ANALIZĂ MATEMATICĂ CURS 2 11.10.2018

* $\sup(-A) = -\inf(A)$

TEOREMĂ Orice corp ordonat este arhimedian.
Dem. Fie $(S, +, \cdot, \leq)$ un corp complet ordonat.
P.p. prin reducere la absurd că S nu este arhimedian $\Rightarrow \exists\, x>0$ aî $x \geq n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ este mărginită $\Rightarrow \exists \sup \mathbb{N}$

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \leq \sup \mathbb{N} \Rightarrow 1 \leq 0$ (contradicție)

PROPOZIȚIE Fie $(S, +, \cdot, \leq)$ un corp ordonat. At. urm. afirm. sunt echiv.

1. S este ARHIMEDIAN
2. $\forall a>0$ și $\forall b \in S \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ aî. $n \cdot a > b$
3. $\forall\, x<y \Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{Q}$ aî $x<r<y$
4. $\forall\, x>0, \exists\, n \in \mathbb{N}^*$ aî. $0 < \frac{1}{n} < x$
5. $a \in S$, $a = \sup\{r \in \mathbb{Q} \mid r<a\} = \inf\{r \in \mathbb{Q} \mid r>a\}$

Fie $(S, +, \cdot, \leq)$ și $(\mathbb{R}, \oplus, \odot, \preceq)$ două corpuri complet ordonate.

$a \in S$

$a = \sup_S \{r \in \mathbb{Q} \mid r<a\}$

$f(a) = \sup_{\mathbb{R}} \{r \in \mathbb{Q} \mid r<a\}$

$f(a+b) = f(a) \oplus f(b)$

PROPOZIȚIE Fie $(I_n)_n$ un șir descresc de intervale închise de numere reale. Atunci

$$\bigcap_{n\geq 1} I_n = \emptyset \quad (I_1 \cap I_2 \cap I_3 \dots)$$

Dem. $m \geq n$

$I_n = [a_n, b_n] \Rightarrow [a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$

$\Rightarrow a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$

$\forall n, m \Rightarrow a_n \leq b_m$

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq b_m$

$a = \sup\{a_n \mid n \geq 1\} \leq b_m \Rightarrow a \in [a_m, b_m] = I_m, \forall m$

$$\Rightarrow a \in \bigcap_{n \geq 1} I_n$$

$$\bigcap_{n\geq 1} I_n = [\sup_{n\geq 1} a_n, \inf_{n \geq 1} b_n]$$

Def. Fie $(x_n)_n$ un șir de nr. reale și $a \in \mathbb{R}$. Spunem că șirul $(x_n)_n$ converge la a și notăm $x_n \to a$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ dacă $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n_\varepsilon$ aî $\forall\, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow$
$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ dacă $\forall M \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, n_M$ aî $\forall\, n \geq n_M$
$\Rightarrow x_n \geq M$

PROPOZIȚIE Fie $(x_n)_n, (y_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci

1. $x_n \to a \Rightarrow$ șirul $(x_n)_n$ este mărginit.
2. $x_n \to a$, $y_n \to b \Rightarrow x_n + y_n \to a+b$
3. $x_n \to a$; $y_n \to b \Rightarrow x_n \cdot y_n \to a \cdot b$
4. $x_n \to a \Rightarrow |x_n| \to |a|$
5. $x_n \to a \neq 0$ și $x_n \neq 0, \forall n \Rightarrow \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$

DEM.

1. $x_n \to a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ aî $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$
   $\varepsilon = 1$, $n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - a| < 1 \Rightarrow |x_n| \leq |x_n - a| + |a|$
   $< |a| + 1$
   $\{x_n \mid n \geq n_1\} \subset [-|a| - 1, |a| + 1]$
   $\forall n, |x_n| \leq \max(|a| + 1, \max |x_k|) \in \mathbb{R}$

2. $x_n \to a, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n'_\varepsilon$ aî $\forall n \geq n'_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

   $y_n \to b, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n''_\varepsilon$ aî $\forall n \geq n''_\varepsilon \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

   $n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$

   $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |(x_n + y_n) - (a+b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)|$
   $\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

3. $x_n \to a, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n'_\varepsilon$ aî $\forall n \geq n'_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$
   $y_n \to b, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n''_\varepsilon$ aî $\forall n \geq n''_\varepsilon \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon$

   $n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$
   $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab|$
   $\leq |x_n| \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a| < \varepsilon(|b| + |x_n|)$

   $x_n \to a \Rightarrow \exists M > 0$ aî $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$
   $|x_n \cdot y_n - ab| \leq \varepsilon(|b| + M)$

4. $||x| - |y|| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
   $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$

5. $\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - x_n|}{|a| \cdot |x_n|}$

   $x_n \to a, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_\varepsilon$ aî $n \geq n_\varepsilon$
   $\Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

   $a \neq 0, \varepsilon = \frac{|a|}{2}$

   $|a| - \frac{|a|}{2} \leq |x_n| \leq |a| + \frac{|a|}{2}$

   $|x_n| \geq \frac{|a|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|a|}$

   $n \geq m = n_{\frac{|a|}{2}}$
   $n \geq \max(m, n_\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| \leq \frac{2\varepsilon}{|a|^2}$

TEOREMĂ Orice șir monoton și mărginit este CONVERGENT

DEM. Fie $(x_n)_n$ un șir cresc și mărginit de M.

$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \ldots \leq M$

$a = \sup\limits_{n \geq 1} x_n$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_\varepsilon$ aî $a - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} < a$

$\forall \, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon$

$\Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$