus
- $e_1, e_2 \in EREX \Rightarrow e_1 \cap e_2 \in EREX$
- $e \in EREX \Rightarrow \bar{e} \in EREX$

S.n. limbajul definit de REX (EREX) limbajul $L(e) \in 2^{\Sigma^*}$ def. recursiv astfel:

(i) $L(\emptyset) = \emptyset$, $L(\lambda) = \{\lambda\}$, $L(a) = \{a\}$ $\forall a \in \Sigma$

(ii) $L(e_1 + e_2) = L(e_1) \cup L(e_2)$

(iii) $L(e_1 e_2) = L(e_1) L(e_2)$

(iv) $L(e^*) = (L(e))^*$

(resp. pt EREX, in plus (v) $L(e_1 \cap e_2) = L(e_1) \cap L(e_2)$

(vi) $L(\bar{e}) = \overline{L(e)}$.

$$\boxed{\bar{L} = 2^{\Sigma^*} - L}$$

→ $e_1 \sim e_2 \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} L(e_1) = L(e_2)$

→ consid. precedența $\bar{\ }$, $*$, $\cdot$, $\cap$, $+$

AUTOMAT FINIT EXTINS EFA

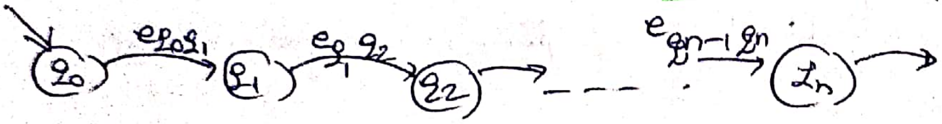
S.n. automat finit extins EFA, $M = (Q, \Sigma, e, q_0, F)$.

$e: Q \times Q \to REX$, funcție de etichetare.

$e(p,q) = e_{p,q}$

$e_{pq} = \emptyset \to$ arcul nu se va mai desena

$L(M) = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists \underbrace{q_1, \ldots, q_n}_{\in Q}, \exists \underbrace{w_1 \ldots w_n}_{\in \Sigma^*} \left(\begin{array}{l} w = w_1 \ldots w_n \\ q_n \in F \\ \forall i \ (w_i \in L(e_{q_{i-1}, q_i})) \end{array} \right) \}$



cu $w_i \in \{L(e_{q_{i-1}, q_i})\}$

DFA, NFA, λ-NFA sunt cazuri particulare de EFA.

TH. KLEENE: REX este cea mai mică fam. de limbaje care cont. limbajele finite și e închisă la $\cup$, $\cdot$, $*$.

TH: REG sunt închise la morfisme λ-libere, morf. libere, substituții λ-libere, subst. finite, subst. regulate.

GRAMATICI LIBERE DE CONTEXT

[illegible], $G(N, \Sigma, S, P)$

$A \to \gamma$ cu $A \in N$, $\gamma \in (N \cup \Sigma)^*$

REDENUMIRE : $A \to B$.

DERIVARE STÂNGĂ : $w_0 \to w_1 \to w_2 \ldots \to w_k$ (derivare de lungime k) dacă la fiecare pas al derivării producția aplicată s-a aplicat celui mai din stg. neterminal din ansamblul stg. al pasului de derivare

DERIVARE TERMINALĂ : derivare de forma $w \overset{*}{\Rightarrow} w'$ cu $w' \in \Sigma^*$

CFG $G(N, \Sigma, S, P)$ este în FNC ddacă are numai producții de forma
I $A \to BC$; $A \to a$
II $A \to BC$; $A \to a$ sau $S \to \lambda$.
$B, C \neq S$.

TH = FNC

$\forall G \in CFG$ $\exists G' \in CFG$ $\left(\begin{array}{l} G' \sim G \\ G' \text{ este în FNC} \end{array} \right)$

ARBORE DE DERIVARE

S.n. arbore de derivare în G un arbore ordonat T cu
- etichetare în G
- nodul cu eticheta X are descendenții $X_1, \ldots, X_n$ ddacă $X \to X_1 X_2 \ldots X_n$ este producție.
- dacă un nod are et. λ $\Rightarrow$ este terminal și nu are frați.

FRONTIERA ARB. DE DERIVARE

$G = (N, \Sigma, S, P)$; S.n. frontiera unui arb. de derivare T (not. $\mathcal{F}(T)$) cuvântul peste Σ format prin concatenarea în ord. st.-dr. a etichetelor frunzelor lui T.

TH. $G(N, \Sigma, S, P)$ CFG, $A \in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$. UASE:
① $A \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \alpha$
② $\exists T$ i) T arb. de derivare în G_A | iii) T are [illegible]
ii) frontiera lui T este α

AUTOMATE PUSH-DOWN

PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$.

Q, Σ, Γ finite & nevide.

Q - mult. stărilor, Σ - alfabetul de intrare.

Γ - alfabetul intern al stivei.

δ - fcție. de tranziție. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Gamma^*)$.

Z_0 - simbolul inițial din stivă

q_0 - starea init.

F - mult. stărilor finale

$q \xrightarrow{a, Z / \alpha} p$

$\delta(q, a, Z) = (p, \alpha)$.

Configurație: $(q, w, \alpha) \in \mathcal{C} = \underbrace{Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*}_{\text{config. posibile pt o mașină Push-Down}}$

q - stare act.; w - cuvânt încă necitit de pe stivă; α - vârful stivei

$\vdash_M \mathcal{C} \times \mathcal{C}$

Relația de tranziție într-un pas

$(q_1, w_1, \alpha_1) \vdash_M (q_2, w_2, \alpha_2) \overset{\Delta}{\iff} \begin{cases} w_1 = a w_2, & a \in \Sigma \cup \{\lambda\} \\ \alpha_1 = Z\beta, & Z \in \Gamma, \beta \in \Gamma^* \\ \alpha_2 = \alpha\beta \\ (q_2, \alpha) \in \delta(q_1, a, Z) \end{cases}$.

LIMBAJE

$L_f(M) = \{ w \mid w \in \Sigma^*, \exists q \in F \ \exists \alpha \in \Gamma^* \ ((q_0, w, Z_0) \vdash_M^* (q, \lambda, \alpha)) \}$ prin stări finale;

$L_\lambda(M) = \{ w \mid w \in \Sigma^* \ \exists q \in F \ ((q_0, w, Z_0) \vdash_M^* (q, \lambda, \lambda)) \}$.

prin vidarea stivei

(TH) Dacă $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ PDA

Atunci ① $\exists M'$ PDA $(L_\lambda(M') = L_f(M))$.

② M'' PDA $(L_f(M'') = L_\lambda(M) = L_\lambda(M''))$

(TH) $\mathcal{L}_{PDA} = CF$