ierarii Andrei-Ionuț
Grupa 242

Probabilități și statistică
– Tema 1 –

Exercițiul 1:

a) A singur se realizează $\rightarrow A \cap B^c \cap C^c$
b) A și C se realizează, dar nu și B $\rightarrow A \cap C \cap B^c$
c) Cele 3 evenimente se produc $\rightarrow A \cap B \cap C$
d) Cel puțin unul dintre cele 3 evenimente se produce $\rightarrow A \cup B \cup C$
e) Cel puțin 2 dintre cele 3 evenimente se produc $\rightarrow$
$\rightarrow (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap C \cap B^c) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$
f) Cel mult un eveniment se produce $\rightarrow$
$\rightarrow (A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c) \cup (C \cap A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$
g) Niciunul dintre cele 3 evenimente nu se produce $\rightarrow$
$\rightarrow A^c \cap B^c \cap C^c$
h) Exact 2 evenimente din cele 3 se produc $\rightarrow$
$\rightarrow (A \cap B \cap C^c) \cup (B \cap C \cap A^c) \cup (A \cap C \cap B^c)$

Exercițiul 2:

a) Fie A_i: la extragerea i am obținut o bilă albă
N_i: la extragerea i am obținut o bilă neagră

Deoarece $\Omega = \{A, N\} \Rightarrow A_i^c = N_i$

Numai o bilă este albă $\Leftrightarrow$

$A = (A_i \cap N_i \cap N_i \cap N_i \cap N_i) \cup (N_i \cap A_i \cap N_i \cap N_i \cap N_i) \cup$
$\cup (N_i \cap N_i \cap A_i \cap N_i \cap N_i) \cup (N_i \cap N_i \cap N_i \cap N_i \cap A_i) \cup$
$\cup (N_i \cap N_i \cap N_i \cap A_i \cap N_i)$

b) $B=(N_i\cap A_i\cap A_i\cap A_i\cap A_i)\cup(A_i\cap N_i\cap A_i\cap A_i\cap A_i)\cup\ldots\cup$
$\cup(A_i\cap A_i\cap A_i\cap A_i\cap N_i)\cup(N_i\cap N_i\cap A_i\cap A_i\cap A_i)\cup$
$\cup(N_i\cap A_i\cap N_i\cap A_i\cap A_i)\cup\ldots\cup(A_i\cap A_i\cap A_i\cap N_i\cap N_i)\cup$
$\cup(N_i\cap N_i\cap N_i\cap A_i\cap A_i)\cup(N_i\cap N_i\cap A_i\cap N_i\cap A_i)\cup\ldots\cup$
$\cup(A_i\cap A_i\cap N_i\cap N_i\cap N_i)\cup(N_i\cap N_i\cap N_i\cap N_i\cap A_i)\cup\ldots\cup$
$\cup(A_i\cap N_i\cap N_i\cap N_i\cap N_i)\cup(N_i\cap N_i\cap N_i\cap N_i\cap N_i)$

Cel puțin o bilă este neagră $\Leftrightarrow$ am extras o bilă neagră la extragerea i $(i=\overline{1,5})$ și restul albe, sau am extras 2 negre și restul albe, sau 3 negre și 2 albe, 4 negre și una albă, sau toate cele 5 bile extrase au fost negre.

c) Au fost extrase cel mult 2 bile albe $\Leftrightarrow$ s-au extras 2 bile albe și 3 negre sau s-a extras o bilă albă și 4 negre, sau toate bilele extrase au fost negre.

$C=(A_i\cap A_i\cap N_i\cap N_i\cap N_i)\cup(A_i\cap N_i\cap A_i\cap N_i\cap N_i)\cup\ldots\cup$
$\cup(A_i\cap N_i\cap N_i\cap N_i\cap A_i)\cup\ldots\cup(N_i\cap N_i\cap N_i\cap A_i\cap A_i)\cup$
$\cup(A_i\cap N_i\cap N_i\cap N_i\cap N_i)\cup\ldots\cup(N_i\cap N_i\cap N_i\cap N_i\cap A_i)\cup(\bigcap_{i=1}^{5}N_i)$

d) Obținerea a cel puțin 3 bile albe $\Leftrightarrow$ S-au extras 3 bile albe și 2 negre, 4 bile albe și una neagră, sau 5 bile albe.

$D=(A_i\cap A_i\cap A_i\cap N_i\cap N_i)\cup(A_i\cap A_i\cap N_i\cap A_i\cap N_i)\cup\ldots\cup$
$\cup(N_i\cap N_i\cap A_i\cap A_i\cap A_i)\cup(A_i\cap A_i\cap A_i\cap A_i\cap N_i)\cup\ldots\cup$
$\cup(N_i\cap A_i\cap A_i\cap A_i\cap A_i)\cup(\bigcap_{i=1}^{5}A_i)$

e) $E=(N_i\cap N_i\cap A_i\cap A_i\cap A_i)\cup(N_i\cap A_i\cap N_i\cap A_i\cap A_i)\cup\ldots\cup$
$\cup(A_i\cap A_i\cap A_i\cap N_i\cap N_i)$

Exercițiul 3

1. a) $\Omega = \{(D,b),(D,m),(D,s),(N,b),(N,m),(N,s)\}$

b) A = starea de sănătate a pacientului este serioasă.

$A = \{(D,s),(N,s)\}$

B = pacientul nu este asigurat

$B = \{(N,b),(N,m),(N,s)\} \Rightarrow B^c = \Omega \setminus B = \{(D,b),(D,m),(D,s)\}$

$\Rightarrow B^c \cup A = \{(D,b),(D,m),(D,s),(N,s)\}$

2. Datorită echiprobabilității putem folosi formula cu "numarul de cazuri favorabile / nr. total de cazuri"

Așadar: $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{6}$; $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{6}$; $\mathbb{P}(B^c \cup A) = \frac{4}{6}$

3.

	b	m	s
D	0.2	0.2	0.1
N	0.1	0.3	0.1

$\mathbb{P}(A) = 0.1 + 0.1 = 0.2$

$\mathbb{P}(B) = 0.1 + 0.3 + 0.1 = 0.5$

$\mathbb{P}(B^c \cup A) = 0.2 + 0.2 + 0.1 + 0.1 = 0.6$

Exercițiul 4:

a) Careu: Mâna noastră va fi structurată astfel: (x,x,x,x,y) (sau orice permutare, nu contează ordinea)

$x, y \in \{A, 2, 3, \ldots, 10, J, Q, K\}$

$$\mathbb{P} = \frac{C_{13}^1 \cdot C_4^4 \cdot C_{48}^1}{C_{52}^5} = \frac{13 \cdot 1 \cdot 48}{C_{52}^5} = \frac{624}{2598960} = 0,00024, \text{ unde}$$

C_{52}^5 : nr. de cazuri posibile (extragerea a 5 cărți din 52)

C_{13}^1 : nr. de moduri în care putem alege tipul celor

$C_4^4 = 1$: nr. de moduri în care se poate alege "culoarea" celor 4 cărți (treflă, romb, cupă, pică)

C_{48}^1: nr. de moduri în care se poate alege cea de-a 5-a carte (au rămas 48)

b) <u>Full-house:</u> Mâna noastră va fi structurată astfel: (x,x,y,y,y); $x,y \in \{A,2,3,\dots,10,J,Q,K\}$

$$\mathbb{P} = \frac{C_{13}^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{12}^1 \cdot C_4^3}{C_{52}^5} = \frac{13 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 4}{2598960} = 0{,}0014$$

C_{13}^1: nr de moduri în care se poate alege "numărul" ~~cărții~~ primului grup de cărți

C_4^2: nr de moduri în care se poate alege tipul primului grup de cărți

Analog și pentru al doilea grup de cărți din mână.

c) <u>Trei cărți de același tip:</u>

Mâna noastră va avea structura (x,x,x,y,z)

$$\mathbb{P} = \frac{C_{13}^1 \cdot C_4^3 \cdot C_{12}^1 \cdot C_{49}^2}{C_{52}^5} = \frac{13 \cdot 4 \cdot 1176}{2598960} = 0.0235$$

d) <u>Două perechi:</u>

Mâna noastră va avea structura (x,x,y,y,z)

$$\mathbb{P} = \frac{C_{13}^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{12}^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{48}^1}{C_{52}^2} = \frac{13 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 6 \cdot 48}{2598960} = 0.1037$$

e) <u>O pereche:</u> (x,x,y,z,t)

$$\mathbb{P} = \frac{C_{13}^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{50}^3}{C_{52}^5} = \frac{13 \cdot 6 \cdot 19600}{2598960} = 0.5882$$

Exercițiul 5:

a) Fie evenimentele

A = rădăcinile sunt reale

A^c = rădăcinile sunt complexe ($\mathbb{C} - \mathbb{R}$)

A se realizează $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$

$(a, b, c) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$

Cazuri:

① $b = 1 \Rightarrow \forall a, c \in \{1, \dots, 6\}$ $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow 0$ soluții

② $b = 2 \Rightarrow 4 - 4ac \geq 0 \Rightarrow 4(1 - ac) \geq 0 \Leftrightarrow a = c = 1$

$\Rightarrow (a, b, c) = (1, 1, 2)$ o soluție

③ $b = 3 \Rightarrow 9 - 4ac \geq 0 \Rightarrow (a, c) \in \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$

$\Rightarrow 3$ soluții

④ $b = 4 \Rightarrow 16 - 4ac \geq 0 \Rightarrow 4(4 - ac) \geq 0$

$(a, c) \in \{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (1,4), (2,2), (4,1)\}$

$\Rightarrow 8$ soluții

⑤ $b = 5 \Rightarrow 25 - 4ac \geq 0 \Rightarrow ac \leq 6$

$ac \in \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow$ cazul 4 (8 soluții)

$ac = 5 \Rightarrow (a, c) \in \{(1,5), (5,1)\}$

$ac = 6 \Rightarrow (a, c) \in \{(1,6), (2,3), (3,2), (6,1)\}$

$\Rightarrow 14$ soluții

⑥ $b = 6 \Rightarrow 36 - 4ac \geq 0 \Rightarrow 4(9 - ac) \geq 0 \Rightarrow ac \leq 9$

$ac \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow$ cazul 5 (14 soluții)

$ac = 7 \Rightarrow$ o soluție

$ac = 8 \Rightarrow (a,c) = \{(2,4),(4,2)\}$

$ac = 9 \Rightarrow (a,c) = \{(3,3)\}$

$\Rightarrow$ 17 posibilități

Din cele 6 cazuri deducem:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{0+1+3+8+14+17}{6^3} = \frac{43}{216} = 0.199$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - 0.199 = 0.801$$

<u>Exercițiul 6:</u>

Fie A_i = este la zi în săptămâna i și

$B_i = A_i^c$ = nu este la zi în săptămâna i

$\Rightarrow \mathbb{P}(A_1) = 0.8$ și $\mathbb{P}(B_1) = 0.2$

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2|A_1)\,\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2|B_1)\,\mathbb{P}(B_1) = 0,8 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,2$$
$$= 0,76$$

$$\mathbb{P}(B_2) = 1 - 0,72 = 0,28$$

$$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_3|A_2)\,\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3|B_2)\,\mathbb{P}(B_2) =$$
$$= 0,8 \cdot 0,76 + 0,4 \cdot 0,24 = 0,752$$

$$\mathbb{P}(B_3) = 1 - 0,688 = 0,312$$

$\vdots$

$$\mathbb{P}(A_{14}) = \mathbb{P}(A_{14}|A_{13})\,\mathbb{P}(A_{13}) + \mathbb{P}(A_{14}|B_{13})\,\mathbb{P}(B_{13})$$

Exercitiul 7:

1) Fie A = test pozitiv ; B = doza de alcool este depășită

$$\mathbb{P}(A|B) = p = 0{,}99$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c) =$$

$$= 0{,}99 + \frac{0{,}5}{100} + \frac{0{,}01 \cdot 99{,}5}{100} = \frac{1{,}49}{100}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{0{,}99 \cdot 0{,}5}{100}}{\frac{1{,}49}{\cancel{100}}} = 0{,}332$$

2) $\mathbb{P}(B|A) = 0.95$

$$\mathbb{P}(B|A) = p \cdot \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{p\mathbb{P}(B)}{p\mathbb{P}(B) + (1-p)\mathbb{P}(B^c)} =$$

$$= \frac{p\frac{95}{100}}{p\frac{95}{100} + (1-p)\frac{99.5}{100}} = \frac{\frac{0.5p}{\cancel{100}}}{\frac{99{,}5 - 99p}{\cancel{100}}} \Rightarrow p = 0{,}999735$$

3) $$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \; ; \; \mathbb{P}'(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}'(B)}$$

$$\frac{\mathbb{P}'(A|B)}{\mathbb{P}(A|B)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{100}{50}} = \frac{100}{6000} < 1 \Rightarrow \mathbb{P}'(A \cap B) < \mathbb{P}(A \cap B)$$

Exercitiul 8:

a) $\Omega = \{(r,r); (r,b); (b,r); (b,b)\}$

$A = \{(r,b), (b,b)\}$; $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{4} = 0{,}5$

b) $\Omega = \{(r,r), (r,b), (b,r), (b,b)\}$

$A = \{(r,b), (b,b)\}$; $B = \{(b,r), (b,b)\}$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = 0{,}5$$

c) Inducție: Dem. că $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_1)$, $\forall n \geq 1$

pentru $n=1$: $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_1)$ (A)

$n \Longrightarrow n+1$:

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1} | B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1} | B_n^c)\mathbb{P}(B_n^c)$$

Știm că $\mathbb{P}(B_n) = \frac{b}{r+b}$ și $\mathbb{P}(B_n^c) = \frac{r}{r+b}$

$$\mathbb{P}(B_{n+1} | B_n) = \frac{b+d}{r+b+d} \; ; \; \mathbb{P}(B_{n+1} | B_n^c) = \frac{b}{b+r+d}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{b+d}{r+b+d} \cdot \frac{b}{r+b} + \frac{b}{r+b+d} \cdot \frac{r}{r+b} =$$

$$= \frac{b(\cancel{b+d+r})}{r+b(\cancel{r+b+d})} = \frac{b}{r+b} = \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_1)$$

În concluzie $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_1)$, $\forall n \geq 1$

d) $\Omega = \{r, b\}^{n+1}$

$A = \{(x, \underbrace{b, b, .., b}_{n \text{ ori}}) | x \in \{r, b\}\}$

$\hookrightarrow$ eveniment ce spune că ultimele n bile sunt albastre

$B = \{\{b\} \times \{r, b\}^n\}$

$\hookrightarrow$ prima bilă e albastră (restul nu contează ce culoare au)

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{2}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2}$$

Exercițiul 9:

1) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$

$A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} \rightarrow$ evenimentul în care apare suma 5

$B = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} \rightarrow$ ev. în care apare suma 7

Vrem $\mathbb{P}(E_n | A^c \cup B^c)$

Folosind Câmpul lui Laplace avem:

— nr. de cazuri posibile $= |\Omega^n| = 36^n$

— nr. de cazuri favorabile $= |C|$, unde

$$C = \{\{1,2,3,4,5,6\}^2 - (A \cup B)\}^{n-1} \times A$$

$$|C| = |\{\{1,2,3,4,5,6\}^2 - (A\cup B)\}^{n-1} \times A| = (36-10)^{n-1} \cdot 4 = 4 \cdot 26^{n-1}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(E_n | A^c \cup B^c) = \frac{4 \cdot 26^{n-1}}{36^n} = \frac{1}{9}\left(\frac{26}{36}\right)^{n-1}$$

2) D = evenimentul în care suma este 2

$D = \{(1,1)\}$

Cazuri favorabile $= |\{\{1,2,3,4,5,6\}^2 - (D \cup B)\}^{n-1} \times D| =$

$= (36-7)^{n-1} \cdot 1 = 29^{n-1}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(E'_n | D^c \cup B^c) = \frac{29^{n-1}}{36^n} = \frac{1}{36}\left(\frac{29}{36}\right)^{n-1}$$

Feraru Andrei Ionuț
Grupa 242

Probabilități și statistică
- Tema 2 -

Exercițiul 1:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$3X+7 \sim \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}; \quad X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix};$$

$$X^3 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}; \quad X+X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}\left(X > -\frac{1}{3}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X \leq -\frac{1}{3}\right) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$$

$$\mathbb{P}\left(x < \frac{1}{4} \middle| X \geq -\frac{1}{2}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{4}\right)}{\mathbb{P}\left(X \geq -\frac{1}{2}\right)} = \frac{0{,}2}{0{,}7} = \frac{2}{7} = 0{,}28$$

Exercițiul 2:

a) i) x este o variabilă Poisson de parametru λ

ii) pt toți $n \geq 1$ avem $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}$

i => ii:

$$p_n = \mathbb{P}(X=n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \Rightarrow \frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \cdot \frac{(n-1)!}{\lambda^{n-1}} e^{\lambda} = \frac{\lambda}{n}$$

ii => i:

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n} \Rightarrow p_n = \frac{\lambda}{n} p_{n-1}; \quad p_1 = \frac{\lambda}{1} p_0; \quad p_2 = \frac{\lambda}{2} p_1 = \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2} p_0$$

$$\Longrightarrow p_n = \frac{\lambda^n}{n!} p_0$$

$$p_0 = 1 - p_1 - p_2 - \dots - p_n = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^i}{i!} p_0 = 1 - p_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^i}{i!}$$

$$p_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^i}{i!} = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i}{i!}} = \frac{1}{e^\lambda} = e^{-\lambda}$$

$\Rightarrow p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \Leftrightarrow X$ este variabila Poisson de parametru λ

b) i) $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda}{k} = \mathbb{P}(X=k-1) \cdot \frac{\lambda}{k}$

Cazul 1: $k < \lambda \Rightarrow \frac{\lambda}{k} \geq 1 \Rightarrow \mathbb{P}(X=k) \geq \mathbb{P}(X=k-1)$

Cazul 2: $k \geq \lambda \Rightarrow \frac{\lambda}{k} \leq 1 \Rightarrow \mathbb{P}(X=k) \leq \mathbb{P}(X=k-1)$

Pentru $k = \lambda$ avem:

$\lambda \in \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X=k-1) \cdot \frac{\lambda}{k} = \mathbb{P}(X=k-1) \Rightarrow k = \lambda$ sau $k = \lambda - 1$

$\lambda \notin \mathbb{Z} \Rightarrow k = [\lambda]$

ii) $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Pentru a maximiza:

$$\frac{\partial P(X=k)}{\partial \lambda} = 0 \text{ și } \frac{\partial^2 P(X=\lambda)}{\partial \lambda^2} < 0$$

$$\frac{\partial P(X=k)}{\partial \lambda} = \frac{1}{k!} k \lambda^{k-1} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{e^{-\lambda}}{k!}(k\lambda^{k-1} - \lambda^k) =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \lambda^{k-1}(k-\lambda) \; ; \; \frac{\partial P(X=k)}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ sau } k = \lambda$$

$$\frac{\partial^2 \mathbb{P}(X=k)}{\partial^2 \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{e^{-\lambda}}{k!} \lambda^{k-1}(k-\lambda)\right) = \frac{e^{-\lambda}}{k!} \lambda^{k-2}(\lambda^2 - 2\lambda k + k^2 - k)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbb{P}(X=k)}{\partial^2 \lambda} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda k + k^2 - k = 0$$

$\Delta = 4K^2 - 4(K^2 - K) = 4K \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{K} \Rightarrow \lambda_1 = K + \sqrt{K}$

$\lambda_2 = K - \sqrt{K}$

Pentru $\lambda = 0$ $\frac{\partial^2 \mathbb{P}(X=K)}{\partial \lambda^2} < 0$ nu verifică

$\Rightarrow$ Valoarea lui λ care maximizează $\mathbb{P}(X=K)$, unde K este fixat, este $\lambda = K$

Exercițiul 3:

a) Fie $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$; $0 \to$ remiză ; $1 \to$ câștig

$$P_{Fischer} = 0,4 \cdot (1 + 0,3 + 0,3^2 + \dots + 0,3^9) = 0,4 \cdot \frac{0,3^{10} - 1}{-0,7} = 0,57$$

b) funcția de masă:

$$d \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & 10 \\ 0,7 & 0,21 & \dots & 0,3^{i-1} \cdot 0,7 & \dots & 0,3^9 \end{pmatrix}$$

Exercițiul 4:

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{(1-p)^k}{-k\log(p)},\ k\geq 1 \text{ și } \mathbb{P}(X=0)=0$$

$$0<p<1$$

$$E[X]=\sum_k k\mathbb{P}(X=k)=\sum_k k\cdot\frac{(1-p)^k}{-k\log p}=-\sum_k\frac{(1-p)((1-p)^k-1)}{(1-p-1)\log p}$$

$$=-\sum_k\frac{(1-p)((1-p)^k-1)}{-p\log p}=-\frac{1-p}{-p\log p}=\frac{p-1}{p\log p}$$

$$E[X^2]=\sum_k k^2\mathbb{P}(X=k)=\sum_k\frac{k^2(1-p)^k}{-k\log p}=\sum_k -k\frac{(1-p)^k}{\log p}=$$

$$=-\frac{1}{\log p}\sum k(1-p)^k=-\frac{1}{\log p}(1-p)\sum_k k(1-p)^{k-1}=$$

$$=\frac{-1}{\log p}(1-p)\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(-\sum_k(1-p)^k\right)\right]=\frac{-1}{\log p}(1-p)\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{E[X]}{\log p}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\log p}(1-p)\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p-1}{p}\right)=\frac{-1}{\log p}(1-p)\frac{p-p+1}{p^2}\Rightarrow$$

$$E[X^2]=\frac{p-1}{p^2\log p}$$

$$Var[X]=E[X^2]-E[X]^2=\frac{p-1}{p^2\log p}-\frac{(p-1)^2}{(p\log p)^2}=\frac{(p-1)\log p-(p-1)^2}{(p\log p)^2}$$

$$=\frac{(p-1)(\log p-p+1)}{p^2\log^2 p}$$

Exercițiul 5:

$$2^c \in [2^a, 2^b] \iff c \in [a, b] \quad \text{cu} \quad \mathbb{P}(X = c) = \frac{1}{b-a+1}$$

$$\Rightarrow E[X] = \sum_{x \in [a,b]} 2^x \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{b-a+1} \sum_{x \in [a,b]} 2^x =$$

$$= \frac{2^a(2^{b-a+1} - 1)}{b-a-1}$$

$$E[X^2] = \sum_{x \in [a,b]} 2^x \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{b-a+1} \sum_{x \in [a,b]} 2^{2x} = \frac{1}{b-a+1} \cdot \cancel{\frac{2^{2a}(4^{b-a+1}}{}}$$

$$\cdot \frac{2^{2a}(4^{b-a+1} - 1)}{3}$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{b-a+1} \frac{2^{2a}(4^{b-a+1} - 1)}{3} -$$

$$- \left(\frac{2^a(2^{b-a+1} - 1)}{b-a-1} \right)^2$$

$$E[X^3] = \sum_{x \in [a,b]} 2^{3x} \mathbb{P}[X = x] = \frac{1}{b-a+1} \sum_{x \in [a,b]} 2^{3x} = \frac{1}{b-a+1} \cdot \frac{2^{3a}(8^{b-a+1} - 1)}{7}.$$

Exercițiul 6:

$$E[C] = a\cdot N \cdot \mathbb{P}(X \geq N) + \sum_{x=0}^{N-1} (ax - b(N-x))\,\mathbb{P}(X=x) =$$

$$= a\cdot N \cdot \sum_{x=N}^{m} \frac{1}{m+1} + \sum_{x=0}^{N} \frac{(a+b)x - bN}{m+1} =$$

$$= \frac{a\cdot N(m-N+1)}{m+1} + \frac{N(N-1)(a+b)}{2(m+1)} - \frac{bN^2}{m+1} = \frac{N((2m+1)a - b - (a+b)N))}{2(m+1)}$$

Pt a determina max este suficient să det. maximul numărătorului.

$$\frac{d}{\partial N}\left[N((2m+1)a - b - (a+b)N)\right] = 0 \iff$$

$$a(2m+1) - b - 2N(a+b) = 0 \iff N = \frac{(2m+1)a - b}{2(a+b)}$$

$$\frac{d^2}{\partial N^2}\left[N((2m+1)a - b - (a+b)N)\right] = -2(a+b) < 0$$