ANALIZĂ MATEMATICĂ CURS 3 18.10.2018

Def. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ dacă $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

Def. Fie X o mulțime. O funcție $d : X \times X \to [0, \infty)$ a.î.

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$, $\forall x, y, z \in X$

Perechea (X, d) s.n SPAȚIU METRIC
d - distanță sau metrică

Def. Fie (X, d) un spațiu metric $(x_n)_n \subset X$ și $a \in X$. Spunem că șirul $(x_n)_n$ converge la a și notăm $x_n \to a$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$

Exemple

1. $(\mathbb{R}, d)$ - $d(x, y) = |x - y|$
2. $(\mathbb{C}, d)$ - $d(z, w) = |z - w| = \sqrt{(z_1 - w_1)^2 + (z_2 - w_2)^2}$
   $z = z_1 + i z_2$
3. (X, d) spațiu metric și $Y \subset X$
   $d_Y : Y \times Y \to [0, \infty)$
   $d_Y(x, y) = d(x, y)$, $\forall x, y \subset Y$
4. $X = \emptyset$, $d : X \times X \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

$x, y, z \in X$
$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

1° $x = z \Rightarrow d(x, z) = 0$
2° $x \neq z \Rightarrow d(x, z) = 1$
$\Rightarrow x \neq y$ sau $z \neq y \Rightarrow d(x, y) = 1$ sau $d(y, z) = 1$

$$d(x, y) + d(y, z) \geq 1 + 0 = 1 = d(x, z)$$

Def. Fie (X, d), $a \in X$ și $r > 0$
$B(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$ s.n BILĂ sau SFERĂ de centru a și rază r

în $\mathbb{R}$ $B(a, r) = (a - r, a + r)$
în $\mathbb{C}$ $B(a, r) = \{(z_1 - a_1)^2 + (z_2 - a_2)^2 < 1 \mid z \in \mathbb{C}\}$
$a = a_1 + i a_2$
$z = z_1 + i z_2$

$(x_n \in (P)$
$x_n \in B(a, \varepsilon) \Leftrightarrow d(a, x_n) < \varepsilon$

Def. $A \subset (X,d)$ s.n **MĂRGINITĂ** dacă $\exists\ a \in X$ și $r > 0$ a.î. $A \subset B(a,r)$
* în $(\mathbb{R}, d)$ A este mărginită dacă $A \subset (a-r, a+r)$

Def. Un șir $(x_n) \subset (X, d)$ s.n **CAUCHY** dacă pt. orice $\varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon$ a.î. $\forall\ n, m \geq n_\varepsilon$ $\Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$

Propoziție Fie (X, d) un spațiu metric

1. Orice șir convergent este Cauchy.
2. Orice șir Cauchy este mărginit
3. Orice șir convergent este mărginit.
4. Un șir Cauchy care are un subșir conv. este convergent.

Dem. 1. $x_n \to a$, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon$ a.î. $\forall\ n \geq n_\varepsilon$ $\Rightarrow d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$

Fie $n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

2. $(x_n)_n$ Cauchy $\Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon$ a.î. $\forall\ n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$

$\varepsilon = 1$, $m = n_1 \Rightarrow d(x_{n_1}, x_n) < 1$

$\forall\ n \geq n_1 \Leftrightarrow x_n \in B(x_{n_1}, 1)$, $\forall\ n \geq n_1$

$r = 2 + \max d(x_k, x_{n_1})$

$\forall n\quad x_n \in B(x_{n_1}, r)$

$1, 2 \Rightarrow 3.$

4. $\left.\begin{array}{l}(x_n)_n \text{ Cauchy} \\ \exists (x_{n_k})_k \text{ a.î. } x_{n_k} \to a\end{array}\right| \Rightarrow x_n \to a$

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon$ a.î. $\forall\ n, m \geq n_\varepsilon$ $\Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ k_\varepsilon$ a.î. $\forall\ k \geq k_\varepsilon \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$

Alegem un k a.î. $k \geq k_\varepsilon$ și $n_k \geq n_\varepsilon$ $(n_k \to \infty) \Rightarrow$

$\forall\ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Propoziție Limita este unică. ($x_n \to a$ și $x_n \to b$ $\Rightarrow a=b$)

Dem. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$ și $d(x_n, b) < \varepsilon$

$$\underset{n \geq n_\varepsilon}{d(a,b)} \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$$d(a,b) \leq 2\varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow d(a,b) = 0 \Rightarrow a = b$$

$\mathbb{R}^n = \bigtimes_{x=1}^{n} \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots x_n + y_n)$

$ax = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$

$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

1. $(\mathbb{R}^n, +)$ grup comutativ
2. i) $(a+b)x = ax + bx$, $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$
   ii) $a(x+y) = ax + ay$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$
   iii) $a(bx) = (ab)x$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}^n$
   iv) $1 \cdot x = x$

$\mathbb{R}^n$ = spațiu vectorial real

$d_1, d_2, d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$$d_\infty(x, y) = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$\infty > p \geq 1 \quad d_p = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

1. $d_1(x, y) = 0$
   $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i, \ \forall i = \overline{1,n} \Leftrightarrow x = y$
2. $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d_1(y, x)$
3. $d_1(x, y) + d_1(y, z) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|$
   $\geq \sum_{i=1}^{n} (|x_i - \cancel{y_i} + \cancel{y_i} - z_i|) = d_1(x, z)$

$d_1(x+z, y+z) = d_1(x,y)$
$d_2(x+z, y+z) = d_2(x,y)$
$d_2(x,y) = d_2(x-y, 0) = \|x-y\|_2$

$d_2(x,0) = \|x\|_2$ - NORMA 2 A LUI X

Def. $\| \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$ s.n normă dacă

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|, \forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

Dem. $\| \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$d_{\| \|}(x,y) = \|x-y\|$

1. $d_{\| \|}(x,y) = 0 \iff \|x-y\| = 0 \iff x \cdot y = 0$
$\iff x = y$
2. $d_{\| \|}(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)\cdot(x-y)\|$
$= \|y-x\| = d_{\| \|}(y,x)$
3. $d_{\| \|}(x,y) + d_{\| \|}(y,z) = \|x-y\| + \|y-z\|$
$\geq \|x-y+y-z\| = d_{\| \|}(x,z)$

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

$\|x\|_n = \max_{i=1}^{n} |x_i|$

$n = 2$
$\mathbb{R}^2, z = (x,y)$
$z_n = (x_n, y_n)$
$z_n \xrightarrow[d_1]{} z$ (= convergent la z pe dist. 1)

Pt. $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_\varepsilon$ aî $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d_1(z_n, z) < \varepsilon \iff$
$|x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon$

$|x_n - x| + |y_n - y| \geq |x_n - x| \Rightarrow x_n \to x$ și $y_n \to y$

$z_n \to z \Rightarrow x_n \to x$ și $y_n \to y$

$\left.\begin{array}{l} x_n \to x \\ y_n \to y \end{array}\right| \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon$ aî $\forall n \geq n_\varepsilon$

$\Rightarrow \begin{array}{l} |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}$

$d_1(z_n, z) = d_1((x_n, y_n), (x,y)) = |x_n - x| + |y_n - y|$
$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

$$\max_{i=1}^{n} |x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n \cdot \max_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$x_n \xrightarrow{d_\infty} a \Rightarrow x_n \xrightarrow{d_1} a$$

Teoremă în $\mathbb{R}^n$ orice 2 norme sunt echivalente

$(\|\ \|, |||\ ||| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty) \Rightarrow \exists\ 0 < \alpha < \beta$ aî
$\alpha |||x||| \leq \|x\| \leq \beta |||x|||)$