

EXAMEN SERIA 14 (13.06.2020)  
 SUBIECTE (Geometrie și algebră liniară)

- ① Fie  $(\mathbb{R}^3, g_0)$  spațiul vectorial euclidian canonic,  
 $u = (1, 2, 3)$  și  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ , unde  $f(x) = u \cdot g_0(x, u)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^3$ .  
 a)  $\dim \text{Ker}(f) = 2$ ; b)  $\dim \text{Im } f = 2$ ; c)  $f \in \text{Aut}(\mathbb{R}^3)$ ; d)  $\dim \text{Ker } f = 1$ .
- ② Fie  $(\mathbb{R}^3, g_0)$  spațiul vectorial euclidian canonic.  
 Fie  $U = \{ (a, 0, a) \mid a \in \mathbb{R} \}$  și  $s \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$   
 simetria ortogonală față de  $U^\perp$ .  
 a)  $s(x) = (x_1, -x_3, -x_2)$ ; b)  $s(x) = (-x_3, x_2, -x_1)$   
 c)  $s(x) = (x_1, x_2, -x_3)$ ; d)  $s(x) = (-x_1, x_2, -x_3)$ .
- ③ În spațiul vectorial canonic  $(\mathbb{R}^3, +_1)$   $|\mathbb{R}$  se consideră  
 forma pătratică  $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  
 $Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$ .  
 a)  $Q$  este pozitiv definită; b)  $Q$  are semnatura  $(2, 1)$ ;  
 c)  $Q$  are semnatura  $(1, 2)$ ; d)  $Q$  este negativ definită.
- ④ Fie  $(\mathbb{R}_n[x], +_1)$   $|\mathbb{R}$  spațiul vectorial al polinoamelor  
 de grad cel mult  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  și  
 $f: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ ,  $f(P) = P'$ ,  $\forall P \in \mathbb{R}_2[x]$ .  
 Să se afle matricea  $A = [f]_{R_1, R_2}$ , unde  
 $R_1 = \{1, x, x^2\}$  este reperul canonic al lui  $\mathbb{R}_2[x]$   
 $R_2 = \{1, x\}$  este reperul canonic al lui  $\mathbb{R}_1[x]$   
 a)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ; b)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ; c)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;  
 d) a, b, c sunt false.



- ⑤ În planul euclidian  $E_2$  se consideră conica  
 $\Gamma: f(x) = x_1^3 - 8x_1x_2 + 7x_2^2 - 12x_1 - 6x_2 - 9 = 0$   
 a) Să se aducă la forma canonică, utilizând izometrii.  
 b) Reprezentare grafică.
- ⑥ Fie  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)_{|\mathbb{R}}$  spațiul vectorial canonic și  $R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$  reperul canonic al lui  $\mathbb{R}^3$ .  
 Considerăm  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ , unde  $A = [f]_{R_0, R_0} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$   
 și vectorii  $u_1 = e_1 + e_2, u_2 = e_2 + e_3, u_3 = e_1 + e_2 + e_3, u = e_1 + 2e_2 + e_3$ .  
 a) Să se arate că  $u_1, u_2, u_3$  sunt vectori proprii ai lui  $f$ . Precizați valorile proprii corespunzătoare.  
 b) Să se arate că  $R = \{u_1, u_2, u_3\}$  este reper al lui  $\mathbb{R}^3$ .  
 Determinați coordonatele lui  $u$  și  $f(u)$  în raport cu reperul  $R$ .
- ⑦ Fie  $(\mathbb{R}^3, g_0)$  spațiul vectorial euclidian canonic și  
 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x) = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$ .  
 a) Scrieți matricea asociată lui  $f$  în raport cu reperul canonic al lui  $\mathbb{R}^3$ . Arătați că  $f$  este proiecție și endomorfism simetric.  
 b) Să se determine un reper ortonormat  $R$  al lui  $\mathbb{R}^3$  în raport cu care matricea  $[f]_{R, R}$  este diagonală.
- ⑧ În spațiul euclidian  $E_3$  se consideră dreptele  
 $d_1: x_2 = x_3 = 0$  ;  $d_2: \begin{cases} x_2 - 1 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$   
 a) Să se scrie ecuația perpendiculararei comune a dreptelor  $d_1$  și  $d_2$ , drepti necoplanare.  
 b) Să se afle distanța dintre dreptele  $d_1$  și  $d_2$ .
- ⑨ Fie  $(\mathbb{R}^3, g_0)$  spațiul vectorial euclidian canonic și  $R_0$  reperul canonic ortonormat al lui  $\mathbb{R}^3$ .  
 Fie  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ , unde  $A = [f]_{R_0, R_0} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ .  
 a) Să se arate că  $f$  este o rotație.  
 b) Să se afle axa și unghiul de rotație.



(OBS) (Cititi cu atentie!)

- La începutul examenului faceți prezenta la grupa corespunzătoare; treceți pe forum la discuția grupa.
  - Timp de lucru 2 ore (8:00-10:00).
  - Timp de încărcare pe Moodle 30 min (10:00-10:30).
  - Scanati și trimiteți UN SINGUR FISIER PDF,  
numit: Nume\_Prenume\_grupa\_examen.13.06.2020.pdf
  - Utilizați numai foi albe A4.
  - Se trec: nume, prenume, grupa, seria, data, examen
  - Subiectele se scriu și se rezolvă ÎN ORDINE (1,2,3,4,5,6,7,8,9) - respectați ordinea din fișierul cu subiecte!
  - La subiectele grila 1,2,3,4 se precizează  
NUMAI VARIANTA CORECTĂ
  - La subiectele 5,6,7,8,9 rezolvările sunt COMPLETE
  - Scrieți de mână, ordonat, mare și clar, cu stilou sau pix negru sau albastru
  - NU tehnoredactați
  - Foile se NUMEROTEAZĂ
  - Scanati (cu CamScanner) fiecare pagină numerotată, renumiți fișierul ca mai sus și trimiteți ca fișier PDF, pe moodle.
  - PUNCTAJ: { fiecare subiect are 1 punct  
se acordă 1 punct din oficiu
- Succes!