CURSUL 7: SUBGRUP NORMAL. GRUP FACTOR

G. MINCU

1. Relaţii de echivalenţă modulo un subgrup

Fie G un grup şi $H \leq G$. Considerăm următoarele relaţii pe G:
a) $x \equiv_s y \pmod H$ dacă şi numai dacă $x^{-1}y \in H$
b) $x \equiv_d y \pmod H$ dacă şi numai dacă $xy^{-1} \in H$.

Propoziţia 1. Relaţiile $\equiv_s$ şi $\equiv_d$ sunt de echivalenţă.

Temă: Demonstraţi propoziţia 1!

Definiţia 2. $\equiv_s$ se numeşte **relaţia de echivalenţă la stânga modulo subgrupul H**, iar $\equiv_d$ se numeşte **relaţia de echivalenţă la dreapta modulo subgrupul H**.

Notaţia folosită pentru mulţimea factor a lui G în raport cu $\equiv_s$ este $(G/H)_s$, iar cea pentru mulţimea factor a lui G în raport cu $\equiv_d$ este $(G/H)_d$.

Propoziţia 3. Fie G un grup, $H \leq G$ şi $x \in G$. Atunci:
a) Clasa de echivalenţă a lui x în raport cu $\equiv_s \pmod H$ este xH.
b) Clasa de echivalenţă a lui x în raport cu $\equiv_d \pmod H$ este Hx.

Demonstraţie: a) $y \in \widehat{x} \Leftrightarrow x^{-1}y \in H \Leftrightarrow y \in xH$.
b) Analog. $\square$

Corolarul 4. $(G/H)_s = \{xH : x \in G\}$, iar $(G/H)_d = \{Hx : x \in G\}$.

Propoziţia 5. Fie G un grup şi $H \leq G$. Atunci $|(G/H)_s| = |(G/H)_d|$.

Demonstraţie: Definim $f : (G/H)_s \to (G/H)_d$, $f(xH) = Hx^{-1}$ şi $g : (G/H)_d \to (G/H)_s$, $g(Hx) = x^{-1}H$.
Dacă $xH = yH$, atunci $x^{-1}y \in H$, deci $x^{-1}(y^{-1})^{-1} \in H$, de unde $Hx^{-1} = Hy^{-1}$. Prin urmare, f este corect definită. Faptul că g este corect definită se probează analog.
Este imediat că f şi g sunt inverse una celeilalte, deci ele sunt bijective, de unde concluzia. $\square$

Definiţia 6. Cardinalul comun al mulţimilor $|(G/H)_s|$ şi $|(G/H)_d|$ se numeşte **indicele lui H în G**.

Vom nota indicele lui H în G cu $[G : H]$.

Definiţia 7. Prin **ordinul** grupului G înţelegem cardinalul lui G. Notaţia folosită în mod uzual pentru ordinul lui G este $|G|$.

Lemma 8. Fie G un grup, $H \leq G$ şi $x \in G$. Atunci $|xH| = |H|$.

Demonstraţie: Definim $f : xH \to H$, $f(t) = x^{-1}t$ şi $g : H \to xH$, $g(h) = xh$.
Este imediat că f şi g sunt corect definite şi inverse una celeilalte, deci ele sunt bijective, de unde concluzia. $\square$

Teorema lui Lagrange Fie G un grup şi $H \leq G$. Atunci $|G| = |H| \cdot [G : H]$.

Demonstraţie: Avem $G = \coprod\limits_{xH \in (G/H)_s} xH$, deci $|G| = \sum\limits_{xH \in (G/H)_s} |xH|$.
Conform lemei 8, din această relaţie obţinem $|G| = |H| \cdot |(G/H)_s|$. $\square$

Corolarul 9. Ordinul oricărui subgrup al unui grup finit divide ordinul respectivului grup.

2. Subgrupuri normale

Propoziţia 10. Fie G un grup şi $H \leq G$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
i) $(G/H)_s = (G/H)_d$.
ii) Pentru orice $x \in G$ avem $xH = Hx$.
iii) Pentru orice $x \in G$ avem $xHx^{-1} = H$.
iv) Pentru orice $x \in G$ avem $xHx^{-1} \subset H$.

Temă: Demonstraţi propoziţia 10!

Definiţia 11. Fie G un grup şi $H \leq G$. Spunem că H este **subgrup normal** al lui G dacă îndeplineşte una dintre condiţiile echivalente din propoziţia 10.

Vom nota faptul că H este subgrup normal al lui G cu $H \trianglelefteq G$.

Exemplul 12. $\{e\} \trianglelefteq G$, $G \trianglelefteq G$.

Exemplul 13. Pentru orice familie $(H_i)_{i \in I}$ de subgrupuri normale ale lui G avem $\bigcap\limits_{i \in I} H_i \trianglelefteq G$.

Exemplul 14. Orice subgrup al unui grup abelian este normal.

Exemplul 15. Orice subgrup de indice doi al unui grup este normal.

Exemplul 16. Dacă $f : G \to G'$ este un morfism de grupuri, atunci $\ker f \trianglelefteq G$.

Exemplul 16 este un caz particular al următoarei propoziţii, care ne oferă şi o altă clasă de exemple de subgrupuri normale:

Propoziţia 17. Dacă $f : G \to G'$ este un morfism de grupuri, atunci:
a) Pentru orice $K \trianglelefteq G'$ avem $f^{-1}(K) \trianglelefteq G$.
b) Dacă f este surjectiv, atunci pentru orice $H \trianglelefteq G'$ avem $f(H) \trianglelefteq G'$.

Teorema de corespondenţă pentru subgrupuri se completează astfel:

Teorema 18. Fie $f : G \to G'$ un morfism surjectiv de grupuri. Notăm $\mathcal{H} = \{H \leq G : H \supset \ker f\}$ şi $\mathcal{K} = \{K : K \leq G'\}$. Atunci funcţiile $\Phi : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, $\Phi(H) = f(H)$ şi $\Psi : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$, $\Psi(K) = f^{-1}(K)$ sunt (bijective şi) inverse una celeilalte şi păstrează incluziunile. În plus, subgrupurile normale ale lui G care conţin $\ker f$ corespund via aceste funcţii subgrupurilor normale ale lui G'.

3. Grup factor

Observaţia 19. Fie G un grup şi $H \trianglelefteq G$. Atunci pe mulţimea $(G/H)_s$ este corect definită legea de compoziţie $(xH) \cdot (yH) = (xy)H$.

Temă: Demonstraţi observaţia 19!

Definiţia 20. Fie G un grup şi $H \trianglelefteq G$. Prin **grupul factor al lui G în raport cu H** înţelegem grupul care are mulţimea subiacentă $(G/H)_s$ şi legea de compoziţie $(xH) \cdot (yH) = (xy)H$.

Notaţia uzuală pentru grupul factor al lui G în raport cu H este $\dfrac{G}{H}$. Pentru elementul $xH \in \dfrac{G}{H}$ vom prefera uneori notaţia $\widehat{x}$. În notaţie aditivă, în loc de xH vom scrie, desigur, $x + H$.

Exemplul 21. $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_n$.

Observaţia 22. Fie G un grup şi $H \trianglelefteq G$. Aplicaţia $\pi : G \to \dfrac{G}{H}$, $\pi(x) = \widehat{x}$ este morfism surjectiv de grupuri.

Definiţia 23. Fie G un grup şi $H \trianglelefteq G$. Morfismul π din observaţia 22 se numeşte **surjecţia canonică** (sau **proiecţia canonică**) a grupului factor $\dfrac{G}{H}$.

Proprietatea de universalitate a grupului factor. Fie G un grup, $H \trianglelefteq G$, $\pi : G \to \dfrac{G}{H}$ surjecţia canonică şi $f : G \to G'$ un morfism de grupuri. Atunci:

i) Dacă $H \subset \ker f$, atunci există un unic morfism $u : \dfrac{G}{H} \to G'$ astfel încât $u \circ \pi = f$. În plus:

ii) u este injectivă dacă şi numai dacă $H = \ker f$.

iii) u este surjectivă dacă şi numai dacă f este surjectivă.

Temă: Demonstraţi proprietatea de universalitate a grupului factor!

Exemplul 24. Conform proprietăţii de universalitate a grupului factor, proiecţia canonică a lui $\mathbb{Z}$ pe $\mathbb{Z}_4$ induce morfismul de grupuri $u : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_4$, $u(\widehat{a}) = \overline{a}$. Pe de altă parte, deoarece $4\mathbb{Z} \not\subset 12\mathbb{Z}$, nu ne aşteptăm ca $v : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_{12}$, $v(\overline{a}) = \widehat{a}$ să fie morfism de grupuri; verificarea arată că, într-adevăr, v nu este o funcţie corect definită.

4. Teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri

4.1. **Teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri.** Fie $f : G \to \Gamma$ un morfism de grupuri. Atunci

$$\frac{G}{\ker f} \stackrel{\sim}{\to} \operatorname{Im} f$$

în mod canonic, via $\overline{f}(\widehat{x}) = f(x)$.

Demonstraţie[1]*:* Definim $\overline{f} : \dfrac{G}{\ker f} \to \operatorname{Im} f$, $\overline{f}(\widehat{x}) = f(x)$.

Dacă $\widehat{x} = \widehat{y}$, atunci $x^{-1}y \in \ker f$, deci $f(x^{-1}y) = e_\Gamma$. f fiind morfism de grupuri, obţinem de aici $f(x)^{-1}f(y) = e_\Gamma$, deci $f(x) = f(y)$. Prin urmare, valorile lui $\overline{f}$ sunt independente de alegerea reprezentanţilor argumentelor. Cum valorile lui $\overline{f}$ sunt valori ale lui f, ele se află în $\operatorname{Im} f$. Prin urmare, $\overline{f}$ este corect definită.

Dacă $x, y \in G$, atunci $\overline{f}(\widehat{x}\widehat{y}) = \overline{f}(\widehat{xy}) = f(xy) = f(x)f(y) = \overline{f}(\widehat{x})\overline{f}(\widehat{y})$. Aşadar, $\overline{f}$ este morfism de grupuri.

Este evident că $\overline{f}$ este surjectivă.

Dacă $\overline{f}(\widehat{x}) = e_\Gamma$, atunci $f(x) = e_\Gamma$, deci $x \in \ker f$, de unde $\widehat{x} = \widehat{e}$. În consecinţă, $\overline{f}$ este injectivă.

Din toate faptele arătate mai sus rezultă că $\overline{f}$ este morfism bijectiv de grupuri. Prin urmare, f este izomorfism. $\square$

[1] O demonstraţie mai rapidă a acestei teoreme se obţine utilizând proprietatea de universalitate a grupului factor. Lăsăm ca exerciţiu cititorului această abordare.

Bibliografie

[1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.
[2] I. D. Ion, N. Radu, *Algebră*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.
[3] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.