Algoritmi avansaţi

Laborator 7 (săpt. 13 şi 14)

1. (1p) *Intersecţii de semiplane orizontale şi verticale.*

Input. Numărul n de semiplane, coeficienţii care determină inecuaţia fiecărui semiplan. Astfel, pentru semiplanul i ($i = 1, \dots, n$) sunt citiţi coeficienţii a_i, b_i, c_i corespunzători unei inecuaţii de forma $a_i x + b_i y + c_i \leq 0$.

Output. Programul afişează natura intersecţiei, conform următoarelor situaţii: (a) intersecţie vidă; (b1) intersecţie nevidă şi nemărginită; (b2) intersecţie nevidă şi mărginită.

Precizare. Pentru testare semiplanele vor fi orizontale şi verticale (ambele situaţii sunt posibile, iar acest lucru nu mai trebuie verificat). Algoritmul va avea complexitatea-timp liniară.

Exemple. (i) $n = 3$, $(a_1, b_1, c_1) = (1, 0, -1)$, $(a_2, b_2, c_2) = (-1, 0, 2)$, $(a_3, b_3, c_3) = (0, 1, 3)$. Cele trei semiplane au inecuaţiile $x - 1 \leq 0$, $-x + 2 \leq 0$, respectiv $y + 3 \leq 0$. Inecuaţiile pot fi rescrise $x \leq 1$, $x \geq 2$, $y \leq -3$. Se afişează `intersecţia este vidă`.

(ii) $n = 3$, $(a_1, b_1, c_1) = (-1, 0, 1)$, $(a_2, b_2, c_2) = (1, 0, -2)$, $(a_3, b_3, c_3) = (0, 1, 3)$. Cele trei semiplane au inecuaţiile $-x + 1 \leq 0$, $x - 2 \leq 0$, respectiv $y + 3 \leq 0$. Inecuaţiile pot fi rescrise $x \geq 1$, $x \leq 2$, $y \leq -3$. Se afişează `intersecţia este nevidă, nemărginită`.

(iii) $n = 4$, $(a_1, b_1, c_1) = (-1, 0, 1)$, $(a_2, b_2, c_2) = (1, 0, -2)$, $(a_3, b_3, c_3) = (0, 1, 3)$, $(a_4, b_4, c_4) = (0, -2, -8)$. Cele patru semiplane au inecuaţiile $-x + 1 \leq 0$, $x - 2 \leq 0$, $y + 3 \leq 0$, respectiv $-2y - 8 \leq 0$. Inecuaţiile pot fi rescrise $x \geq 1$, $x \leq 2$, $y \leq -3$, $y \geq -4$. Se afişează `intersecţia este nevidă, mărginită`.

2. (2p) *Poziţia unui punct faţă de semiplane orizontale şi verticale.*

Input. Coordonatele x_Q, y_Q ale punctului Q, numărul n de semiplane, coeficienţii care determină inecuaţia fiecărui semiplan. Pentru semiplanul i ($i = 1, \dots, n$) sunt citiţi coeficienţii a_i, b_i, c_i corespunzători unei inecuaţii de forma $a_i x + b_i y + c_i \leq 0$.

Output. Programul stabileşte (a) dacă punctul Q este situat în interiorul unui dreptunghi ale cărui vârfuri sunt exact intersecţii ale dreptelor suport ale semiplanelor iar laturile sunt incluse în dreptele suport corespunzătoare; (b) dacă răspunsul de la (a) este afirmativ, determină valoarea minimă a ariilor tuturor dreptunghiulor cu această proprietate.

Precizare. Pentru testare semiplanele vor fi orizontale şi verticale (ambele situaţii sunt posibile, iar acest lucru nu mai trebuie verificat). Algoritmul va avea o complexitate-timp cât mai bună.

Exemple. (i) $Q = (1.5, -4)$, $n = 3$, $(a_1, b_1, c_1) = (-1, 0, 1)$, $(a_2, b_2, c_2) = (1, 0, -2)$, $(a_3, b_3, c_3) = (0, 1, 3)$. Cele trei semiplane au inecuaţiile $-x + 1 \leq 0$, $x - 2 \leq 0$, respectiv $y + 3 \leq 0$. Inecuaţiile pot fi rescrise $x \geq 1$, $x \leq 2$, $y \leq -3$. Puncte de intersecţie între dreptele suport sunt $(1, -3)$, $(2, -3)$. Nu există un dreptunghi (nedegenerat) ale cărui vârfuri să fie exact intersecţii ale dreptelor suport ale semiplanelor date, chiar dacă punctul Q aparţine intersecţiei semiplanelor. Se afişează `(a) nu există un dreptunghi cu proprietatea cerută`.

(ii) $Q = (0, 0)$, $n = 4$, $(a_1, b_1, c_1) = (-1, 0, 1)$, $(a_2, b_2, c_2) = (1, 0, -2)$, $(a_3, b_3, c_3) = (0, 1, 3)$, $(a_4, b_4, c_4) = (0, -2, -8)$. Cele patru semiplane au inecuaţiile $-x + 1 \leq 0$, $x - 2 \leq 0$, $y + 3 \leq 0$, respectiv $-2y - 8 \leq 0$. Inecuaţiile pot fi rescrise $x \geq 1$, $x \leq 2$, $y \leq -3$, $y \geq -4$. Există un dreptunghi cu vârfurile date de intersecţia dreptelor suport (vârfurile sunt $(1, -3), (1, -4), (2, -4), (2, -3)$, dar punctul Q nu este situat în interiorul acestuia. Se afişează `(a) nu există un dreptunghi cu proprietatea cerută`.

(iii) $Q = (1.25, -3.5)$, $n = 4$, $(a_1, b_1, c_1) = (-1, 0, 1)$, $(a_2, b_2, c_2) = (1, 0, -2)$, $(a_3, b_3, c_3) = (0, 1, 3)$, $(a_4, b_4, c_4) = (0, -2, -8)$. Cele patru semiplane au inecuaţiile $-x + 1 \leq 0$, $x - 2 \leq 0$, $y + 3 \leq 0$, respectiv $-2y - 8 \leq 0$. Inecuaţiile pot fi rescrise $x \geq 1$, $x \leq 2$, $y \leq -3$, $y \geq -4$. Există un singur dreptunghi cu vârfurile date de intersecţia dreptelor suport (vârfurile sunt $(1, -3), (1, -4), (2, -4), (2, -3)$, aria este 1), iar punctul Q este situat în interiorul acestuia. Se afişează `(a) există un dreptunghi cu proprietatea cerută, (b) valoarea minimă a ariilor dreptunghiurilor cu proprietatea cerută este 1`.

(iv) $Q = (2, 1)$, $n = 11$, $(a_1, b_1, c_1) = (-1, 0, -1)$, $(a_2, b_2, c_2) = (0, -3, -6)$, $(a_3, b_3, c_3) = (0, 2, -6)$, $(a_4, b_4, c_4) = (1, 0, -3)$, $(a_5, b_5, c_5) = (0, 1, -2)$, $(a_6, b_6, c_6) = (2, 0, -10)$, $(a_7, b_7, c_7) = (0, -1, -3)$, $(a_8, b_8, c_8) = (-4, 0, 0)$, $(a_9, b_9, c_9) = (-1, 0, 1)$, $(a_{10}, b_{10}, c_{10}) = (0, -1, -1)$, $(a_{11}, b_{11}, c_{11}) = (1, 0, -4)$. Inecuaţiile semiplanelor sunt, respectiv: $x \geq -1$, $y \geq -2$, $y \leq 3$, $x \leq 3$, $y \leq 2$, $x \leq 5$, $y \geq -3$, $x \geq 0$, $x \geq 1$, $y \geq -1$, $x \leq 4$. Există mai multe dreptunghiuri ca în enunţ astfel ca punctul Q să fie situat în interiorul acestora. Valoarea minimă a ariilor acestora este 8. Se afişează `(a) există un dreptunghi cu proprietatea cerută, (b) valoarea minimă a ariilor dreptunghiurilor cu proprietatea cerută este 8`.