Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Partea a IV-a

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Academiei 14, RO 010014, Bucureşti, România
Emailuri: c.muresan@yahoo.com, cmuresan11@gmail.com

Abstract

Textul de faţă conţine o colecţie de probleme de diferite tipuri date de autoare la examenul aferent cursului de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti.

Peste tot în acest text, prescurtarea ddacă va semnifica "dacă şi numai dacă".

Amintim următoarea notaţie: pentru orice $m, n \in \mathbb{Z}$ cu $m \leq n$, se notează $\overline{m,n} = \{m, m+1, \ldots, n-1, n\} \subset \mathbb{Z}$.

Fie A o mulţime oarecare. Amintim că o *relaţie binară pe* A este o submulţime a produsului cartezian $A \times A$, produs notat şi A^2; în particular, A^2 este o relaţie binară pe A, anume cea mai mare relaţie binară pe A raportat la relaţia de incluziune între relaţii binare pe A.

Dacă R şi S sunt două relaţii binare pe A, atunci, prin definiţie, *compunerea* lor este următoarea relaţie binară pe A: $R \circ S = \{(a, c) \in A \times A \mid (\exists b \in A)(a, b) \in S \text{ şi } (b, c) \in R\}$. De asemenea, pentru orice n natural, R^n este o relaţie binară pe A, definită prin: $R^0 = \Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ (*diagonala lui* A) şi, pentru orice n natural, $R^{n+1} = R^n \circ R$. Este evident că Δ_A este element neutru la compunerea de relaţii binare pe A (atât la stânga, cât şi la dreapta), şi deci $R^1 = R$.

Compunerea relaţiilor binare pe A este asociativă şi, în general, necomutativă. În cazul particular al compunerii puterilor aceleiaşi relaţii binare pe A însă, este satisfăcută comutativitatea, ea fiind implicată de asociativitatea compunerii; într-adevăr, asociativitatea compunerii oricăror relaţii binare pe A ne asigură de faptul că, în şirul de compuneri de mai jos, nu contează unde punem parantezele, şi, prin urmare, pentru orice $n, k \in \mathbb{N}^*$, este valabil următorul şir de egalităţi: $R^n \circ R^k = \underbrace{(R \circ \ldots \circ R)}_{n \text{ de } R} \circ \underbrace{(R \circ \ldots \circ R)}_{k \text{ de } R} = \underbrace{(R \circ \ldots \circ R)}_{n+k \text{ de } R} = \underbrace{(R \circ \ldots \circ R)}_{k \text{ de } R} \circ \underbrace{(R \circ \ldots \circ R)}_{n \text{ de } R} = R^k \circ R^n$. Privind, în acest şir de egalităţi, primul membru, membrul din mijloc şi ultimul membru, putem adăuga faptul că: $R^n \circ R^k = R^{n+k} = R^k \circ R^n$. Faptul că $\Delta_A = R^0$ este element neutru la compunere şi deci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $R^n \circ R^0 = R^n \circ \Delta_A = R^n = \Delta_A \circ R^n = R^0 \circ R^n$ (şi, desigur, $R^n = R^{n+0}$), ne arată că relaţia $R^n \circ R^k = R^{n+k} = R^k \circ R^n$ este valabilă pentru orice $n, k \in \mathbb{N}$ (nu neapărat nenule). În fapt, se poate arăta că această relaţie este valabilă pentru orice $n, k \in \mathbb{Z}$, dacă definim R^{-1} ca mai jos şi, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, definim $R^{-n} = (R^{-1})^n$; dar nu vom folosi această generalizare în cele ce urmează.

Inversa relaţiei R este o relaţie binară pe A notată R^{-1} şi definită prin: $R^{-1} = \{(b, a) \in A^2 \mid (a, b) \in R\}$. Amintim că $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

1 Lista 1 de subiecte

Exerciţiul 1.1. *Fie A o mulţime nevidă şi R o relaţie binară tranzitivă pe A. Demonstraţi că:*

(i) pentru orice n natural nenul, $R^{n+1} \subseteq R^n$;

(ii) pentru orice n natural, R^n este tranzitivă.

Rezolvare: Fie S o relaţie binară oarecare pe A. Conform definiţiei, S este tranzitivă ddacă, pentru orice $a, b, c \in A$, dacă $(a, b) \in S$ şi $(b, c) \in S$, atunci $(a, c) \in S$, ceea ce este echivalent cu faptul că $S^2 \subseteq S$.
(i) Procedăm prin inducţie matematică după n natural nenul. Pentru $n = 1$, conform celor de mai sus, $R^2 \subseteq R$ pentru că R este tranzitivă. Presupunând relaţia $R^{n+1} \subseteq R^n$ valabilă pentru un n natural nenul arbitrar, fixat, compunem în această relaţie cu R (nu contează dacă aplicăm compunerea la dreapta sau la stânga, datorită comutativităţii demonstrate mai sus pe un caz particular în care ne încadrăm aici) şi obţinem: $R^{n+2} \subseteq R^{n+1}$. Conform principiului inducţiei matematice, rezultă că $R^{n+1} \subseteq R^n$ pentru orice n natural nenul.

(ii) Pentru $n = 0$, $R^0 = \Delta_A$ este tranzitivă întrucât $\Delta_A^2 = \Delta_A \circ \Delta_A = \Delta_A \supseteq \Delta_A$. Putem menţiona că, pentru $n = 1$, $R^1 = R$ este tranzitivă din ipoteză, cu toate că acest caz este cuprins în următorul. Pentru orice n natural nenul, $2n > n \geq 1$, aşadar, conform punctului (i), $R^{2n} \subseteq R^{2n-1} \subseteq \ldots \subseteq R^{n+1} \subseteq R^n$, prin urmare $(R^n)^2 = R^{2n} \subseteq R^n$ şi deci R^n este tranzitivă.

Exerciţiul 1.2. *Considerăm algebra Boole standard $\mathcal{L}_2 = \{0,1\}$, cu $0 \lneq 1$, ca submulţime a mulţimii numerelor naturale: $\mathcal{L}_2 = \{0,1\} \subset \mathbb{N}$, având relaţia de ordine dată de ordinea naturală de pe $\mathbb{N}$ şi operaţiile disjuncţie, conjuncţie şi negaţie definite uzual: pentru orice $x, y \in \mathcal{L}_2$, $x \vee y = \max\{x,y\}$, $x \wedge y = \min\{x,y\}$, $\overline{x} = 1 - x$. Fie n natural nenul şi algebra Boole $(\mathcal{L}_2^n, \vee, \wedge, \bar{}\,, 0_n, 1_n)$, cu $\mathcal{L}_2^n = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}_2 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{L}_2\}$ şi operaţiile definite uzual, pe componente, pe baza operaţiilor lui $\mathcal{L}_2$: pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathcal{L}_2^n$ ca mai sus:*

$$\begin{cases} (x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \ldots, x_n \vee y_n), \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \ldots, x_n \wedge y_n), \\ \overline{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}), \\ 0_n = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ de } 0}, \\ 1_n = \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{n \text{ de } 1}. \end{cases}$$

Relaţia de ordine de pe $\mathcal{L}_2^n$, notată $\leq$, este definită pe baza relaţiei de ordine de pe $\mathcal{L}_2$ astfel: pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathcal{L}_2^n$, are loc $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ddacă: $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$, …, $x_{n-1} \leq y_{n-1}$ şi $x_n \leq y_n$.

Pentru orice k natural, notăm $A_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{L}_2^n \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k\} \subseteq \mathcal{L}_2^n$, unde operaţia $+$ este adunarea obişnuită din $\mathbb{N}$.

Demonstraţi că:

(i) $\mathcal{L}_2^n = A_0 \cup A_1 \cup \ldots A_n$ şi mulţimile A_k, cu $k \in \mathbb{N}$, sunt două câte două disjuncte;

(ii) $A_k \neq \emptyset$ ddacă $k \in \overline{0,n}$;

(iii) pentru orice $k \in \overline{0,n}$ şi orice $x \in A_k$, are loc: $\overline{x} \in A_{n-k}$;

(iv) pentru orice $k,l \in \overline{0,n}$*, orice* $x \in A_k$ *şi orice* $y \in A_l$*, au loc:* $x \vee y \in \bigcup_{j=\max\{k,l\}}^{k+l} A_j$ *şi* $x \wedge y \in \bigcup_{j=0}^{\min\{k,l\}} A_j$*;*

(v) pentru orice $k \in \overline{0,n}$ *şi orice* $x \in A_k$*, filtrul principal generat de* x *în algebra Boole* $\mathcal{L}_2^n$*, notat* $< x >$*, are proprietăţile:* $< x > \subseteq \bigcup_{j=k}^{n} A_j$ *şi cardinalul său este* $| < x > | = 2^{n-k}$*.*

Rezolvare: (i) Pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{L}_2^n$, avem: $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{L}_2 = \{0,1\}$, aşadar $0 \leq x_j \leq 1$ pentru orice $j \in \overline{1,n}$, şi deci $0 = \underbrace{0 + 0 + \ldots + 0}_{n \text{ de } 0} \leq x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ de } 1} = n$, aşadar $x \in A_0 \cup A_1 \cup \ldots A_n$. Am obţinut: $\mathcal{L}_2^n \subseteq A_0 \cup A_1 \cup \ldots A_n$. Dar, prin definiţie, $A_k \subseteq \mathcal{L}_2^n$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, prin urmare avem şi incluziunea în sens invers: $A_0 \cup A_1 \cup \ldots A_n \subseteq \mathcal{L}_2^n$. Deci $\mathcal{L}_2^n = A_0 \cup A_1 \cup \ldots A_n$.

Conform definiţiei mulţimilor A_k, cu $k \in \mathbb{N}$, pentru orice $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ cu $k_1 \neq k_2$ şi orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_{k_1}$, avem $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k_1 \neq k_2$, deci $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin A_{k_2}$. Aşadar $A_{k_1} \cap A_{k_2} = \emptyset$, şi deci mulţimile A_k, cu $k \in \mathbb{N}$, sunt două câte două disjuncte.

(ii) Este evident că, pentru orice $k \in \overline{0,n}$, $A_k \neq \emptyset$, pentru că, de exemplu, $(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k \text{ de } 1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-k \text{ de } 0}) \in A_k$.

Acum fie $k \in \mathbb{N} \setminus \overline{0,n}$. Presupunem prin absurd că există $x \in A_k$. Conform punctului (i), A_k este disjunctă de fiecare dintre mulţimile $A_0, \ldots, A_n$, aşadar $x \notin A_0, \ldots, x \notin A_n$, deci $x \notin A_0 \cup \ldots \cup A_n = \mathcal{L}_2^n$ (am aplicat din nou punctul (i)). Dar, prin ipoteză, $x \in A_k \subseteq \mathcal{L}_2^n$. Am obţinut $x \in \mathcal{L}_2^n$ şi $x \notin \mathcal{L}_2^n$; contradicţie. Prin urmare, $A_k = \emptyset$ pentru orice $k \in \mathbb{N} \setminus \overline{0,n}$.

Demonstraţia punctului (ii) este completă.

(iii) Fie $k \in \overline{0,n}$ şi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_k$, aşadar $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$. $\overline{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}) = (1 - x_1, 1 - x_2, \ldots, 1 - x_n)$, prin urmare $\overline{x} \in A_j$, cu $j = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \ldots + \overline{x_n} = 1 - x_1 + 1 - x_2 + \ldots + 1 - x_n = n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = n - k$, deci $\overline{x} \in A_{n-k}$.

(iv) Să observăm că, pentru orice $p \in \overline{0,n}$ şi orice $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathcal{L}_2^n$, are loc: $z \in A_p$ ddacă $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = p$ ddacă există o submulţime $P \subseteq \overline{1,n}$ astfel încât $|P| = p$ şi:

$$\begin{cases} (\forall j \in P) & z_j = 1, \\ (\forall j \in \overline{1,n} \setminus P) & z_j = 0, \end{cases}$$

deoarece $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$.

Fie $k, l \in \overline{0, n}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_k$ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in A_l$, aşadar există submulţimile $K \subseteq \overline{1, n}$ şi $L \subseteq \overline{1, n}$, astfel încât $|K| = k$, $|L| = l$ şi:

$$\begin{cases} (\forall j \in K) & x_j = 1, \\ (\forall j \in \overline{1, n} \setminus K) & x_j = 0, \\ (\forall j \in L) & y_j = 1, \\ (\forall j \in \overline{1, n} \setminus L) & y_j = 0. \end{cases}$$

$x \vee y = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \ldots, x_n \vee y_n)$ şi avem:

$$\begin{cases} (\forall j \in K \cup L) & x_j \vee y_j = 1, \\ (\forall j \in \overline{1, n} \setminus (K \cup L))) & x_j \vee y_j = 0, \end{cases}$$

prin urmare $x \vee y \in A_{|K \cup L|}$. Dar $K \subseteq K \cup L$ şi $L \subseteq K \cup L$, aşadar $k = |K| \leq |K \cup L|$ şi $l = |L| \leq |K \cup L|$, deci $\max\{k, l\} \leq |K \cup L|$. Pe de altă parte, $|K \cup L| = |K| + |L| - |K \cap L| \leq |K| + |L| = k + l$. Am obţinut: $x \vee y \in A_{|K \cup L|}$ şi $\max\{k, l\} \leq |K \cup L| \leq k + l$, de unde rezultă că $x \vee y \in \displaystyle\bigcup_{j=\max\{k,l\}}^{k+l} A_j$.

$x \wedge y = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \ldots, x_n \wedge y_n)$ şi avem:

$$\begin{cases} (\forall j \in K \cap L) & x_j \wedge y_j = 1, \\ (\forall j \in \overline{1, n} \setminus (K \cap L))) & x_j \wedge y_j = 0, \end{cases}$$

prin urmare $x \wedge y \in A_{|K \cap L|}$. Dar $K \cap L \subseteq K$ şi $K \cap L \subseteq L$, aşadar $|K \cap L| \leq |K| = k$ şi $|K \cap L| \leq |L| = l$, deci $0 \leq |K \cap L| \leq \min\{k, l\}$. Am obţinut: $x \wedge y \in A_{|K \cap L|}$ şi $0 \leq |K \cup L| \leq \min\{k, l\}$, de unde rezultă că $x \wedge y \in \displaystyle\bigcup_{j=0}^{\min\{k,l\}} A_j$.

(v) Fie $k \in \overline{0, n}$ şi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_k$. Ştim că filtrul principal generat de un element într-o algebră Boole este mulţimea majoranţilor acelui element din respectiva algebră Boole, aşadar: $< x >= \{y \in \mathcal{L}_2^n \mid x \leq y\} = \{y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathcal{L}_2^n \mid x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2, \ldots, x_n \leq y_n\}$. Rezultă că, pentru orice $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in < x >$, $k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq y_1 + y_2 + \ldots + y_n \leq \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ de } 1} = n$, aşadar $y_1 + y_2 + \ldots + y_n \in \overline{k, n}$, prin urmare $y \in \displaystyle\bigcup_{j=k}^{n} A_j$. Am obţinut: $< x >\subseteq \displaystyle\bigcup_{j=k}^{n} A_j$.

Pentru a calcula cardinalul filtrului generat de x, avem nevoie de o exprimare mai precisă a elementelor acestui filtru. Conform observaţiei de la începutul rezolvării punctului (iv), faptul că $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A_k$ este echivalent cu faptul că există $K \subseteq \overline{1,n}$, având $|K| = k$, astfel încât:

$$\begin{cases} (\forall j \in K) & x_j = 1, \\ (\forall j \in \overline{1,n} \setminus K) & x_j = 0. \end{cases}$$

Rezultă: $< x >= \{y \in \mathcal{L}_2^n \mid x \leq y\} = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathcal{L}_2^n \mid x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2, \dots, x_n \leq y_n\} = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathcal{L}_2^n \mid (\forall j \in K) 1 \leq y_j, (\forall j \in \overline{1,n} \setminus K) 0 \leq y_j\} = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathcal{L}_2^n \mid (\forall j \in K) y_j = 1\}$, celelalte componente ale unui element y care majorează pe x putând lua orice valoare, deoarece componentele corespunzătoare ale lui x au valoarea 0. Aşadar, pentru orice $y \in < x >$, k componente ale lui y sunt fixate, putând lua doar valoarea 1, iar celelalte $n-k$ componente pot lua oricare dintre valorile 0 şi 1, deci fiecare dintre aceste $n-k$ componente poate lua 2 valori. Numărul acestor elemente $y \in < x >$ este aşadar egal cu $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n-k \text{ de } 2} = 2^{n-k}$, prin urmare $| < x > | = 2^{n-k}$.

2 Lista 2 de subiecte

Exerciţiul 2.1. *Fie n un număr natural nenul şi mulţimea $A = \overline{0,n}$. Considerăm relaţia binară pe A: $R = \{(k, k+1) \mid k \in \overline{0, n-1}\} \cup \{(n, 0)\}$. Demonstraţi că:*

(i) pentru orice i natural, $R^i = \{(k,l) \in A^2 \mid (n+1) | (l-k-i)\}$, unde a doua bară orizontală reprezintă relaţia "divide pe" între două numere întregi;

(ii) $T(R) = A^2$, unde $T(R)$ este închiderea tranzitivă a relaţiei R.

Rezolvare: (i) $R^0 = \Delta_A = \{(k,k) \mid k \in A = \overline{0,n}\}$. $\{(k,l) \in A^2 = \overline{0,n}^2 \mid (n+1)|(l-k-0)\} = \{(k,l) \in A^2 = \overline{0,n}^2 \mid (n+1)|(l-k)\} = \{(k,l) \in A^2 = \overline{0,n}^2 \mid k = l\} = R^0$, unde penultima egalitate este dedusă din faptul că, pentru orice $k, l \in \overline{0,n}$, are loc: $0 - n \leq l - k \leq n - 0$, deci $l - k \in \overline{-n,n}$, iar singurul număr din $\overline{-n,n}$ care se divide cu $n+1$ este 0.

Pentru a obţine relaţiile din enunţ pentru $i \in \mathbb{N}^*$, procedăm prin inducţie matematică după i.

Pentru $i = 1$, $\{(k,l) \in A^2 = \overline{0,n}^2 \mid (n+1)|(l-k-1)\} = R$, pentru că, oricare ar fi $k, l \in \overline{0,n}$, are loc: $l - k - 1 \in \overline{-n-1, n-1}$, iar singurele numere din $\overline{-n-1, n-1}$ care se divid cu $n+1$ sunt $-n-1$ şi 0, şi faptul că:

$$\begin{cases} l-k-1 \in \{-n-1, 0\} \\ \text{şi} \\ k, l \in \overline{0,n} \end{cases}$$

este echivalent cu:

$$\begin{cases} (k,l) = (n,0) \\ \text{sau} \\ (k,l) \in \{(j, j+1) \mid j \in \overline{0, n-1}\}, \end{cases}$$

adică: $(k,l) \in R$.

Acum să presupunem că, pentru un $i \in \mathbb{N}^*$ arbitrar, fixat, $R^i = \{(k,l) \in A^2 \mid (n+1)|(l-k-i)\}$. Atunci $R^{i+1} = R^i \circ R = \{(k,m) \in A^2 \mid (\exists l \in A)(k,l) \in R$ şi $(l,m) \in R^i\} = \{(k,m) \in A^2 \mid (\exists l \in A)(n+1)|(l-k-1)$ şi $(n+1)|(m-l-i)\}$. Pentru orice $k, l, m \in \mathbb{Z}$, dacă $(n+1)|(l-k-1)$ şi $(n+1)|(m-l-i)$, atunci $(n+1)|(l-k-1+m-l-i)$, ceea ce este echivalent cu $(n+1)|(m-k-(i+1))$. Aşadar, $R^{i+1} \subseteq \{(k,m) \in A^2 \mid (n+1)|(m-k-(i+1))\}$. Să notăm mulţimea $\{(k,m) \in A^2 \mid (n+1)|(m-k-(i+1))\}$ cu B_{i+1}. Am demonstrat că $R^{i+1} \subseteq B_{i+1}$.

Pentru a obţine incluziunea în sens invers, să observăm că, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(n+1)|(\alpha+\beta)$, există (chiar un unic) $l \in \overline{0,n}$ astfel încât $(n+1)|(\alpha+l)$ şi $(n+1)|(\beta-l)$; într-adevăr, mulţimea $\overline{0,n}$ este formată din $n+1$ numere naturale consecutive, prin urmare şi mulţimea $\{\alpha + l \mid l \in \overline{0,n}\} = \overline{\alpha, \alpha+n}$ este formată din $n+1$ numere naturale consecutive, aşadar (exact) unul dintre elementele acestei mulţimi se divide cu $n+1$, adică există un (unic) $l \in \overline{0,n}$ astfel încât $(n+1)|(\alpha+l)$, iar faptul suplimentar că $(n+1)|(\alpha+\beta)$ implică $(n+1)|(\alpha+\beta-(\alpha+l))$, adică $(n+1)|(\beta-l)$.

Acum să luăm $(k,m) \in B_{i+1}$, adică, $k, m \in A = \overline{0,n}$ astfel încât $(n+1)|(m-k-(i+1))$. Luând în afirmaţia anterioară $\alpha = -k-1$ şi $\beta = m-i$, rezultă că există un (unic) $l \in A = \overline{0,n}$ astfel încât $(n+1)|(l-k-1)$ şi $(n+1)|(m-l-i)$, şi deci $(k,m) \in R^{i+1}$ conform expresiei lui R^{i+1} de mai sus. Am demonstrat aşadar că are loc şi $B_{i+1} \subseteq R^{i+1}$.

Conchidem că $R^{i+1} = B_{i+1} = \{(k,m) \in A^2 \mid (n+1)|(m-k-(i+1))\}$, şi principiul inducţiei matematice ne asigură de faptul că relaţia din enunţ este valabilă pentru orice $i \in \mathbb{N}^*$.

Aşadar relaţia din enunţ este satisfăcută pentru orice $i \in \mathbb{N}$.
(ii) Amintim formula închiderii tranzitive a unei relaţii binare: $T(R) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} R^i$. Aplicăm acum punctul (i): $T(R) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} R^i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} \{(k,l) \in A^2 \mid (n+1)|(l-k-i)\} = \{(k,l) \in A^2 \mid (\exists i \in \mathbb{N}^*)(n+1)|(l-k-i)\}$. $T(R)$ este o relaţie binară pe A, deci $T(R) \subseteq A^2$. Evident, pentru orice $(k,l) \in A^2 = \overline{0,n}^2$, există (chiar o infinitate de) $i \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $(n+1)|(l-k-i)$ (orice $i = l-k+(n+1)\alpha$, cu $\alpha \in \mathbb{N}^*$, satisface: $i \in \mathbb{N}^*$ şi $(n+1)|(l-k-i)$), prin urmare are loc şi incluziunea în sens invers: $A^2 \subseteq T(R)$. Aşadar $T(R) = A^2$.

Exerciţiul 2.2. *Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ o latice cu 0 şi 1. Pentru orice $x \in L$, notăm cu $C(x)$ mulţimea complemenţilor lui x în L. Definim relaţia binară $\sim$ pe L prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \sim y$ ddacă $x \in C(y)$ (adică x este complement al lui y). Demonstraţi că:*

(i) $\sim$ *este simetrică şi* $\sim \neq \emptyset$;

(ii) $\sim$ *este reflexivă ddacă L este trivială (adică L are un singur element, adică $0 = 1$ în L, adică $L = \{0\}$, adică $L = \{1\}$);*

(iii) $\sim$ *este tranzitivă ddacă L este trivială;*

(iv) $\bigcup_{x\in L\setminus\{0,1\}} C(x) \subseteq L \setminus \{0,1\}$.

Rezolvare: (i) Conform definiţiei unui complement al unui element într-o latice cu 0 şi 1, pentru orice $x, y \in L$, $x \sim y$ ddacă $x \in C(y)$ ddacă $x \vee y = 1$ şi $x \wedge y = 0$ ddacă $y \in C(x)$ (amintim că operaţiile binare $\vee$ şi $\wedge$ sunt comutative) ddacă $y \sim x$. Aşadar $\sim$ este o relaţie simetrică.

$0 \vee 1 = 1$ şi $0 \wedge 1 = 0$, prin urmare $0 \in C(1)$ (şi $1 \in C(0)$), adică $0 \sim 1$ (şi $1 \sim 0$), adică $(0,1) \in \sim$ (şi $(1,0) \in \sim$). Deci $\sim \neq \emptyset$.
(ii) Conform demonstraţiei ultimei părţi a punctului (i), dacă L este trivială, deci $L = \{1\}$, atunci $1 = 0 \sim 1$, aşadar $1 \sim 1$, prin urmare $\Delta_L = \{(1,1)\} \subseteq \sim$, aşadar $\sim$ este reflexivă.

Reciproc, dacă $\sim$ este reflexivă, adică $\Delta_L \subseteq \sim$, atunci $(1,1) \in \sim$, adică $1 \sim 1$, prin urmare $1 = 1 \wedge 1 = 0$, deci $0 = 1$, adică L este trivială.
(iii) Conform demonstraţiei primei implicaţii de la punctul (ii), dacă L este trivială, adică $L = \{1\}$, atunci $L^2 = \{(1,1)\} \subseteq \sim \subseteq L^2$, prin urmare $\sim = L^2 = \{(1,1)\}$, deci $\sim$ este tranzitivă (deoarece, oricare ar fi mulţimea L, relaţia binară L^2 pe L este în mod trivial tranzitivă: oricare ar

fi $(x,y),(y,z) \in L^2$, rezultă $(x,z) \in L^2$; de asemenea, oricare ar fi mulţimea L şi 1 element al lui L, relaţia binară $\{(1,1)\}$ pe L este în mod trivial tranzitivă: oricare ar fi $(x,y),(y,z) \in \{(1,1)\}$, rezultă $x = y = z = 1$, rezultă $(x,z) = (1,1) \in \{(1,1)\}$).

Reciproc, dacă $\sim$ este tranzitivă, atunci, întrucât $(1,0),(0,1) \in \sim$ conform demonstraţiei celei de-a doua părţi a punctului (i), rezultă $(1,1) \in \sim$, deci L este trivială conform ultimei părţi a demonstraţiei celei de-a doua implicaţii a punctului (ii).

(iv) Desigur, pentru orice $x \in L$ (în particular pentru orice $x \in L \setminus \{0,1\}$), $C(x) \subseteq L$. Rămâne de demonstrat că, pentru orice $x \in L \setminus \{0,1\}$, $0, 1 \notin C(x)$. Fie aşadar $x \in L \setminus \{0,1\}$, arbitrar, fixat. Presupunem prin absurd că $0 \in C(x)$; rezultă $x = 0 \vee x = 1$, deci $x = 1$, ceea ce contravine ipotezei $x \in L \setminus \{0,1\}$; aşadar $0 \notin C(x)$. Presupunem prin absurd că $1 \in C(x)$; rezultă $x = 1 \wedge x = 0$, deci $x = 0$, ceea ce, de asemenea, este o contradicţie cu ipoteza $x \in L \setminus \{0,1\}$; aşadar $1 \notin C(x)$. Demonstraţia este încheiată.

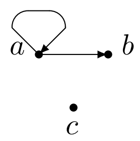
3 Lista 3 de subiecte

Exerciţiul 3.1. *Fie A o mulţime nevidă. Pentru orice relaţie binară Q pe A, notăm cu Q_{in}, Q_{out} următoarele relaţii binare pe A:*

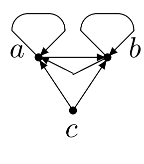
$$\begin{cases} Q_{in} = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)(b,c) \in Q\}, \\ Q_{out} = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)(a,b) \in Q\}. \end{cases}$$

De exemplu, dacă $A = \{a,b,c\}$ este o mulţime de cardinal 3 şi $Q = \{(a,a),(a,b)\} \subset A^2$, atunci $Q_{in} = \{(a,a),(b,a),(c,a),(a,b),(b,b),(c,b)\} \subset A^2$ şi $Q_{out} = \{(a,a),(a,b),(a,c)\} \subset A^2$. Ilustrăm grafic acest exemplu:

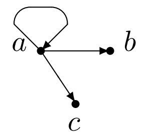
Q:



Q_{in}:



Q_{out}:



Intuitiv (făcând referire la această reprezentare a relaţiilor binare pe A ca grafuri orientate cu mulţimea de vârfuri A):

- *Q_{in} este mulţimea arcelor din A^2 care intră în vârfuri în care intră măcar un arc din Q;*
- *Q_{out} este mulţimea arcelor din A^2 care ies din vârfuri din care iese măcar un arc din Q.*

Fie R o relaţie binară nevidă pe A. Demonstraţi că:

(i) $R \subseteq R_{in} \cap R_{out}$;

(ii) $\begin{cases} R_{in} = R \circ A^2; \\ R_{out} = A^2 \circ R; \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} (R_{in})^{-1} = (R^{-1})_{out}; \\ (R_{out})^{-1} = (R^{-1})_{in}; \end{cases}$

(iv) $R_{in} \circ R_{out} = R_{in} \cap R_{out}$;

(v) dacă $R^2 \neq \emptyset$, *atunci* $R_{out} \circ R_{in} = A^2$.

Rezolvare: (i) Pentru orice $(a, c) \in R$, avem:
există $b \in A$ astfel încât $(b, c) \in R$, de exemplu $b = a$; aşadar $(a, c) \in R_{in}$;
există $b \in A$ astfel încât $(a, b) \in R$, de exemplu $b = c$; aşadar $(a, c) \in R_{out}$.

Aşadar $(a, c) \in R_{in} \cap R_{out}$, prin urmare $R \subseteq R_{in} \cap R_{out}$.

(ii) $R \circ A^2 = \{(a, c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)(a, b) \in A^2$ şi $(b, c) \in R\} = \{(a, c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)(b, c) \in R\} = R_{in}$, deoarece $(a, b) \in A^2$ pentru orice $(a, c) \in A^2$ şi $b \in A$.

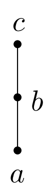
$A^2 \circ R = \{(a, c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)(a, b) \in R$ şi $(b, c) \in A^2\} = \{(a, c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)(a, b) \in R\} = R_{out}$, deoarece $(b, c) \in A^2$ pentru orice $(a, c) \in A^2$ şi $b \in A$.

(iii) $(A^2)^{-1} = \{(b, a) \in A^2 \mid (a, b) \in A^2\} = A^2$. Aplicând punctul (ii) de câte două ori pentru fiecare dintre următoarele şiruri de egalităţi, obţinem:

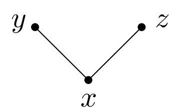
$(R_{in})^{-1} = (R \circ A^2)^{-1} = (A^2)^{-1} \circ R^{-1} = A^2 \circ R^{-1} = (R^{-1})_{out}$;
$(R_{out})^{-1} = (A^2 \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ (A^2)^{-1} = R^{-1} \circ A^2 = (R^{-1})_{in}$.
(iv) $A^2 \circ A^2 = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)(a,b) \in A^2$ şi $(b,c) \in A^2\} = A^2$. Folosim asociativitatea compunerii de relaţii binare. Conform punctului (ii), $R_{in} \circ R_{out} = (R \circ A^2) \circ (A^2 \circ R) = R \circ (A^2 \circ A^2) \circ R = R \circ A^2 \circ R = (R \circ A^2) \circ R = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)(a,b) \in R$ şi $(b,c) \in R \circ A^2\} = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b,d \in A)(a,b) \in R,\ (b,d) \in A^2$ şi $(d,c) \in R\} = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b,d \in A)(a,b) \in R$ şi $(d,c) \in R\} = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)(a,b) \in R$ şi $(\exists d \in A)(d,c) \in R\} = \{(a,c) \in A^2 \mid (a,c) \in R_{out}$ şi $(a,c) \in R_{in}\} = R_{in} \cap R_{out}$.
(v) Şi aici folosim asociativitatea compunerii de relaţii binare; a se observa că, în calculele următoare, ridicarea la puterea 2 are două semnificaţii diferite: $A^2 = A \times A$ este produsul cartezian de mulţimi, iar $R^2 = R \circ R$ este compunere de relaţii binare pe mulţimea A. Conform punctului (ii), $R_{out} \circ R_{in} = (A^2 \circ R) \circ (R \circ A^2) = A^2 \circ (R \circ R) \circ A^2 = A^2 \circ R^2 \circ A^2 = (A^2 \circ R^2) \circ A^2 = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)(a,b) \in A^2$ şi $(b,c) \in A^2 \circ R^2\} = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b,d \in A)(a,b) \in A^2,\ (b,d) \in R^2$ şi $(d,c) \in A^2\} = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b,d \in A)(b,d) \in R^2\} = A^2$, deoarece condiţia din definiţia mulţimii anterioare, care spune că R^2 are măcar un element, este adevărată prin ipoteză: $R^2 \neq \emptyset$.

Exerciţiul 3.2. *Fie mulţimile ordonate $(A, \leq)$ şi $(B, \sqsubseteq)$ (adică $\leq$ şi $\sqsubseteq$ sunt relaţii de ordine pe mulţimile A şi respectiv B), cu câte 3 elemente: $A = \{a,b,c\}$, $B = \{x,y,z\}$, şi cu următoarele diagrame Hasse:*

$(A, \leq) = \mathcal{L}_3$:
(lanţul cu 3 elemente)



$(B, \sqsubseteq)$:



Determinaţi toate funcţiile izotone $f : A \to B$. Câte astfel de funcţii există?

Rezolvare: Amintim că o funcţie $f : A \to B$ se zice *izotonă* ddacă, pentru orice $\alpha, \beta \in A$, dacă $\alpha \leq \beta$ atunci $f(\alpha) \sqsubseteq f(\beta)$. $(A, \leq)$ este lanţul cu 3 elemente: $a \leq b \leq c$ în A. Prin urmare, funcţiile izotone $f : A \to B$ sunt funcţiile $f : A \to B$ care verifică: $f(a) \sqsubseteq f(b) \sqsubseteq f(c)$ în B.
Cazul 1*:* Dacă $f(a) = x = \min(B)$, atunci $f(b)$ poate lua orice valoare din B.

Subcazul 1.1: Dacă $f(b) = x = \min(B)$, atunci $f(c)$ poate lua orice valoare din B. În acest subcaz se obţin $|B| = 3$ funcţii f.

Subcazul 1.2: Dacă $f(b) = y$, atunci $y \sqsubseteq f(c)$, aşadar $f(c) = y$. Aici se obţine o singură funcţie f.

Subcazul 1.3: Dacă $f(b) = z$, atunci $z \sqsubseteq f(c)$, aşadar $f(c) = z$. Şi aici obţinem tot o singură funcţie f.

Cazul 2*:* Dacă $f(a) = y$, atunci $y \sqsubseteq f(b) \sqsubseteq f(c)$, ceea ce implică $f(b) = f(c) = y$. În acest caz obţinem o singură funcţie f.

Cazul 3*:* Dacă $f(a) = z$, atunci $z \sqsubseteq f(b) \sqsubseteq f(c)$, ceea ce implică $f(b) = f(c) = z$. Şi în acest caz se obţine o singură funcţie f.

Aşadar, am obţinut 7 funcţii izotone de la $(A, \leq)$ la $(B, \sqsubseteq)$: $f_i : A \to B$, cu $i \in \overline{1,7}$, date în tabelul următor:

α	a	b	c
$f_1(\alpha)$	x	x	x
$f_2(\alpha)$	x	x	y
$f_3(\alpha)$	x	x	z
$f_4(\alpha)$	x	y	y
$f_5(\alpha)$	x	z	z
$f_6(\alpha)$	y	y	y
$f_7(\alpha)$	z	z	z