# *Reţele Petri şi Aplicaţii*

Asist. Dr. Oana Captarencu

http://www.infoiasi.ro/˜otto/pn.html

otto@infoiasi.ro

# Evaluare

Nota finala: 40% TS1 + 20% TS2 + 40%LSA

- TS1, TS2 - teste scrise
- Activitate laborator/seminar (LSA):
  - lucrare (30%)
  - proiect (50%)
  - activitatea în timpul seminarului (20%)
- Referat (opţional): 2 puncte (se adaugă la nota finală)
- Condiţii minimale: $LSA \geq 5$, $TS1 + TS2 \geq 7$
- Nota finală: minim 5.

# *Reţele Petri*

Reţele Petri: o metodă formală (matematică) folosită pentru modelarea şi verificarea sistemelor (concurente/distribuite)

# *Reţele Petri*

Reţele Petri: o metodă formală (matematică) folosită pentru modelarea şi verificarea sistemelor (concurente/distribuite)

Noţiunea de sistem:

- A regularly interacting or interdependent group of items forming a unified whole (Webster Dictionary)
- A combination of components that act together to perform a function not possible with any of the individual parts (IEEE Standard Dictionary of Electrical and Electronic Terms)

# Reţele Petri

Reţele Petri: o metodă formală (matematică) folosită pentru modelarea şi verificarea sistemelor (concurente/distribuite)

Noţiunea de sistem:

- A regularly interacting or interdependent group of items forming a unified whole (Webster Dictionary)
- A combination of components that act together to perform a function not possible with any of the individual parts (IEEE Standard Dictionary of Electrical and Electronic Terms)

Sistemele:

- alcătuite din componente care interacţionează
- îndeplinesc o anumită funcţionalitate
- evenimente şi stări
- concurenţă, comunicare, sincronizare

# *Reţele Petri*

Exemple de sisteme:

- sisteme automatizate de producţie
- sisteme de control al traficului aerian
- sisteme de monitorizare şi control în industrie
- reţele de comunicare
- sisteme software distribuite
- etc...

# *Modelarea şi verificarea sistemelor*

- Verificarea sistemelor reale: are drept scop verificarea unor proprietăţi dezirabile, înca din stadiul de proiectare
- Un model surprinde caracteristici esenţiale ale sistemului
- Modele (formale) pentru verificarea sistemelor:
  - automate/sisteme tranziţionale
  - algebre de procese
  - logici temporale
  - reţele Petri
  - etc...

# *Reţele Petri pentru modelarea sistemelor*

Reţele Petri:

- Carl Adam Petri, 1962

# *Reţele Petri pentru modelarea sistemelor*

Reţele Petri:

- Carl Adam Petri, 1962
- grafuri bipartite

# Reţele Petri pentru modelarea sistemelor

Reţele Petri:

- Carl Adam Petri, 1962
- grafuri bipartite
- reprezentare explicită stărilor şi evenimentelor dintr-un sistem

# *Reţele Petri pentru modelarea sistemelor*

Reţele Petri:

- Carl Adam Petri, 1962
- grafuri bipartite
- reprezentare explicită stărilor şi evenimentelor dintr-un sistem
- reprezentare grafică intuitivă

# Reţele Petri pentru modelarea sistemelor

Reţele Petri:

- Carl Adam Petri, 1962
- grafuri bipartite
- reprezentare explicită stărilor şi evenimentelor dintr-un sistem
- reprezentare grafică intuitivă
- semantică formală

# Reţele Petri pentru modelarea sistemelor

Reţele Petri:

- Carl Adam Petri, 1962
- grafuri bipartite
- reprezentare explicită stărilor şi evenimentelor dintr-un sistem
- reprezentare grafică intuitivă
- semantică formală
- expresivitate (concurenţă, nedeterminism, comunicare,sincronizare)

# *Reţele Petri pentru modelarea sistemelor*

Reţele Petri:

- Carl Adam Petri, 1962
- grafuri bipartite
- reprezentare explicită stărilor şi evenimentelor dintr-un sistem
- reprezentare grafică intuitivă
- semantică formală
- expresivitate (concurenţă, nedeterminism, comunicare,sincronizare)
- existenţa metodelor de analiză a proprietăţilor

# Reţele Petri pentru modelarea sistemelor

Reţele Petri:

- Carl Adam Petri, 1962
- grafuri bipartite
- reprezentare explicită stărilor şi evenimentelor dintr-un sistem
- reprezentare grafică intuitivă
- semantică formală
- expresivitate (concurenţă, nedeterminism, comunicare,sincronizare)
- existenţa metodelor de analiză a proprietăţilor
- numeroase unelte software pentru editarea/verificarea proprietăţilor reţelelor Petri

# *Reţele Petri*

Domenii de aplicabilitate:

- Protocoale de comunicare, reţele
- Sisteme software si hardware
- Algoritmi distribuiţi
- Protocoale de securitate
- Biologie, Chimie, Medicină
- Economie (fluxuri de lucru)
- etc..

# *Retele de tip P/T*

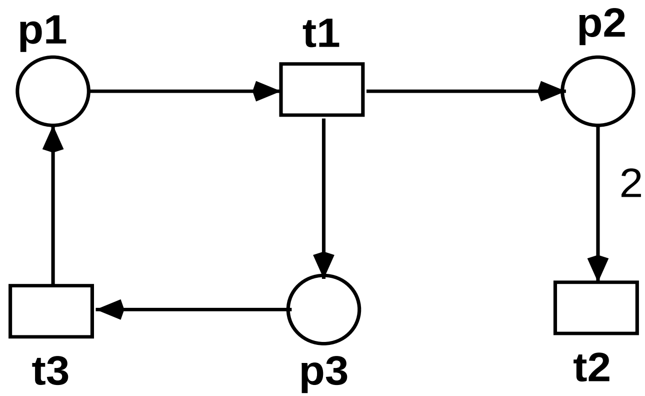
- Definiţie
- Regula de producere a tranziţiilor (comportament)
- Proprietăţi

# Retele de tip P/T - Definiţie

**Definiţie 1** *O reţea Petri este un 4-uplu* $N = (P, T, F, W)$ *astfel încât :*

1. $P$ *mulţime de locaţii,* $T$ *mulţime de tranziţii,* $P \cap T = \emptyset$*;*
2. $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ *relaţia de flux;*
3. $W : (P \times T) \cup (T \times P) \to \mathbb{N}$ *ponderea arcelor (*$W(x, y) = 0$ *ddacă* $(x, y) \notin F$*).*

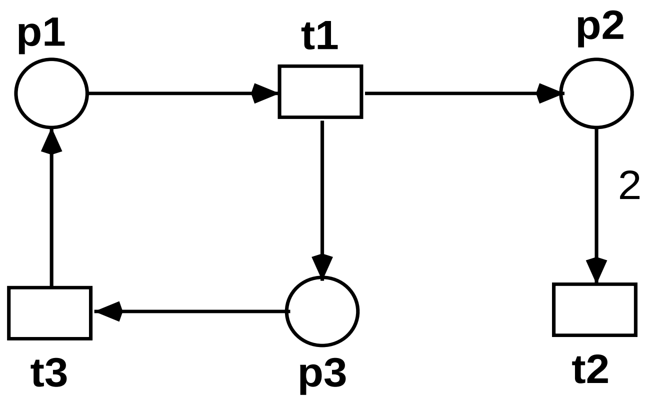
- $P = \{p_1, p_2, p_3\}$
- $T = \{t_1, t_2, t_3\}$
- $F = \{(p_1, t_1), (t_1, p_2), (t_1, p_3), (p_3, t_3), (t_3, p_1), (p_2, t_2)\}$
- $W(p_1, t_1) = 1$, $W(t_1, p_2) = 1$, $W(t_1, p_3) = 1$, $W(p_3, t_3) = 1$, $W(t_3, p_1) = 1$,$W(p_2, t_2) = 2$



# Reţele de tip P/T

Dacă $x \in P \cup T$, atunci:

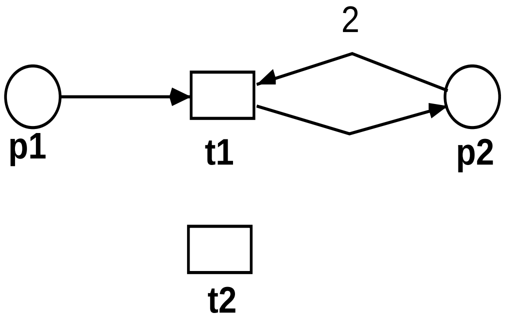
- Premulţimea lui $x$: $\bullet x = \{y | (y, x) \in F\}$;
- Postmulţimea lui $x$: $x \bullet = \{y | (x, y) \in F\}$ .




- $\bullet t_1 = \{p_1\}, \bullet t_2 = \{p_2\}, \bullet t_3 = \{p_3\}$
- $t_1 \bullet = \{p_2, p_3\}, t_2 \bullet = \emptyset, t_3 \bullet = \{p_1\}$
- $\bullet p_1 = \{t_3\}, \bullet p_2 = \{t_1\}, \bullet p_3 = \{t_1\}$
- $p_1 \bullet = \{t_1\}, p_2 \bullet = \{t_2\}, p_3 \bullet = \{t_3\}$

# *Reţele de tip P/T*

- **Definiţie 2** *O reţea este pură dacă, pentru orice* $x \in P \cup T$, $\bullet x \cap x \bullet = \emptyset$.

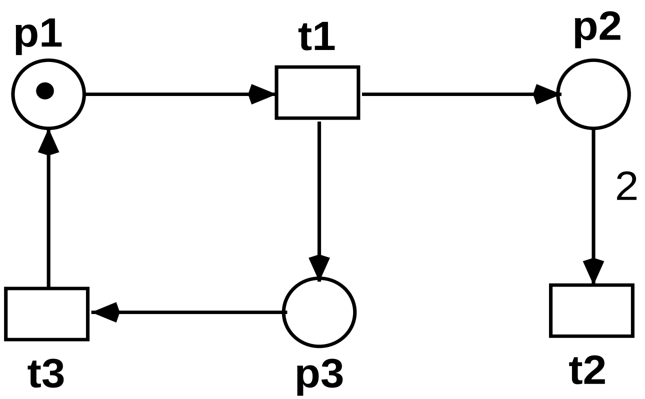



- **Definiţie 3** *O reţea este fără elemente izolate, dacă, pentru orice* $x \in P \cup T$, $\bullet x \cup x \bullet \neq \emptyset$

# *Marcare a unei reţele de tip P/T*

**Definiţie 4** *(Marcare, reţele marcate)*

- *Fie $N = (P, T, F, W)$ o reţea P/T. O marcare a lui $N$ este o funcţie $M : P \to \mathbb{N}$.*
- *Fie $N = (P, T, F, W)$ o reţea P/T şi $M_0 : P \to \mathbb{N}$. Atunci $(N, M_0)$ se numeşte reţea Petri marcată.*




$$M = (1, 0, 0)$$

- Distribuţia punctelor în locaţiile unei reţele = marcarea reţelei (starea sistemului modelat)

# Reţele Petri

- Tranziţii: reprezintă acţiuni sau evenimente din sistemul modelat
- Punctele din locaţii: pot modela resurse/valori booleene
- Locaţiile input: conţin resurse (reprezentate de punctele din locaţie) care vor fi folosite de către acţiune, precondiţii pentru producerea unui eveniment
- Ponderea unui arc input: câte resurse de un anumit tip sunt necesare producerii acţiunii
- Ponderea unui arc output: numărul de resurse de un anumit tip rezultate prin producerea acţiunii

# *Exemplu*

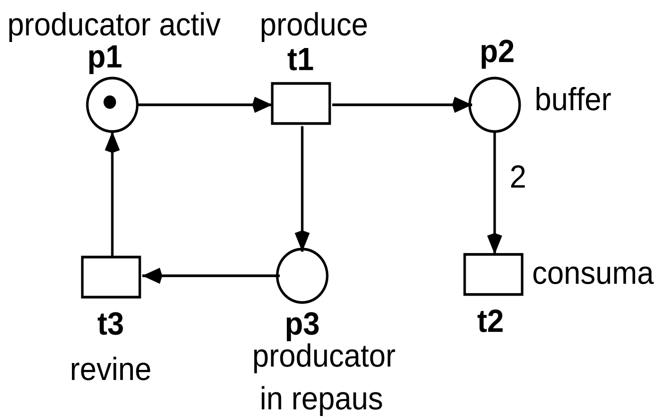
Model producator consumator:

- Producatorul (P) poate produce câte un produs (într-un buffer)
- Un consumator (C) preia câte două produse din buffer
- Stări producător: producător activ (pregătit să producă), producător în repaus.
- Evenimente: P produce un produs, C consumă produse, P redevine activ

# Exemplu

Model producator consumator:

- Producatorul (P) poate produce câte un produs (într-un buffer)
- Un consumator (C) preia câte două produse din buffer
- Stări producător: producător activ (pregătit să producă), producător în repaus.
- Evenimente: P produce un produs, C consumă produse, P redevine activ



# *Regula de producere a tranziţiilor*

Fie $N = (P, T, F, W)$ o reţea Petri, $M$ o marcare a lui $N$ şi $t \in T$ o tranziţie a lui $N$.

# *Regula de producere a tranziţiilor*

Fie $N = (P, T, F, W)$ o reţea Petri, $M$ o marcare a lui $N$ şi $t \in T$ o tranziţie a lui $N$.

- Tranziţia $t$ este posibilă la marcarea $M$ ($M[t\rangle_N$) dacă $W(p, t) \leq M(p)$, pentru orice $p \in \bullet t$.

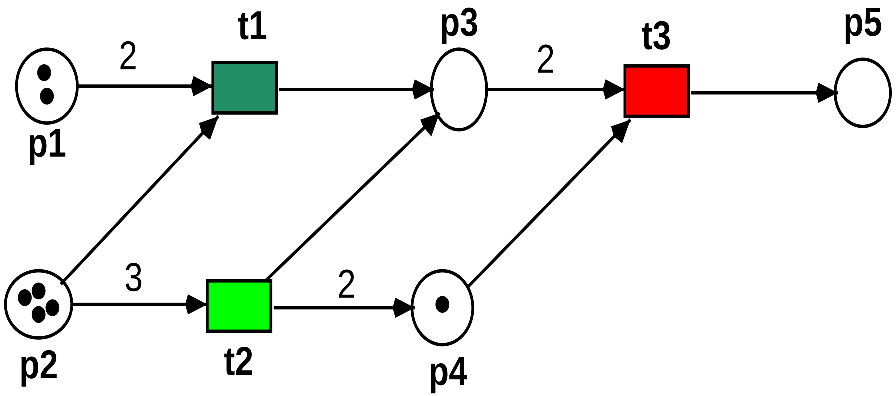
# *Regula de producere a tranziţiilor*

Fie $N = (P, T, F, W)$ o reţea Petri, $M$ o marcare a lui $N$ şi $t \in T$ o tranziţie a lui $N$.

- Tranziţia $t$ este posibilă la marcarea $M$ ($M[t\rangle_N$) dacă $W(p,t) \leq M(p)$, pentru orice $p \in \bullet t$.
- Dacă $t$ este posibilă la marcarea $M$, atunci $t$ se poate produce, rezultând o nouă marcare $M'$ ($M[t\rangle_N M'$), unde $M'(p) = M(p) - W(p,t) + W(t,p)$, pentru toţi $p \in P$.

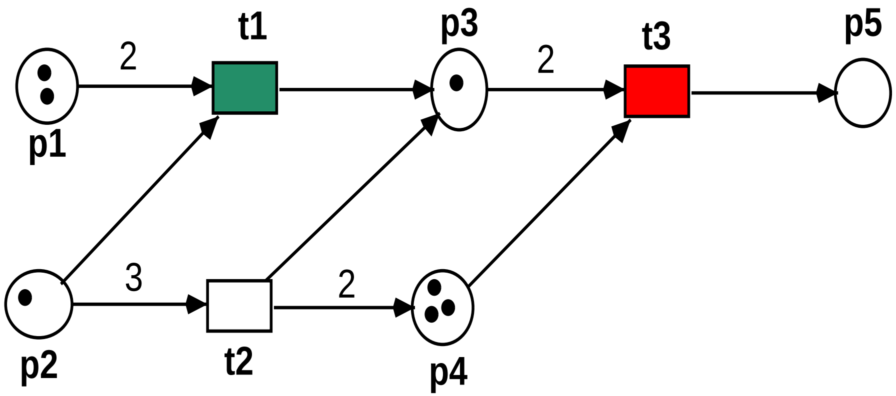
# *Exemplu*

- o tanziţie este posibilă dacă locaţiile input conţin suficiente puncte:



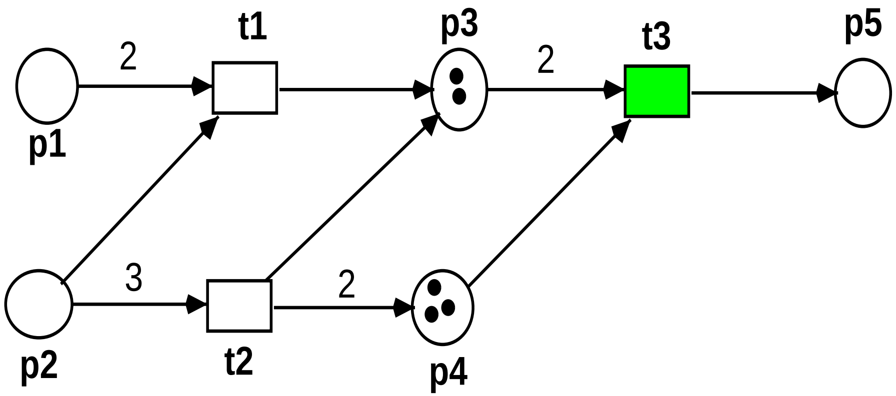
# Exemplu

- o tanziţie este posibilă dacă locaţiile input conţin suficiente puncte:



# Exemplu

- o tanziţie este posibilă dacă locaţiile input conţin suficiente puncte:



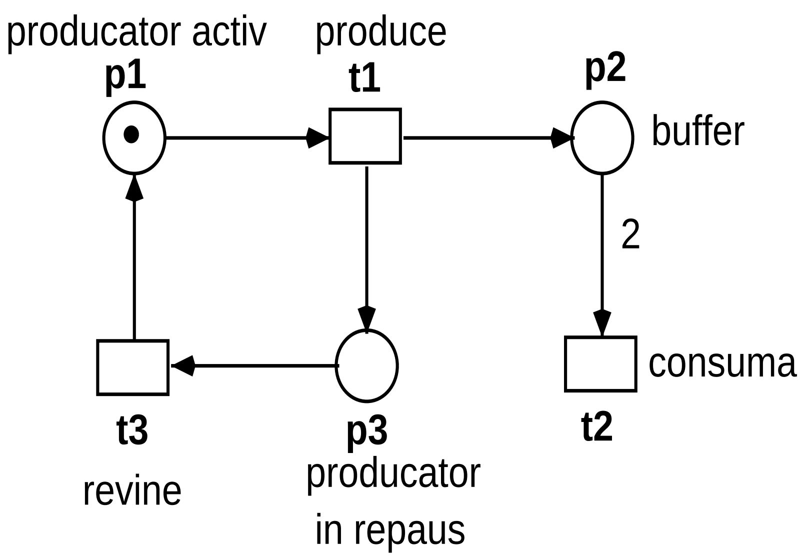

- Producerea unei tranziţii modifică marcarea reţelei

# *Exemplu I*

Model producător consumator:

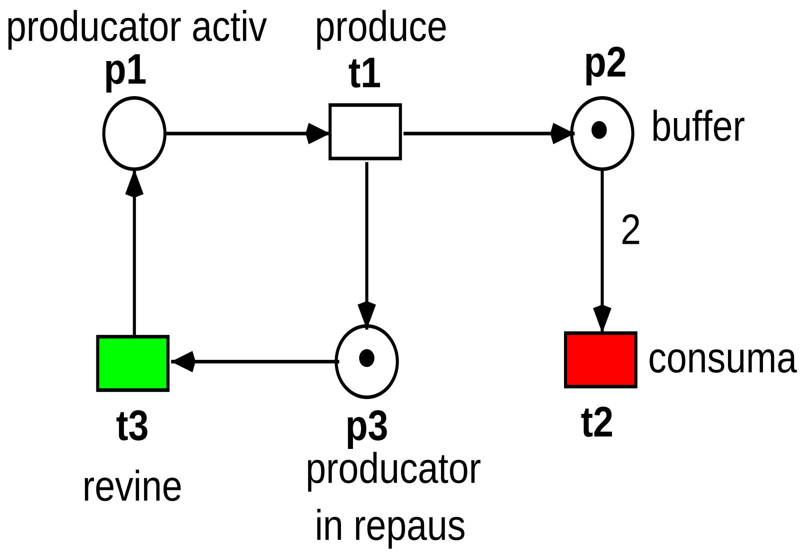
# *Exemplu I*

Model producător consumator:



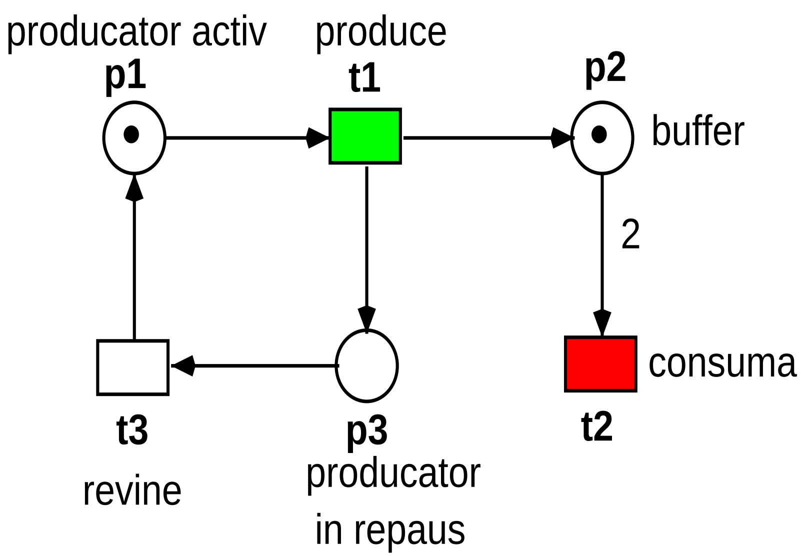
# *Exemplu I*

Model producător consumator:



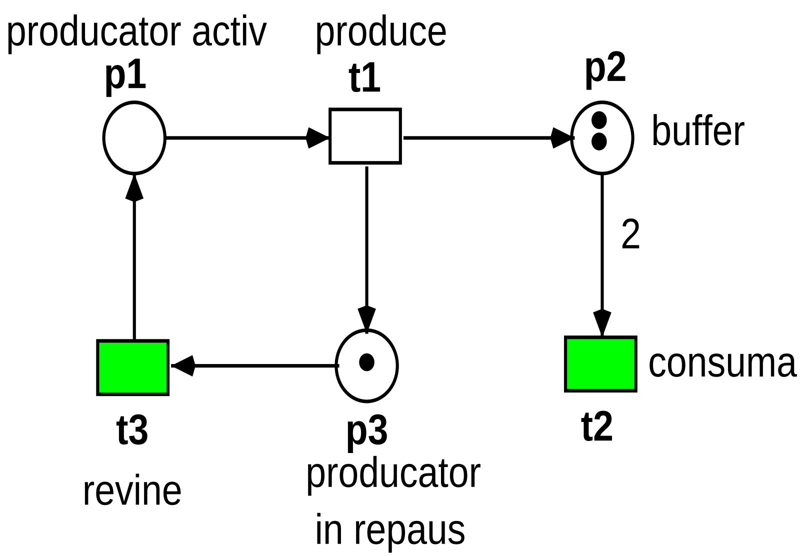
# Exemplu I

Model producător consumator:



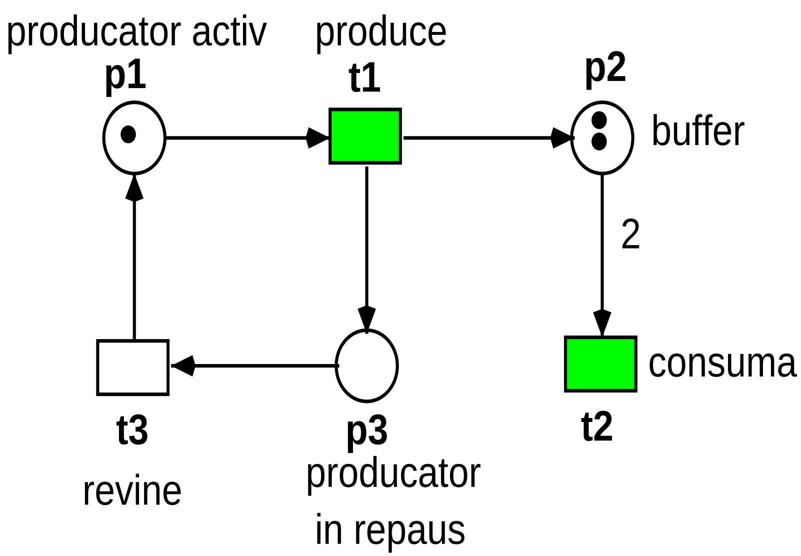
# *Exemplu I*

Model producător consumator:



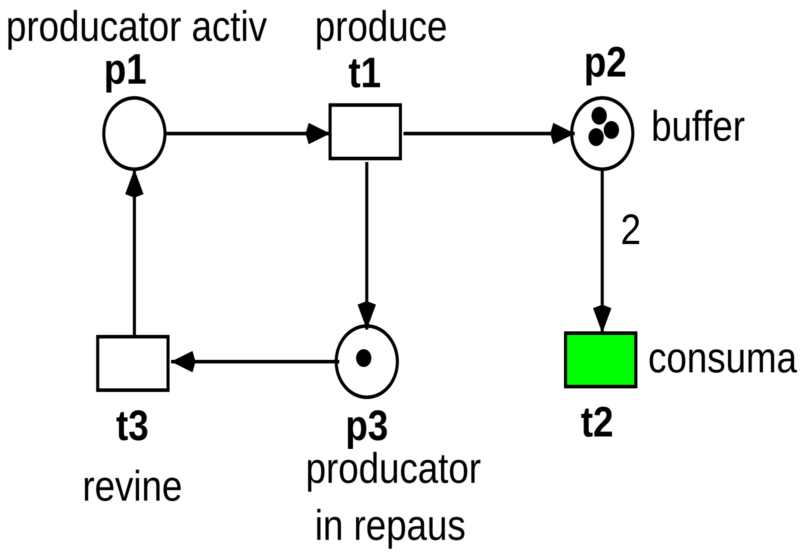
# *Exemplu I*

Model producător consumator:



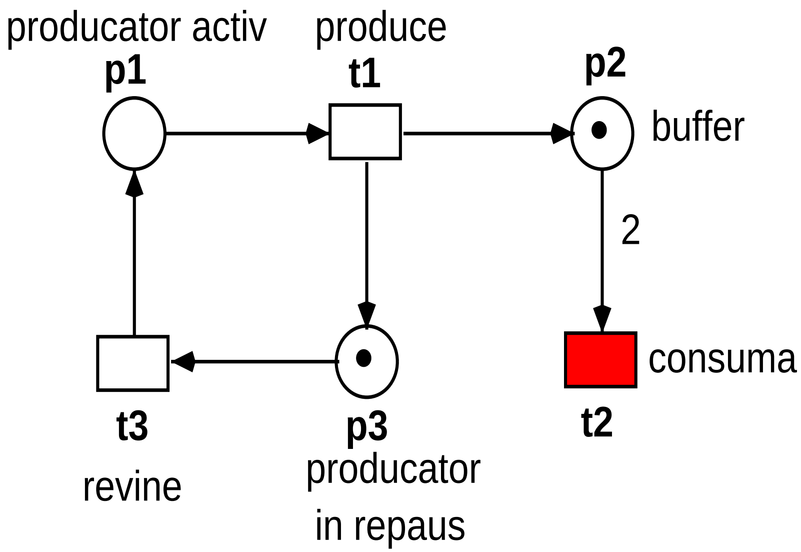
# Exemplu I

Model producător consumator:



# *Exemplu I*

Model producător consumator:

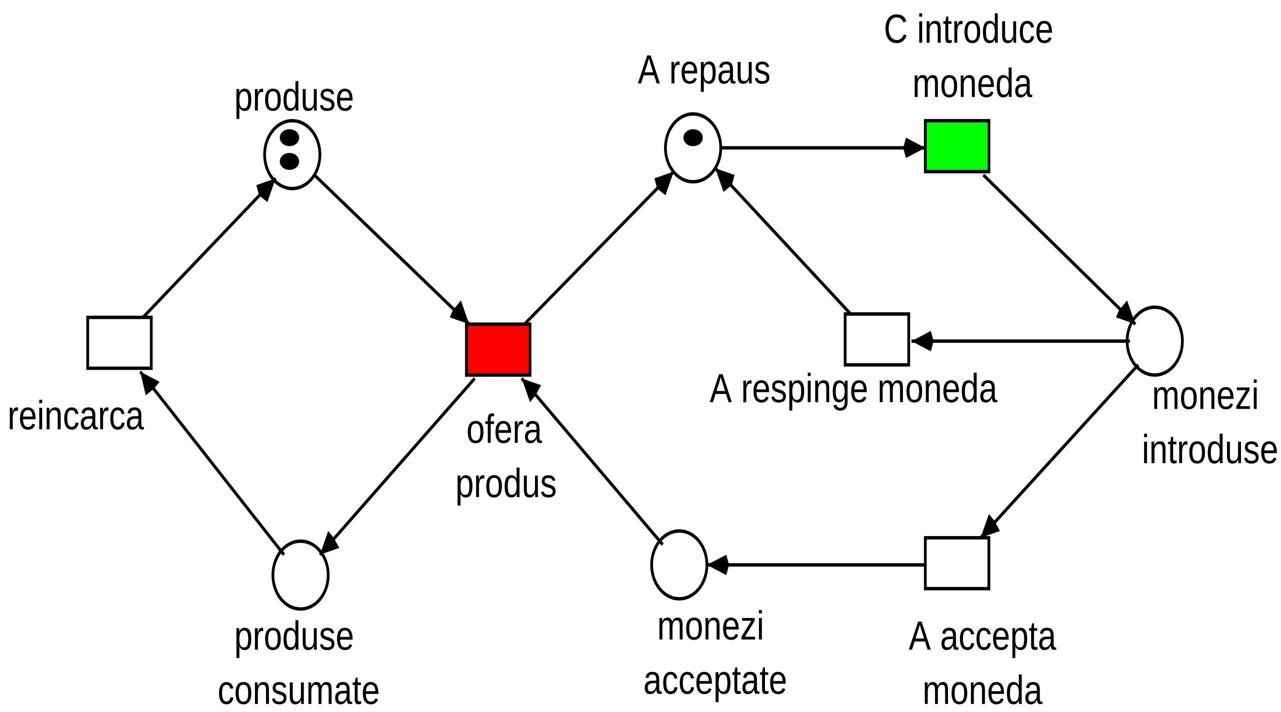


# *Exemplu II*

- Automat care furnizează produse

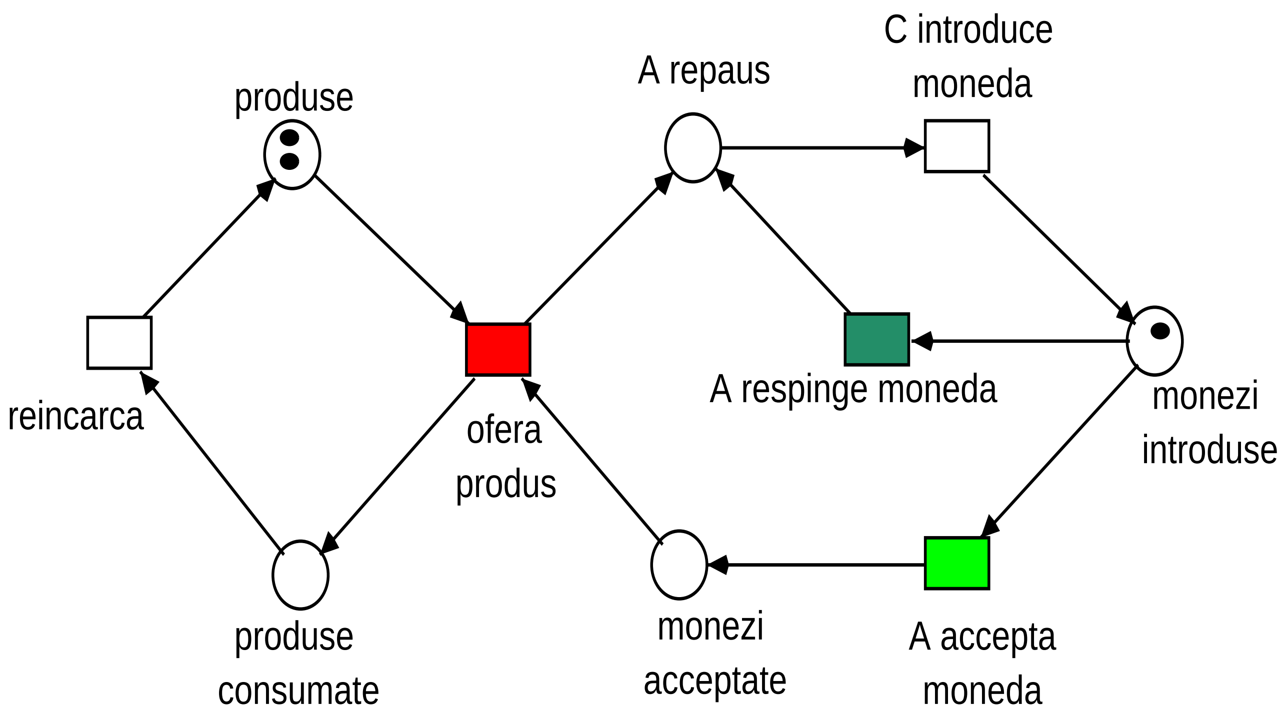
# Exemplu II

- Automat care furnizează produse



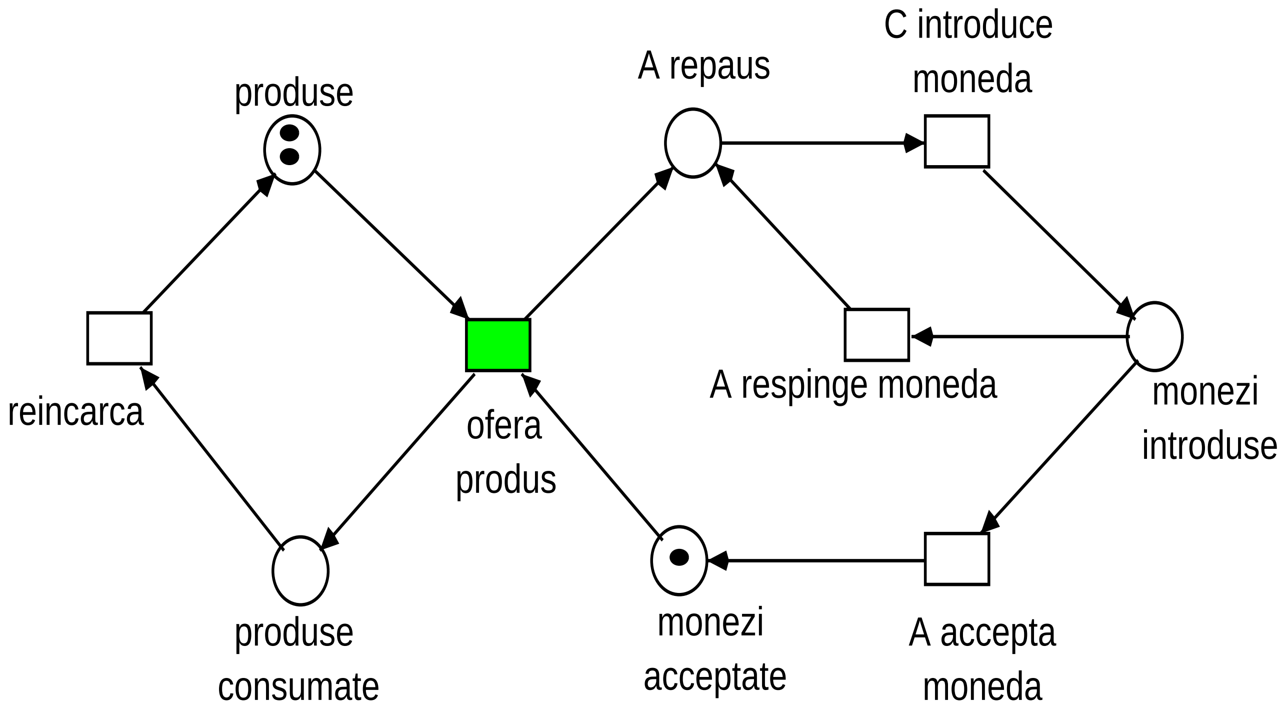
# Exemplu II

- Automat care furnizează produse



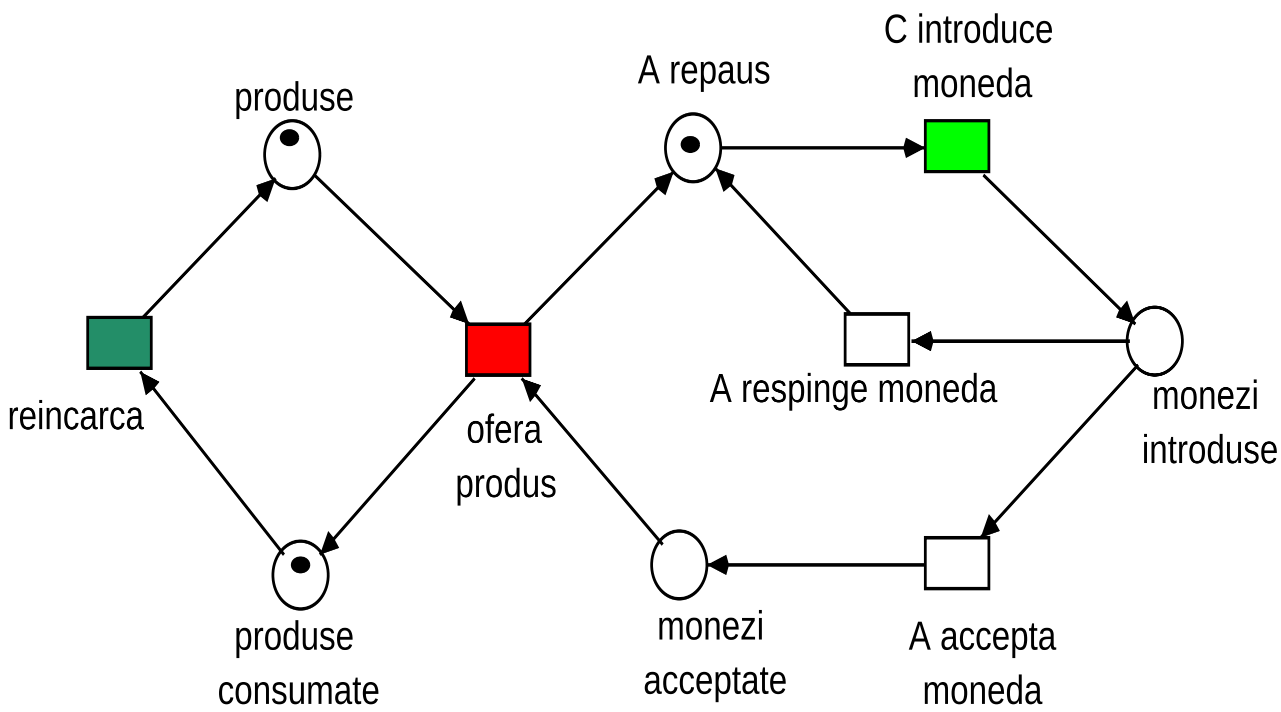
# *Exemplu II*

- Automat care furnizează produse



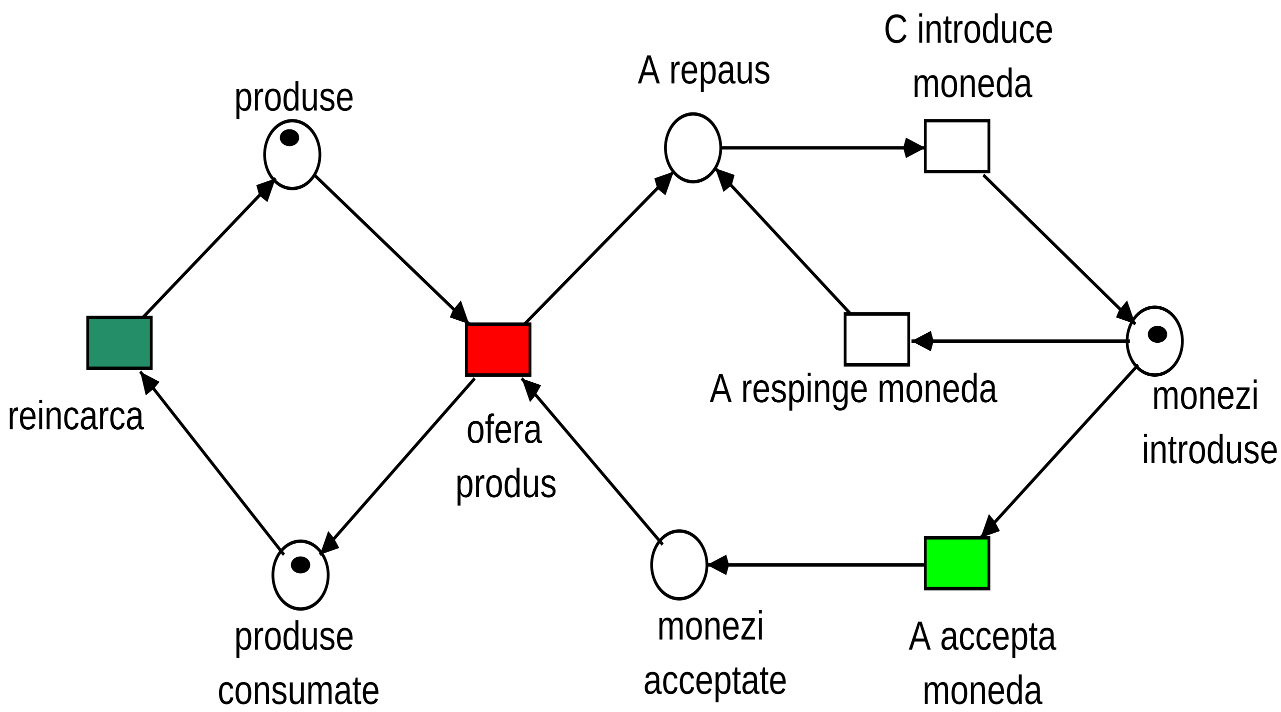
# Exemplu II

- Automat care furnizează produse



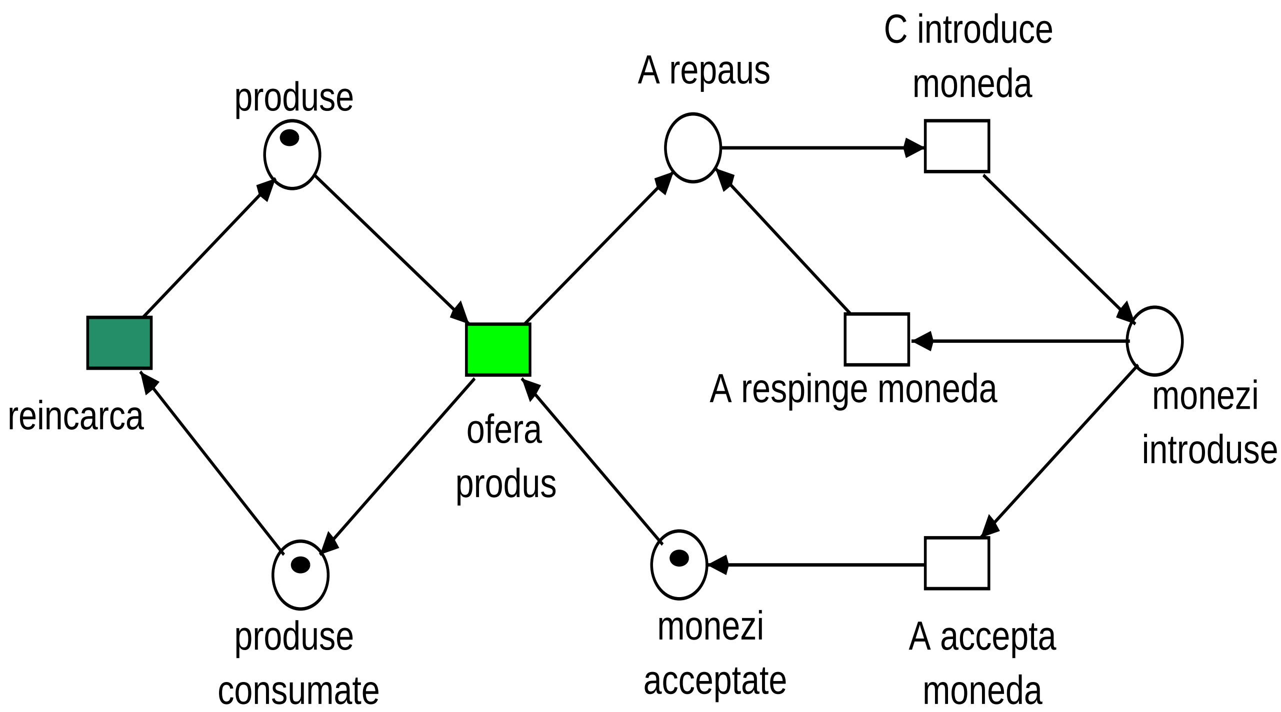
# Exemplu II

- Automat care furnizează produse



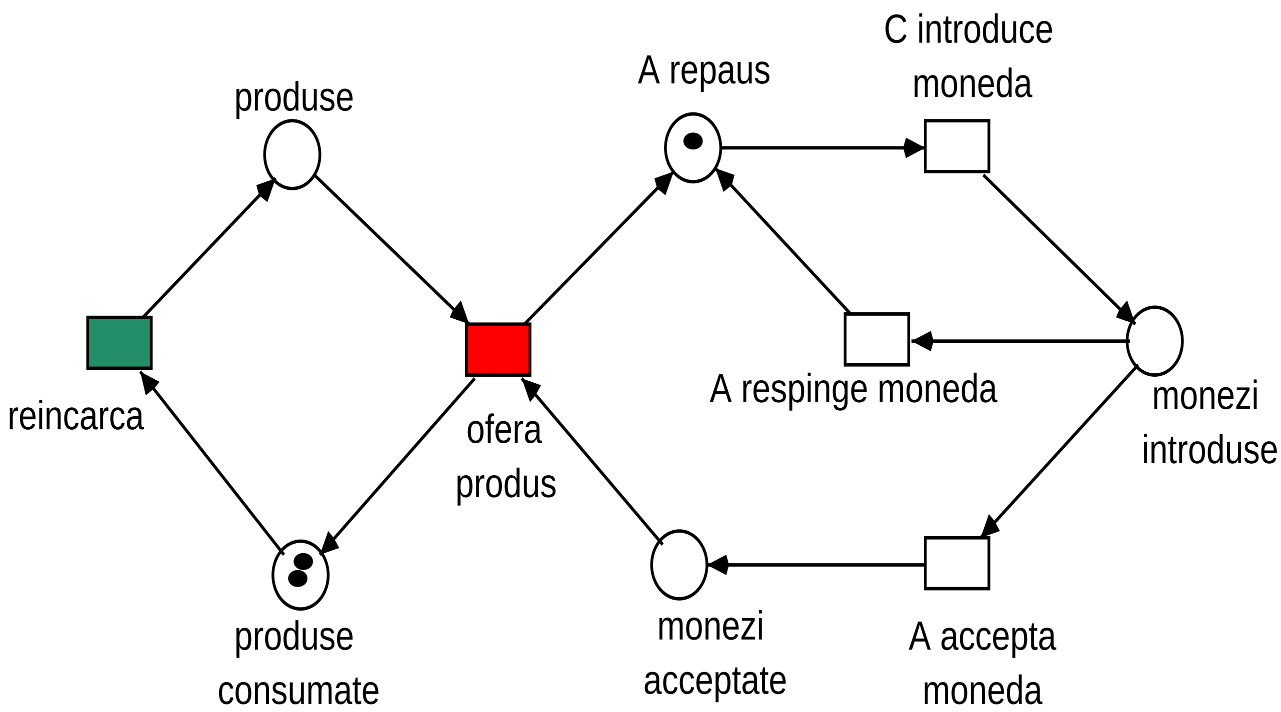
# Exemplu II

- Automat care furnizează produse



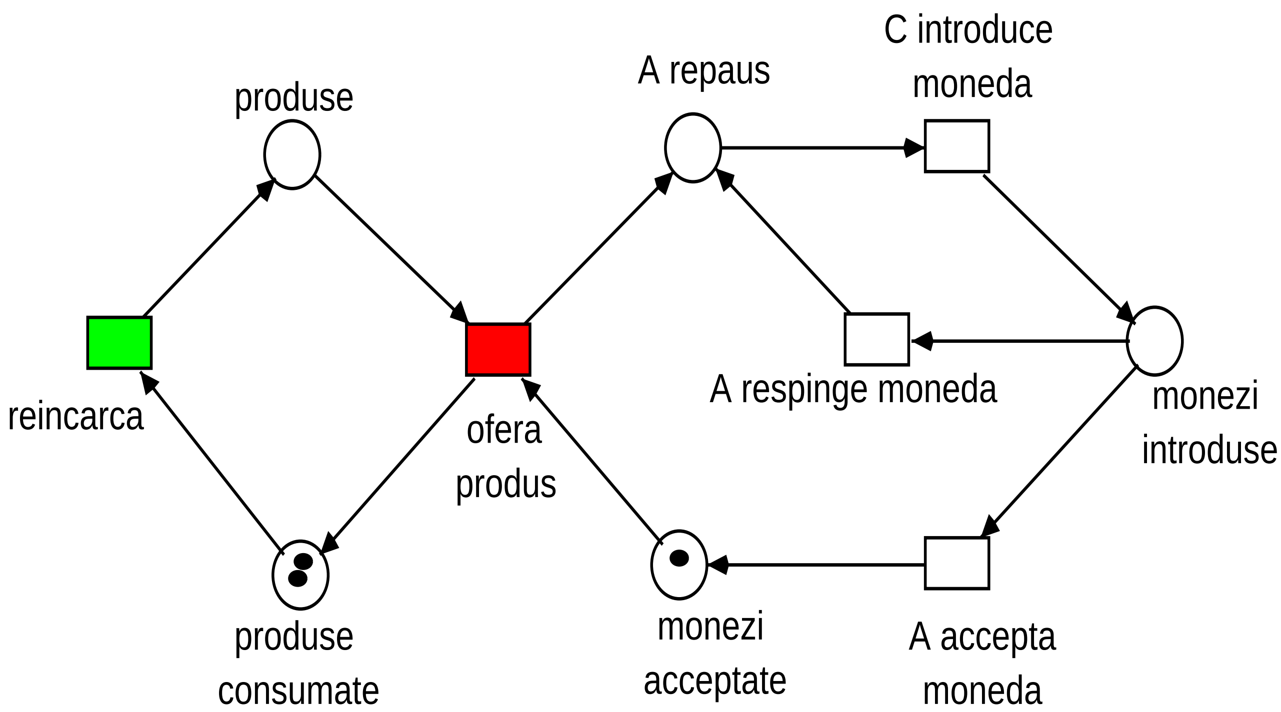
# Exemplu II

- Automat care furnizează produse



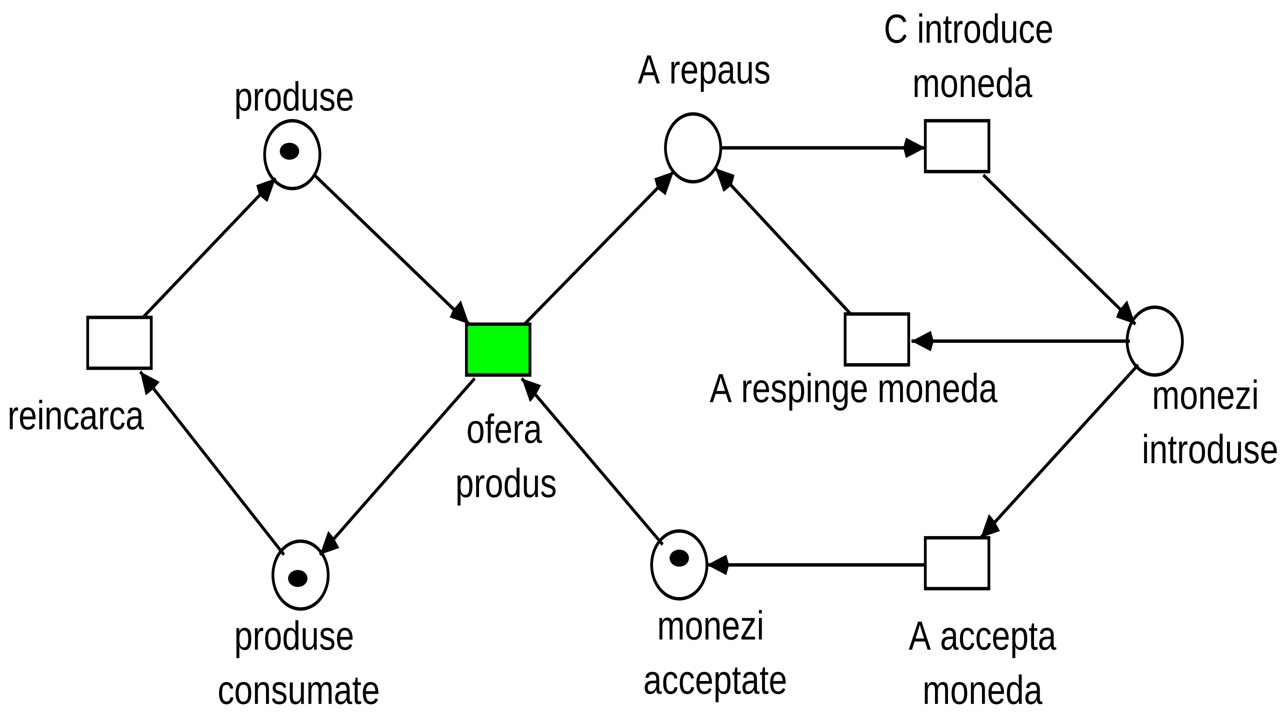
# *Exemplu II*

- Automat care furnizează produse



# Exemplu II

- Automat care furnizează produse



# *Secvenţe de apariţie a tranziţiilor*

Regula de producere a tranziţiilor se poate extinde la secvenţe de tranziţii:

**Definiţie 5** *(secvenţe de apariţie)*

- Fie $\sigma = t_1 t_2 \ldots t_k \in T^*$ şi $M$ o marcare. $\sigma$ se numeşte *secvenţă finită de apariţie, posibilă la M*, dacă există marcările $M_1, M_2, \ldots, M_k$ astfel încât:

$$M[t_1\rangle M_1[t_2\rangle M_2 \ldots M_{k-1}[t_k\rangle M_k$$

  Se mai notează: $M[\sigma\rangle M_k$.

- Secvenţa vidă de tranziţii, notată cu $\epsilon$, este secvenţă de apariţie posibilă la orice marcare $M$ a reţelei, şi are loc: $M[\epsilon\rangle M$.
- O secvenţă infinită de tranziţii $\sigma = t_1, t_2, \ldots$ este secvenţă infinită de apariţie, posibilă la marcarea $M$, dacă: $M[t_1\rangle M_2[t_2\rangle M_3 \ldots$.

# Notaţii

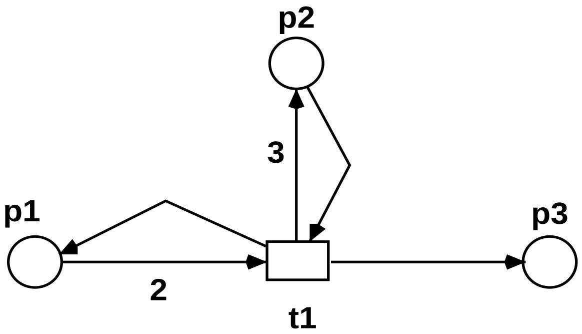
Fie $\gamma = (N, M_0)$ o reţea P/T marcată . Se definesc următoarele funcţii:

- $t^- : P \to \mathbb{N}$, $t^-(p) = W(p,t), \forall p \in P$
- $t^+ : P \to \mathbb{N}$, $t^+(p) = W(t,p), \forall p \in P$
- $\Delta t : P \to \mathbb{Z}$, $\Delta t(p) = W(t,p) - W(p,t)$

Dacă $\sigma \in T^*$ este o secvenţă de tranziţii, se defineşte $\Delta\sigma : P \to \mathbb{Z}$:

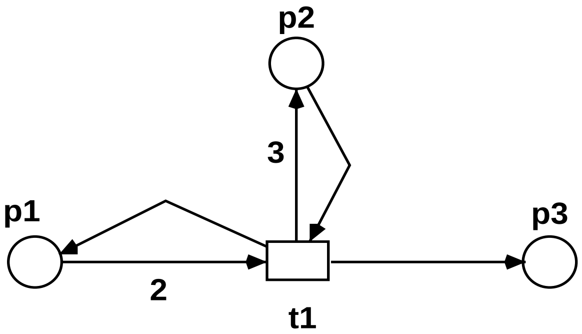
- Dacă $\sigma = \epsilon$, atunci $\Delta\sigma$ este funcţia identic $0$.
- Dacă $\sigma = t_1, \ldots, t_n$, atunci $\Delta\sigma = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i$.

# Secvenţe de apariţie




- $t_1^-(p_1) = 2, t_1^-(p_2) = 1, t_1^-(p_3) = 0$
- $t_1^+(p_1) = 1, t_1^+(p_2) = 3, t_1^+(p_3) = 1$
- $\Delta t_1(p_1) = -1, \Delta t_1(p_2) = 2, \Delta t_1(p_3) = 1$

# *Secvenţe de apariţie*




- $t_1^-(p_1) = 2, t_1^-(p_2) = 1, t_1^-(p_3) = 0$
- $t_1^+(p_1) = 1, t_1^+(p_2) = 3, t_1^+(p_3) = 1$
- $\Delta t_1(p_1) = -1, \Delta t_1(p_2) = 2, \Delta t_1(p_3) = 1$

**Propoziţie 1** *Fie $t$ o tranziţie, $\sigma \in T^*$ şi $M, M'$ marcări.*

- *Dacă $M[t\rangle M'$, atunci $M' = M + \Delta t$.*
- *Dacă $M[\sigma\rangle M'$, atunci $M' = M + \Delta\sigma$*

# *Marcări accesibile*

**Definiţie 6** *Fie $\gamma = (N, M_0)$ o reţea P/T marcată.*

- *O marcare $M'$ este accesibilă din marcarea $M$, dacă există o secvenţă finită de apariţie $\sigma$ astfel încât: $M[\sigma\rangle M'$.*

# *Marcări accesibile*

**Definiţie 6** *Fie $\gamma = (N, M_0)$ o reţea P/T marcată.*

- *O marcare $M'$ este accesibilă din marcarea $M$, dacă există o secvenţă finită de apariţie $\sigma$ astfel încât: $M[\sigma\rangle M'$.*
- *Marcarea $M$ este accesibilă în $\gamma$, dacă $M$ este accesibilă din marcarea iniţială $M_0$.*

# *Marcări accesibile*

**Definiţie 6** *Fie $\gamma = (N, M_0)$ o reţea P/T marcată.*

- *O marcare $M'$ este accesibilă din marcarea $M$, dacă există o secvenţă finită de apariţie $\sigma$ astfel încât: $M[\sigma\rangle M'$.*
- *Marcarea $M$ este accesibilă în $\gamma$, dacă $M$ este accesibilă din marcarea iniţială $M_0$.*
- *Mulţimea marcărilor accesibile dintr-o marcare $M$, în $\gamma$, se notează $[M\rangle_\gamma$ ($[M\rangle$ când este clar despre ce reţea este vorba).*

# *Marcări accesibile*

**Definiţie 6** *Fie $\gamma = (N, M_0)$ o reţea P/T marcată.*

- *O marcare $M'$ este accesibilă din marcarea $M$, dacă există o secvenţă finită de apariţie $\sigma$ astfel încât: $M[\sigma\rangle M'$.*
- *Marcarea $M$ este accesibilă în $\gamma$, dacă $M$ este accesibilă din marcarea iniţială $M_0$.*
- *Mulţimea marcărilor accesibile dintr-o marcare $M$, în $\gamma$, se notează $[M\rangle_\gamma$ ($[M\rangle$ când este clar despre ce reţea este vorba).*
- *$[M_0\rangle_\gamma$ se numeşte mulţimea marcărilor accesibile în reţeaua $\gamma$.*

# *Proprietăţi pentru secvenţe de apariţie*

- **Propoziţie 2** *Fie $M$ o marcare şi $\sigma$ o secvenţă finită de apariţie, astfel încât $M[\sigma\rangle M'$. Dacă $\sigma'$ este o secvenţă de apariţie (finită sau infinită) posibilă la marcarea $M'$, atunci $\sigma\sigma'$ este secvenţă de apariţie posibilă la $M$.*

# Proprietăţi pentru secvenţe de apariţie

- **Propoziţie 2** *Fie $M$ o marcare şi $\sigma$ o secvenţă finită de apariţie, astfel încât $M[\sigma\rangle M'$. Dacă $\sigma'$ este o secvenţă de apariţie (finită sau infinită) posibilă la marcarea $M'$, atunci $\sigma\sigma'$ este secvenţă de apariţie posibilă la $M$.*
- **Propoziţie 3** *O secvenţă infinită de apariţie $\sigma$ este posibilă la o marcare $M$ ddacă orice prefix finit al lui $\sigma$ este posibil la $M$.*

# *Proprietăţi pentru secvenţe de apariţie*

- **Propoziţie 2** *Fie $M$ o marcare şi $\sigma$ o secvenţă finită de apariţie, astfel încât $M[\sigma\rangle M'$. Dacă $\sigma'$ este o secvenţă de apariţie (finită sau infinită) posibilă la marcarea $M'$, atunci $\sigma\sigma'$ este secvenţă de apariţie posibilă la $M$.*
- **Propoziţie 3** *O secvenţă infinită de apariţie $\sigma$ este posibilă la o marcare $M$ ddacă orice prefix finit al lui $\sigma$ este posibil la $M$.*
- **Propoziţie 4** *Fie $M$ şi $\overline{M}$ marcări, $\sigma$ o secvenţă de apariţie posibilă atât la $M$ cât şi la $\overline{M}$, astfel încât: $M[\sigma\rangle M'$ şi $\overline{M}[\sigma\rangle\overline{M}'$. Atunci $M'(p) - M(p) = \overline{M}'(p) - \overline{M}(p)$, pentru orice locaţie $p \in P$.*

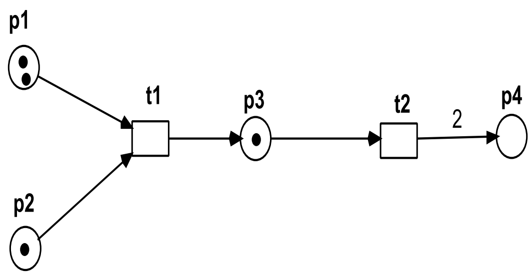
# *Proprietăţi pentru secvenţe de apariţie*

**Propoziţie 5** *Fie $M$, $M'$ şi $L$ marcări, $\sigma \in T^*$ o secvenţă de tranziţii, posibilă la $M$.*

- *Dacă $\sigma$ finită şi $M[\sigma\rangle M'$, atunci $(M+L)[\sigma\rangle(M'+L)$.*
- *Dacă $\sigma$ infinită şi $M[\sigma\rangle$, atunci $(M+L)[\sigma\rangle$*

Demonstraţie:

- $\sigma$ finită: inducţie după $|\sigma| = n$.
- $\sigma$ infinită: se arată că orice prefix finit al lui $\sigma$ este posibil la $M+L$.




$M = (2,1,1,0)[t_1t_2\rangle(1,0,1,2) = M'$

$(3,2,2,0)[t_1t_2\rangle?$

# *Proprietăţi pentru secvenţe de apariţie*

**Definiţie 7** *Fie $M$ şi $M'$ două marcări.*

- $M \geq M'$ **ddacă** $M'(p) \geq M(p)$, $\forall p \in P$.
- $M > M'$ **ddacă** $M \geq M'$ **şi** $\exists p \in P : M(p) > M'(p)$.

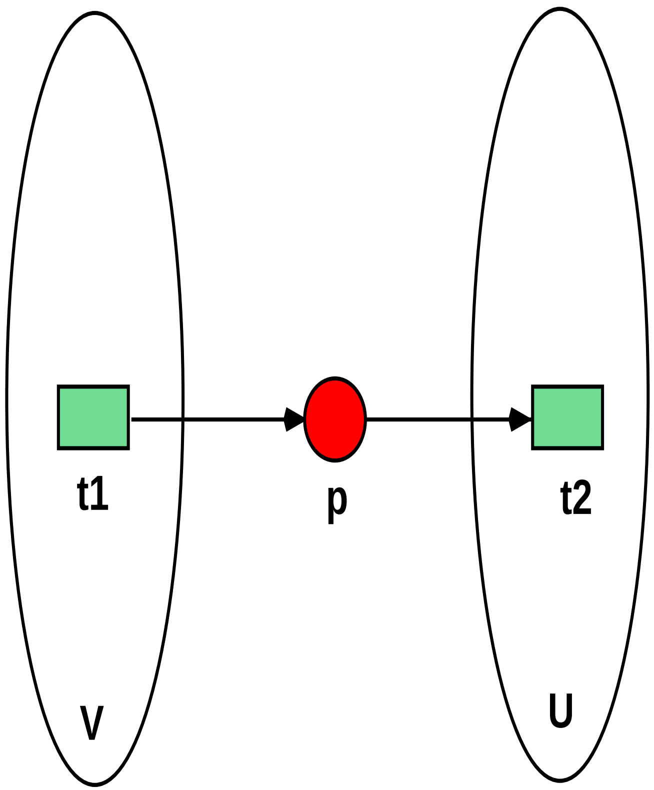
**Propoziţie 6** *Fie $M$ şi $M'$ două marcări astfel încât $M \geq M'$. Atunci orice secvenţă de apariţie posibilă la marcarea $M$ este posibilă şi la marcarea $M'$.*

$M' \geq M \Longrightarrow \exists L$ marcare astfel încât $M' = M + L$

- $\sigma$ infinită: $M[\sigma\rangle \Longrightarrow M' = (M + L)[\sigma\rangle$
- $\sigma$ finită: $M[\sigma\rangle\overline{M}$ şi $M' = (M + L)[\sigma\rangle(\overline{M} + L)$

# *Proprietăţi pentru secvenţe de apariţie*

**Lema 1** *Fie $N$ o reţea oarecare, $U, V \subseteq T$ astfel încât $V \bullet \cap \bullet U = \emptyset$. Dacă $\sigma \in (U \cup V)^*$ astfel încât $M[\sigma\rangle M'$, atunci $M[\sigma|_U \sigma|_V\rangle M'$.*




$t_1 \in V$ şi $t_2 \in U$.
$t_1 \bullet \cap \bullet t_2 = \emptyset$
$M[t_1 t_2\rangle M'$, atunci:
$M[t_2 t_1\rangle M'$

# Proprietăţi pentru secvenţe de apariţie

**Lema 1** *Fie $N$ o reţea oarecare, $U, V \subseteq T$ astfel încât $V \bullet \cap \bullet U = \emptyset$. Dacă $\sigma \in (U \cup V)^*$ astfel încât $M[\sigma\rangle M'$, atunci $M[\sigma|_U \sigma|_V\rangle M'$.*

Demonstraţie:
Fie $N$ o reţea oarecare, $t_1, t_2 \in T$ astfel încât $t_1 \in V$ şi $t_2 \in U$. Deci $t_1 \bullet \cap \bullet t_2 = \emptyset$.
Se arată că:

$$M[t_1\rangle M_2[t_2\rangle M' \Longrightarrow M[t_2\rangle M_2'[t_1\rangle M'$$

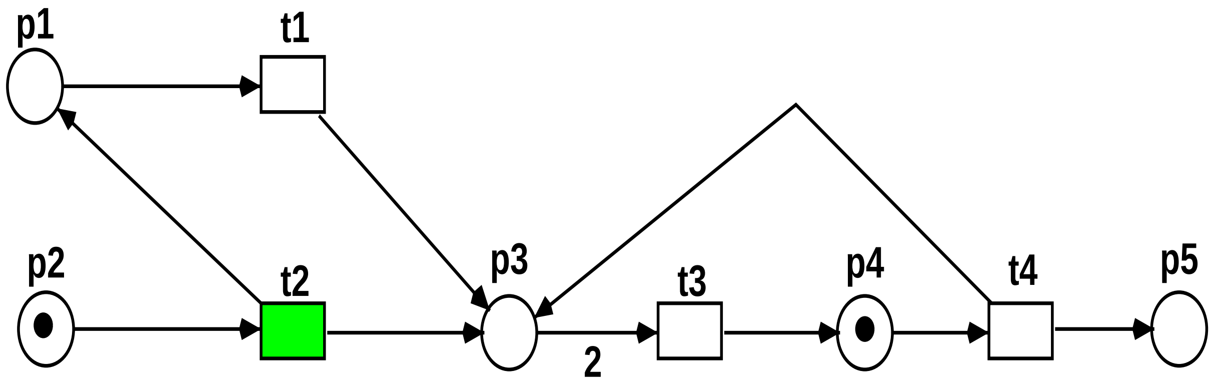
- $M[t_2\rangle$ (adică $\forall p \in \bullet t_2 : W(p, t_2) \leq M(p)$).
- Fie $M[t_2\rangle M_2'$. Se arată că $M_2'[t_1\rangle$.
- Se arată că $M[t_2\rangle M_2'[t_1\rangle M'$.

# Exemplu

- $U = \{t_1, t_2\}$, $V = \{t_3, t_4\}$ $M = (0, 1, 0, 1, 0)$

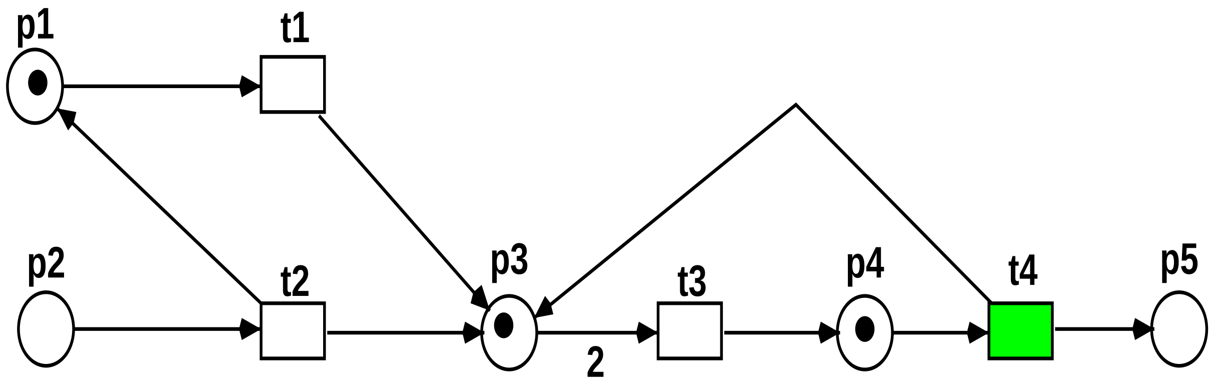
# Exemplu

- $U = \{t_1, t_2\}, V = \{t_3, t_4\}$ $M = (0, 1, 0, 1, 0)$



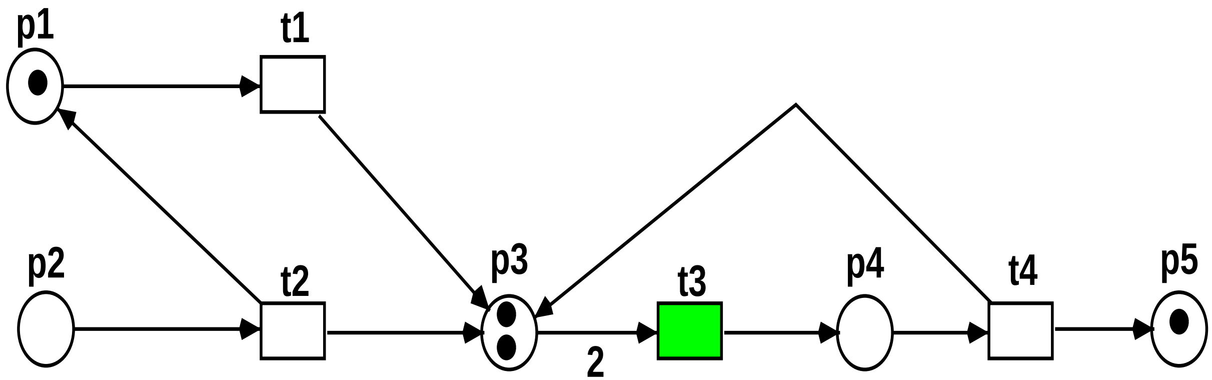
# Exemplu

- $U = \{t_1, t_2\}, V = \{t_3, t_4\}\ M = (0, 1, 0, 1, 0)$



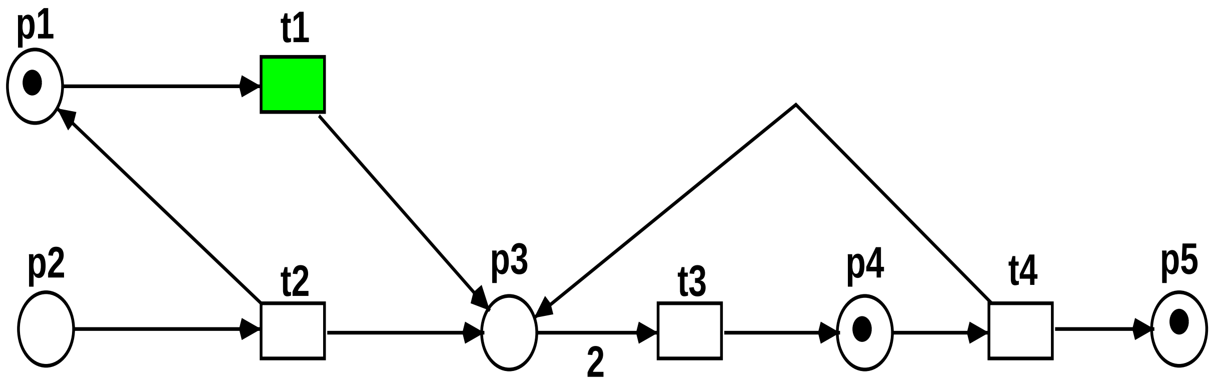
# Exemplu

- $U = \{t_1, t_2\}$, $V = \{t_3, t_4\}$ $M = (0, 1, 0, 1, 0)$



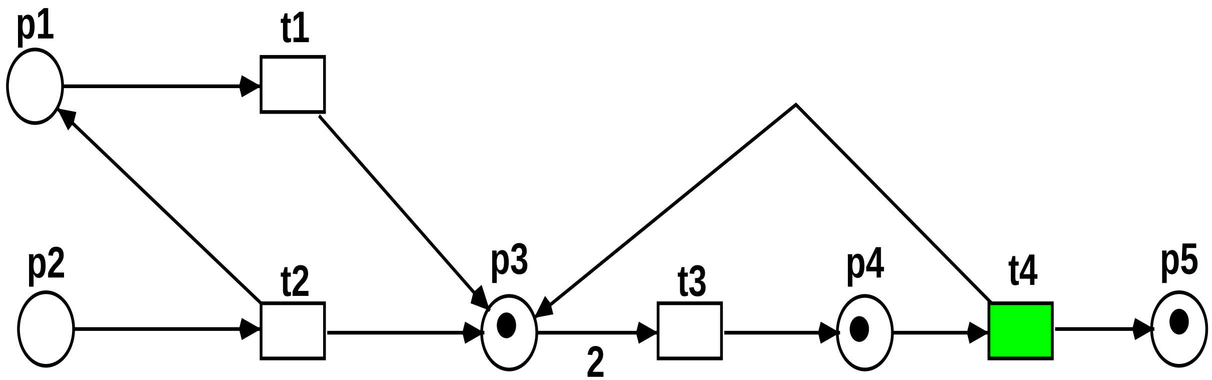
# *Exemplu*

- $U = \{t_1, t_2\}$, $V = \{t_3, t_4\}$ $M = (0, 1, 0, 1, 0)$



# *Exemplu*

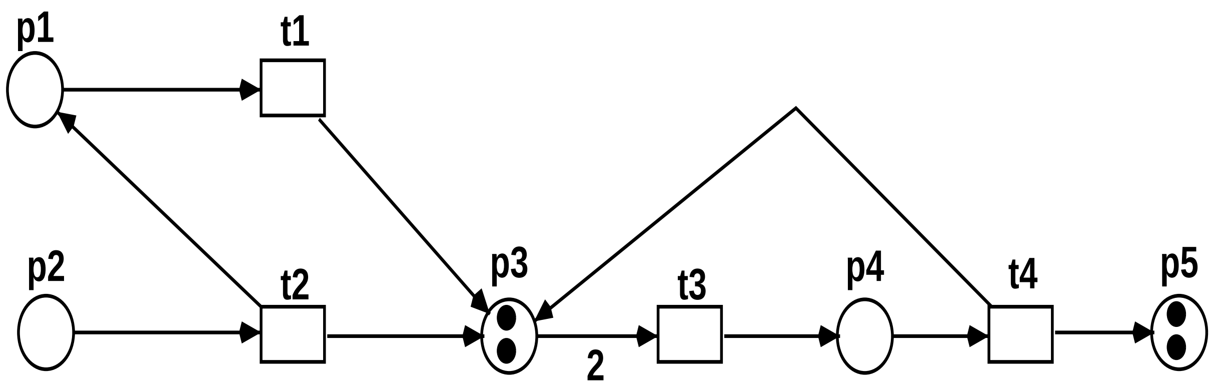
- $U = \{t_1, t_2\}$, $V = \{t_3, t_4\}$ $M = (0, 1, 0, 1, 0)$



# Exemplu

- $U = \{t_1, t_2\}$, $V = \{t_3, t_4\}$ $M = (0,1,0,1,0)$

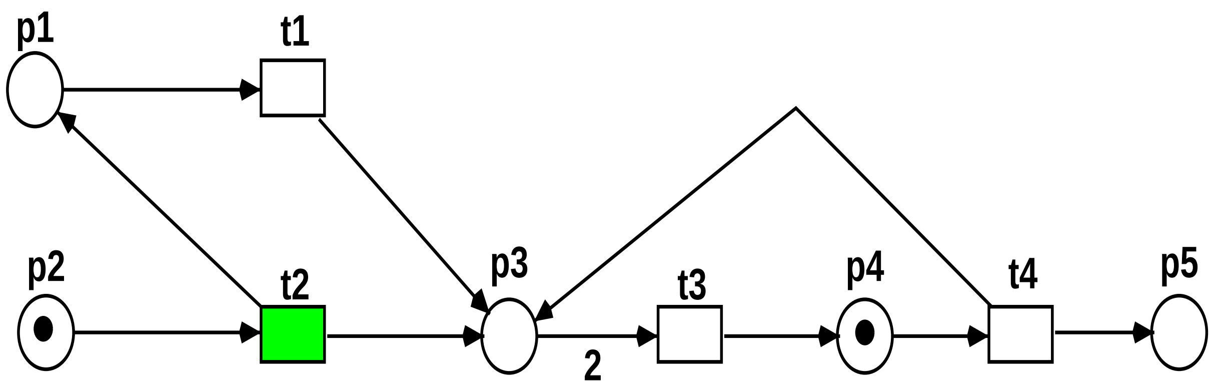
$\sigma = t_2 t_4 t_3 t_1 t_4$
$M = (1,0,1,0)[t_2 t_4 t_3 t_1 t_4\rangle(0,0,2,0,2) = M'$
$M[t_2 t_1 t_4 t_3 t_4\rangle M'$



# Exemplu

- $U = \{t_1, t_2\}, V = \{t_3, t_4\}\ M = (0, 1, 0, 1, 0)$

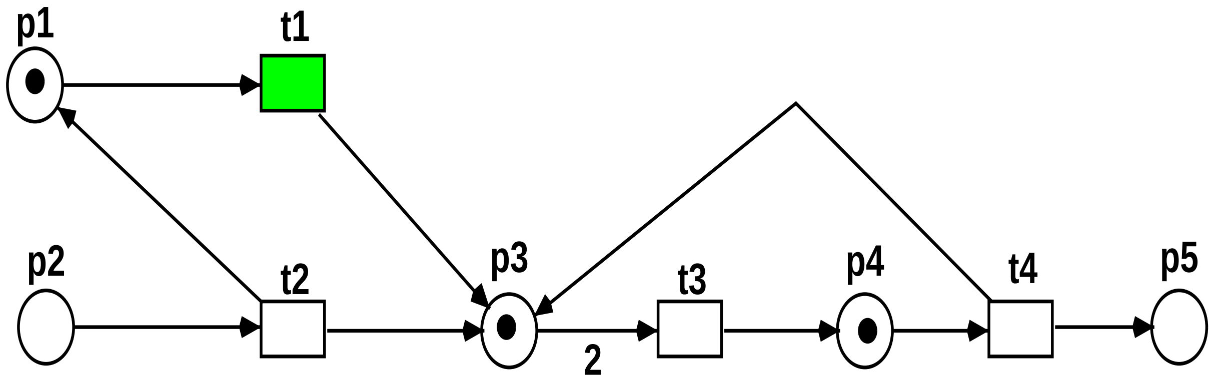
$\sigma = t_2 t_4 t_3 t_1 t_4$
$M = (1, 0, 1, 0)[t_2 t_4 t_3 t_1 t_4\rangle(0, 0, 2, 0, 2) = M'$
$M[t_2 t_1 t_4 t_3 t_4\rangle M'$



# Exemplu

- $U = \{t_1, t_2\}, V = \{t_3, t_4\}$ $M = (0, 1, 0, 1, 0)$

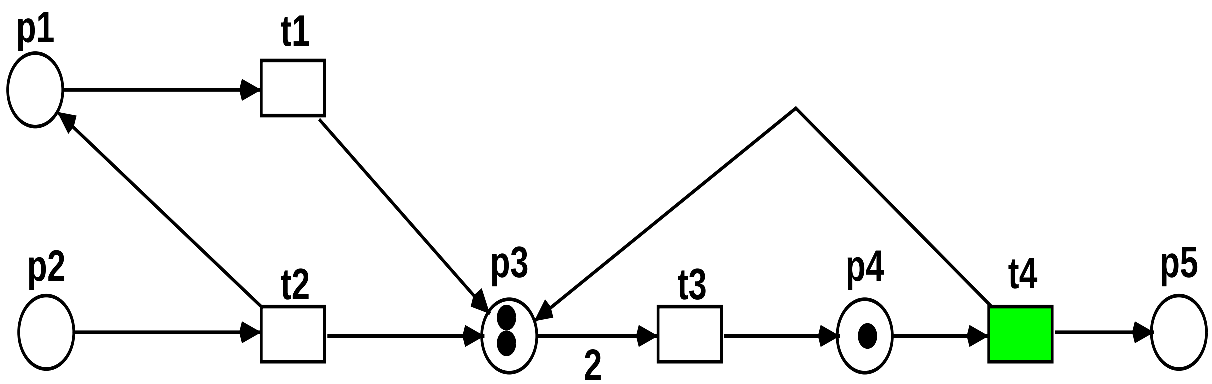
$\sigma = t_2 t_4 t_3 t_1 t_4$
$M = (1, 0, 1, 0)[t_2 t_4 t_3 t_1 t_4\rangle(0, 0, 2, 0, 2) = M'$
$M[t_2 t_1 t_4 t_3 t_4\rangle M'$



# Exemplu

- $U = \{t_1, t_2\}, V = \{t_3, t_4\}$ $M = (0, 1, 0, 1, 0)$

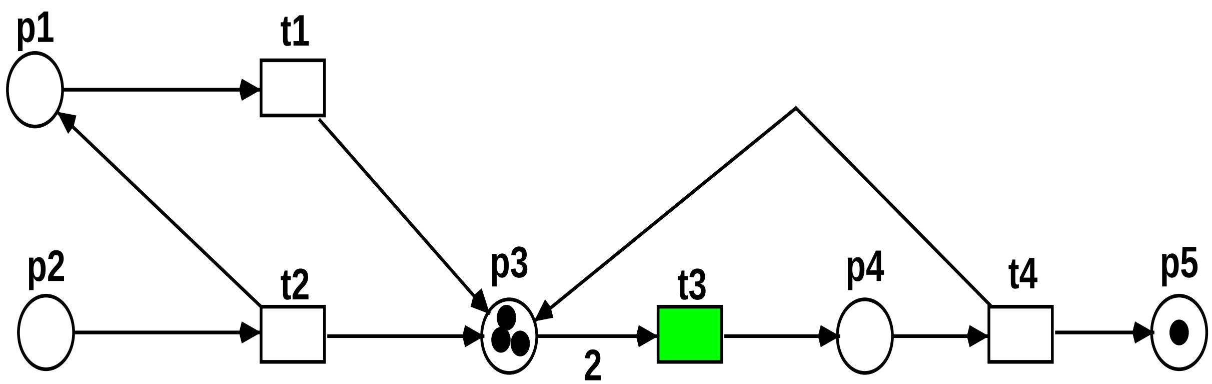
$\sigma = t_2 t_4 t_3 t_1 t_4$
$M = (1, 0, 1, 0)[t_2 t_4 t_3 t_1 t_4\rangle(0, 0, 2, 0, 2) = M'$
$M[t_2 t_1 t_4 t_3 t_4\rangle M'$



# *Exemplu*

- $U = \{t_1, t_2\}$, $V = \{t_3, t_4\}$ $M = (0, 1, 0, 1, 0)$

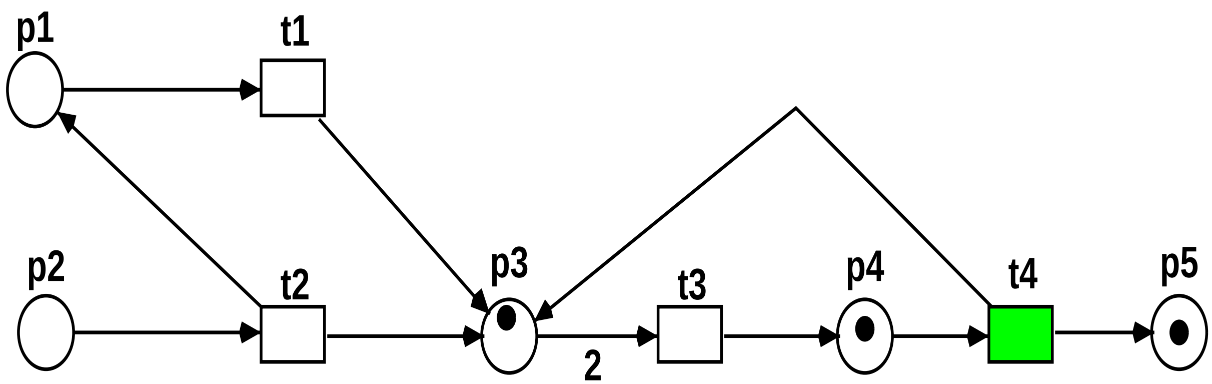
$\sigma = t_2 t_4 t_3 t_1 t_4$
$M = (1, 0, 1, 0)[t_2 t_4 t_3 t_1 t_4\rangle(0, 0, 2, 0, 2) = M'$
$M[t_2 t_1 t_4 t_3 t_4\rangle M'$



# Exemplu

- $U = \{t_1, t_2\}$, $V = \{t_3, t_4\}$ $M = (0, 1, 0, 1, 0)$

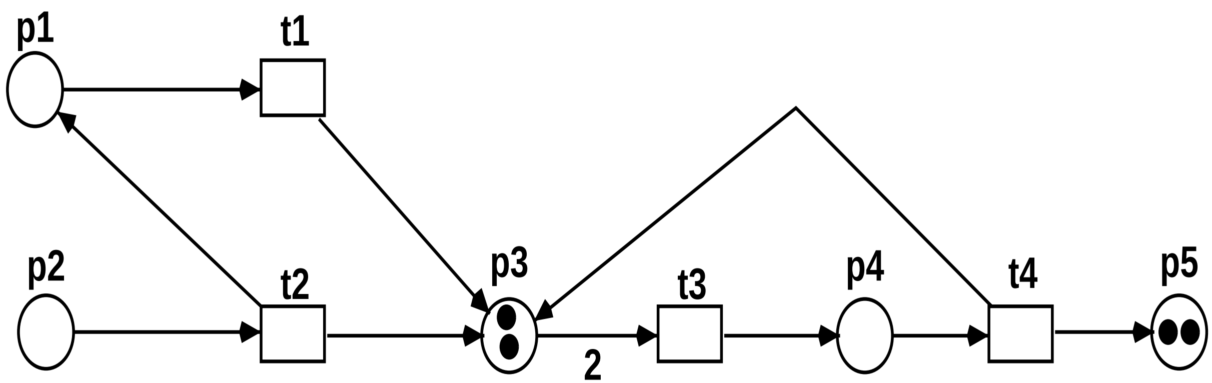
$\sigma = t_2 t_4 t_3 t_1 t_4$
$M = (1, 0, 1, 0)[t_2 t_4 t_3 t_1 t_4\rangle(0, 0, 2, 0, 2) = M'$
$M[t_2 t_1 t_4 t_3 t_4\rangle M'$



# *Exemplu*

- $U = \{t_1, t_2\}, V = \{t_3, t_4\}$ $M = (0,1,0,1,0)$

$\sigma = t_2 t_4 t_3 t_1 t_4$
$M = (1,0,1,0)[t_2 t_4 t_3 t_1 t_4\rangle(0,0,2,0,2) = M'$
$M[t_2 t_1 t_4 t_3 t_4\rangle M'$



# Proprietatea de mărginire

Fie $\gamma = (M, M_0)$ o reţea Petri marcată.

**Definiţie 8** *(mărginire)*

# *Proprietatea de mărginire*

Fie $\gamma = (M, M_0)$ o reţea Petri marcată.

**Definiţie 8** *(mărginire)*

- *O locaţie p este mărginită dacă:*

$$(\exists\, n \in \mathbb{N})(\forall M \in [M_0\rangle)(\ M(p) \leq n)$$

# Proprietatea de mărginire

Fie $\gamma = (M, M_0)$ o reţea Petri marcată.

**Definiţie 8** *(mărginire)*

- *O locaţie p este mărginită dacă:*

$$(\exists\, n \in \mathbb{N})(\forall M \in [M_0\rangle)(\ M(p) \leq n)$$

- *Reţeaua marcată $\gamma$ este mărginită dacă orice locaţie $p \in P$ este mărginită.*

# Proprietatea de mărginire

Fie $\gamma = (M, M_0)$ o reţea Petri marcată.

**Definiţie 8** *(mărginire)*

- *O locaţie p este mărginită dacă:*

$$(\exists\, n \in \mathbb{N})(\forall M \in [M_0\rangle)(\ M(p) \leq n)$$

- *Reţeaua marcată $\gamma$ este mărginită dacă orice locaţie $p \in P$ este mărginită.*
- *Reţeaua $N$ este structural mărginită, dacă există o marcare $M$ astfel încât $(N, M)$ este mărginită.*

# Proprietatea de mărginire

Fie $\gamma = (M, M_0)$ o reţea Petri marcată.

**Definiţie 8** *(mărginire)*

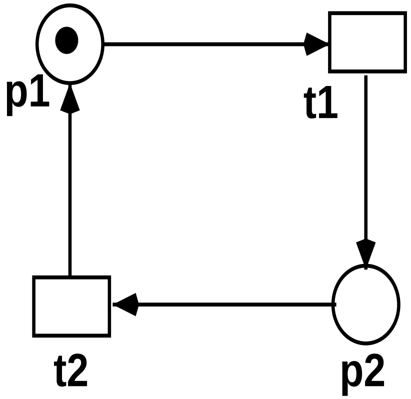
- *O locaţie p este mărginită dacă:*

$$(\exists\, n \in \mathbb{N})(\forall M \in [M_0\rangle)(\ M(p) \leq n)$$

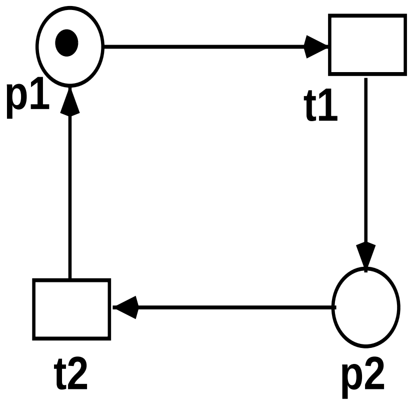
- *Reţeaua marcată $\gamma$ este mărginită dacă orice locaţie $p \in P$ este mărginită.*

- *Reţeaua $N$ este structural mărginită, dacă există o marcare $M$ astfel încât $(N, M)$ este mărginită.*

# Mărginire-exemple

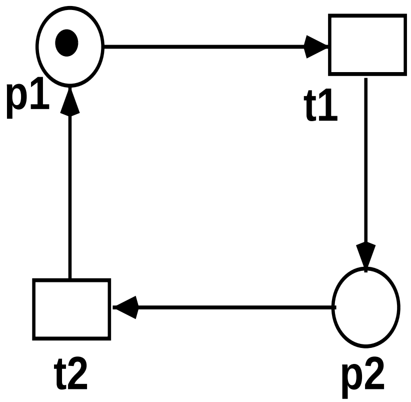


# Mărginire-exemple

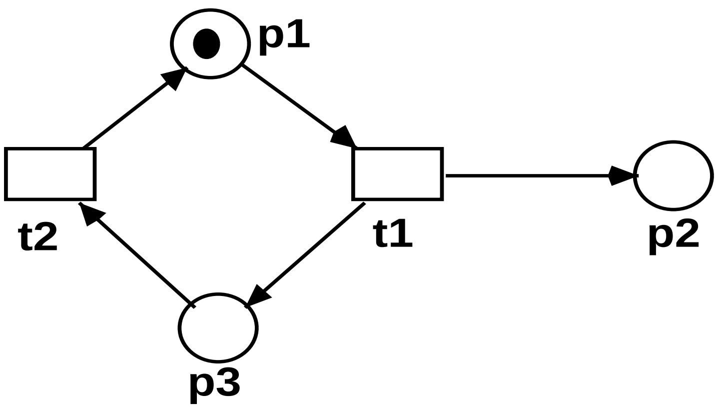



reţeaua este mărginită: $M(p) \leq 1, \forall p \in P$

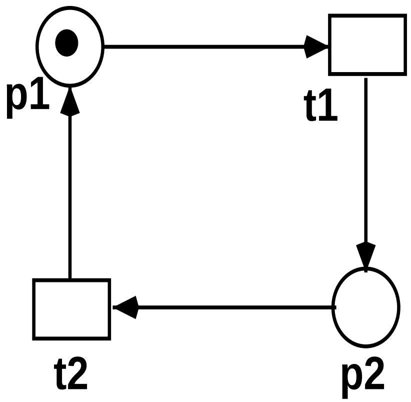
# Mărginire-exemple



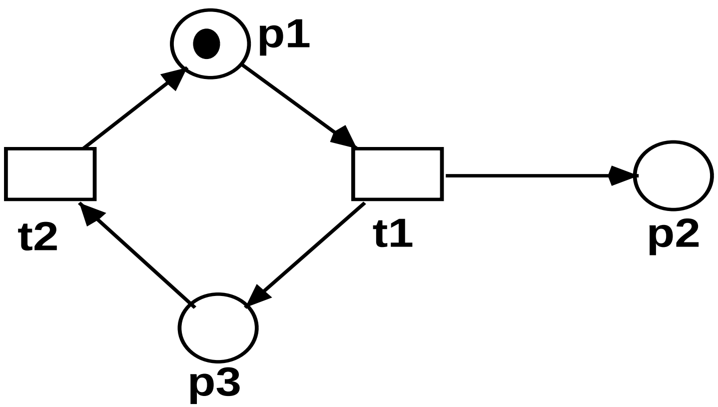

reţeaua este mărginită: $M(p) \leq 1, \forall p \in P$



# Mărginire-exemple




reţeaua este mărginită: $M(p) \leq 1, \forall p \in P$




reţeaua este nemărginită:

$p_2$ poate conţine o infinitate de puncte!

# *Proprietatea de mărginire*

- **Propoziţie 7** *O reţea P/T marcată* $\gamma = (N, M_0)$ *este mărginită ddacă mulţimea* $[M_0\rangle$ *este finită.*

# *Proprietatea de mărginire*

- **Propoziţie 7** *O reţea P/T marcată* $\gamma = (N, M_0)$ *este mărginită ddacă mulţimea* $[M_0\rangle$ *este finită.*

  $(\Longrightarrow)$ Fie $n$ astfel încât $(\forall M \in [M_0\rangle)(\forall p \in P)(M(p) \leq n)$. Numărul maxim de marcări este $(n+1)^{|P|}$.

  $(\Longleftarrow)$ Se consideră $n = max\{M(p) | M \in [M_0\rangle,\ p \in P\}$.

# Proprietatea de mărginire

- **Propoziţie 7** *O reţea P/T marcată* $\gamma = (N, M_0)$ *este mărginită ddacă mulţimea* $[M_0\rangle$ *este finită.*

  ($\Longrightarrow$) Fie $n$ astfel încât $(\forall M \in [M_0\rangle)(\forall p \in P)(M(p) \leq n)$. Numărul maxim de marcări este $(n+1)^{|P|}$.

  ($\Longleftarrow$) Se consideră $n = max\{M(p)|M \in [M_0\rangle,\ p \in P\}$.

- **Propoziţie 8** *Dacă* $\gamma = (N, M_0)$ *este mărginită, nu există două marcări* $M_1, M_2 \in [M_0\rangle$ *astfel încât* $M_1[*\rangle M_2$ *şi* $M_2 > M_1$.

# Proprietatea de mărginire

- **Propoziţie 7** *O reţea P/T marcată $\gamma = (N, M_0)$ este mărginită ddacă mulţimea $[M_0\rangle$ este finită.*

  $(\Longrightarrow)$ Fie $n$ astfel încât $(\forall M \in [M_0\rangle)(\forall p \in P)(M(p) \leq n)$. Numărul maxim de marcări este $(n+1)^{|P|}$.

  $(\Longleftarrow)$ Se consideră $n = max\{M(p)|M \in [M_0\rangle,\ p \in P\}$.

- **Propoziţie 8** *Dacă $\gamma = (N, M_0)$ este mărginită, nu există două marcări $M_1, M_2 \in [M_0\rangle$ astfel încât $M_1[*\rangle M_2$ şi $M_2 > M_1$.*

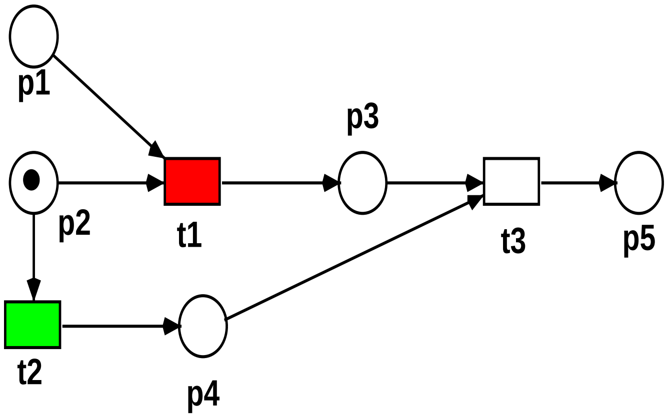
  Dacă $M_1[\sigma\rangle M_2$ şi $M_2 > M_1 \Longrightarrow M_2[\sigma\rangle M_3$ (prop. 6) şi $M_3 > M_2$ (prop. 4). Deci $M_3[\sigma\rangle M_4$, $M_4 > M_3$, etc.

# *Proprietăţi: pseudo-viabilitate*

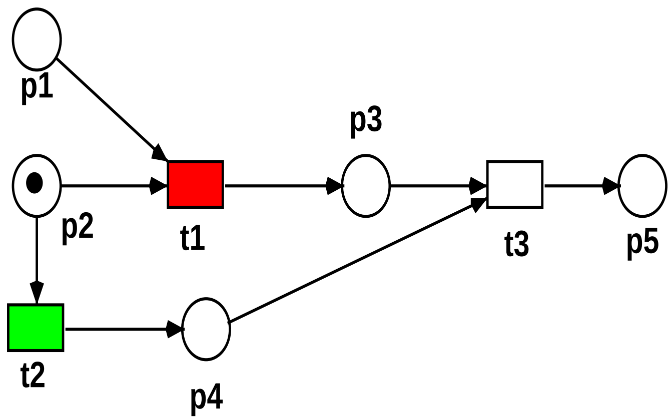
Fie $\gamma = (N, M_0)$ o reţea Petri marcată.

- **Definiţie 9** *(pseudo-viabilitate)*
  - *O tranziţie $t \in T$ este pseudo-viabilă din marcarea $M$, dacă există o marcare $M' \in [M\rangle$ astfel încât $M'[t\rangle$.*
  - *O tranziţie $t \in T$ este pseudo-viabilă dacă este pseudo-vaibilă din $M_0$ (există o marcare accesibilă $M \in [M_0\rangle$ astfel încât $M[t\rangle$). O tranziţie care nu este pseudo-viabilă se numeşte moartă.*
  - *Reţeaua marcată $\gamma$ este pseudo-viabilă dacă toate tranziţiile sale sunt pseudo-viabile.*

# *Exemple*



# Exemple




- $t_1$ este tranziţie moartă
- $t_2$ pseudo-viabilă
- $t_3$ este tranziţie moartă

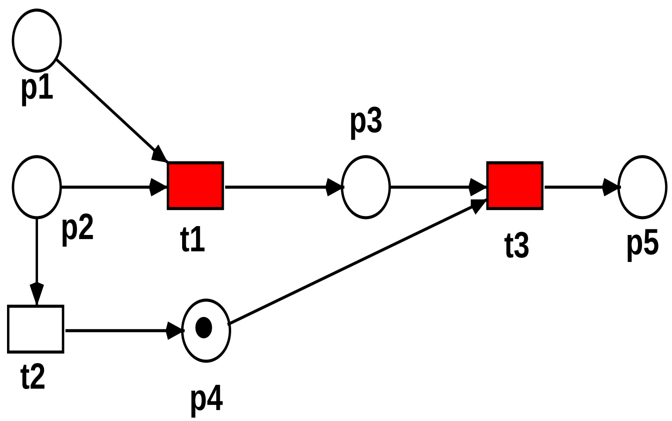
# *Proprietăţi: blocaje*

Fie $\gamma = (N, M_0)$ o reţea Petri marcată.

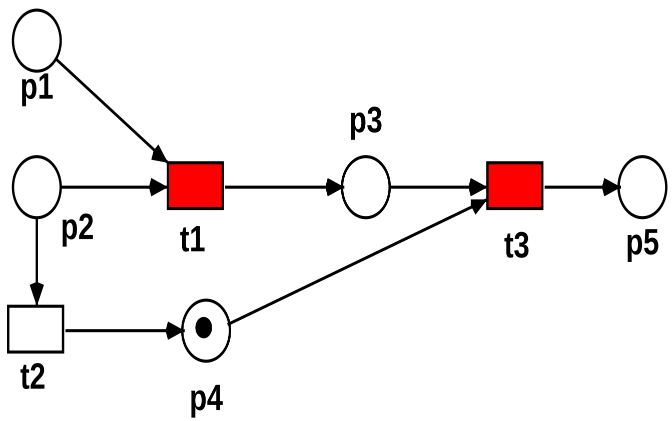
**Definiţie 10** *(blocaje)*

- *O marcare $M$ a reţelei marcate $\gamma$ este moartă dacă nu există o tranziţie $t \in T$ astfel încât $M[t\rangle$.*
- *Reţeaua $\gamma$ este fără blocaje, dacă nu există marcări accesibile moarte.*

# Exemple



# *Exemple*



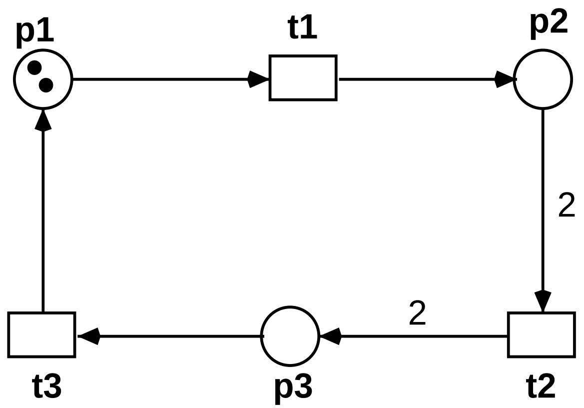

- Marcarea (0,0,0,1,0) este moartă, deci reţeaua are blocaje.

# *Proprietăţi: viabilitate*

**Definiţie 11** *(viabilitate)*
*Fie $N = (P, T, F, W)$ o reţea de tip P/T şi $\gamma = (N, M_0)$ o reţea Petri marcată.*

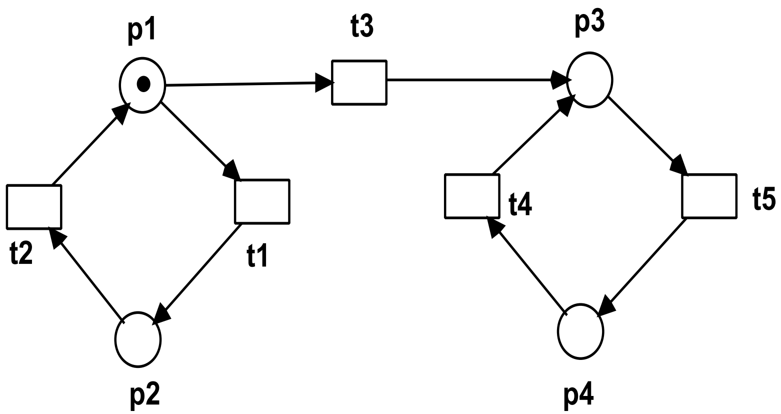
- *O tranziţie $t \in T$ este viabilă dacă $\forall M \in [M_0\rangle$, $t$ este pseudo-viabilă din $M$ ($\exists M' \in [M\rangle$ astfel încât $M'[t\rangle$).*
- *Reţeaua marcată $\gamma$ este viabilă dacă orice tranziţie $t \in T$ este viabilă.*
- *reţeaua $N$ este structural viabilă dacă există o marcare $M$ astfel încât $(N, M)$ este viabilă.*

# Exemple

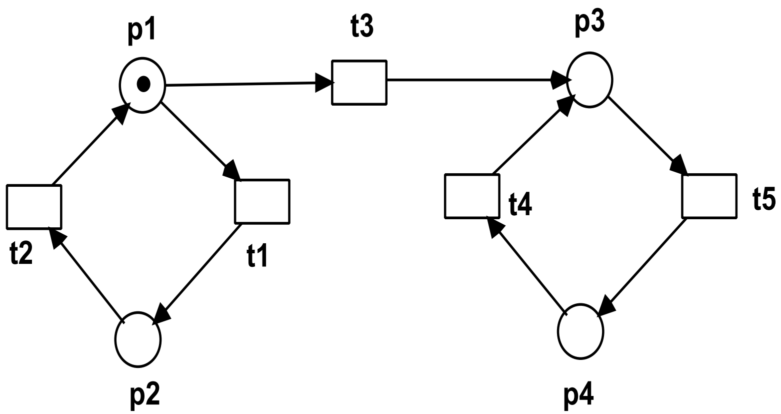



- Reţea pseudo-viabilă, viabilă si fără blocaje.

# Exemple



# Exemple



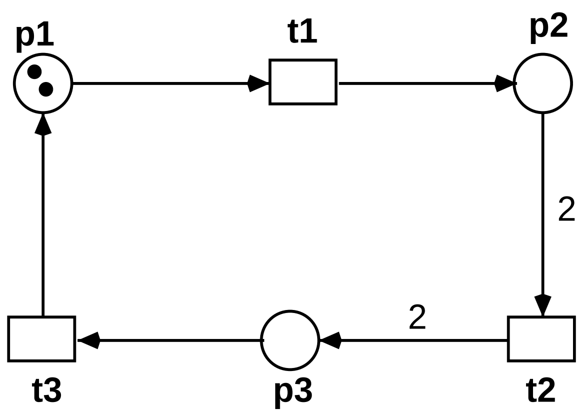

- $t_1$,$t_2$,$t_3$: nu sunt viabile
- $t_4$,$t_5$: viabile
- reţeaua este pseudo-viabilă

# *Reversibilitate*

**Definiţie 12** *Reţeaua marcată* $\gamma$ *este reversibilă dacă marcarea sa iniţială este accesibilă din orice marcare* $M \in [M_0\rangle$.

# *Reversibilitate*

**Definiţie 12** *Reţeaua marcată* $\gamma$ *este reversibilă dacă marcarea sa iniţială este accesibilă din orice marcare* $M \in [M_0\rangle$.



# Proprietăţi ale reţelelor Petri

Fie $\gamma = (N, M_0)$ o reţea Petri marcată.

- **Propoziţie 9** *Orice reţea marcată viabilă este şi pseudo-viabilă.*

# *Proprietăţi ale reţelelor Petri*

Fie $\gamma = (N, M_0)$ o reţea Petri marcată.

- **Propoziţie 9** *Orice reţea marcată viabilă este şi pseudo-viabilă.*
- **Propoziţie 10** *Orice reţea marcată viabilă, având cel puţin o tranziţie, este fără blocaje.*

# *Proprietăţi ale reţelelor Petri*

Fie $\gamma = (N, M_0)$ o reţea Petri marcată.

- **Propoziţie 9** *Orice reţea marcată viabilă este şi pseudo-viabilă.*
- **Propoziţie 10** *Orice reţea marcată viabilă, având cel puţin o tranziţie, este fără blocaje.*
- **Propoziţie 11** *Dacă o reţea fără locaţii izolate este viabilă, atunci orice locaţie poate fi marcată, din orice marcare accesibilă.*

# *Proprietăţi ale reţelelor Petri*

Fie $\gamma = (N, M_0)$ o reţea Petri marcată.

- **Propoziţie 9** *Orice reţea marcată viabilă este şi pseudo-viabilă.*
- **Propoziţie 10** *Orice reţea marcată viabilă, având cel puţin o tranziţie, este fără blocaje.*
- **Propoziţie 11** *Dacă o reţea fără locaţii izolate este viabilă, atunci orice locaţie poate fi marcată, din orice marcare accesibilă.*
- **Propoziţie 12** *O reţea marcată reversibilă este viabilă ddacă este pseudo-viabilă.*

# *Proprietăţi ale reţelelor Petri*

Fie $\gamma = (N, M_0)$ o reţea Petri marcată.

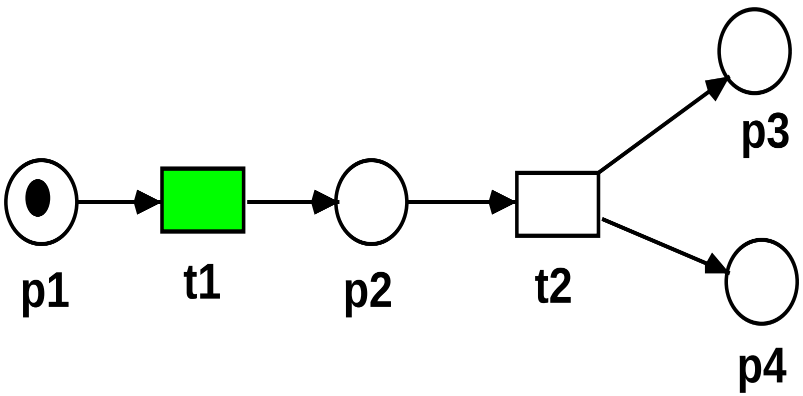
- **Propoziţie 9** *Orice reţea marcată viabilă este şi pseudo-viabilă.*
- **Propoziţie 10** *Orice reţea marcată viabilă, având cel puţin o tranziţie, este fără blocaje.*
- **Propoziţie 11** *Dacă o reţea fără locaţii izolate este viabilă, atunci orice locaţie poate fi marcată, din orice marcare accesibilă.*
- **Propoziţie 12** *O reţea marcată reversibilă este viabilă ddacă este pseudo-viabilă.*
- **Propoziţie 13** *O reţea marcată reversibilă este fără blocaje.*

# Exemple

- Q: orice reţea pseudo-viabilă este şi viabilă?
- Q: orice reţea pseudo-viabilă este şi fără blocaje?
- Q: orice reţea viabilă este şi reversibilă ?

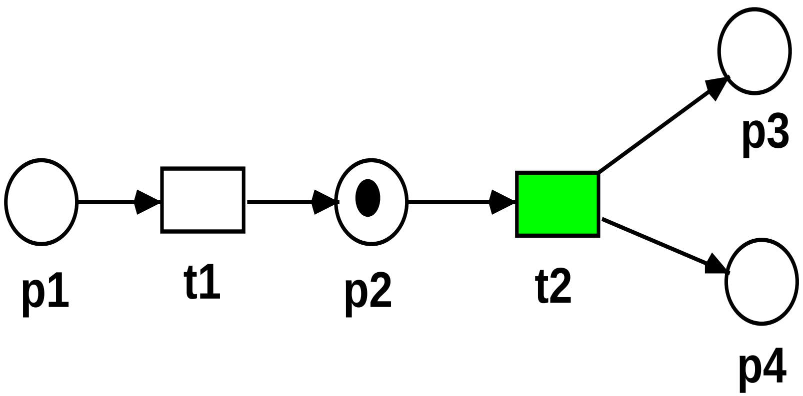
# Exemple

- Q: orice reţea pseudo-viabilă este şi viabilă?
- Q: orice reţea pseudo-viabilă este şi fără blocaje?
- Q: orice reţea viabilă este şi reversibilă ?



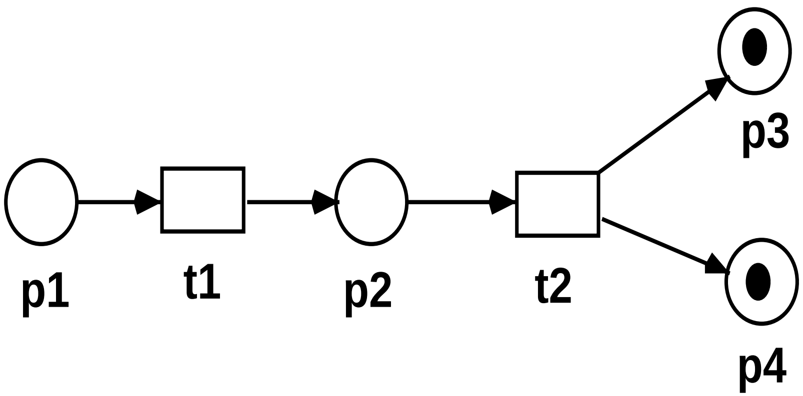
# Exemple

- Q: orice reţea pseudo-viabilă este şi viabilă?
- Q: orice reţea pseudo-viabilă este şi fără blocaje?
- Q: orice reţea viabilă este şi reversibilă ?



# Exemple

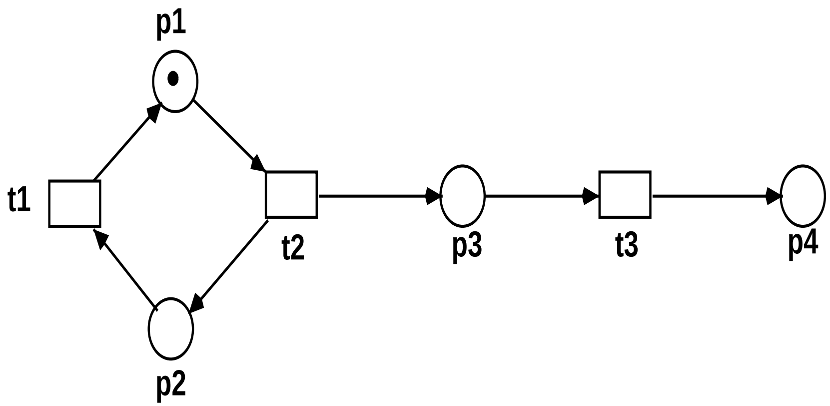
- Q: orice reţea pseudo-viabilă este şi viabilă?
- Q: orice reţea pseudo-viabilă este şi fără blocaje?
- Q: orice reţea viabilă este şi reversibilă ?




- Reţea pesudo-viabilă (toate tranziţiile pseudo-viabile). Reţeaua are blocaje (marcarea $(0, 0, 1, 1)$ este moartă). Reţeaua nu este viabilă!

# *Exemple*

- Reţea viabilă, care nu este reversibilă:



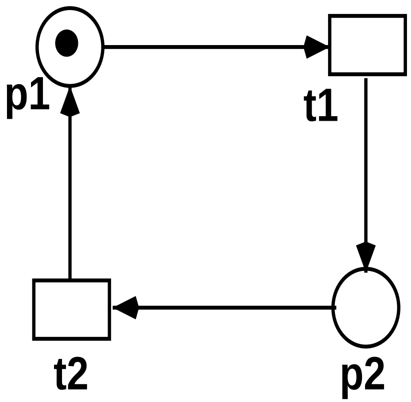

$(1,0,0,0)[t_2\rangle(0,1,1,0)[t_1\rangle(1,0,1,0)[t_3\rangle(1,0,0,1)$.
Marcarea iniţială $(1,0,0,0)$ nu este accesibilă din $(1,0,0,1)$.

# *Exemple*

- Q: Există o relaţie între proprietatea de mărginire si cea de viabilitate?

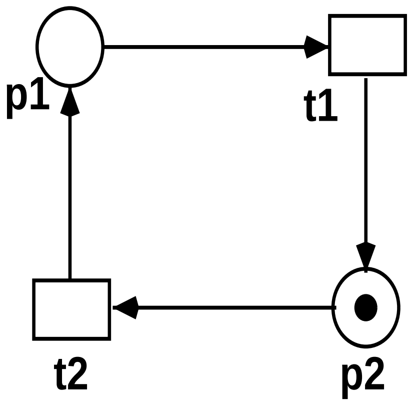
# *Exemple*

- Q: Există o relaţie între proprietatea de mărginire si cea de viabilitate?



# *Exemple*

- Q: Există o relaţie între proprietatea de mărginire si cea de viabilitate?

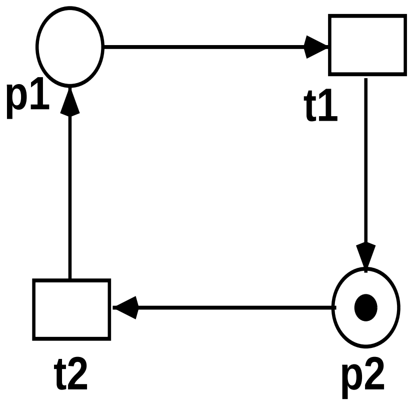



$(1,0)[t_1\rangle[t_2\rangle(0,1)[t_1\rangle[t_2\rangle(0,1)\ldots$

Retea mărginită şi este viabilă

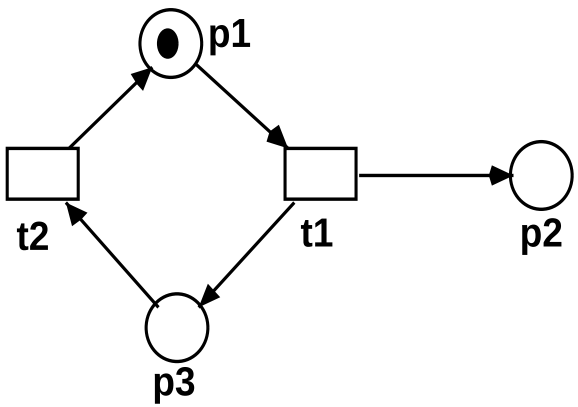
# Exemple

- Q: Există o relaţie între proprietatea de mărginire si cea de viabilitate?



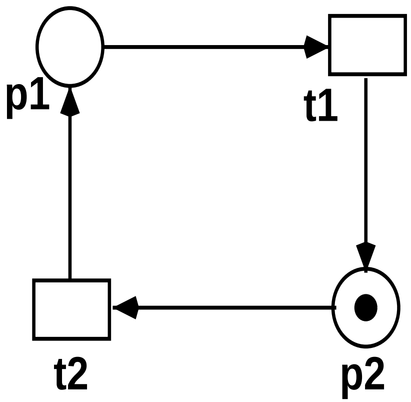

$(1,0)[t_1\rangle[t_2\rangle(0,1)[t_1\rangle[t_2\rangle(0,1)\ldots$

Retea mărginită şi este viabilă



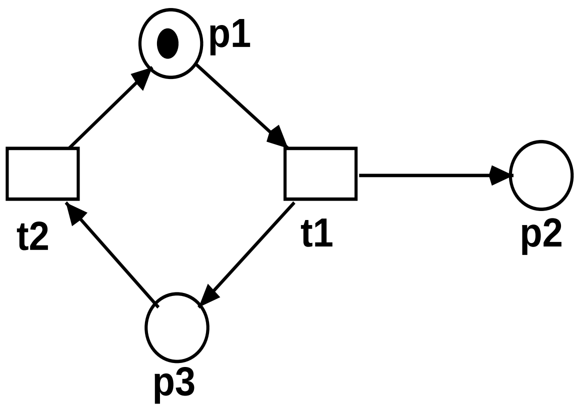
# Exemple

- Q: Există o relaţie între proprietatea de mărginire si cea de viabilitate?




$(1,0)[t_1\rangle[t_2\rangle(0,1)[t_1\rangle[t_2\rangle(0,1)...$

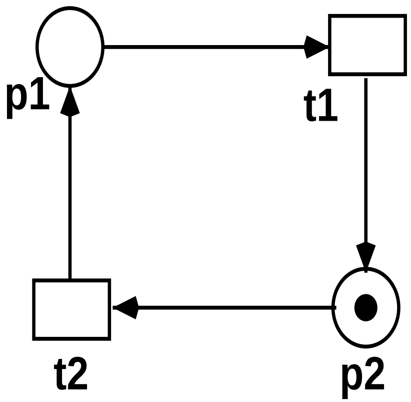
Retea mărginită şi este viabilă




Retea nemărginită, este viabilă

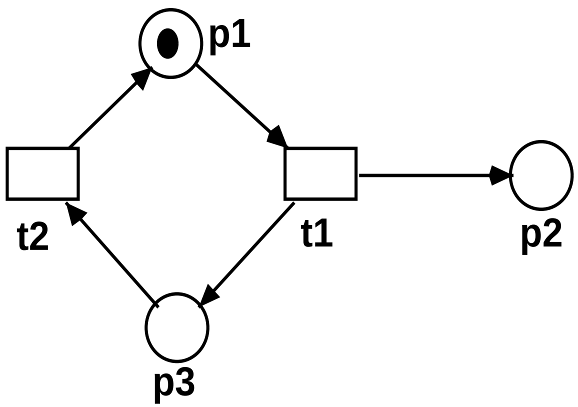
# Exemple

- Q: Există o relaţie între proprietatea de mărginire si cea de viabilitate?



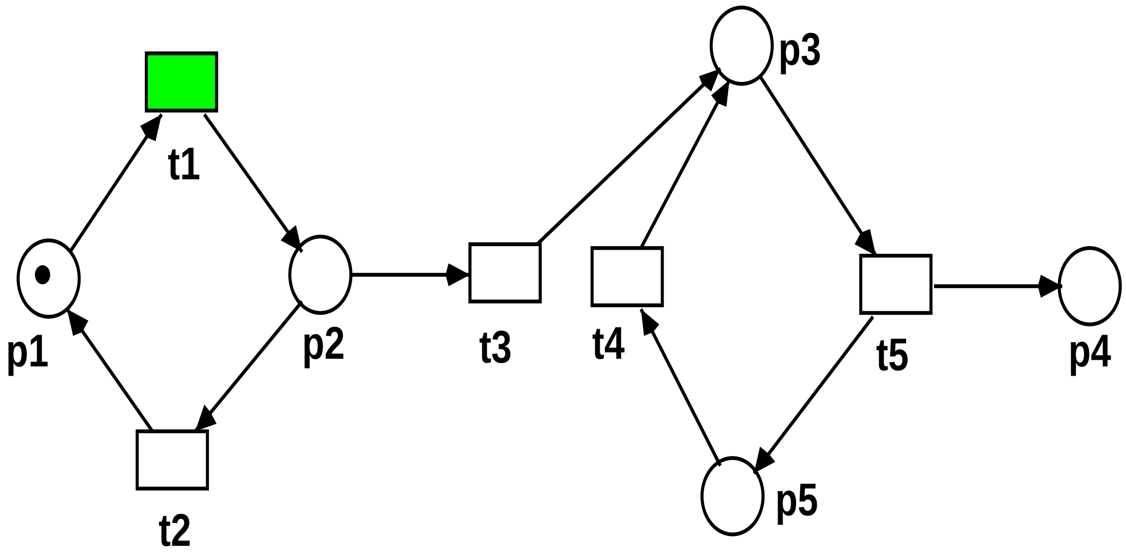

$(1,0)[t_1\rangle[t_2\rangle(0,1)[t_1\rangle[t_2\rangle(0,1)...$

Retea mărginită şi este viabilă

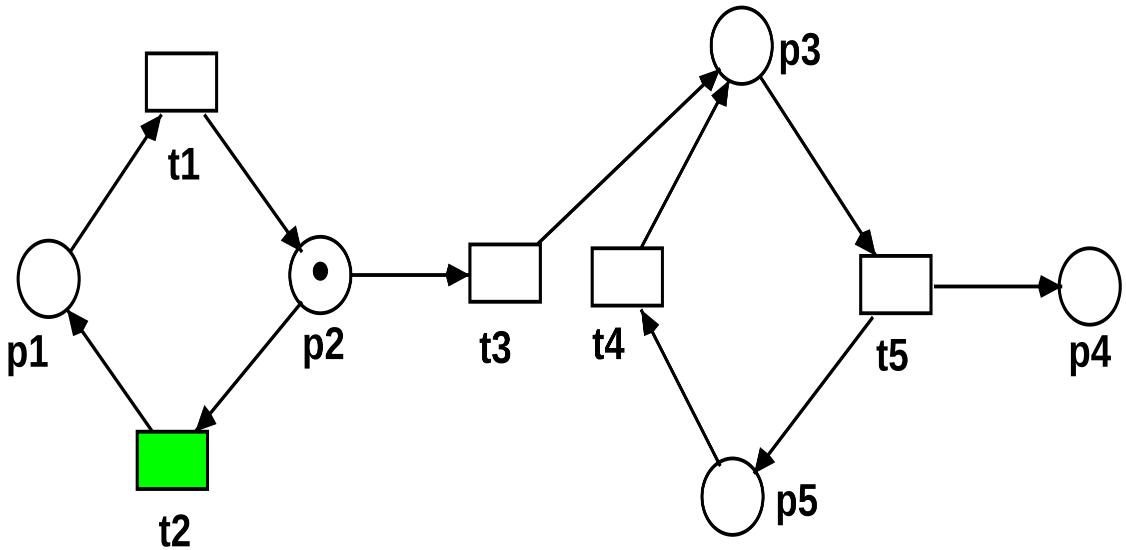



Retea nemărginită, este viabilă

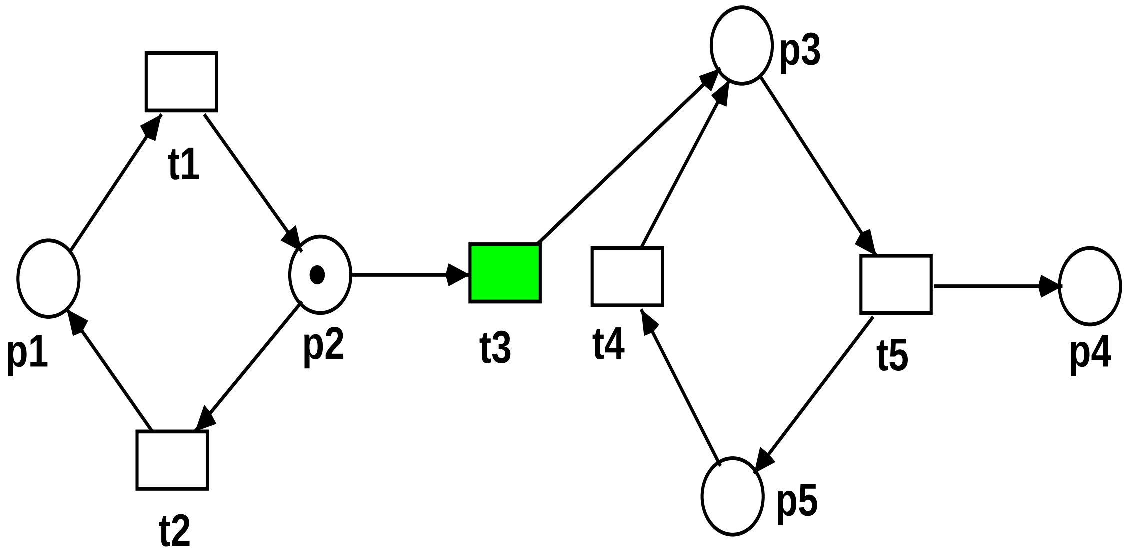
# Exemple



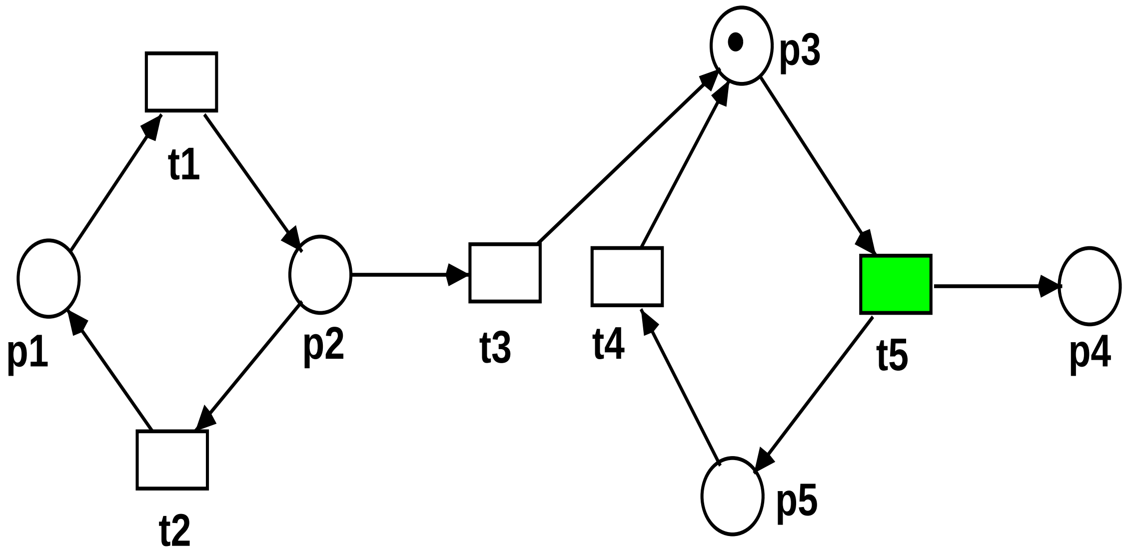
# *Exemple*



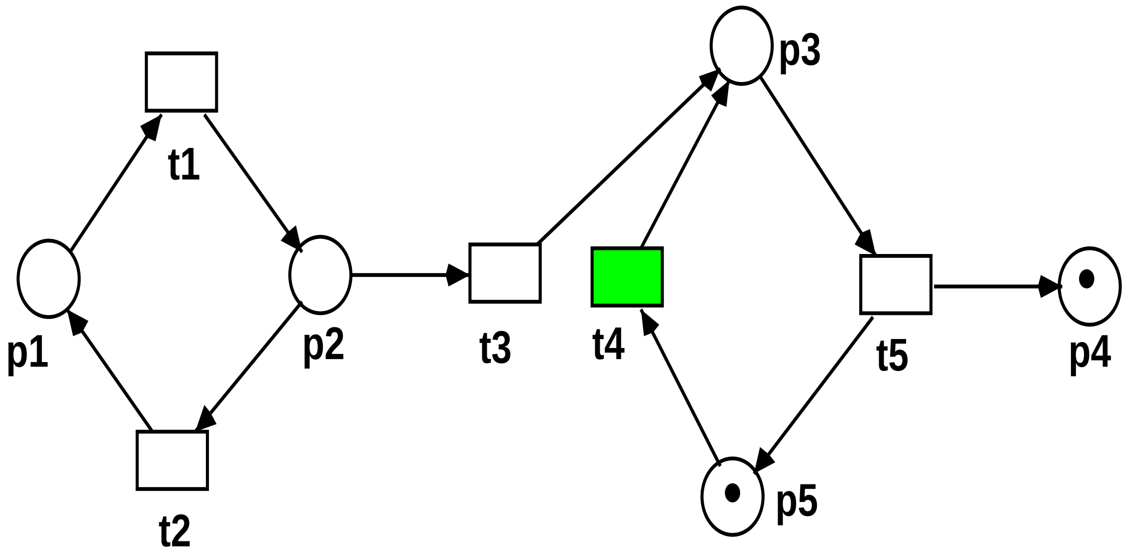
# *Exemple*



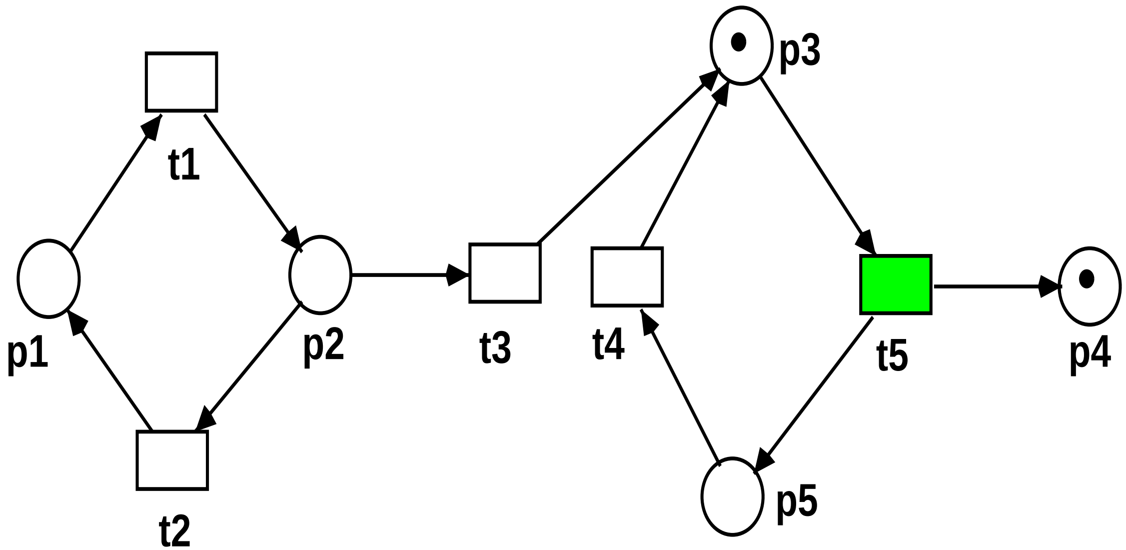
# Exemple



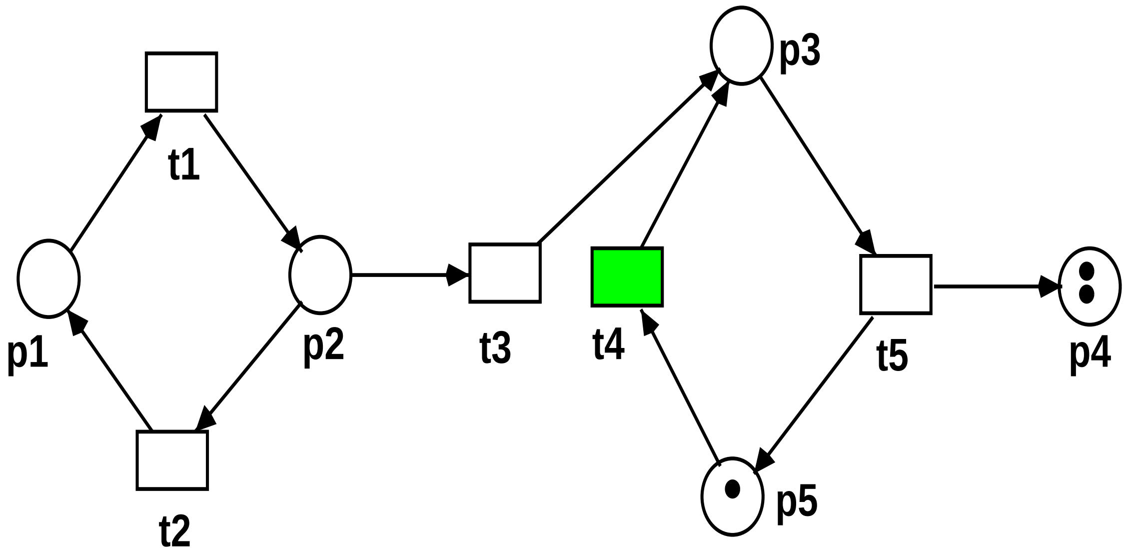
# Exemple



# Exemple

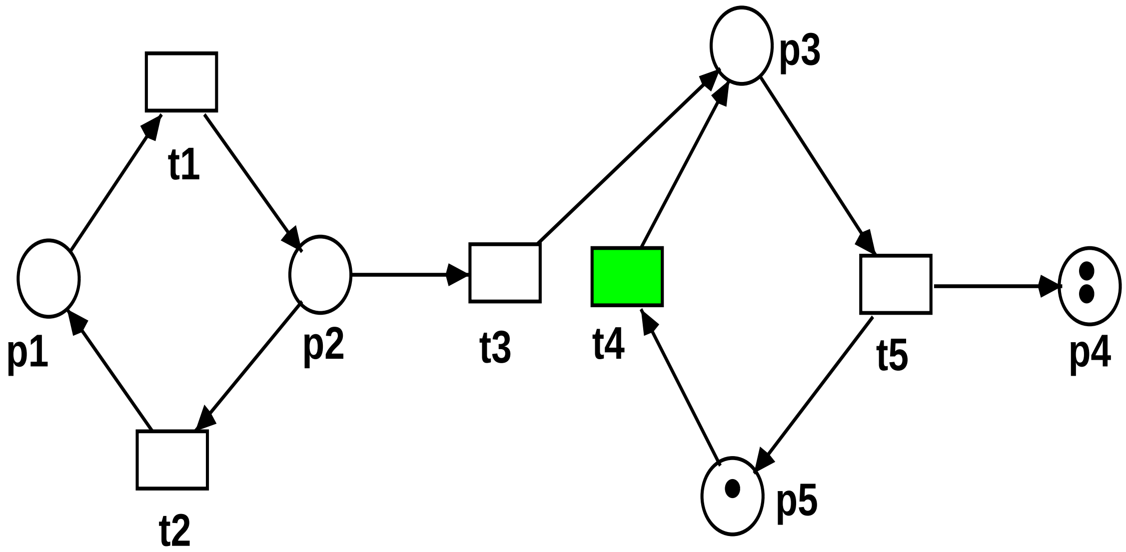


# *Exemple*




Reţea nemărginită (locaţia $p_4$), neviabilă ($M = (0, 0, 0, 2, 1)$ şi $t_1$)

# Exemple




Reţea nemărginită (locaţia $p_4$), neviabilă ($M = (0,0,0,2,1)$ şi $t_1$)

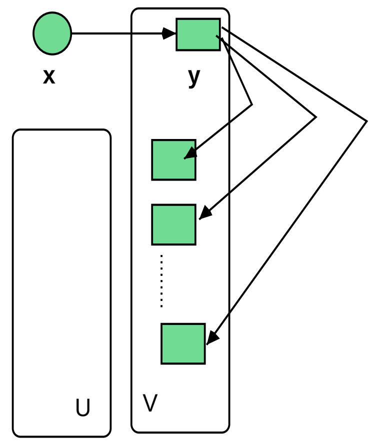
# *Mărginire şi viabilitate*

**Teorema 1** *Orice reţea conexă (fără elemente izolate) mărginită şi viabilă este tare conexă.*

# Mărginire şi viabilitate

**Teorema 1** *Orice reţea conexă (fără elemente izolate) mărginită şi viabilă este tare conexă.*

Demonstraţie: Se arată că pentru orice $(x, y) \in F$, există un drum de la $y$ la $x$.




Caz 1: $x \in P, y \in T$.

Fie $V = \{t \in T|$există drum de la y la t$\}$ $(y \in V)$

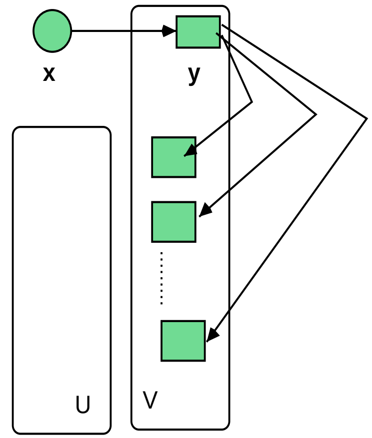
$U = \{t \in T|$nu există drum de la y la t$\}$

$V \bullet \cap \bullet U = \emptyset$.

# Mărginire şi viabilitate

**Teorema 1** *Orice reţea conexă (fără elemente izolate) mărginită şi viabilă este tare conexă.*

Demonstraţie: Se arată că pentru orice $(x, y) \in F$, există un drum de la $y$ la $x$.



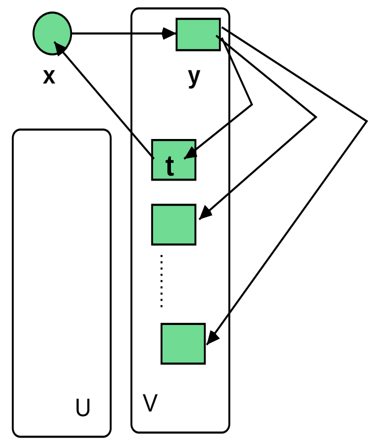

Caz 1: $x \in P, y \in T$.
Fie $V = \{t \in T |$există drum de la y la t$\}$ ($y \in V$)
$U = \{t \in T |$nu există drum de la y la t$\}$
$V \bullet \cap \bullet U = \emptyset$.

# *Mărginire şi viabilitate*

**Teorema 1** *Orice reţea conexă (fără elemente izolate) mărginită şi viabilă este tare conexă.*

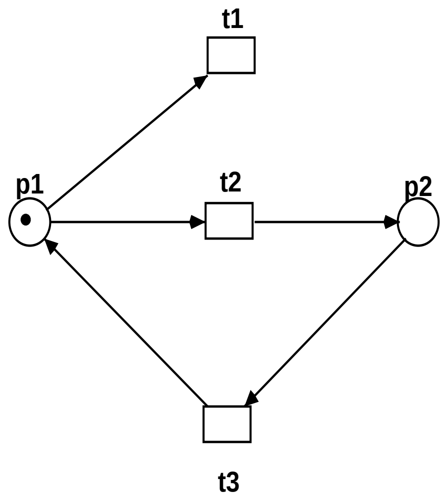
Demonstraţie: Se arată că pentru orice $(x, y) \in F$, există un drum de la $y$ la $x$.

Caz 1: $x \in P, y \in T$.
Fie $V = \{t \in T |$ există drum de la y la t$\}$ ($y \in V$)
$U = \{t \in T |$nu există drum de la y la t$\}$
$V \bullet \cap \bullet U = \emptyset$.



# Exemple

Reţeaua nu este tare conexă $\Rightarrow$ nu este viabilă sau mărginită:




Reciproca teoremei nu este adevărată: reţeaua este tare conexă, dar nu este viabilă.