

Prelucrarea Semnalelor

Laboratorul 1

1 Semnale continue și semnale discrete

Majoritatea semnalelor ce descriu fenomene fizice (mecanice, optice, electrice, chimice, etc) sunt semnale continue și pot fi reprezentate matematic ca o funcție $x_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Valoarea semnalului la momentul t este $x_a(t)$.

Eșantionare. Pentru a putea fi prelucrate numeric, este nevoie ca aceste semnale să fie discretizate. De regulă, variația mărimii fizice măsurate de elementul sensibil al senzorului este întâi tradusă în variația unei alte mărimi fizice mai convenabilă prelucrării, de cele mai multe ori electrică. Apoi, semnalul este eșantionat, adică transformat într-un semnal discret, prin înregistrarea valorilor acestuia la momente distincte de timp.

Un semnal discret este o funcție $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. Relația dintre semnalul continuu și cel discretizat este $x[n] = x_a(nT)$, unde T se numește perioada de eșantionare. Frecvența de eșantionare, $f_s = \frac{2\pi}{T}$ măsoară numărul de eșantioane pe secundă și are unitatea de măsură Hz.

Frecvența $f_N = 0.5f_s$ se numește Frecvența Nyquist.

2 Fenomenul de aliere (aliasing)

Fie un semnal sinusoidal discret

$$x[n] = a \cos(\omega n + \phi) = a \cos(2\pi f n + \phi), \quad (1)$$

unde ω reprezintă frecvența semnalului, iar ϕ faza acestuia.

Spre deosebire de semnalul sinusoidal continuu, care este periodic, cel discret este periodic doar în cazul în care $N = \frac{2\pi k}{\omega}$ este număr întreg, unde $k \in \mathbb{Z}$.

O altă deosebire constă în faptul că frecvența unui semnal sinusoidal discret nu este unic determinată, deoarece $\cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi k)$. Această proprietate duce la fenomenul numit aliere, care pune probleme în reconstrucția semnalelor pornind de la un set de eșantioane. Figura 1 ilustrează această situație. Punctele galbene din al doilea rând reprezintă eșantioane obținute prin eșantionare la o frecvență mai mare decât frecvența Nyquist a semnalului original. Pornind de la aceste eșantioane, semnalele reprezentate cu roșu și verde reprezintă candidați valizi pentru reconstrucția semnalului inițial.

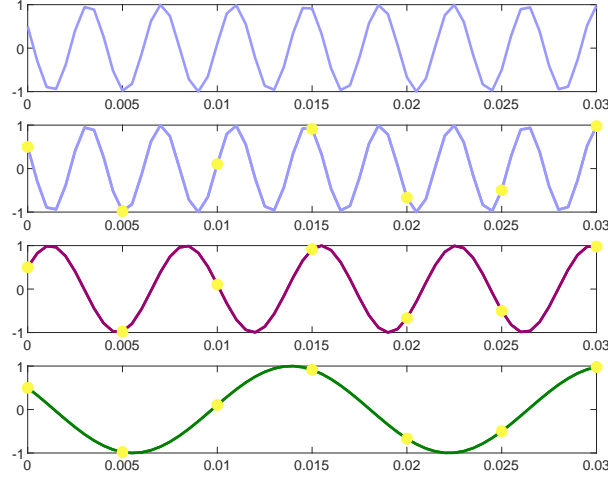


Figure 1: Fenomenul de aliere

Pentru a contracara efectul de aliere, semnalele sunt de obicei filtrate înainte de a fi eșantionate, pentru a elimina frecvențele mai mari decât frecvența Nyquist. Prin urmare un filtru anti-alieră va fi un filtru trece-jos cu frecvența de tăiere egală cu frecvența Nyquist.

3 Decibelul

Puterea unui semnal este exprimată ca pătratul magnitudinii $P = |x(n)|^2$. Decibelul măsoară puterea unui semnal în raport cu o putere de referință, în scară logaritmică.

$$R = 10 \log_{10} \frac{P}{P_0} dB \quad (2)$$

Definirea puterii în termeni relativi la o referință vine din istoria unității de măsură în domeniul telecomunicațiilor, unde este necesară transmiterea unui semnal pe distanțe lungi fără pierderea calității acestuia. Similar puterii, alte proprietăți ale unui semnal pot fi exprimate în dB: amplitudinea, energia. Nivelul de intensitate a sunetului se măsoară de asemenea în dB, unde intensitatea de referință este limita percepției umane, $I_0 = 10^{-12} W/m^2$.

O altă utilizare frecventă a unității de măsură o reprezintă caracterizarea unui semnal achiziționat sau a unui canal de comunicație din perspectiva prezenței zgomotului. Raportul semnal-zgomot este definit ca raportul de putere

$$SNR = \frac{P_{semnal}}{P_{zgomot}} = \left(\frac{A_{semnal}}{A_{zgomot}} \right)^2 \quad (3)$$

Reprezentat în dB, raportul devine $SNR_{dB} = 10 \log_{10} SNR$.

În cursurile/laboratoarele următoare veți afla mai multe detalii despre definiția și tipurile de zgomot.

4 Ghid Python

Pentru a rezolva exercițiile din laboratorul de astăzi, aveți nevoie de biblioteca `numpy` și modulele `matplotlib.pyplot`, `scipy.io.wavfile`, `scipy.signal`.

Funcții utilizate:

```
numpy.pi
numpy.cos(), numpy.sin()
numpy.linspace(start, end, no_samples)
numpy.round(number)
```

Valori discrete se pot afișa grafic folosind funcția `stem()`. Dacă ați importat modulul `matplotlib.pyplot` cu numele `plt`, sintaxa acesteia este `plt.stem(x,y)`.

Pentru a genera un grafic cu n subplot-uri, utilizați următoarea secvență:

```
fig, axs = plt.subplots(n)
fig.suptitle('Titlu principal')
axs[0].plot(x0,y0)
axs[1].plot(x1,y1)
...
```

Dacă doriți să setați aceeași proprietate pentru toate subploturile (spre exemplu limitele axelor sau eticheta lor),

```
for ax in axs.flat:
    ax.set_xlim([xmin, xmax])
```

5 Exerciții

1. Un semnal este digitizat cu o frecvență de eșantionare de 2000 Hz.
 - (a) Care este intervalul de timp între două eșantioane?
 - (b) Dacă un eșantion este memorat pe 4 biți, câți bytes vor ocupa 1 oră de achiziție?

2. Fie semnalele continue $x(t) = \cos(200\pi t)$ și $y(t) = \cos(80\pi t)$ și suma lor, $z(t) = x(t) + y(t)$. Care este frecvența minimă de eșantionare pentru $z(t)$ astfel încât să nu se producă fenomenul de aliere?
3. Fie semnalele continue $x(t) = \cos(520\pi t + \pi/3)$, $y(t) = \cos(280\pi t - \pi/3)$ și $z(t) = \cos(120\pi t + \pi/3)$.
 - (a) În Python, simulați axa reală de timp printr-un șir de numere suficient de apropiate, spre exemplu $[0 : 0.0005 : 0.03]$.
 - (b) Construiți semnalele $x(t)$, $y(t)$ și $z(t)$ și afișați-le grafic.
 - (c) Eșantionați semnalele cu o frecvență de 200 Hz pentru a obține $x[n]$, $y[n]$ și $z[n]$ și afișați-le grafic.
 - (d) Reprezentați grafic pozițiile eșantioanelor pentru a obține Figura 1 și observați fenomenul de aliere.
4. Puterea unui semnal este $P_{\text{semnal}} = 80\text{dB}$. Se cunoaște raportul semnal-zgomot, $SNR_{\text{dB}} = 90\text{dB}$. Care este puterea zgomotului?
5. **(Bonus)** Fișierul `sound.wav` conține două sunete a căror frecvență scade cu timpul. Încărcați fișierul și afișați spectrograma.

```
rate, x = scipy.io.wavfile.read('sound.wav')
f, t, s = scipy.signal.spectrogram(x, fs=rate)

fig = plt.figure()
plt.pcolormesh(t, f, 10*np.log10(s), shading='gouraud')
plt.ylabel('Frequency [Hz]')
plt.xlabel('Time [sec]')
plt.show()
```

Pornind de la spectrogramă, descrieți în cuvinte o metodă prin care să identificați și izolați cele două sunete separate.