1 Probabilități și evenimente

Notăm cu $(\Omega, \mathcal{K}, \mathbb{P})$ un câmp de probabilitate.

Exercițiul 1. Un om de afaceri a investit în trei societăți comerciale. S-a stabilit că o investiție făcută la prima societate devine rentabilă după un an de activitate cu o probabilitate de 0.4, o investiție la a doua cu o probabilitate de 0.8 și la ultima cu o probabilitate de 0.5.

Știind că activitățile celor trei societăți sunt independente, se cere probabilitatea ca după un an de activitate:

a) să devină rentabile investițiile la toate cele trei societăți

b) cel puțin una dintre investii să devină rentabilă

c) să devină rentabile fix **două** dintre investiții

Demonstrație.

a) Notăm cu A_i probabilitatea ca investiția $i \in \overline{1,3}$ să fie profitabilă. Atunci $A =$ probabilitatea ca toate să fie rentabile $= A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Avem că:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\underbrace{A_1 \cap A_2 \cap A_3}_{\text{independente}}) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) \\ &= 0.4 \cdot 0.8 \cdot 0.5 = 0.16\end{aligned}$$

b) Notăm cu $B =$ probabilitatea ca cel puțin una dintre investiții să devină rentabilă.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) \\ &\quad - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= 0.4 + 0.8 + 0.5 - 0.4 \cdot 0.8 - 0.4 \cdot 0.5 - 0.8 \cdot 0.5 + 0.16 \\ &= 0.94\end{aligned}$$

Alternativ, considerăm probabilitatea să nu fie rentabilă nicio investiție, și luăm complementul:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}}) \\ &= 1 - ((1 - 0.4) \cdot (1 - 0.8) \cdot (1 - 0.5)) \\ &= 1 - 0.06 \\ &= 0.94\end{aligned}$$

c) Notăm cu $C =$ probabilitatea ca fix două investiții să devină rentabile.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}((A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) + \mathbb{P}(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) + \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(\overline{A_3}) + \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(\overline{A_2}) \cdot \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(\overline{A_1}) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) \\ &= 0.4 \cdot 0.8 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.8 \cdot 0.5 = 0.44\end{aligned}$$

$\square$

Exercițiul 2. Se știe că $\mathbb{P}(A) = 0.5$, $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.8$. Determinați valoarea lui $\mathbb{P}(B)$ în următoarele situații:

a) A și B sunt independente

b) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

c) $\mathbb{P}(B \mid A) = 0.3$

Demonstrație.

a) Putem extrage probabilitatea reuniunii din formula pentru intersecție:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Deoarece evenimentele sunt independente, putem rescrie $A \cap B$:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

De aici putem extrage $\mathbb{P}(B)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + (1 - \mathbb{P}(A)) \cdot \mathbb{P}(B) &\iff \\
\mathbb{P}(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A)}{1 - \mathbb{P}(A)} &\iff \\
\mathbb{P}(B) = \frac{0.8 - 0.5}{1 - 0.5} &\iff \\
\mathbb{P}(B) = 0.6
\end{aligned}$$

b) Din faptul că $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ avem că:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A) &\iff \\
\mathbb{P}(B) = 0.8 - 0.5 &\iff \\
\mathbb{P}(B) = 0.3
\end{aligned}$$

c) Aplicăm teorema lui Bayes:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B \mid A) &= \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \\
\mathbb{P}(B \mid A) &= \frac{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)}{\mathbb{P}(A)} \\
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \mid A) \cdot \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A \cup B) \\
\mathbb{P}(B) &= 0.3 \cdot 0.5 - 0.5 + 0.8 = 0.45
\end{aligned}$$

$\square$

Exercițiul 3. Într-un magazin se găsesc 100 de calculatoare de același tip, dintre care 30 de la furnizorul F_1, 50 de la furnizorul F_2 și 20 de la furnizorul F_3. S-a observat că apar defecțiuni în perioada de garanție la 2% dintre calculatoarele fabricate de F_1, 4% dintre calculatoarele fabricate de F_2, și 5% dintre cele ce provin de la F_3.

Determinați probabilitatea ca:

a) un calculator din magazin se defectează

b) un calculatoare care se defectează în perioada de garanție să provină de la al doilea furnizor.

c) un calculator care provine de la primul sau de la al treilea furnizor să se defecteze în perioada de garanție.

d) un calculator care nu se defectează în perioada de garanție să provină de la primul sau de la al doilea furnizor.

Demonstrație. Notăm cu X evenimentul că un calculator se defectează. Notăm cu A_i evenimentul că un calculatorul provine de la F_i, $i \in \overline{1,3}$.

Avem că:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1) &= \frac{30}{100} = 0.3 \\
\mathbb{P}(A_2) &= \frac{50}{100} = 0.5 \\
\mathbb{P}(A_3) &= \frac{20}{100} = 0.2
\end{aligned}$$

Scriem din enunț probabilitățile ca un calculator să se strice sub forma de probabilități condiționate:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \mid A_1) &= 0.02 \\
\mathbb{P}(X \mid A_2) &= 0.04 \\
\mathbb{P}(X \mid A_3) &= 0.05
\end{aligned}$$

a) Observăm că A_1, A_2, A_3 formează o *partiție*, deci putem aplica formula probabilității condiționate.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(X \mid A_1) \\
+ \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(X \mid A_2) \\
+ \mathbb{P}(A_3) \cdot \mathbb{P}(X \mid A_3) \\
= 0.3 \cdot 0.02 + 0.5 \cdot 0.04 + 0.2 \cdot 0.05 = 0.036
\end{aligned}$$

b) Aplicăm teorema lui Bayes:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_2 \mid X) &= \frac{\mathbb{P}(X \mid A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(X)} \\
&= \frac{0.04 \cdot 0.5}{0.036} = 0.55
\end{aligned}$$

c) Putem rescrie probabilitatea condiționată folosind definiția:

$$\mathbb{P}(X \mid (A_1 \cup A_3)) = \frac{\mathbb{P}(X \cap (A_1 \cup A_3))}{\mathbb{P}(A_1 \cup A_3)}$$

Acum ne folosim de faptul că A_1 și A_3 sunt incompatibile, deci și $X \cap A_1$ și $X \cap A_3$ sunt incompatibile:

$$= \frac{\mathbb{P}(X \cap A_1) + \mathbb{P}(X \cap A_3)}{\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_3)}$$

Extragem $X \cap A_i$ din Bayes:

$$= \frac{\mathbb{P}(X \mid A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(X \mid A_3) \cdot \mathbb{P}(A_3)}{\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_3)}$$
$$= \frac{0.02 \cdot 0.3 + 0.05 \cdot 0.2}{0.3 + 0.2} = 0.032$$

d) Rescriem probabilitatea condiționată folosind definiția:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((A_1 \cup A_2) \mid \overline{X}) &= \frac{\mathbb{P}((A_1 \cup A_2) \cap \overline{X})}{\mathbb{P}(\overline{X})} \\
&= \mathbb{P}((A_1 \cap \overline{X}) \cup (A_2 \cap \overline{X})) \\
&= \mathbb{P}(A_1 \cap \overline{X}) + \mathbb{P}(A_2 \cap \overline{X}) \\
&= \mathbb{P}(\overline{X} \mid A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(\overline{X} \mid A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2) \\
&= (1 - \mathbb{P}(X \mid A_1)) + (1 - \mathbb{P}(X \mid A_2)) = 0.8
\end{aligned}$$

□

Teoremă (Inegalitatea lui Boole)**.**

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1)$$

Exercițiul 4. Un agregat are trei componente la care pot să apară defecțiuni de funcționare cu probabilitățile 0.075, 0.09, respectiv 0.082.

a) probabilitatea minimă ca agregatul să funcționeze

b) probabilitatea maximă ca agregatul să funcționeze

Demonstrație. Notăm cu A_i evenimentul să funcționeze componenta $i \in \overline{1,3}$.

Atunci avem din ipoteză:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{A_1}) &= 0.075 = 0.925 \\
\mathbb{P}(\overline{A_2}) &= 0.09 = 0.91 \\
\mathbb{P}(\overline{A_3}) &= 0.082 = 0.918
\end{aligned}$$

Probabilitatea ca agregatul să funcționeze este notată cu

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

a) Din inegalitatea lui Boole avem că:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &\geq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - 2 \\ &= 0.925 + 0.91 + 0.918 - 2 = 0.753\end{aligned}$$

b) Probabilitatea maximă a intersecției este cel mult probabilitatea celui mai improbabil eveniment:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \text{min}(\mathbb{P}(A_1), \mathbb{P}(A_2), \mathbb{P}(A_3)) \\ &= 0.91\end{aligned}$$

□

Exercițiul 5. Avem două urne. Prima urnă conține 3 bile albe și 2 bile negre iar urna conține și 3 bile albe și 2 bile negre. Din una dintre aceste urne s-a extras o bilă de culoare albă.

Care este probabilitatea ca această bilă să provină din prima urnă?

Demonstrație. Notăm cu B_i probabilitatea că bila extrasă provine din urna $i \in \overline{1, 2}$.

Notăm cu A probabilitatea că bila extrasă este albă.

Atunci avem că:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(B_1) &= \mathbb{P}(B_2) = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(A \mid B_1) &= \frac{3}{5} \\ \mathbb{P}(A \mid B_2) &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

Noi vrem să determinăm probabilitatea evenimentului că bila este din urna 1, știind deja că este albă.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1 \mid A) &= \frac{\mathbb{P}(A \mid B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

□

2 Variabile aleatoare

Exercițiul 6. Fie $f_{XY} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$,

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} ke^{-2x-3y}, x, y \in \mathbb{R}_+ \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$$

Determinați valorile parametrului real k astfel încât f_{XY} este densitate comună.

Condiții care trebuie îndeplinite:

i) $k > 0$ ca să fie pozitivă funcția

ii)

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 1 \\
&\iff k\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x-3y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 1 \\
&\iff k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x}(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3y}\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x = 1 \\
&\iff k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x}\left.\frac{e^{-3y}}{-3}\right|_{0}^{+\infty} \mathrm{d}x = 1 \\
&\iff \frac{k}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x}\,\mathrm{d}x = 1 \\
&\iff \frac{k}{3}\cdot\left.\frac{e^{-2x}}{-2}\right|_{0}^{+\infty} = 1 \\
&\iff \frac{k}{3}\cdot\frac{1}{2} = 1 \\
&\iff k = 6
\end{aligned}$$

Exercițiul 7. Fie $X \sim \mathcal{B}(3, 0.1)$.
Calculați:

1. $P(X = 3) = p_X(3) = 0.001$
2. $P(X \leq 1) = F_X(1) = 0.972$

Exercițiul 8. Fie $X \sim Poisson(8)$.
Calculați:

1. $P(X = 3) = p_X(3) = 0.02862614$
2. $P(X < 2) = P(X \leq 1) = 0.003019164$

Exercițiul 9. Avem 10 bile negre și 8 bile albe.
Extragem 5 bile fără revenire. Notăm cu $X =$ numărul de bile negre extrase.
Calculați:

1. $P(X = 3) = p_X(3) = 0.3921569$
2. $P(X <= 1) = F_X(1) = 0.08823529$

Exercițiul 10. Avem $X \sim G(0.3)$.

1. $p_X(3) = 0.1029$

2. $F_X(1) = 0.51$

Exercițiul 11. Dintr-o urnă ce conține 10 bile mov și 90 bile galbene se extrag 4 bile cu revenire. Notăm cu X variabila aleatoare ce indică numărul bilelor mov obținute în urma celor 4 extrageri.

Să se determine

a) repartiția variabilei aleatoare X

b) probabilitățile $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{2})$, $\mathbb{P}(X \leq \frac{\pi}{3})$, $\mathbb{P}(X < 3 \mid X > 1)$.

Demonstrație. Notăm cu $p = \frac{1}{10}$ probabilitatea să extragem o bilă de culoare mov, și cu $q = \frac{9}{10}$ să extragem o bilă galbenă.

Notăm cu p_i probabilitatea să extragem i bile de culoare mov din cele patru. Analog avem și q_i.

a) Calculăm repartiția lui X:

$$X\colon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
p_0 &= \mathbb{P}(X = 0) = q^4 = \left(\frac{9}{10}\right)^4 \\
p_1 &= \mathbb{P}(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot p \cdot q^3 = 4 \cdot \frac{9^3}{10^4} \\
p_2 &= \mathbb{P}(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot p^2 \cdot q^2 \\
p_3 &= \mathbb{P}(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot p^3 \cdot q \\
p_4 &= \mathbb{P}(X = 4) = p^4 = \left(\frac{1}{10}\right)^4
\end{aligned}$$

b) Calculăm probabilitățile:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 2) &= \binom{4}{2} \cdot p^2 \cdot q^2 \\
\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{2}) &= \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) \\
\mathbb{P}(X \leq \frac{\pi}{3}) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) \\
\mathbb{P}(X < 3 \mid X > 1) &= \mathbb{P}(X = 2 \mid X > 1)
\end{aligned}$$

$\square$

Exercițiul 12. La un examen participă 100 de studenți, dintre care 5 copiază. Se realizează în sală 3 verificări simultane. Notăm cu X variabila aleatoare ce indică numărul de studenți depistați cu fraudă din cele trei verificări. Determinați:

a) repartiția variabilei aleatoare X

b) probabilitatea ca toți cei trei studenți verificați să fi fost fraudulenți știind că cel puțin unul dintre ei a fost prins copiind

Demonstrație. Formula probabilității extragerilor fără revenire: $N = n_1 + n_2$

$$\mathbb{P}(n, n_1) = \frac{\binom{N_1}{n_1} \cdot \binom{N_2}{n_2}}{\binom{N}{n}}$$

Notăm cu $p = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ probabilitatea să prindem un student fraudulent.

$$p_0 = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{95}{3}}{\binom{100}{3}}$$

$\square$

$$X \sim \text{Unif}(1, 2, ...n)$$
$$X \sim \text{Bern}(p)$$
$$X \sim \text{Binom}(n, p)$$
$$X \sim \text{Hiper}(N, N_1, n)$$
$$X \sim \text{Geom}(p)$$
$$X \sim \text{Poisson}(\lambda), Y \sim \text{Exp}(\lambda)$$

Exercițiul 13. Fie $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ independente. Să se afle densitatea comună a lui $Y_1 = X_1 + X_2, Y_2 = X_1 - X_2$.

$$g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_1 - x_2 = y_2 \end{cases}$$
$$\implies x_1 = g_1^{-1}(y) = \frac{y_1 + y_2}{2}, x_2 = g_2^{-1}(y) = \frac{y_1 - y_2}{2}, \text{ soluție unică}$$
$$\implies g \text{ bijectivă}$$

$$J$$

$$X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(0, 1) \implies f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2}$$

3 Operații cu variabile aleatoare independente

$$X\colon \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, Y\colon \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}$$

3.1 Operații unare

Fie $c \in \mathbb{R}$. Atunci avem că $c + X$ este

$$c + X\colon \begin{pmatrix} c + x_1 & c + x_2 & \dots & c + x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

Analog pentru $c - X$, $c \cdot X$.

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci avem că X^α este

$$X^\alpha\colon \begin{pmatrix} x_1^\alpha & x_2^\alpha & \dots & x_n^\alpha \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

3.2 Operații binare (în cazul în care sunt independente)

X, Y sunt independente dacă și numai dacă

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y), \forall x, y$$

$$X + Y\colon \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & \dots & x_1 + y_m & x_2 + y_1 & \dots & x_n + y_m \\ p_1 \cdot q_1 & \dots & p_1 \cdot q_m & p_2 \cdot q_1 & \dots & p_n \cdot q_n \end{pmatrix}$$

Analog pentru $X - Y$, $X \cdot Y$.

Pentru $\frac{X}{Y}$ avem

$$\frac{X}{Y} = X \cdot Y^{-1}$$

Dacă am $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă, atunci

$$g(X)\colon \begin{pmatrix} g(x_1) & \dots & g(x_n) \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

Exercițiul 14. Fie variabilele aleatoare discrete

$$X\colon \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p + \frac{1}{6} & q + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, Y\colon \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 2p - q & 12p^2 \end{pmatrix}$$

a) Determinați $X + Y = ?$

b) Aflați valorile lui a pentru care $\mathbb{P}((X + Y) = 0) > \frac{2}{9}$.

Demonstrație. În primul rând, trebuie să determinăm exact probabilitățile lui X și Y, calculând valorile parametrilor reali p și q.

Ne folosim de faptul că suma probabilităților trebuie să fie 1:

$$\begin{cases} p + \frac{1}{6} + q + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \\ \frac{1}{3} + 2p - q + 12p^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} p + q = \frac{1}{6} \\ 12p^2 + 2p - q = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Delta = 49 \implies p = \frac{1}{6}, q = 0$$

Deci variabilele noastre aleatoare sunt:

$$X\colon \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, Y\colon \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Acum putem calcula mult mai ușor cerințele:

a)

$$X + Y\colon \begin{pmatrix} -1+a & -1 & 0 & a & 0 & 1 & 1+a & 1 & 2 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$X + Y\colon \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1+a & 1+a & 1 & 2 & a \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

b) Facem suma tuturor probabilităților corespunzătoare valorii 0, inclusiv cele care depind de a și ar putea fi 0.

$$\mathbb{P}((X+Y) = 0) > \frac{2}{9} \iff$$

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{9} > \frac{2}{9}, \text{ dacă } a \in \{ -1, 0, 1 \} \iff$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

c) Determinați $\mathbb{E}$ și Var pentru $5X - 3Y$.

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{E}(5X - 3Y) = 5\mathbb{E}(X) - 3\mathbb{E}(Y) \\ \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = -\tfrac{1}{3} + 0 + \tfrac{1}{3} = 0 \end{aligned}\right\} \implies$$

$$\implies \mathbb{E}(5X - 3Y) = 0$$

Pentru a calcula varianța, avem nevoie să calculăm

$$X^2\colon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Acum putem aplica formula:

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}(5X-3Y) &= 25\,\mathsf{Var}(X)+9\,\mathsf{Var}(Y)\\ \mathsf{Var}(X)=\mathsf{Var}(Y) &= \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2\\ &= \frac{2}{3}-0=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

□

Exercițiul 15. Fie

$$X\colon \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0.2+p & 0.25+p & 0.3-2p & 0.25\end{pmatrix}$$

Aflați parametrul real p pentru care $\mathbb{P}(X<2.5)=0.7$.

Demonstrație.

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X<2.5)=0.7\\ \iff &\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)=0.7\\ \iff &0.45+2p=0.7\\ \iff &p=\frac{0.7-0.45}{2}=\frac{0.25}{2}\\ \iff &p=0.125\end{aligned}$$

□

Exercițiul 16. Fie

$$V\colon \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0.2+p & 0.4-2p & 0.4+p\end{pmatrix}$$

Determinați valoarea parametrului real p pentru care $\mathsf{Var}(V)$ este

- maximă
- minimă

Demonstrație.

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}(V) &= \mathbb{E}(V^2)-\mathbb{E}(V)^2=2p+0.56\\ \mathbb{E}(V^2) &= 0.2+p+0.6-8p+3.6+9p=2p+5.4\\ \mathbb{E}(V) &= 0.2+p+0.8-4p+1.2+3p=2.2\end{aligned}$$

unde

$$V^2\colon \begin{pmatrix}1 & 4 & 9\\ 0.2+p & 0.4-2p & 0.4+p\end{pmatrix}$$

Pentru a determina valorile minime și maxime ale varianței, punem condițiile ca V^2 să fie probabilitate:

$$\begin{cases} 0 \leq 0.2 + p \leq 1 \\ 0 \leq 0.4 - 2p \leq 1 \\ 0 \leq 0.4 + p \leq 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -0.2 \leq p \leq 0.8 \\ -0.4 \leq -2p \leq 0.6 \\ -0.4 \leq p \leq 0.6 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -0.2 \leq p \leq 0.8 \\ -0.3 \leq p \leq 0.2 \\ -0.4 \leq p \leq 0.6 \end{cases}$$
$$\implies p \in [-0.2, 0.2]$$

Varianța este o funcție de gradul 1 în p, deci valoarea sa maximă se atinge când p este maxim (0.2), respectiv minimă când p este minim (-0.2). □

Exercițiul 17. Avem un joc unde probabilitățile de câștig sunt

$$X\colon \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Mai avem un joc cu probabilitățile

$$Y\colon \begin{pmatrix} -1 & 1.5 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Pentru a juca oricare din ambele jocuri, trebuie plătită o sumă x.

Ce joc ar trebui să alegem ca să maximizăm profitul?

Demonstrație. Calculăm mediile ambelor jocuri:

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{9}{10} + 10 \cdot \frac{1}{10} = 1$$
$$\mathbb{E}(Y) = -1 \cdot \frac{1}{5} + 1.5 \cdot \frac{4}{5} = 1$$

Deoarece mediile sunt egale, ambele jocuri ar părea la fel de favorabile.

Calculăm și dispersiile:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 10 - 1 = 9$$
$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 2 - 1 = 1$$

unde

$$X^2\colon \begin{pmatrix} 0 & 100 \\ \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$
$$Y^2\colon \begin{pmatrix} 1 & 2.25 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

□

4 Variabile aleatoare bidimensionale

Exercițiul 18. Fie două variabile aleatoare discrete

$$X : \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ se0.4 & 0.6 \end{pmatrix}, Y : \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

1. Determinați probabilitatea lor comună.
2. Determinați parametrul real k astfel încât X și Y să fie necorelate.
3. Pentru k determinat la punctul anterior, determinați dacă X și Y sunt independente.

Demonstrație. 1. Fie k = $\rho(X = -2, Y = 3)$.

X \ Y	-1	3	
-2	0.4 - k	k	0.4
1	0.3 + k	0.3 - k	0.6
	0.7	0.3	

2. Trebuie să determinăm k astfel încât $\rho(X, Y) = 0$.

$$\begin{aligned} \rho(X, Y) = 0 &\implies \text{Cov}(X, Y) = 0 \\ \mathbb{E}(X) &= -0.8 + 0.6 = -0.2 \\ \mathbb{E}(Y) &= -0.7 + 0.9 = 0.2 \\ \text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) \\ &= 1.4 - 12k + 0.04 \\ &= 1.44 - 12k \implies k = 0.12 \end{aligned}$$

3. Mai întâi, rescriem tabelul de repartiție pentru $k = 0.12$:

X \ Y	-1	3	
-2	0.28	0.12	0.4
1	0.42	0.18	0.6
	0.7	0.3	

Acum trebuie să verificăm dacă produsele dintre probabilitățile marginale corespund valorilor din tabel:

$$\begin{aligned} 0.4 \cdot 0.7 = 0.28 = \pi_{1,1} \\ 0.4 \cdot 0.3 = 0.12 = \pi_{1,2} \\ 0.6 \cdot 0.7 = 0.42 = \pi_{2,1} \\ 0.6 \cdot 0.3 = 0.18 = \pi_{2,2} \end{aligned}$$

□

Exercițiul 19. Fie două variabile aleatoare X și Y:

$$X\colon \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}, Y\colon \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

cu repartiția comună:

X \ Y	-2	-1	1	
-1	0.1	0.3	0.2	0.6
3	0.2	0.1	0.1	0.4
	0.3	0.4	0.3	

Fie variabilele aleatoare $A = \max(X, Y)$, $B = X - Y$. Determinați repartițiile pentru A, B și repartiția comună a lui A și B.

Demonstrație. Scriem valorile pentru $A = \max(X, Y)$ într-un tabel:

X \ Y	-2	-1	1
-1	-1	-1	1
3	3	3	3

Pentru a determina probabilitățile pentru A, adunăm probabilitățile corespunzătoare din distribuția lui comună a lui X, Y:

$$A = \max(X, Y) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Rezolvăm analog pentru B. Scriem mai întâi tabelul în care completăm cu valoarea lui $X - Y$:

X \ Y	-2	-1	1
-1	1	0	-2
3	5	4	2

Probabilitățile corespunzătoare sunt:

$$B = X - Y = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Acum putem scrie probabilitățile comune pentru A, B:

A \ B	-2	0	1	2	4	5	
-1	0.0	0.2 + k					0.4
1	0.2	0.0					0.2
3	0.0	0.0					0.4
	0.2	0.3	0.1	0.1	0.1	0.2	

□

Exercițiul 20. Se dau variabilele aleatoare X și Y descrise de distribuția comună:

X \ Y	-2	-1	2	
-2	0.08	0.12	0.05	0.25
0	0.12	0.23	0.15	0.5
3	0.05	0.05	0.15	0.25
	0.25	0.4	0.35	

Determinați Cov(U, V) unde $U = 3X - 2Y$ și $V = X + 4Y$.

Demonstrație. Începem prin a extrage din distribuția comună a lui X și Y probabilitățile marginale:

$$X\colon \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}, Y\colon \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0.25 & 0.4 & 0.35 \end{pmatrix}$$

Calculăm principalele valori descriptive pentru acestea:

$$\mathbb{E}(X) = -0.5 + 0.75 = 0.25$$
$$\mathbb{E}(Y) = -0.5 - 0.4 + 0.7 = -0.2$$

$$X^2\colon \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}, Y^2\colon \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \mathbb{E}(X, Y) = 0.81$$

Acum rescriem covarianța cerută folosindu-ne de proprietatea ei de biliniaritate:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U, V) &= \text{Cov}(3X - 2Y, X + 4Y) \\ &= 3 \cdot \text{Var}(X) + (12 - 2) \cdot \text{Cov}(X, Y) - 8 \cdot \text{Var}(Y) \\ &= 3 \cdot 3.1875 + 8.6 - 8 \cdot 2.76 = 3.175 \end{aligned}$$

□

Variabile aleatoare continue

Definiție. Se numește *densitate de probabilitate* o funcție $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care îndeplinește următoarele condiții:

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

Definim *probabilitatea* pe variabile aleatoare continue ca:

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Se numește *funcție de repartiție* funcția $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Avem că
$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$
Definim *media* variabilei aleatoare continue X ca
$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$$
Fie $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă, atunci
$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,\mathrm{d}x$$
Varianța se definește la fel ca la variabile aleatoare discrete:
$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Exercițiul 21. Fie $a \in \mathbb{R}$, $k > 0$:
$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x^2 \cdot e^{-kx}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

1. Determinați a astfel încât f să fie o densitate de probabilitate.
2. Calculați $\mathbb{E}(X)$ și Var(X).
3. Scrieți funcția de repartiție.

Demonstrație.

1. Pentru ca $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ trebuie ca $a > 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + a\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-kx}\,\mathrm{d}x$$

Facem schimbarea de variabilă:

$$\begin{aligned} k \cdot x = t &\implies x = \frac{t}{k} \\ k\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t &\implies \mathrm{d}x = \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t \\ x = 0 &\implies t = 0 \\ x = \infty &\implies t = \infty \end{aligned}$$

Continuăm integrarea:

$$= \int_0^{+\infty} t^2 \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{k^3}\Gamma(3) = \frac{2a}{k^3} = 1 \implies a = \frac{k^3}{2}$$

2. Putem calcula media lui X din definiție:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \frac{k^3}{2} x^3 e^{-kx}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Efectuăm o schimbare de variabilă:

$$\begin{aligned} kx = t &\implies x = \frac{t}{k} \\ k\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t &\implies \mathrm{d}x = \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t \\ x = 0 &\implies t = 0 \\ x = \infty &\implies t = \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^{+\infty} \frac{k^3}{2} \cdot \frac{t^3}{k^3} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2k}\int_0^{+\infty} t^3 \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2k}\Gamma(4) = \frac{1}{2k} \cdot 3! = \frac{3}{k} \end{aligned}$$

Pentru varianță, avem nevoie să calculăm $\mathbb{E}(X^2)$:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{k^3}{2} x^4 e^{-4x}\,\mathrm{d}x$$

Facem substituția:

$$
\begin{aligned}
kx = t &\implies x = \frac{t}{k} \\
k\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t &\implies \mathrm{d}x = \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t \\
x = 0 &\implies t = 0 \\
x = \infty &\implies t = \infty
\end{aligned}
$$

$$
= \int_0^{+\infty} \frac{k^2}{2}\frac{t^4}{k^4} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2k^2}\Gamma(5) = \frac{4!}{2k^2} = \frac{24}{2k^2} = \frac{12}{k^2}
$$

Acum avem toate elementele necesare pentru a calcula varianța lui X:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \frac{12}{k^2} - \left(\frac{3}{k}\right)^2 = \frac{12-3k}{k^2}
\end{aligned}
$$

3. În calcularea funcției de repartiție, apare următoarea integrală, pe care o calculăm separat aici:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{-k}\int_0^x \frac{k^3}{2}\cdot t^2 \cdot (-k)e^{-kt}\,\mathrm{d}t = -\frac{k^2}{2}\int_0^x t^2 (e^{-kt})'\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{k^2}{2}(t^2 e^{-kt}\big|_0^x - \underbrace{\int_0^x 2te^{-kt}\,\mathrm{d}t)}_{I_2} \\
&= \frac{-k^2}{2}\left(x^2\cdot e^{-kx} + \frac{2x}{k}e^{-kx} + \frac{2}{k^2}\left(e^{-kx}-1\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{-k}\int_0^x 2t\cdot(e^{-kt})'\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{k}\left(2t\cdot e^{-kt}\big|_0^x - \int_0 2\cdot e^{-kt}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{1}{k}\left(2x\cdot e^{-kx} + \frac{2}{k}\,e^{-kx}\big|_0^x\right)
\end{aligned}
$$

Substituind, funcția de repartiție este:

$$
F(x) = \begin{cases} -\frac{k^2}{2}\left(x^2\cdot e^{-kx} + \frac{2x}{k}e^{-kx} + \frac{2}{k^2}\left(e^{-kx}-1\right)\right), x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}
$$

Aceasta respectă proprietățile din definiție:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \\
&\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{k^2}{2}\left(0+0-\frac{2}{k^2}\right) = 1
\end{aligned}
$$

O putem folosi pentru a calcula diferite probabilități:

$$\mathbb{P}(X \geq 3.7) = 1 - \mathbb{P}(X < 3.7) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3.7) = 1 - F(3.7)$$

$$\mathbb{P}(X > 3.14 \mid X < 7) = \frac{\mathbb{P}(3.14 < X < 7)}{\mathbb{P}(X < 7)} = \frac{F(7) - F(3.14)}{F(7)}$$

□

Repartiții de variabile aleatoare continue

1. Repartiția uniformă $X \sim Unif(a, b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in (a, b) \\ 0 \text{ în rest} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, a \leq x < b \\ 1, x \geq b \end{cases}$$

2. Repartiția exponențială

Exercițiul 22. Fie $X \sim Unif(50, 100)$. Determinați:

a) $\mathbb{P}(X < 70)$

b) $\mathbb{P}(X \geq 55)$

c) $\mathbb{P}(X > 69 \mid X < 80)$

Demonstrație. Funcția de repartiție este

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 50 \\ \frac{x-50}{50}, 50 \leq x < 100 \\ 1, x \geq 100 \end{cases}$$

Deci:

1.
$$\mathbb{P}(X < 70) = F(70) = \frac{70 - 50}{50} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

2.
$$\mathbb{P}(X \geq 55) = 1 - \mathbb{P}(X < 55) = 1 - F(55) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

3.
$$\mathbb{P}(X > 69 \mid X < 80) = \frac{\mathbb{P}(69 < X < 80)}{\mathbb{P}(X < 80)} = \frac{11}{30}$$

$$\mathbb{P}(69 < X < 80) = F(80) - F(69)$$

$$\mathbb{P}(X < 80) = \frac{11}{50}$$

$\square$

Exercițiul 23. Un feribot sosește într-o stație la fiecare 30 de minute începând cu ora 9:00. Un student care dorește să ia feribotul ajunge în stație la un moment de timp uniform distribuit pe intervalul 9-12.

Determinați probabilitatea ca studentul să aibă de așteptat feribotul:

a) mai mult de 10 minute

b) între 10 și 20 de minute

c) mai mult de 25 de minute

Demonstrație. Notăm cu X numărul de minute peste ora 9 la care sosește studentul. Distribuția lui X este $X \sim Unif(0, 180)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{x}{180}, 0 \leq x < 180 \\ 1, x \geq 180 \end{cases}$$

1.

$$\mathbb{P}((0 < X < 20) \cup (30 < X < 50) \cup (60 < X < 80) \cup$$
$$(90 < X < 110) \cup (120 < X < 140) \cup (150 < X < 170)) =$$
$$= \mathbb{P}(0 < X < 20) + \cdots + \mathbb{P}(150 < X < 170) = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(0 < X < 20) = F(20) - F(0) = \frac{20}{180} - 0 = \frac{1}{9}$$
$$\mathbb{P}(30 < X < 50) = F(50) - F(30) = \frac{50}{180} - \frac{30}{180} = \frac{1}{9}$$
$$\cdots$$

2.

$$\mathbb{P}((10 < X < 20) \cup (40 < X < 50) \cup (70 < X < 80) \cup$$
$$(100 < X < 110) \cup (130 < X < 140) \cup (160 < X < 170)) =$$
$$6\mathbb{P}(10 < X > 20) = 6(F(20) - F(10))$$
$$= 6(\frac{20}{180} - \frac{10}{180})$$
$$= \frac{1}{3}$$

3.

$$\mathbb{P}((0 < X < 5) \cup (30 < X < 35) \cup (60 < X < 65) \cup$$
$$(90 < X < 95) \cup (120 < X < 125) \cup (150 < X < 155)) =$$
$$= 6\mathbb{P}(0 < X < 3) = 6(\mathbb{P}(5) - \mathbb{P}(0)) = 6(\frac{5}{180} - 0) = \frac{30}{180} = \frac{1}{6}$$

$\square$

Exercițiul 24. Un student este primul în coada de așteptare pentru un examen oral. Se știe că timpul de examinare este o variabilă aleatoare repartizată exponențial de parametru $\lambda = \frac{1}{20}$.

Determinați probabilitatea ca:

a) studentul să aștepte mai mult de 20 de minute

b) studentul să aștepte între 20 și 40 de minute

Demonstrație. Știm că

$$X \sim Exp(\frac{1}{20})$$

Cu alte cuvinte, durata medie de așteptare este de 20 de minute.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{20}x}, x > 0 \end{cases}$$

a)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 20) &= 1 - \mathbb{P}(X < 20) \\ &= 1 - F(20) \\ &= 1 - 1 + e^{-1} \\ &= \frac{1}{e} \approx 0.368 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(20 < X < 40) &= F(40) - F(20) \\ &= 1 - e^{-2} - 1 + e^{-1} \\ &= e^{-1} - e^{-2} \approx 0.233 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(40 < X < 60) &= F(60) - F(40) \\ &= 1 - e^{-3} - 1 + e^{-1} \\ &= -e^{-3} + e^{-2} = e^{-1}(e^{-1} - e^{-2}) \end{aligned}$$

Procedeul de standardizare

$$\begin{aligned} Z &\sim \mathcal{N}(0,1) \\ \phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t \\ \phi(-x) &= 1 - \phi(x) \end{aligned}$$

$$Z = \frac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \mathbb{E}(\frac{X - m}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}(X - m) \\
&= \frac{1}{\sigma}(\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(m)) = \frac{1}{\sigma}(\mathbb{E}(X) - m) \\
&= \frac{1}{\sigma}(m - m) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{Var}(Z) &= \mathsf{Var}(\frac{X - m}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma^2}\mathsf{Var}(X - m) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\mathsf{Var}(X) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 = 1
\end{aligned}$$

□

Exercițiul 25. Gigel este chemat în instanță pentru a recunoaște paternitatea asupra copilului Lucicăi. Acesta se apără spunând că nu poate fi tatăl copilului întrucât a părăsit țara cu 290 de zile înainte de nașterea copilului și a revenit în țară cu 240 de zile înainte de nașterea copilului.

Un expert depune mărturie în cadrul procesului și afirmă că durata sarcinii unei femei este o variabilă aleatoare a cărei repartiție poate fi aproximată cu repartiția normală de medie 270 și dispersie 100.

Ce va decide instanța?

Demonstrație. Trebuie să calculăm probabilitatea

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((X < 240) \cup (X > 290)) = \mathbb{P}(X < 240) + \mathbb{P}(X > 290) = \\
= \mathbb{P}(\frac{X - 270}{10} > 2) + \mathbb{P}(\frac{X - 270}{10} < -3) = \\
= \mathbb{P}(Z > 2) + \mathbb{P}(Z < -3) = 1 - \phi(2) + \phi(-3) = 0.0241
\end{aligned}$$

□

5 Distribuții

Exercițiul 26. Avem o variabilă aleatoare $X \sim \mathsf{exp}(\lambda)$. Aflați estimatorul de moment pentru $\theta = \lambda$.

Demonstrație. Începem prin a scrie în mod explicit distribuția exponențială, parametrizată de λ:

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$$

Pentru distribuția X, momentul de ordin 1 este media variabilei aleatoare:

$$\alpha_1 = \mathbb{E}(X)$$
$$\alpha_1(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x;\theta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\theta}$$

Pentru o selecție, momentul de ordinul 1 este media aritmetică a valorilor:

$$M_1 = \overline{X}$$
$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Vrem să vedem pentru ce valoare a lui θ cele două momente de ordin 1 sunt egale:

$$\alpha_1(\hat{\theta}) = M_1 \iff$$
$$\iff \frac{1}{\widehat{\Theta}} = \overline{X} \iff \widehat{\Theta} = \frac{1}{\overline{X}}$$

□

Exercițiul 27. Fie distribuția $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ cu σ^2 necunoscută. Aflați intervalul de 15% încredere pentru m.

Demonstrație. Intervalul de încredere de parametru α este

$$\left(\overline{x} - \frac{t_{n-1,\alpha/2} \cdot s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \frac{t_{n-1,\alpha/2} \cdot s}{\sqrt{n}}\right)$$

Dacă avem un procent $p\%$, putem determina α prin relația:

$$[100(1-\alpha)]\% = p\%$$
$$\iff 1 - \alpha = \frac{p}{100}$$
$$\iff \alpha = 1 - \frac{p}{100}$$

În cazul nostru, $\alpha = 0.85$.
În R, putem calcula valoarea distribuției Student prin funcția `qt`:

$$t_{n-1,\alpha/2} = \mathtt{qt}(1 - \alpha/2, n-1)$$

□

Exercițiul 28. Fie $X \sim \mathcal{N}(m, 10)$. Aflați intervalul de 90% încredere pentru m.

Demonstrație. Intervalul de încredere de parametru α pentru m este

$$\left(\overline{x} - \frac{\sigma \cdot u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \frac{\sigma \cdot u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right)$$

Putem determina α cu formula de la exercițiul anterior: $\alpha = 0.1$.

Fie x un vector care conține selecția. Pentru a obține în R variabilele care apar în formulă putem folosi:

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \texttt{mean}(x)\\
\sigma &= \texttt{sd}(x)\\
n &= \texttt{length}(x)\\
u_{\alpha/2} &= \texttt{qnorm}(1-\alpha/2, 0, 1)
\end{aligned}$$

□