ANALIZĂ MATEMATICĂ CURS 1 — 04.10.2018

RELAȚII

Def. Fie X și Y două mulțimi. O mulțime $R \subset X \times Y$ se num. relație $(x, y) \in R$ notăm xRy.

Def. Fie X o mulțime și $R \subset X \times X$. Atunci

1. R s.n reflexivă dacă xRx, $\forall x \in X$
2. R s.n simetrică dacă $xRy \Rightarrow yRx$
3. R s.n antisimetrică dacă xRy și $yRx \Rightarrow x = y$

Dacă R verifică 1 și 3 s.n relație de **PREORDINE**
Dacă R verifică 1, 2 și 3 s.n relație de **ORDINE** $(\leq, <)$ / **ECHIVALENȚĂ** $(\sim, \equiv, =)$

O mulțime X împreună cu o relație de ordine $(\leq)$ s.n mulțime ordonată $(X, \leq)$

O relație de **ORDINE** s.n totală dacă $\forall x, y \in X \Rightarrow x \leq y$ sau $y \leq x$.

O mulțime A s.n mărginită superior dacă $\exists a \in X$ aî $\forall x \in A \Rightarrow x \leq a$.
a = **majorant al mulțimii A**

A s.n mărginită dacă $\exists a, b \in X$ aî $\forall x \in A \Rightarrow a \leq x \leq b$

$(X, \leq)$ - mulțime ordonată, $A \subset X$ și $a \in X$
a s.n **supremul mulțimii A** dacă
1. $\forall x \in A \Rightarrow x \leq a$ (este majorant)
2. $\forall b \in X$ aî $(\forall x \in A \Rightarrow x \leq b) \Rightarrow a \leq b$

Def. O structură $(S, +, \cdot, \leq)$ s.n corp ordonat dacă:

1. $(S, +, \cdot)$ este un corp comutativ
2. $(S, \leq)$ o mult total ord.
3. dacă $x \leq y$ și $z \in S$ at. $x + z \leq y + z$
4. dacă $x \leq y$ și $z \geq 0$ at. $x \cdot z \leq y \cdot z$

$\boxed{P}$ (REGULA SEMNELOR)

Fie $(S, +, \leq)$ un corp ordonat și $x, y, z \in S$
Atunci
1. dacă $x \geq 0$ și $y \geq 0 \Rightarrow x + y \geq 0$
   dacă $x \leq 0$ și $y \geq 0 \Rightarrow x + y \leq 0$
2. dacă $x \geq 0$ și $y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$
   dacă $x \leq 0$ și $y \leq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$
   dacă $x \leq 0$ și $y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \leq 0$
3. dacă $\forall x \in S$, $x \geq 0$ sau $x \leq 0$
4. $\forall x \in S \Rightarrow x^2 \geq 0$
5. $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0$
6. $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$

7. $1^2 = 1 > 0$
8. $x_1 \geq 0$ și $x_2 \geq 0$ și $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$

Def. Fie $(S, +, \cdot, \leq)$ si $(\mathbb{R}, \oplus, \odot, \leq)$ două corpuri total ordonate. O funcție $f: S \to \mathbb{R}$ s.n morfism de corpuri ordonate dacă:
1. $f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$, $\forall\, x, y \in S$
2. $f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y)$, $\forall\, x, y \in S$
3. f este cresc.

OBS! Dacă în plus f este bijectivă, f s.n izomorfism.

$\boxed{P}$ Fie $(S, +, \cdot, \leq)$ un corp ordonat. Atunci $\exists$ morfism de corpuri ordonate $f: \mathbb{Q} \to S$ dat de

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n \cdot 1}{m \cdot 1} = (n \cdot 1)(m \cdot 1)^{-1}$$

Def. Un corp ordonat $(S, +, \cdot, \leq)$ s.n complet ordonat dacă $\forall\, A \subset S$ mărginită superior există $\sup A$

Teoremă Fie $(S, +, \cdot, \leq)$ si $(\mathbb{R}, \oplus, \odot, \leq)$ două corpuri complet ordonate. Atunci $\exists$ izomorfism de corpuri ordonate $f: S \to \mathbb{R}$. Un astfel de corp îl numim corpul numerelor reale și îl notăm $\mathbb{R}$.