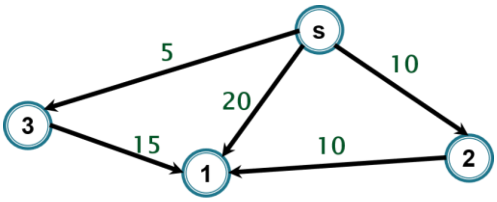
1. Arătați că în orice grup de n persoane între care există relații de prietenie reciprocă există două persoane cu același număr de prieteni

2. Fie G un graf conex ponderat cu ponderile muchiilor distincte. Arătați că există un unic arbore parțial de cost minim în G (fără a folosi în justificare modul de funcționare al unui algoritm de determinare a unui apcm – vezi și pb. 4).

3. Fie G un graf conex ponderat și e o muchie de cost minim.
a) Arătați că există un arbore parțial de cost minim în G care conține e.
b) Orice apcm din G conține e? Dar o muchie de cost w(e)? Justificați

4. Fie G un graf conex ponderat și T un arbore parțial de cost minim.
Arătați că dacă în lista de muchii ale lui G ordonate după cost în caz de egalitate se dau prioritate muchiilor din T, atunci rezultatul aplicării algoritmului lui Kruskal este chiar T
(orice arbore parțial de cost minim al lui G poate fi obținut de algoritmul lui Kruskal)
– discutată la 243

5. a) Care sunt arborii de distanțe față de vârful s pentru graful următor? Care dintre ei va fi obținut folosind algoritmul lui Dijkstra?



b) Poate fi algoritmul lui Dijkstra modificat astfel încât să detecteze dacă există mai multe drumuri minime între două vârfuri date s și t (atunci când ponderile sunt pozitive)/ mai mulți arbori de distanțe față de s (doar să determine dacă există mai mulți, nu să îi și afișeze)? Dacă da, care va fi complexitatea algoritmului astfel modificat?

6. (Cormen)
Dați exemplu de un graf orientat ponderat G cu proprietatea că există un vârf de start s astfel încât pentru orice arc uv există un arbore de distanțe față de s care conține uv și unul care nu conține uv (ponderile pot fi și negative, dar nu există circuite negative)

7. (Cormen) - Arbitraj valutar
Arbitraj = utilizarea discrepanțelor existente între ratele de schimb pentru transformarea unei unități dintr-un anumit tip de valută în una sau mai multe unități de același tip Exemplu:
1 dolar american - cumpăr 0,7 lire englezești
1 liră englezească – cumpăr 9,5 franci francezi

1 franc francez – cumpăr 0,16 dolari americani
=> cu 1 dolar american cumpăr 0,7*9,5*0,16=1,064 dolari americani => profit
Se dau n valute $v_1,..,v_n$ și o matrice e cu semnificația:
e(i,j) = câte unități (număr real nenegativ) de v_j se pot cumpăra folosind o unitate de v_i
Propuneți un algoritm eficient care să determine dacă există o succesiune de valute $v_{i1},...,v_{ik}$ astfel încât

$$e(i_1,i_2)*...*e(i_{k-1},i_k) *e(i_k,i_1) >1$$

(pornind cu o unitate de v_{i1} și schimbând valute una în alta în ordinea dată de această succesiune ajungem sa avem mai mult de o unitate din v_{i1})
În caz afirmativ să se afișeze o astfel de succesiune. Care este complexitatea algoritmului propus?
Indicație v. problema de la laborator cu drumuri sigure

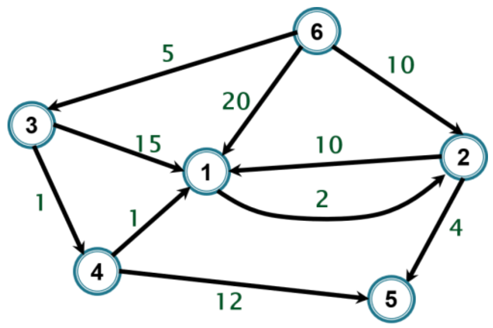
8. Fie N=(G,s,t,c) o rețea de transport, f un fux în N și P un s -t lanț f-nesaturat (un s-t drum de creștere). Arătați cu fluxul revizuit de-a lungul lui P, notat f_P , este flux în N și val(f_P) = val(f) + i(P). În plus, lanțul P este f_P -saturat.

9.a) Dacă într-o hartă M = (V,E, F) conexă, simplă, gradul minim al unei fețe este 5 iar al unui vârf este cel puțin 3, atunci ea conține cel puțin 12 fețe de grad 5.
b) Dacă într-o hartă M = (V,E, F) conexă, simplă, 3-regulată (cu toate vârfurile de grad 3) orice față are gradul 5 sau 6 atunci sunt exact 12 fețe de grad 5.
(Exemple de grafuri planare cu fete de grad 5,6: mingea de fotbal, dodecaedru – vezi final)

10. Pentru orice hartă M = (V,E, F) conexă simplă avem:
a) $n - 1 \leq |E| \leq 3(n - 2)$, $1 \leq |F| \leq 2(n - 2)$.
b) Pentru orice $i \in \{1, 2, 3, . . . , 2n-4\}$ există o hartă conexă simplă $M_i = (V, E_i, F_i)$ cu $|V| = n$, $|E_i| = n + i - 2$, $|F_i| = i$.

Întrebări /grile

11. Pe graful de mai jos se aplică algoritmul lui Dijkstra pentru vârful sursa 6. Care este vectorul de etichete de distanțe după ce au fost vizitate (extrase, finalizate) 3 vârfuri și relaxate arcele care ies din ele. Justificați.



12. Dați exemplu de un graf cu 8 vârfuri pentru care cardinalul maxim al unui cuplaj egal cu 2.

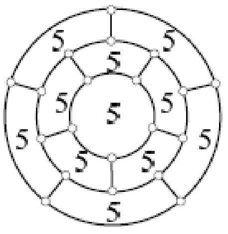
13. Care este numărul maxim de muchii ale unui graf cu 6 vârfuri? Dar ale unui graf bipartit cu 6 vârfuri? Dar ale unui graf planar cu 6 vârfuri? Justificați.

14. Dați exemplu de graf neorientat cu 5 vârfuri și minim 6 muchii care are un arbore parțial de cost minim care este și arbore de distanțe față de 1. Justificați.

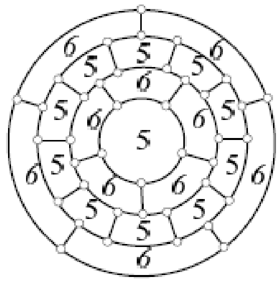
15. Fie G un graf neorientat ponderat cu ponderile muchiilor distincte. Fie T un arbore de cost minim în G. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:
a) T nu conține muchia de cost maxim din G
b) T conține muchia de cost minim din G
c) T conține primele doua muchii cu cele mai mici costuri din G
d) T este unicul arbore parțial de cost minim din G

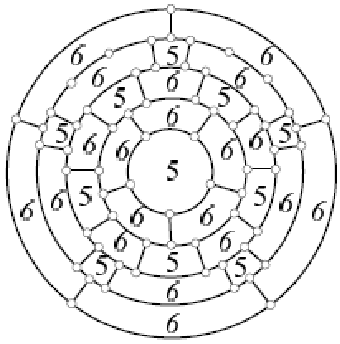
16. Fie N=(G,s,t,c) o rețea de transport și f un flux în N. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

a) Valoarea lui f este mai mică sau egală cu suma capacităților arcelor care ies din s
b) Valoarea lui f este mai mică sau egală cu suma capacităților arcelor care intră în t
c) Valoarea lui f este mai mică sau egală cu capacitatea minimă a unei tăieturi (s-t tăieturi) din G
d) Valoarea lui f este mai mică sau egală cu capacitatea maximă a unei tăieturi (s-t tăieturi) din G



dodecaedru





mingea de fotbal