Breviar pentru Cursurile de Logică Matematică şi Computaţională despre Logica Propoziţională Clasică

Claudia MUREŞAN

UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI, FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

2019–2020, Semestrul I

1 Sintaxa Sistemului Formal al Logicii Propoziţionale Clasice

Alfabetul sistemului formal al calculului propoziţional clasic:

Definiţiile şi notaţiile 1.1. Următoarele **simboluri** formează **alfabetul** sistemului formal al calculului propoziţional clasic:

(i) *variabilele propoziţionale*, notate, de obicei, u, v, w etc., uneori cu indici, care formează o mulţime infinită, şi de obicei considerată numărabilă; vom nota cu V mulţimea variabilelor propoziţionale;

(ii) *conectorii logici primitivi*:

$\neg$: *negaţia* (se citeşte: "non" sau "not");
$\rightarrow$: *implicaţia* (se citeşte: "implică");

(iii) parantezele: (,), [, şi].

Simbolurile enumerate mai sus se numesc *simboluri primitive* şi sunt presupuse a fi două câte două distincte (de exemplu $\neg \notin V$ etc.).

La acestea se adaugă *conectorii logici derivaţi*, care se definesc pe baza conectorilor logici primitivi, şi care vor fi prezentaţi mai jos.

Să notăm cu A *alfabetul sistemului formal al calculului propoziţional clasic*, adică mulţimea simbolurilor primitive: $A = V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), [,]\}$.

Definiţia 1.1. Şirurile (alăturările) finite şi nevide de simboluri primitive se numesc *cuvinte*.

Definiţia 1.2. Un *enunţ* este un cuvânt φ care satisface una dintre condiţiile următoare:

- (E_1) φ este o variabilă propoziţională;
- (E_2) există un enunţ ψ a. î. $\varphi = \neg\psi$;
- (E_3) există două enunţuri ψ şi χ a. î. $\varphi = \psi \rightarrow \chi$.

Definiţia 1.3. Variabilele propoziţionale se numesc *enunţuri atomice* sau *enunţuri elementare*.
Enunţurile care nu sunt variabile propoziţionale, adică se află în cazul (E_2) sau (E_3) din definiţia anterioară, se numesc *enunţuri compuse*.

Notaţia 1.1. Vom nota cu E mulţimea tuturor enunţurilor.

A se vedea discuţia din curs despre **arborii binari asociaţi enunţurilor** şi **parantezările corecte**.

Observaţia 1.1. Observăm că, în scrierea enunţurilor, dată de definiţia de mai sus, conectorii logici primitivi apar scrişi la fel ca nişte operatori:

- $\neg$ apare scris la fel ca un operator unar;
- $\rightarrow$ apare scris la fel ca un operator binar.

Pentru a evita încărcarea scrierii cu prea multe paranteze, se face următoarea **convenţie**: se acordă prioritate mai mare conectorului logic "unar" $\neg$ şi prioritate mai mică celui "binar", $\rightarrow$.

Remarca 1.1. Conform definiţiei enunţurilor, **toate enunţurile** se obţin prin aplicarea regulilor (E_1), (E_2) şi (E_3), aşadar E este cea mai mică mulţime de cuvinte peste A care include pe V şi este închisă la $\neg$ şi $\rightarrow$, i. e. cea mai mică (în sensul incluziunii, adică în posetul $(\mathcal{P}(A^+), \subseteq)$) submulţime M a lui A^+ cu proprietăţile:

(i) $V \subseteq M$,

(ii) pentru orice $\varphi \in M$, rezultă că $\neg\varphi \in M$,

(iii) pentru orice $\varphi, \psi \in M$, rezultă că $\varphi \rightarrow \psi \in M$.

Remarca 1.2 (E e închiderea lui V în familia Moore a submulţimilor lui A^+ închise la $\neg$ şi $\rightarrow$). Fie $\mathcal{M} = \{M \subseteq A^+ \mid (\forall\, \psi, \chi \in M)\, (\neg\, \psi, \psi \rightarrow \chi \in M)\}$. Atunci $\mathcal{M}$ este sistem de închidere pe $\mathcal{P}(A^+)$.

Dacă notăm cu $C_{\mathcal{M}} : \mathcal{P}(A^+) \rightarrow \mathcal{P}(A^+)$ operatorul de închidere asociat lui $\mathcal{M}$, atunci, conform remarcii anterioare, $E = C_{\mathcal{M}}(V)$.

Notaţia 1.2 (abrevieri pentru enunţuri compuse). Pentru orice enunţuri $\varphi, \psi \in E$, introducem notaţiile (abrevierile):

$\varphi \vee \psi := \neg\, \varphi \rightarrow \psi$ (*disjuncţia* dintre φ şi ψ; se citeşte: φ "sau" ψ)
$\varphi \wedge \psi := \neg\, (\varphi \rightarrow \neg\, \psi)$ (*conjuncţia* dintre φ şi ψ; se citeşte: φ "şi" ψ)
$\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ (*echivalenţa logică* dintre φ şi ψ; se citeşte: φ "echivalent cu" ψ)

Definiţia 1.4. Simbolurile $\vee$, $\wedge$ şi $\leftrightarrow$ se numesc *conectorii logici derivaţi*.

Observaţia 1.2. Conectorii logici derivaţi se scriu ca nişte operatori binari, şi le vom acorda aceeaşi prioritate cu aceea a conectorului logic primitiv "binar" $\rightarrow$.

Definiţia 1.5. O *axiomă* a sistemului formal al logicii propoziţionale clasice este un enunţ de oricare dintre următoarele trei forme, unde $\varphi, \psi, \chi \in E$ sunt enunţuri arbitrare:

$$\begin{array}{ll} (A_1) & \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \\ (A_2) & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\ (A_3) & (\neg\, \varphi \rightarrow \neg\, \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \end{array}$$

Fiecare dintre scrierile (A_1), (A_2) şi (A_3) este o *schemă de axiome*, adică o regulă pentru generarea unui număr infinit de axiome.

Axiomele logicii propoziţionale clasice se obţin prin înlocuirea, în aceste scheme de axiome, a enunţurilor generice (arbitrare) φ, ψ, χ cu enunţuri precizate (date), adică axiomele sunt enunţuri de una dintre formele (A_1), (A_2) şi (A_3), cu φ, ψ şi χ enunţuri date.

Prin extensie, vom numi uneori schemele de axiome (A_1), (A_2) şi (A_3), simplu, **axiome**.

Notaţia 1.3. Notăm cu Ax mulţimea axiomelor:

$$\begin{array}{lll} Ax = & \{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi), & \\ & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)), & \\ & (\neg\, \varphi \rightarrow \neg\, \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) & \mid \varphi, \psi, \chi \in E\}. \end{array}$$

Notaţia 1.4 (scrierea regulilor de deducţie). Notaţia uzuală pentru reguli de deducţie ale unui sistem logic, pe care o vom folosi în cele ce urmează, este aceasta: $\dfrac{\text{condiţia } C_1}{\text{consecinţa } C_2}$, cu semnificaţia că: dacă este satisfăcută condiţia C_1, atunci este satisfăcută consecinţa C_2.

Definiţia 1.6 (teoremele (formale), i. e. adevărurile sintactice). *Teoremele formale* (numite şi, simplu, *teoreme*, sau *adevăruri sintactice*) ale logicii propoziţionale clasice sunt enunţurile definite prin următoarele trei reguli:

- (T_1) orice axiomă este o teoremă formală;
- (T_2) dacă $\varphi, \psi \in E$ sunt două enunţuri a. î. ψ şi $\psi \rightarrow \varphi$ sunt teoreme formale, atunci φ este o teoremă formală;
- (T_3) orice teoremă formală a logicii propoziţionale clasice poate fi obţinută prin aplicarea regulilor (T_1) şi (T_2) de un număr finit de ori.

Notaţiile 1.1. Mulţimea tuturor teoremelor formale va fi notată cu T.

Faptul că un enunţ φ este teoremă formală se notează: $\vdash \varphi$.

Definiţia 1.7 (regula de deducţie modus ponens (MP)). Regula (T_2) se numeşte *regula de deducţie modus ponens* (o vom abrevia "MP") şi, cu notaţia stabilită mai sus, poate fi scrisă astfel în formă simbolică: $\dfrac{\vdash \psi,\ \vdash \psi \rightarrow \varphi}{\vdash \varphi}$, sau, echivalent: $\dfrac{\psi,\ \psi \rightarrow \varphi}{\varphi}$.

Remarca 1.3. Regula (T_3), chiar fără precizarea finitudinii, spune că T este cea mai mică mulţime închisă la regulile (T_1) şi (T_2), i. e. cea mai mică mulţime de enunţuri care include mulţimea axiomelor şi e închisă la regula (MP), i. e. cea mai mică submulţime M a lui E cu proprietăţile:

(i) $M \supseteq Ax$,

(ii) pentru orice $\varphi, \psi \in E$, dacă $\psi, \psi \to \varphi \in M$, atunci $\varphi \in M$,

(cea mai mică în sensul incluziunii), pentru că regula (T_3) spune că nu se află în T niciun element care să nu se obţină prin aplicarea regulilor (T_1) şi (T_2), adică niciun element care să nu fie nici axiomă, nici enunţ obţinut prin aplicarea succesivă a regulii **MP**, pornind de la axiome.

Definiţia 1.8. Fie φ un enunţ. O *demonstraţie formală pentru* φ este un şir finit şi nevid de enunţuri $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, a. î. $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n = \varphi$ şi, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, este satisfăcută una dintre următoarele condiţii:

(i) φ_i este o axiomă;

(ii) există $k, j \in \overline{1, i-1}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$.

n se numeşte *lungimea* demonstraţiei formale $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Remarca 1.4. În scrierea definiţiei de mai sus, am folosit faptul că $\overline{1, 0} = \emptyset$ (pentru o scriere uniformă a definiţiei, fără a trata separat cazul $i = 1$). Având în vedere acest lucru, este clar că, într–o demonstraţie formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ_1 este o axiomă.

Remarca 1.5. Este imediat că, dacă $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ este o demonstraţie formală, atunci, pentru orice $i \in \overline{1, n}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ este o demonstraţie formală.

Remarca 1.6 (teoremele sunt enunţurile care admit demonstraţii formale). Este uşor de observat că regulile (1) şi (2) din definiţia unei demonstraţii formale exprimă exact regulile (T_1) şi (T_2), respectiv, ceea ce arată imediat faptul că un enunţ φ este o teoremă formală ddacă există o demonstraţie formală pentru φ.

Remarca 1.7. Desigur, o teoremă formală poate avea mai multe demonstraţii formale şi poate avea demonstraţii formale de lungimi diferite.

Definiţia 1.9. Fie $\Sigma \subseteq E$ o mulţime de enunţuri. Enunţurile care *se deduc sintactic din ipotezele* Σ, numite şi *consecinţele sintactice ale lui* Σ, se definesc astfel:

- (CS_1) orice axiomă se deduce sintactic din ipotezele Σ;
- (CS_0) orice enunţ $\varphi \in \Sigma$ se deduce sintactic din ipotezele Σ;
- (CS_2) dacă $\varphi, \psi \in E$ sunt două enunţuri a. î. ψ şi $\psi \to \varphi$ se deduc sintactic din ipotezele Σ, atunci φ se deduce sintactic din ipotezele Σ;
- (CS_3) orice enunţ care se deduce sintactic din ipotezele Σ se poate obţine prin aplicarea regulilor (CS_1), (CS_0) şi (CS_2) de un număr finit de ori.

Notaţia 1.5. Notăm faptul că un enunţ φ se deduce sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ prin: $\Sigma \vdash \varphi$.

Definiţia 1.10 (şi regula de deducţie din ipoteze este tot modus ponens). Regula (CS_2) se numeşte tot *regula de deducţie modus ponens* (o vom abrevia tot "MP") şi, cu notaţia stabilită mai sus, poate fi scrisă astfel în formă simbolică: $\dfrac{\Sigma \vdash \psi,\ \Sigma \vdash \psi \to \varphi}{\Sigma \vdash \varphi}$.

Remarca 1.8. Regula (CS_3), chiar fără precizarea finitudinii numărului de aplicări ale acestor reguli, spune că mulţimea consecinţelor sintactice ale unei mulţimi Σ de enunţuri este cea mai mică mulţime închisă la regulile (CS_1), (CS_0) şi (CS_2), adică cea mai mică mulţime de enunţuri care include mulţimea axiomelor şi mulţimea Σ a ipotezelor şi e închisă la regula (MP), i. e. cea mai mică submulţime M a lui E cu proprietăţile:

(i) $M \supseteq Ax$,

(ii) $M \supseteq \Sigma$,

(iii) pentru orice $\varphi, \psi \in E$, dacă $\psi, \psi \to \varphi \in M$, atunci $\varphi \in M$,

(cea mai mică în sensul incluziunii), pentru că (CS_3) spune că mulţimea consecinţelor sintactice ale lui Σ nu conţine alte elemente decât cele obţinute din regulile (CS_1), (CS_0) şi (CS_2).

Remarca 1.9 (deducţia pornind de la axiome şi de la ipotezele din Σ). Definiţia consecinţelor sintactice ale lui Σ este exact definiţia teoremelor formale în care mulţimea Ax se înlocuieşte cu $Ax \cup \Sigma$.

Definiţia 1.11. Fie φ un enunţ şi Σ o mulţime de enunţuri. O Σ*–demonstraţie formală pentru* φ este un şir finit şi nevid de enunţuri $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, a. î. $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n = \varphi$ şi, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, este satisfăcută una dintre următoarele condiţii:

(i) φ_i este o axiomă;

(ii) $\varphi_i \in \Sigma$;

(iii) există $k, j \in \overline{1, i-1}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$.

n se numeşte *lungimea* Σ–demonstraţiei formale $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Remarca 1.10. Amintindu–ne că $\overline{1, 0} = \emptyset$, este clar că, într–o Σ–demonstraţie formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ_1 este o axiomă sau un element al lui Σ.

Remarca 1.11. Este imediat că, dacă Σ este o mulţime de enunţuri şi $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ este o Σ–demonstraţie formală, atunci, pentru orice $i \in \overline{1, n}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ este o Σ–demonstraţie formală.

Remarca 1.12 (enunţurile deductibile din ipoteze sunt exact enunţurile care admit demonstraţii formale din acele ipoteze). Este uşor de observat că regulile (1), (2) şi (3) din definiţia unei Σ–demonstraţii formale exprimă exact regulile (CS_1), (CS_0) şi (CS_2), respectiv, ceea ce arată imediat faptul că un enunţ φ este o consecinţă sintactică a lui Σ ddacă există o Σ–demonstraţie formală pentru φ.

Remarca 1.13. Desigur, o consecinţă sintactică a lui Σ poate avea mai multe Σ–demonstraţii formale şi poate avea Σ–demonstraţii formale de lungimi diferite.

A se vedea, în curs, **inducţia după:**

- **enunţuri,**
- **teoreme formale,**
- **consecinţe sintactice ale unei mulţimi de ipoteze.**

Remarca 1.14. Este imediat, direct din definiţiile date, că, pentru orice enunţ φ şi orice mulţime de enunţuri Σ:

(i) $\emptyset \vdash \varphi$ ddacă $\vdash \varphi$;

(ii) dacă $\vdash \varphi$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$;

(iii) dacă $\varphi \in \Sigma$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$.

- Am încheiat descrierea sintactică a sistemului formal al logicii propoziţionale clasice.

Notaţia 1.6. Vom nota acest sistem formal cu $\mathcal{L}$.

Propoziţia 1.1 (o numim ad–hoc Propoziţia $\star$). *Fie $\Sigma \subseteq E$, $\Delta \subseteq E$ şi $\varphi \in E$. Atunci:*

(i) dacă $\Sigma \subseteq \Delta$ şi $\Sigma \vdash \varphi$, atunci $\Delta \vdash \varphi$;

(ii) dacă $\Sigma \vdash \varphi$, atunci există $\Gamma \subseteq \Sigma$ a. î. Γ este o mulţime finită şi $\Gamma \vdash \varphi$;

(iii) dacă $\Sigma \vdash \psi$ pentru orice $\psi \in \Delta$ şi $\Delta \vdash \varphi$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$.

Remarca 1.15. Conform punctului (i), în (ii) din propoziţia anterioară avem chiar echivalenţă:
$\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $(\exists\, \Gamma \subseteq \Sigma)\,(|\Gamma| < \aleph_0, \Gamma \vdash \varphi)$.

Propoziţia 1.2 (principiul identităţii şi principiul terţului exclus). *Pentru orice $\varphi \in E$, următoarele enunţuri sunt teoreme formale:*

(i) **principiul identităţii** *(abreviat* **PI***):* $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$*;*

(ii) **principiul terţului exclus** *(abreviat* **PTE***):* $\vdash \varphi \vee \neg \varphi$*.*

Teorema 1.1 (Teorema deducţiei (abreviată TD)). *Pentru orice $\Sigma \subseteq E$ şi orice $\varphi, \psi \in E$, are loc următoarea echivalenţă:*

$$\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \textit{ddacă} \quad \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E$, arbitrare, fixate.

Notaţia 1.7 (pentru următoarele reguli de deducţie). Regula de deducţie $\dfrac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\varphi}$ va semnifica faptul că φ se deduce printr–o demonstraţie formală din ipotezele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, adică: $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$.

Remarca 1.16 (cu notaţia de tip $\dfrac{\text{ipoteze}}{\text{concluzie}}$). Regula de deducţie $\dfrac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\varphi}$ implică regula $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi_1, \ldots, \Sigma \vdash \varphi_n}{\Sigma \vdash \varphi}$ pentru orice $\Sigma \subseteq E$, de unde, luând $\Sigma = \emptyset$, obţinem şi cazul particular: $\dfrac{\vdash \varphi_1, \ldots, \vdash \varphi_n}{\vdash \varphi}$.

Remarca 1.17 (modus ponens, cu scrierea de mai sus). Conform afirmaţiei (3) din Propoziţia $\star$, pentru orice $\Sigma \subseteq E$, mulţimea consecinţelor sintactice ale lui Σ, în particular mulţimea teoremelor formale, este inchisă la regula $\dfrac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$, pe care o numim tot **modus ponens**.

Propoziţia 1.3. *Pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, sunt valabile următoarele teoreme formale şi reguli de deducţie:*

tranzitivitatea implicaţiei:

- $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
- $\dfrac{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi}{\varphi \rightarrow \chi}$

afirmarea concluziei:

- $\dfrac{\varphi}{\psi \rightarrow \varphi}$

principiul reducerii la absurd:

- $\dfrac{\neg \varphi \rightarrow \neg \psi}{\psi \rightarrow \varphi}$

inversarea premiselor:

- $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
- $\dfrac{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)}{\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)}$

negarea premisei:

- $\vdash \varphi \rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \psi)$ şi $\vdash \neg \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
- $\dfrac{\varphi}{\neg \varphi \rightarrow \psi}$ şi $\dfrac{\neg \varphi}{\varphi \rightarrow \psi}$

principiul dublei negaţii:

- $\vdash \neg \neg \varphi \rightarrow \varphi$ şi $\vdash \varphi \rightarrow \neg \neg \varphi$
- $\dfrac{\neg \neg \varphi}{\varphi}$ şi $\dfrac{\varphi}{\neg \neg \varphi}$

principiul contrapoziţiei:

- $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\,\psi \to \neg\,\varphi)$
- $\dfrac{\varphi \to \psi}{\neg\,\psi \to \neg\,\varphi}$

comutativitatea disjuncţiei:

- $\vdash (\varphi \vee \psi) \to (\psi \vee \varphi)$
- $\dfrac{\varphi \vee \psi}{\psi \vee \varphi}$

comutativitatea conjuncţiei:

- $\vdash (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$
- $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi \wedge \varphi}$

comutativitatea echivalenţei:

- $\dfrac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\psi \leftrightarrow \varphi}$

prima lege a lui De Morgan:

- $\vdash (\neg\,\varphi \vee \neg\,\psi) \to \neg\,(\varphi \wedge \psi)$ şi $\vdash \neg\,(\varphi \wedge \psi) \to (\neg\,\varphi \vee \neg\,\psi)$
- $\dfrac{\neg\,\varphi \vee \neg\,\psi}{\neg\,(\varphi \wedge \psi)}$ şi $\dfrac{\neg\,(\varphi \wedge \psi)}{\neg\,\varphi \vee \neg\,\psi}$

adevărul nu implică falsul:

- $\vdash (\varphi \to \neg\,\varphi) \to \neg\,\varphi$
- $\dfrac{\varphi \to \neg\,\varphi}{\neg\,\varphi}$

slăbirea:

- $\vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi)$ şi $\vdash \psi \to (\varphi \vee \psi)$
- $\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$ şi $\dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}$
- $\dfrac{\varphi \to \chi, \psi \to \chi}{(\varphi \vee \psi) \to \chi}$

slăbirea conjuncţiei:

- $\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ şi $\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \psi$
- $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$ şi $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$
- $\dfrac{\chi \to \varphi, \chi \to \psi}{\chi \to (\varphi \wedge \psi)}$
- caz particular: $\dfrac{\varphi, \psi}{\varphi \wedge \psi}$

în cadrul aceloraşi denumiri ca mai sus:

- **principiul dublei negaţii**: $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\,\neg\,\varphi$
- **prima lege a lui De Morgan**: $\vdash \neg\,(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\,\varphi \vee \neg\,\psi)$
- **comutativitatea disjuncţiei**: $\vdash (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$

- **comutativitatea conjuncţiei**: $\vdash (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$

dubla premisă:

- $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$
- $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi)$
- **falsul implică orice**: $\vdash (\varphi \wedge \neg \varphi) \rightarrow \psi$
- **orice implică adevărul**: $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$

negarea termenilor unei echivalenţe:

- $\dfrac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\neg \varphi \leftrightarrow \neg \psi}$

distributivitatea disjuncţiei faţă de conjuncţie:

- $\vdash ((\varphi \wedge \psi) \vee \chi) \leftrightarrow ((\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi))$

Notaţia 1.8 (abrevieri definite recursiv). Fie $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots \in E$, arbitrare. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem următoarele scrieri (priorităţile: ca la operatori unari, deci aceeaşi prioritate ca $\neg$):

$$\bigvee_{i=1}^{n} \gamma_i := \begin{cases} \gamma_1, & n = 1, \\ (\bigvee\limits_{i=1}^{n-1} \gamma_i) \vee \gamma_n, & n > 1, \end{cases} \quad \text{şi} \quad \bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i := \begin{cases} \gamma_1, & n = 1, \\ (\bigwedge\limits_{i=1}^{n-1} \gamma_i) \wedge \gamma_n, & n > 1. \end{cases}$$

Exerciţiul 1.1 (temă). Folosind **dubla premisă** şi (MP), să se arate că, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$:

$$\vdash ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)),$$

iar, folosind acest fapt, împreună cu **dubla premisă** şi (TD), să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \varphi \in E$, au loc echivalenţele:

$$\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\} \vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad \{\bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i\} \vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad \vdash (\bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i) \rightarrow \varphi.$$

2 Algebra Lindenbaum–Tarski a Logicii Propoziţionale Clasice

- Pe tot parcursul acestei secţiuni, $\Sigma \subseteq E$ va fi o mulţime arbitrară fixată de enunţuri ale lui $\mathcal{L}$.
- Σ va reprezenta o mulţime de ipoteze, ceea ce este adesea numită o *teorie* a lui $\mathcal{L}$.

Lema 2.1. *Pentru orice $\varphi, \psi \in E$, are loc echivalenţa:*

$$\Sigma \vdash \varphi \text{ şi } \Sigma \vdash \psi \quad \text{ddacă} \quad \Sigma \vdash \varphi \wedge \psi.$$

Definiţia 2.1. Definim o relaţie binară $\sim_\Sigma$ pe mulţimea E a enunţurilor lui $\mathcal{L}$, astfel: pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim_\Sigma \psi \text{ ddacă } \Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Remarca 2.1. Conform lemei anterioare, pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim_\Sigma \psi \quad \text{ddacă} \quad \Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ şi } \Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi,$$

pentru că $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

Lema 2.2. *$\sim_\Sigma$ este o relaţie de echivalenţă pe E.*

Notaţia 2.1. Să notăm, pentru fiecare $\varphi \in E$, cu $\widehat{\varphi}^\Sigma := \{\psi \in E \mid \varphi \sim_\Sigma \psi\}$ clasa de echivalenţă a lui φ raportat la relaţia de echivalenţă $\sim_\Sigma$, şi să considerăm mulţimea factor $E/_{\sim_\Sigma} = \{\widehat{\varphi}^\Sigma \mid \varphi \in E\}$.

Definiţia 2.2. Pe mulţimea factor $E/_{\sim_\Sigma}$, definim relaţia binară $\leq_\Sigma$, prin: oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, $\widehat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.

Propoziţia 2.1. *$\leq_\Sigma$ este bine definită.*

Lema 2.3. *$\leq_\Sigma$ este o relaţie de ordine parţială pe $E/_{\sim_\Sigma}$.*

Propoziţia 2.2. *$(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$ este o latice distributivă, în care, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\inf\{\widehat{\varphi}^\Sigma, \widehat{\psi}^\Sigma\} = \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$ şi $\sup\{\widehat{\varphi}^\Sigma, \widehat{\psi}^\Sigma\} = \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$. Vom nota, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\widehat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma := \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$ şi $\widehat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma := \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$.*

Remarca 2.2. Pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\widehat{\varphi \wedge \neg\varphi}^\Sigma$ şi $\widehat{\varphi \vee \neg\varphi}^\Sigma$ sunt, respectiv, primul element şi ultimul element al laticii $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma)$. Vom nota $0_\Sigma := \widehat{\varphi \wedge \neg\varphi}^\Sigma$ şi $1_\Sigma := \widehat{\varphi \vee \neg\varphi}^\Sigma$, pentru un $\varphi \in E$, arbitrar. Această definiţie nu depinde de alegerea lui $\varphi \in E$, adică 0_Σ şi 1_Σ sunt bine definite.

Propoziţia 2.3. *$(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ este o latice distributivă mărginită.*

Definiţia 2.3. Pentru orice $\varphi \in E$, definim: $\overline{\widehat{\varphi}^\Sigma}^\Sigma := \widehat{\neg\varphi}^\Sigma$.

Remarca 2.3. Definiţia de mai sus pentru operaţia unară $^{-\Sigma} : E/_{\sim_\Sigma} \to E/_{\sim_\Sigma}$ este corectă, pentru că nu depinde de reprezentanţii claselor din $E/_{\sim_\Sigma}$.

Propoziţia 2.4. *$(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, ^{-\Sigma}, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ este o algebră Boole.*

Definiţia 2.4. Algebra Boole $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, ^{-\Sigma}, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ se numeşte *algebra Lindenbaum–Tarski a lui Σ asociată sistemului formal $\mathcal{L}$.*

Remarca 2.4 (surjecţia canonica transformă conectorii logici în operaţii booleene: nu e morfism boolean, pentru că E nu e algebră Boole). Dacă notăm cu $p_\Sigma : E \to E/_{\sim_\Sigma}$ surjecţia canonică ($p_\Sigma(\varphi) := \widehat{\varphi}^\Sigma$ pentru orice $\varphi \in E$), atunci, oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, au loc următoarele identităţi (unde $\to_\Sigma$ şi $\leftrightarrow_\Sigma$ sunt, respectiv, implicaţia şi echivalenţa booleană în algebra Boole $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, ^{-\Sigma}, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$):

- (a) $p_\Sigma(\varphi \vee \psi) = p_\Sigma(\varphi) \vee_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
- (b) $p_\Sigma(\varphi \wedge \psi) = p_\Sigma(\varphi) \wedge_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
- (c) $p_\Sigma(\neg\varphi) = \overline{p_\Sigma(\varphi)}^\Sigma$;
- (d) $p_\Sigma(\varphi \to \psi) = p_\Sigma(\varphi) \to_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
- (e) $p_\Sigma(\varphi \leftrightarrow \psi) = p_\Sigma(\varphi) \leftrightarrow_\Sigma p_\Sigma(\psi)$.

Lema 2.4. *Pentru orice $\varphi \in E$, $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\widehat{\varphi}^\Sigma = 1_\Sigma$.*

Remarca 2.5. Lema anterioară ne oferă o metodă algebrică pentru a verifica dacă un enunţ este o consecinţă sintactică a lui Σ.

Notaţia 2.2. În cazul în care $\Sigma = \emptyset$:

- relaţia de echivalenţă $\sim_\emptyset$ se notează, simplu, $\sim$, şi are următoarea definiţie: pentru orice $\varphi, \psi \in E$,
$$\varphi \sim \psi \ \text{ ddacă } \ \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\,;$$
- clasele de echivalenţă ale lui $\sim$, $\widehat{\varphi}^\emptyset$ ($\varphi \in E$), se notează $\widehat{\varphi}$;
- relaţia de ordine $\leq_\emptyset$ se notează $\leq$;
- operaţiile $\vee_\emptyset$, $\wedge_\emptyset$, $^{-\emptyset}$, $0_\emptyset$ şi $1_\emptyset$ se notează, respectiv, $\vee$, $\wedge$, $^-$, 0 şi 1.

Definiţia 2.5. $\sim$ se numeşte *echivalenţa logică* sau *echivalenţa semantică* între enunţuri.
Algebra Boole $(E/\sim, \vee, \wedge, \leq, ^-, 0, 1)$ se numeşte *algebra Lindenbaum-Tarski asociată sistemului formal $\mathcal{L}$.*

Lema anterioară devine, în acest caz, o caracterizare a teoremelor formale:

Lema 2.5. *Pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi$ ddacă $\widehat{\varphi} = 1$.*

Nota 2.1.
- A se vedea la seminar exemple de **demonstraţii algebrice** în logica propoziţională clasică (realizate prin calcul boolean, folosind lema anterioară).
- În mod tipic, pentru a folosi lema anterioară în cadrul unei demonstraţii algebrice pentru o deducţie formală din ipoteze: $\Sigma \vdash \varphi$, cu $\Sigma \subseteq E$ şi $\varphi \in E$, se foloseşte faptul că, pentru orice ipoteză $\sigma \in \Sigma$, are loc $\Sigma \vdash \sigma$, aşadar $\hat{\sigma}^\Sigma = 1_\Sigma$.

3 Semantica Logicii Propoziţionale Clasice

Definiţia 3.1 (o interpretare (evaluare, semantică) e o funcţie de la mulţimea variabilelor propoziţionale la algebra Boole standard: $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$, cu $0 < 1$, i. e. o funcţie care dă valori de adevăr variabilelor propoziţionale). O *interpretare* (*evaluare*, *semantică*) a lui $\mathcal{L}$ este o funcţie oarecare $h : V \to \mathcal{L}_2$.

Propoziţia 3.1 (există o unică funcţie care prelungeşte o interpretare la mulţimea tuturor enunţurilor şi transformă conectorii logici primitivi în operaţii Booleene, aşadar calculează valorile de adevăr ale tuturor enunţurilor pornind de la cele ale variabilelor propoziţionale). *Pentru orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$, există o unică funcţie $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ care satisface următoarele proprietăţi:*

- (a) $\quad \tilde{h}(u) = h(u)$, *pentru orice $u \in V$;*
- (b) $\quad \tilde{h}(\neg\,\varphi) = \overline{\tilde{h}(\varphi)}$, *pentru orice $\varphi \in E$;*
- (c) $\quad \tilde{h}(\varphi \to \psi) = \tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi)$, *pentru orice $\varphi, \psi \in E$.*

Definiţia 3.2. Funcţia $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ din propoziţia anterioară se numeşte tot *interpretare*.

Observaţia 3.1. Condiţia (a) din propoziţia anterioară spune că $\tilde{h}\mid_V = h$, adică funcţia $\tilde{h}$ prelungeşte pe h la E.

În condiţiile (b) şi (c), în membrii stângi, în argumentele lui $\tilde{h}$, $\neg$ şi $\to$ sunt conectorii logici primitivi, pe când, în membrii drepţi, $^{-}$ şi $\to$ sunt operaţiile de complementare şi, respectiv, implicaţie ale algebrei Boole $\mathcal{L}_2$. Aşadar, putem spune că funcţia $\tilde{h}$ transformă conectorii logici în operaţii booleene în algebra Boole standard.

Vom păstra notaţia $\tilde{h}$ pentru această unică funcţie depinzând de interpretarea h.

Corolarul 3.1 (prelungirea unei interpretări la mulţimea enunţurilor transformă toţi conectorii logici în operaţii booleene). *Pentru orice interpretare h şi orice $\varphi, \psi \in E$, au loc:*

- (d) $\quad \tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)$
- (e) $\quad \tilde{h}(\varphi \wedge \psi) = \tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)$
- (f) $\quad \tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi)$

Satisfacere şi mulţimi satisfiabile:

Fie h o interpretare, φ un enunţ şi Σ o mulţime de enunţuri.

Definiţia 3.3 (enunţuri adevărate pentru anumite valori de adevăr atribuite variabilelor propoziţionale din scrierea lor). Spunem că φ este *adevărat în interpretarea* h sau că h *satisface* φ ddacă $\tilde{h}(\varphi) = 1$.

φ se zice *fals în interpretarea* h ddacă $\tilde{h}(\varphi) = 0$.

Spunem că h *satisface* Σ sau că h este un *model pentru* Σ ddacă h satisface toate elementele lui Σ.

Spunem că Σ *admite un model* sau că mulţimea Σ este *satisfiabilă* ddacă există un model pentru Σ.

Spunem că φ *admite un model* sau că φ este *satisfiabil* ddacă $\{\varphi\}$ este satisfiabilă.

Notaţia 3.1. Faptul h satisface enunţul φ se notează cu: $h \vDash \varphi$.

Faptul că h satisface mulţimea Σ de enunţuri se notează cu: $h \vDash \Sigma$.

Remarca 3.1. Dacă h este model pentru Σ, atunci h este model pentru orice submulţime a lui Σ.

Definiţia 3.4 (adevărurile semantice şi deducţia semantică). Enunţul φ se zice *universal adevărat* ddacă φ este adevărat în orice interpretare.

Enunţurile universal adevărate se mai numesc *adevărurile semantice* sau *tautologiile* lui $\mathcal{L}$.

Spunem că φ *se deduce semantic din* Σ sau că φ *este o consecinţă semantică a lui* Σ ddacă φ este adevărat în orice interpretare care satisface pe Σ.

Notaţia 3.2. Faptul că φ este universal adevărat se notează cu: $\vDash \varphi$.

Faptul că φ se deduce semantic din Σ se notează cu: $\Sigma \vDash \varphi$.

Le fel cum adevărurile sintactice (i. e. teoremele formale) sunt exact enunţurile deductibile sintactic din $\emptyset$:

Remarca 3.2 (adevărurile semantice sunt exact enunţurile deductibile semantic din $\emptyset$). Pentru orice enunţ φ,

$$\vDash \varphi \text{ ddacă } \emptyset \vDash \varphi.$$

Observaţia 3.2 (valorile de adevăr atribuite enunţurilor de o interpretare se calculează pe baza valorilor de adevăr atribuite variabilelor propoziţionale de acea interpretare, folosind proprietatea interpretării de a transforma conectorii logici în operaţii booleene). Valoarea unei interpretări într–un anumit enunţ, uneori numită *interpretarea acelui enunţ*, este valoarea de adevăr 0 sau 1 care se obţine atunci când se atribuie, prin acea interpretare, valori de adevăr din $\mathcal{L}_2$ tuturor variabilelor propoziţionale care apar în acel enunţ. Un enunţ universal adevărat, i. e. un adevăr semantic, o tautologie, este un enunţ a cărui valoare de adevăr este 1 pentru orice valori de adevăr atribuite variabilelor propoziţionale care apar în acel enunţ.

Teorema 3.1 (Teorema de completitudine tare (extinsă) pentru logica propoziţională clasică (TCT)). *Pentru orice enunţ φ şi orice mulţime de enunţuri Σ:*

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \textit{ddacă} \quad \Sigma \vDash \varphi.$$

Teorema 3.2 (Teorema de completitudine pentru $\mathcal{L}$ (TC)). *Pentru orice enunţ φ,*

$$\vdash \varphi \quad \textit{ddacă} \quad \vDash \varphi.$$

Nota 3.1. Uneori,

- implicaţia $\vdash \varphi \Rightarrow \vDash \varphi$ este numită *corectitudinea lui $\mathcal{L}$*,
- iar implicaţia $\vdash \varphi \Leftarrow \vDash \varphi$ este numită *completitudinea lui $\mathcal{L}$*.

Dar, cel mai adesea, **echivalenţa** din teorema anterioară este numită *completitudinea lui $\mathcal{L}$*.

Corolarul 3.2 (noncontradicţia lui $\mathcal{L}$ (principiul noncontradicţiei)). *Niciun enunţ φ nu satisface şi $\vdash \varphi$, şi $\vdash \neg\,\varphi$.*

Propoziţia 3.2. *Algebra Lindenbaum–Tarski a logicii propoziţionale clasice, $E/_{\sim}$, este netrivială.*

Nota 3.2. A se vedea la seminar exemple de **demonstraţii semantice** în logica propoziţională clasică, realizate atât prin calcul boolean obişnuit în $\mathcal{L}_2$, cât şi prin intermediul **tabelelor de adevăr (tabelelor semantice)**.

Propoziţia 3.3 (orice interpretare induce un unic morfism boolean de la algebra Lindenbaum–Tarski asociată unei mulţimi de ipoteze la algebra Boole standard). *Pentru orice interpretare $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$ şi orice $\Sigma \subseteq E$ a. î. $h \vDash \Sigma$, există un unic morfism boolean $\ddot{h}^{\Sigma} : E/_{\sim_\Sigma} \rightarrow \mathcal{L}_2$ care face următoarea diagramă comutativă, anume morfismul boolean definit prin: pentru orice $\varphi \in E$, $\ddot{h}^{\Sigma}(\hat{\varphi}^{\Sigma}) := \tilde{h}(\varphi)$:*

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "h"'] & E \arrow[r, "p_\Sigma"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & E/_{\sim_\Sigma} \arrow[dl, "\ddot{h}^{\Sigma}"] \\
& \mathcal{L}_2 &
\end{tikzcd}$$

Corolarul 3.3 (orice interpretare induce un unic morfism boolean de la algebra Lindenbaum–Tarski la algebra Boole standard). *Pentru orice interpretare $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$, există un unic morfism boolean $\ddot{h} : E/_{\sim} \rightarrow \mathcal{L}_2$ care face următoarea diagramă comutativă, anume morfismul boolean definit prin: pentru orice $\varphi \in E$, $\ddot{h}(\hat{\varphi}) := \tilde{h}(\varphi)$:*

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "h"'] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & E/_{\sim} \arrow[dl, "\ddot{h}"] \\
& \mathcal{L}_2 &
\end{tikzcd}$$

4 Sisteme deductive şi mulţimi consistente

Definiţia 4.1. O mulţime Σ de enunţuri se numeşte *sistem deductiv* ddacă este închisă la deducţii, i. e., pentru orice $\varphi \in E$, are loc:

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi \in \Sigma, \qquad \text{adică:}$$

$$\{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\} \subseteq \Sigma.$$

Remarca 4.1. Implicaţia reciprocă în definiţia anterioară este valabilă, conform definiţiei deducţiei sintactice, prin urmare o mulţime Σ de enunţuri este sistem deductiv ddacă, pentru orice $\varphi \in E$:

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in \Sigma, \qquad \text{adică:}$$

$$\{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\} = \Sigma.$$

Exemplul 4.1. În mod trivial, mulţimea E a tuturor enunţurilor este sistem deductiv.

Lema 4.1. *Orice sistem deductiv include mulţimea teoremelor formale.*

Exemplul 4.2. Conform lemei anterioare, de exemplu, $\emptyset$ nu este sistem deductiv.

Lema 4.2. *Mulţimea teoremelor formale este sistem deductiv.*

Propoziţia 4.1. *Mulţimea teoremelor formale este cel mai mic sistem deductiv.*

Nota 4.1. În următoarea propoziţie, cu o terminologie pe care am folosit–o deja, spunem că o mulţime Σ de enunţuri este *închisă la* **modus ponens** ddacă, pentru orice enunţuri φ, ψ, dacă $\psi, \psi \rightarrow \varphi \in \Sigma$, atunci $\varphi \in \Sigma$.

Propoziţia 4.2 (caracterizare pentru sistemele deductive). *Pentru orice $\Sigma \subseteq E$, sunt echivalente:*

(i) Σ *este sistem deductiv;*

(ii) Σ *include mulţimea axiomelor şi este închisă la* **modus ponens***;*

(iii) Σ *include mulţimea teoremelor formale şi este închisă la* **modus ponens**.

Propoziţia 4.3. *Intersecţia oricărei familii de sisteme deductive este sistem deductiv, i. e. mulţimea sistemelor deductive este un* **sistem de închidere**.

Notaţia 4.1. Notăm cu $D : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ operatorul de închidere asociat sistemului de închidere format din sistemele deductive.

Corolarul 4.1. *Pentru orice mulţime Σ de enunţuri, $D(\Sigma)$ este cel mai mic sistem deductiv care include pe Σ, anume intersecţia tuturor sistemelor deductive care includ pe Σ.*

Definiţia 4.2. Pentru orice $\Sigma \subseteq E$, $D(\Sigma)$ se numeşte *sistemul deductiv generat de* Σ.

Remarca 4.2. Conform definiţiei unui operator de închidere, pentru orice $\Sigma, \Delta \in \mathcal{P}(E)$:

(i) $\Sigma \subseteq D(\Sigma)$ (D este **extensiv**);

(ii) $\Sigma \subseteq \Delta$ implică $D(\Sigma) \subseteq D(\Delta)$ (D este **crescător**);

(iii) $D(D(\Sigma)) = D(\Sigma)$ (D este **idempotent**);

Propoziţia 4.4 (sistemul deductiv generat de o mulţime Σ de enunţuri este mulţimea consecinţelor sintactice ale lui Σ). *Pentru orice mulţime Σ de enunţuri:*

$$D(\Sigma) = \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\}.$$

Corolarul 4.2. *Operatorul de închidere D este* finitar*, adică, oricare ar fi $\Sigma \subseteq E$, are loc:*

$$D(\Sigma) = \bigcup \{D(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \Sigma, |\Gamma| < \aleph_0\}.$$

Definiţia 4.3 (mulţimi consistente (i. e. necontradictorii)). Fie Σ o mulţime de enunţuri.

- Σ se zice *inconsistentă* ddacă $\Sigma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in E$ (i. e. ddacă orice enunţ este consecinţă sintactică a lui Σ);
- Σ se zice *consistentă* ddacă Σ nu este inconsistentă.

Exemplul 4.3. Mulţimea E a tuturor enunţurilor este inconsistentă.

Remarca 4.3. Orice submulţime a unei mulţimi consistente este consistentă.

Prin urmare, orice mulţime care include o mulţime inconsistentă este inconsistentă.

Remarca 4.4. Mulţimea T a teoremelor formale este consistentă.

Într–adevăr, conform unei propoziţii de mai sus, T este sistem deductiv, deci este egală cu mulţimea enunţurilor φ cu $T \vdash \varphi$, iar $T \subsetneq E$, conform **principiului noncontradicţiei**.

Exemplul 4.4 (consecinţă a celor două remarci precedente). $\emptyset$ şi Ax sunt mulţimi consistente.

Propoziţia 4.5. *Sistemul deductiv generat de o mulţime consistentă este o mulţime consistentă.*

Propoziţia 4.6 (mulţimile consistente sunt mulţimile de enunţuri din care nu se deduc contradicţii). *Pentru orice $\Sigma \subseteq E$, sunt echivalente:*

(i) Σ *este inconsistentă;*

(ii) există $\varphi \in E$, *astfel încât* $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$;

(iii) există $\varphi \in E$, *astfel încât* $\Sigma \vdash \varphi$ *şi* $\Sigma \vdash \neg\varphi$;

(iv) există $\varphi \in E$, *astfel încât* $\Sigma \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$;

(v) pentru orice $\varphi \in E$, $\Sigma \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$.

Corolarul 4.3. *Fie* $\Sigma \subseteq E$ *şi* $\varphi \in E$. *Atunci:*

(i) $\Sigma \cup \{\varphi\}$ *este inconsistentă ddacă* $\Sigma \vdash \neg\varphi$;

(ii) $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ *este inconsistentă ddacă* $\Sigma \vdash \varphi$.

Propoziţia 4.7. *Pentru orice* $\Sigma \subseteq E$, *are loc echivalenţa:* Σ *e consistentă ddacă algebra Boole* $E/_{\sim_\Sigma}$ *e netrivială.*

Definiţia 4.4 (mulţimi consistente maximale). Un element maximal al mulţimii mulţimilor consistente raportat la incluziune se numeşte *mulţime consistentă maximală*.

Propoziţia 4.8. *Orice mulţime consistentă este inclusă într–o mulţime consistentă maximală.*

Corolarul 4.4. *Există mulţimi consistente maximale.*

Propoziţia 4.9. *Dacă* Σ *este o mulţime consistentă maximală, atunci:*

(i) Σ *este sistem deductiv;*

(ii) pentru orice $\varphi, \psi \in E$, *avem:* $\varphi \vee \psi \in \Sigma$ *ddacă* $\begin{cases} \varphi \in \Sigma \text{ sau} \\ \psi \in \Sigma; \end{cases}$

(iii) oricare ar fi $\varphi \in E$, *are loc:* $\varphi \in \Sigma$ *ddacă* $\neg\varphi \notin \Sigma$;

(iv) pentru orice $\varphi, \psi \in E$: $\varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$ *ddacă* $\neg\varphi \vee \psi \in \Sigma$ *ddacă* $\begin{cases} \neg\varphi \in \Sigma \text{ sau} \\ \psi \in \Sigma. \end{cases}$

Remarca 4.5. T (şi, aşadar, orice submulţime a lui T) admite ca model orice interpretare.

Propoziţia 4.10. *O mulţime de enunţuri e satisfiabilă ddacă e consistentă.*

5 Rezoluţia în calculul propoziţional clasic

Definiţia 5.1 (FNC şi FND).

- Un *literal* este o variabilă propoziţională sau negaţia unei variabile propoziţionale:

$$p \text{ sau } \neg p, \text{ cu } p \in V.$$

- O *clauză* este o disjuncţie de literali.
  - Orice clauză se identifică cu mulţimea literalilor care o compun.
- Un enunţ $\varphi(\in E)$ *este în formă normală conjunctivă* (sau *este o formă normală conjunctivă*) (*FNC*) ddacă φ este o conjuncţie de clauze, i. e. o conjuncţie de disjuncţii de literali.

– Orice FNC se identifică cu mulţimea clauzelor care o compun.

- Un enunţ $\varphi(\in E)$ *este în formă normală disjunctivă* (sau *este o formă normală disjunctivă*) (*FND*) ddacă φ este o disjuncţie de conjuncţii de literali.

Observaţia 5.1. Întrucât toate enunţurile au lungime finită (i. e. sunt şiruri finite de simboluri primitive), conjuncţiile şi disjuncţiile la care face referire definiţia de mai sus sunt finite.

Relaţia de **echivalenţă semantică**: $\sim=\sim_{\emptyset}\in \mathrm{Eq}(E)$: relaţia de echivalenţă pe E care serveşte la construirea algebrei Lindenbaum–Tarski a logicii propoziţionale clasice: pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim \psi \text{ ddacă } \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Remarca 5.1 (două enunţuri sunt echivalente semantic ddacă au aceeaşi valoare în orice interpretare). Oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, avem: $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow\Leftrightarrow (\forall\, h : V \to L_2)\, (\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi))$.

Aşadar:

Remarca 5.2. Dacă $\varphi, \psi \in E$ astfel încât $\varphi \sim \psi$, atunci: φ e satisfiabil ddacă ψ e satisfiabil.

Propoziţia 5.1 (existenţa FNC şi FND pentru orice enunţ). *Oricare ar fi $\varphi \in E$, există o FNC $\psi \in E$ şi o FND $\chi \in E$ (care nu sunt unice), astfel încât $\varphi \sim \psi \sim \chi$.*

Remarca 5.3. Oricare ar fi $\varphi \in E$, putem determina o FNC (sau FND) $\psi \in E$ cu $\varphi \sim \gamma$, folosind un tabel semantic pentru φ, sau folosind următoarele proprietăţi imediate (a se vedea seminarul), valabile pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in E$:

- **înlocuirea implicaţiilor şi echivalenţelor:**

$$\alpha \to \beta \sim \neg\,\alpha \vee \beta \text{ şi } \alpha \leftrightarrow \beta \sim (\neg\,\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\,\beta \vee \alpha)$$

- **idempotenţa lui $\vee$ şi $\wedge$:**

$$\alpha \vee \alpha \sim \alpha \wedge \alpha \sim \alpha$$

- **comutativitatea lui $\vee$ şi $\wedge$:**

$$\alpha \vee \beta \sim \beta \vee \alpha \text{ şi } \alpha \wedge \beta \sim \beta \wedge \alpha$$

- **asociativitatea lui $\vee$ şi $\wedge$:**

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \sim \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \text{ şi } (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \sim \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

- **principiul dublei negaţii:**

$$\neg\,\neg\,\alpha \sim \alpha$$

- **legile lui de Morgan:**

$$\neg\,(\alpha \vee \beta) \sim \neg\,\alpha \wedge \neg\,\beta \text{ şi } \neg\,(\alpha \wedge \beta) \sim \neg\,\alpha \vee \neg\,\beta$$

- **absorbţia:**

$$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \sim \alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \sim \alpha$$

- **legile de distributivitate:**

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \sim (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \text{ şi } \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \sim (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$

- **proprietăţile:**

$$\alpha \vee (\beta \wedge \neg\,\beta) \sim \alpha \vee (\beta \wedge \neg\,\beta \wedge \gamma) \sim \alpha \wedge (\beta \vee \neg\,\beta) \sim \alpha \wedge (\beta \vee \neg\,\beta \vee \gamma) \sim \alpha$$

- Următoarea notaţie este definită, recursiv, pe întreaga mulţime E:

Notaţia 5.1 (mulţimea variabilelor propoziţionale care apar într–un enunţ φ se notează $V(\varphi)$). Pentru orice $p \in V$ şi orice $\varphi, \psi \in E$, notăm:

(i) $V(p) = \{p\}$

(ii) $V(\neg\varphi) = V(\varphi)$

(iii) $V(\varphi \rightarrow \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi)$

- Amintesc că, într–un tabel semantic pentru un enunţ φ, ne interesează variabilele propoziţionale care apar în φ, adică elementele lui $V(\varphi)$.

A se vedea, la seminar, metoda prin care un enunţ φ poate fi pus în FNC folosind un tabel semantic pentru φ.

Definiţia 5.2 (formă clauzală). Fie $\varphi \in E$ şi $M \subseteq E$, astfel încât M este finită.

- O *formă clauzală* pentru φ este o FNC (i. e. o mulţime de clauze) ψ cu $\psi \sim \varphi$.
- O *formă clauzală* pentru M este o reuniune de forme clauzale pentru elementele lui M.

Remarca 5.4. Orice mulţime finită de enunţuri poate fi pusă într–o formă clauzală.

Propoziţia 5.2. *O mulţime de enunţuri e satisfiabilă ddacă orice submulţime finită a sa este satisfiabilă.*

Propoziţia 5.3 (conform căreia tehnica rezoluţiei de mai jos poate fi folosită pentru a demonstra teoreme formale sau deducţii formale din ipoteze). *Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi \in E$ şi $\Gamma \subseteq E$.*

(a) Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vDash \psi$

(ii) $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi\}$ *nu e satisfiabilă*

(iii) $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi$ *nu e satisfiabil*

(b) În plus, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $\vDash \psi$

(ii) $\neg\psi$ *nu e satisfiabil*

(c) Mai mult, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $\Gamma \vDash \psi$

(ii) $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ *nu e satisfiabilă*

(iii) $\neg\psi$ *nu e satisfiabil, sau există $k \in \mathbb{N}^*$ şi $\psi_1, \ldots, \psi_k \in \Gamma$ astfel încât $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k \wedge \neg\psi$ nu e satisfiabil.*

Remarca 5.5. Formele clauzale pentru o mulţime finită de enunţuri $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ sunt exact formele clauzale pentru enunţul $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$.

Problema 5.1. Fiind dat un enunţ φ în FNC, să se determine dacă φ e satisfiabil.

- O soluţie computaţională pentru problema de mai sus este **algoritmul Davis–Putnam**, bazat pe **rezoluţie**.
- **Rezoluţia propoziţională** poate fi privită ca o regulă de deducţie pentru calculul propoziţional clasic.
- Utilizând **rezoluţia**, se poate construi un demonstrator automat **corect şi complet** pentru calculul propoziţional clasic, fără alte teoreme formale şi reguli de deducţie, pentru că **regula rezoluţiei este echivalentă cu schemele de axiome** (A_1)**,** (A_2)**,** (A_3) **plus regula MP**.
- Limbajul de programare logică PROLOG este fundamentat pe rezoluţia pentru calculul cu predicate clasic (care înglobează rezoluţia propoziţională).

Definiţia 5.3 (şi mnemonic).
- O *clauză* este o mulţime finită de literali ($\{L_1, \ldots, L_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}$ şi $L_1, \ldots, L_n \in V \cup \{\neg p \mid p \in V\}$).
- **Clauza vidă** (i. e. clauza fără literali, clauza fără elemente) se notează cu $\Box$ (pentru a o deosebi de **mulţimea vidă de clauze**, $\emptyset$, în cele ce urmează).
- O clauză C se zice *trivială* ddacă există $p \in V$ cu $p, \neg p \in C$.

- Orice clauză nevidă $C = \{L_1, \ldots, L_n\}$ (cu $n \in \mathbb{N}^*$ şi $L_1, \ldots, L_n \in V \cup \{\neg\, p \mid p \in V\}$) se identifică cu enunţul în FND $\varphi = L_1 \vee \ldots \vee L_n$. Clauza C se zice *satisfiabilă* ddacă enunţul φ e satisfiabil.

- Clauza vidă ($\square$) e considerată **nesatisfiabilă** (**justificare:** $\square$ se identifică cu $\bigvee\limits_{i\in\emptyset} L_i$; pentru orice $h : V \to L_2$, $\tilde{h}(\bigvee\limits_{i\in\emptyset} L_i) = \bigvee\limits_{i\in\emptyset} \tilde{h}(L_i) = 0 \neq 1$ în $\mathcal{L}_2$).

- Orice mulţime finită de clauze $M = \{C_1, \ldots, C_k\}$ (cu $k \in \mathbb{N}$ şi $C_1, \ldots, C_k$ clauze) se identifică cu $C_1 \wedge \ldots \wedge C_k$, deci cu o FNC.

- O mulţime finită de clauze se zice *satisfiabilă* ddacă toate clauzele din componenţa ei sunt satisfăcute de o aceeaşi interpretare (au un acelaşi model, au un model comun).

Remarca 5.6.
- O mulţime finită de clauze este satisfiabilă ddacă FNC asociată ei e satisfiabilă;
- $\emptyset$ (mulţimea vidă de clauze) este satisfiabilă, chiar e satisfăcută de orice interpretare;
- orice clauză trivială e satisfiabilă, chiar e satisfăcută de orice interpretare;
- orice mulţime finită de clauze triviale este satisfiabilă, chiar e satisfăcută de orice interpretare.

Rezoluţia (regulă de deducţie pentru logica propoziţională clasică): pentru orice clauze C, D, dacă $p \in V$ astfel încât $p, \neg\, p \notin C$ şi $p, \neg\, p \notin D$, atunci:

$$\frac{C \cup \{p\}, D \cup \{\neg\, p\}}{C \cup D}, \text{ adică } \frac{(C \vee p) \wedge (D \vee \neg\, p)}{C \vee D}$$

Propoziţia 5.4. *Fie C şi D clauze, iar S, T şi U mulţimi finite de clauze. Atunci:*

(i) dacă C e satisfiabilă şi $C \subseteq D$, atunci D e satisfiabilă; prin urmare, dacă D e nesatisfiabilă şi $C \subseteq D$, atunci C e nesatisfiabilă;

(ii) $C \cup D$ e satisfiabilă ddacă C e satisfiabilă sau D e satisfiabilă;

(iii) dacă $p \in V \setminus V(C)$, atunci $C \cup \{p\}$ şi $C \cup \{\neg\, p\}$ sunt satisfiabile;

(iv) dacă S e nesatisfiabilă şi $S \subseteq T$, atunci T e nesatisfiabilă; prin urmare, dacă T e satisfiabilă şi $S \subseteq T$, atunci S e satisfiabilă;

(v) dacă U e satisfiabilă şi există $p \in V \setminus V(U)$, $G \in S$ şi $H \in T$ astfel încât $p \in G \setminus H$ şi $\neg\, p \in H \setminus G$, atunci $U \cup S$ şi $U \cup T$ sunt satisfiabile;

*(vi) dacă $p \in V$ astfel încât $p, \neg\, p \notin C$ şi $p, \neg\, p \notin D$, iar mulţimea de clauze $\{C \cup \{p\}, D \cup \{\neg\, p\}\}$ e satisfiabilă, atunci $C \cup D$ e satisfiabilă (***regula rezoluţiei***).*

Definiţia 5.4 (derivări prin rezoluţie). Fie o mulţime finită de clauze $\{D_1, \ldots, D_k\}$ şi φ enunţul în FNC corespunzător acestei mulţimi de clauze:

$$\varphi = D_1 \wedge \ldots \wedge D_k.$$

Dacă $i, j \in \overline{1,k}$ a. î. $i \neq j$ şi există $p \in V$ cu $p \in D_i$ şi $\neg\, p \in D_j$, atunci mulţimea de clauze $R := \{(D_i \setminus \{p\}) \cup (D_j \setminus \{\neg\, p\})\} \cup \{D_t \mid t \in \overline{1,k} \setminus \{i,j\}\}$ sau o FNC corespunzătoare ei, de exemplu enunţul

$$((D_i \setminus \{p\}) \vee (D_j \setminus \{\neg\, p\})) \wedge \bigwedge_{t \in \overline{1,k} \setminus \{i,j\}} D_t,$$

se numeşte *rezolvent* al enunţului φ sau al mulţimii de clauze $\{D_1, \ldots, D_k\}$.

Deducţia

$$\frac{D_1, \ldots, D_k}{R}$$

se numeşte *derivare prin rezoluţie* a lui φ sau a mulţimii $\{D_1, \ldots, D_k\}$.

Vom numi orice succesiune de derivări prin rezoluţie tot *derivare prin rezoluţie*. O succesiune de derivări prin rezoluţie care începe cu o FNC/mulţime de clauze μ şi se termină cu o FNC/mulţime de clauze ν se numeşte *derivare prin rezoluţie a lui ν din μ*.

Nota 5.1. **Rezoluţia** este o metodă de verificare a satisfiabilităţii pentru mulţimi (finite) de enunţuri în formă clauzală.

Nota 5.2. Aplicarea regulii rezoluţiei simultan pentru două variabile diferite este **greşită**.

Remarca 5.7.

- Dacă într–o derivare prin rezoluţie a unei mulţimi finite M de enunţuri în **formă clauzală** apare $\square$, atunci M nu e satisfiabilă.
- În schimb, o derivare prin rezoluţie a lui M în care nu apare $\square$ **nu arată** că M ar fi satisfiabilă.
- Pentru a arăta că o mulţime finită M de enunţuri (în formă clauzală) este satisfiabilă, putem găsi un model pentru M sau putem aplica **algoritmul Davis–Putnam**, care este echivalent cu obţinerea tuturor derivărilor posibile prin rezoluţie ale formei clauzale a lui M.

Algoritmul Davis–Putnam (abreviat *DP*):

INPUT: mulţime finită şi nevidă S de clauze netriviale;
$S_1 := S$; $i := 1$;

PASUL 1: luăm o $v_i \in V(S_i)$;
$T_i^0 := \{C \in S_i \mid \neg v_i \in C\}$;
$T_i^1 := \{C \in S_i \mid v_i \in C\}$;
$T_i := T_i^0 \cup T_i^1$;
$U_i := \emptyset$;

PASUL 2: dacă $T_i^0 \neq \emptyset$ şi $T_i^1 \neq \emptyset$,
atunci $U_i := \{(C_0 \setminus \{\neg v_i\}) \cup (C_1 \setminus \{v_i\}) \mid C_0 \in T_i^0, C_1 \in T_i^1\}$;
altfel $U_i := \emptyset$;

PASUL 3: $S_{i+1} := (S_i \setminus T_i) \cup U_i$;
$S_{i+1} := S_{i+1} \setminus \{C \in S_{i+1} \mid (\exists\, p \in V)\,(p, \neg p \in C)\}$
(eliminăm din S_{i+1} clauzele triviale);

PASUL 4: dacă $S_{i+1} = \emptyset$,
atunci OUTPUT: *S e satisfiabilă*;
altfel, dacă $\square \in S_{i+1}$,
atunci OUTPUT: *S nu e satisfiabilă*;
altfel $i := i + 1$ şi mergi la PASUL 1.

Propoziţia 5.5 (terminarea algoritmului DP). *Algoritmul DP se termină după cel mult $|V(S)|$ execuţii ale paşilor $1 - 4$, cu $S_{i+1} = \emptyset$ sau $\square \in S_{i+1}$.*

Propoziţia 5.6. *Fie S o mulţime finită şi nevidă de clauze.*
Dacă S e satisfiabilă, atunci orice rezolvent al lui S e satisfiabil.

Corolarul 5.1. *Fie S o mulţime finită şi nevidă de clauze.*
Dacă S e satisfiabilă, atunci algoritmul DP, aplicat lui S, se termină cu $S_{i+1} = \emptyset$.

Teorema 5.1. *Fie S o mulţime finită şi nevidă de clauze. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) S nu e satisfiabilă;

(ii) există o derivare prin rezoluţie a lui $\square$ (sau a unei mulţimi de clauze conţinând pe $\square$) din S.

Corolarul 5.2 (Teorema Davis–Putnam). *Algoritmul DP este corect şi complet.*

Notaţia 5.2. Dacă $\Gamma \subseteq E$ şi $\varphi \in E$, atunci notăm cu $\Gamma \vdash_R \varphi$ faptul că există o derivare prin rezoluţie a lui $\square$ dintr–o formă clauzală a lui $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$.

Rezoluţia propoziţională $\Longleftrightarrow$ sistemul Hilbert:

Corolarul 5.3. *Pentru orice $\Gamma \subseteq E$ şi orice $\varphi \in E$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\Gamma \vDash \varphi$;

(ii) $\Gamma \vdash_R \varphi$.

Remarca 5.8. Conform corolarului anterior şi (TCT), **regula rezoluţiei** este corectă şi completă pentru calculul propoziţional clasic, adică deducţia pe baza **regulii rezoluţiei** este echivalentă cu deducţia pe baza axiomelor (A_1), (A_2), (A_3) şi a regulii de deducţie **MP**.

Aşadar folosind **regula rezoluţiei** putem realiza o prezentare echivalentă pentru logica propoziţională clasică.

Definiţia 5.5. Deducţia pe baza axiomelor (A_1), (A_2), (A_3) şi a regulii de deducţie **MP** (adică mulţimea regulilor (A_1), (A_2), (A_3) şi **MP** – a se vedea mai jos **teoriile deductive Moisil**) se numeşte *sistemul Hilbert* pentru calculul propoziţional clasic.

6 Deducţia naturală

Deducţia naturală este o altă prezentare echivalentă pentru logica propoziţională clasică: următoarele reguli de deducţie sunt echivalente cu axiomele (A_1), (A_2), (A_3) plus regula **MP**.

Notaţiile 6.1.

- $\perp$ va desemna un element arbitrar al mulţimii de enunţuri $\{\varphi \wedge \neg\varphi, \neg\varphi \wedge \varphi \mid \varphi \in E\}$.
- Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ orice enuţuri $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$, $\dfrac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\psi}$ va avea semnificaţia: în prezenţa tuturor ipotezelor curente, din $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se deduce ψ.
- Pentru orice $n, k \in \mathbb{N}$, orice enunţuri $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_k, \psi$ şi orice mulţimi finite de enunţuri $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, $\dfrac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \frac{\Gamma_1}{\gamma_1}, \ldots, \frac{\Gamma_k}{\gamma_k}}{\psi}$ va avea semnificaţia: în prezenţa tuturor ipotezelor curente, dacă $\dfrac{\Gamma_1}{\gamma_1}, \ldots, \dfrac{\Gamma_k}{\gamma_k}$, atunci din $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se deduce ψ.

Regulile de deducţie ale deducţiei naturale:
Considerăm $\varphi, \psi, \chi \in E$, arbitrare.

- $\wedge$–**eliminarea**: $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$ şi $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$; $\wedge$–**introducerea**: $\dfrac{\varphi, \psi}{\varphi \wedge \psi}$;
- $\neg\neg$–**eliminarea**: $\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$; $\neg\neg$–**introducerea**: $\dfrac{\varphi}{\neg\neg\varphi}$;
- $\rightarrow$–**introducerea**: $\dfrac{\frac{\varphi}{\psi}}{\varphi \rightarrow \psi}$; $\rightarrow$–**eliminarea** este **MP**: $\dfrac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$;
- $\vee$–**introducerea**: $\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$ şi $\dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}$; $\vee$–**eliminarea**: $\dfrac{\varphi \vee \psi, \frac{\varphi}{\chi}, \frac{\psi}{\chi}}{\chi}$;
- $\perp$–**eliminarea**: $\dfrac{\perp}{\varphi}$;
- $\neg$–**introducerea**: $\dfrac{\frac{\varphi}{\perp}}{\neg\varphi}$; $\neg$–**eliminarea**: $\dfrac{\varphi, \neg\varphi}{\perp}$.