Algoritmi avansați

C11 - Diagrame Voronoi

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. al II-lea, 2020 - 2021

Definiție, proprietăți elementare

Diagrame Voronoi și triangulări Delaunay

Un algoritm eficient

Problema oficiilor poștale

- Se consideră o mulțime de puncte (oficiile poștale) din plan. Care este cel mai apropiat?

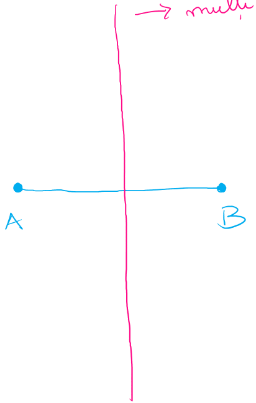
Problema oficiilor poștale

- Se consideră o mulțime de puncte (oficiile poștale) din plan. Care este cel mai apropiat?
- Ideea de a delimita "zone de influență" a apărut cu multă vreme în urmă (de exemplu în lucrările lui Descartes, dar și în legătură cu alte probleme; este utilizată în mod curent în varii domenii. În plus, astfel de "împărțiri" apar în natură.

Exemple - diagrame Voronoi în context 2D

1) 2 puncte distincte

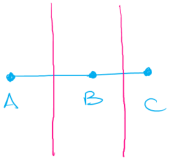
→ mulțimea punctelor egal depărtate de A și B = mediatoarea segmentului [AB]



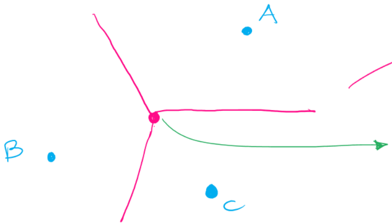
→ separă celulele corespunzătoare lui A și B

Exemple - diagrame Voronoi în context 2D

2) 3 puncte distincte, coliniare



3) 3 puncte necoliniare



mediatoarele segmentelor

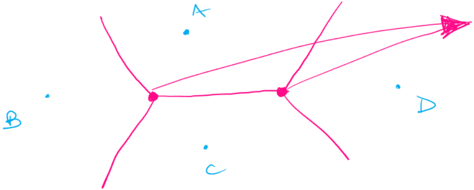
[AB], [BC] și [AC]

centrul cercului circumscris

ΔABC

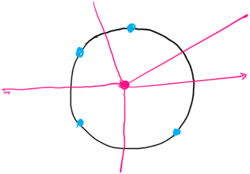
Exemple - diagrame Voronoi în context 2D

4) 4 puncte necoliniare, neconciclice



vârfurile diagramei Voronoi

4') 4 puncte conciclice



vârf = centrul cercului care conține cele 4 puncte

Formalizare

- Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$, numite **situri**.

Formalizare

- Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$, numite **situri**.
- **Diagrama Voronoi** a lui $\mathcal{P}$ (notată $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$) este o divizare a planului $\mathbb{R}^2$ în n celule $\mathcal{V}(P_1), \ldots, \mathcal{V}(P_n)$ cu proprietatea că

$$P \in \mathcal{V}(P_i) \Leftrightarrow d(P, P_i) \leq d(P, P_j),\ \forall j = 1, \ldots, n.$$

Celula asociată unui punct este o intersecție de semiplane.
Aplicabilitate: algoritm (lent) de determinare a diagramei Voronoi.

Formalizare

- Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$, numite **situri**.
- **Diagrama Voronoi** a lui $\mathcal{P}$ (notată $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$) este o divizare a planului $\mathbb{R}^2$ în n celule $\mathcal{V}(P_1), \ldots, \mathcal{V}(P_n)$ cu proprietatea că

$$P \in \mathcal{V}(P_i) \Leftrightarrow d(P, P_i) \leq d(P, P_j),\ \forall j = 1, \ldots, n.$$

  Celula asociată unui punct este o intersecție de semiplane.
  Aplicabilitate: algoritm (lent) de determinare a diagramei Voronoi.
- Două celule adiacente au în comun o *muchie* sau un *vârf* (punct de intersecție a muchiilor).

Formalizare

- Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$, numite **situri**.
- **Diagrama Voronoi** a lui $\mathcal{P}$ (notată $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$) este o divizare a planului $\mathbb{R}^2$ în n celule $\mathcal{V}(P_1), \ldots, \mathcal{V}(P_n)$ cu proprietatea că

$$P \in \mathcal{V}(P_i) \Leftrightarrow d(P, P_i) \leq d(P, P_j), \ \forall j = 1, \ldots, n.$$

  Celula asociată unui punct este o intersecție de semiplane.
  Aplicabilitate: algoritm (lent) de determinare a diagramei Voronoi.
- Două celule adiacente au în comun o *muchie* sau un *vârf* (punct de intersecție a muchiilor).
- **Atenție!** Vârfurile lui $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$ sunt diferite de punctele din $\mathcal{P}$.

Formalizare

- Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$, numite **situri**.
- **Diagrama Voronoi** a lui $\mathcal{P}$ (notată $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$) este o divizare a planului $\mathbb{R}^2$ în n celule $\mathcal{V}(P_1), \ldots, \mathcal{V}(P_n)$ cu proprietatea că

  $$P \in \mathcal{V}(P_i) \Leftrightarrow d(P, P_i) \leq d(P, P_j),\ \forall j = 1, \ldots, n.$$

  Celula asociată unui punct este o intersecție de semiplane.
  Aplicabilitate: algoritm (lent) de determinare a diagramei Voronoi.
- Două celule adiacente au în comun o *muchie* sau un *vârf* (punct de intersecție a muchiilor).
- **Atenție!** Vârfurile lui $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$ sunt diferite de punctele din $\mathcal{P}$.
- Uneori, prin abuz de limbaj, este precizată doar împărțirea în muchii / vârfuri.

Formalizare

- Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$, numite **situri**.
- **Diagrama Voronoi** a lui $\mathcal{P}$ (notată $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$) este o divizare a planului $\mathbb{R}^2$ în n celule $\mathcal{V}(P_1), \ldots, \mathcal{V}(P_n)$ cu proprietatea că

  $$P \in \mathcal{V}(P_i) \Leftrightarrow d(P, P_i) \leq d(P, P_j),\ \forall j = 1, \ldots, n.$$

  Celula asociată unui punct este o intersecție de semiplane.
  Aplicabilitate: algoritm (lent) de determinare a diagramei Voronoi.
- Două celule adiacente au în comun o *muchie* sau un *vârf* (punct de intersecție a muchiilor).
- **Atenție!** Vârfurile lui $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$ sunt diferite de punctele din $\mathcal{P}$.
- Uneori, prin abuz de limbaj, este precizată doar împărțirea în muchii / vârfuri.
- Diagrame Voronoi pot fi construite pentru diverse funcții distanță (e.g. distanța Manhattan); forma celulelor depinde de forma "cercului" în raport cu funcția distanță respectivă.

Structura unei diagrame Voronoi

- Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ o mulțime de situri (puncte) din planul $\mathbb{R}^2$.

Structura unei diagrame Voronoi

- Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ o mulțime de situri (puncte) din planul $\mathbb{R}^2$.
- Celula asociată unui punct este o intersecție de semiplane:

$$\mathcal{V}(P_i) = \bigcap_{j \neq i} h(P_i, P_j),$$

  unde $h(P_i, P_j)$ este semiplanul determinat de mediatoarea segmentului $[P_i P_j]$ care conține punctul P_i. În particular: fiecare celulă este o mulțime convexă.
  Aplicabilitate: algoritm (lent) de determinare a diagramei Voronoi.

Structura unei diagrame Voronoi

- Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ o mulțime de situri (puncte) din planul $\mathbb{R}^2$.
- Celula asociată unui punct este o intersecție de semiplane:

$$\mathcal{V}(P_i) = \bigcap_{j \neq i} h(P_i, P_j),$$

  unde $h(P_i, P_j)$ este semiplanul determinat de mediatoarea segmentului $[P_iP_j]$ care conține punctul P_i. În particular: fiecare celulă este o mulțime convexă. Aplicabilitate: algoritm (lent) de determinare a diagramei Voronoi.
- Dacă toate punctele sunt coliniare, atunci diagrama Voronoi asociată $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$ conține $n-1$ *drepte paralele* între ele (în particular, pentru $n \geq 3$, ea nu este conexă).
- În caz contrar, diagrama este conexă, iar muchiile sale sunt fie *segmente*, fie *semidrepte* (cui corespund acestea?).

Structura unei diagrame Voronoi

- Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ o mulțime de situri (puncte) din planul $\mathbb{R}^2$.
- Celula asociată unui punct este o intersecție de semiplane:

$$\mathcal{V}(P_i) = \bigcap_{j \neq i} h(P_i, P_j),$$

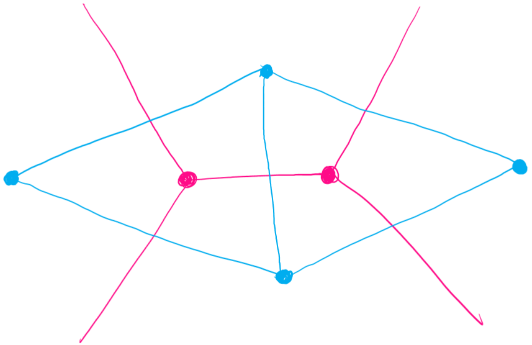
unde $h(P_i, P_j)$ este semiplanul determinat de mediatoarea segmentului $[P_iP_j]$ care conține punctul P_i. În particular: fiecare celulă este o mulțime convexă. Aplicabilitate: algoritm (lent) de determinare a diagramei Voronoi.

- Dacă toate punctele sunt coliniare, atunci diagrama Voronoi asociată $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$ conține $n-1$ *drepte paralele* între ele (în particular, pentru $n \geq 3$, ea nu este conexă).
- În caz contrar, diagrama este conexă, iar muchiile sale sunt fie *segmente*, fie *semidrepte* (cui corespund acestea?).
- **Propoziție.** Fie o mulțime cu n situri. Atunci, pentru diagrama Voronoi asociată au loc inegalitățile

$$n_v \leq 2n - 5, \qquad n_m \leq 3n - 6,$$

unde n_v este numărul de vârfuri ale diagramei și n_m este numărul de muchii al acesteia.

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime



Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- Construcție:

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- Construcție:
  - Mulțime de puncte $\mathcal{P}$ în planul $\mathbb{R}^2$ $\Longrightarrow$

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- Construcție:
  - Mulțime de puncte $\mathcal{P}$ în planul $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow$
  - Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P}) \Longrightarrow$

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- Construcție:
  - Mulțime de puncte $\mathcal{P}$ în planul $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow$
  - Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P}) \Longrightarrow$
  - Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună $\Longrightarrow$

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- Construcție:
  - Mulțime de puncte $\mathcal{P}$ în planul $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow$
  - Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P}) \Longrightarrow$
  - Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună $\Longrightarrow$
  - Triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ (numită **triangulare Delaunay**)

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- Construcție:
  - Mulțime de puncte $\mathcal{P}$ în planul $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow$
  - Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P}) \Longrightarrow$
  - Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună $\Longrightarrow$
  - Triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ (numită **triangulare Delaunay**)
- **Propoziție.** *Fie $\mathcal{T}$ o triangulare a lui $\mathcal{P}$. Atunci $\mathcal{T}$ este o triangulare Delaunay dacă și numai dacă pentru orice triunghi din $\mathcal{T}$ cercul circumscris nu conține în interiorul său niciun punct al lui $\mathcal{P}$.*

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- Construcție:
  - Mulțime de puncte $\mathcal{P}$ în planul $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow$
  - Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P}) \Longrightarrow$
  - Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună $\Longrightarrow$
  - Triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ (numită **triangulare Delaunay**)
- **Propoziție.** *Fie $\mathcal{T}$ o triangulare a lui $\mathcal{P}$. Atunci $\mathcal{T}$ este o triangulare Delaunay dacă și numai dacă pentru orice triunghi din $\mathcal{T}$ cercul circumscris nu conține în interiorul său niciun punct al lui $\mathcal{P}$.*
- **Teoremă.** *O triangulare este legală dacă și numai dacă este o triangulare Delaunay.*

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- Construcție:
  - Mulțime de puncte $\mathcal{P}$ în planul $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow$
  - Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P}) \Longrightarrow$
  - Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună $\Longrightarrow$
  - Triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ (numită **triangulare Delaunay**)
- **Propoziție.** *Fie $\mathcal{T}$ o triangulare a lui $\mathcal{P}$. Atunci $\mathcal{T}$ este o triangulare Delaunay dacă și numai dacă pentru orice triunghi din $\mathcal{T}$ cercul circumscris nu conține în interiorul său niciun punct al lui $\mathcal{P}$.*
- **Teoremă.** *O triangulare este legală dacă și numai dacă este o triangulare Delaunay.*
- **Teoremă.** *Orice triangulare unghiular optimă este o triangulare Delaunay. Orice triangulare Delaunay maximizează cel mai mic unghi, comparativ cu toate triangulările lui $\mathcal{P}$.*

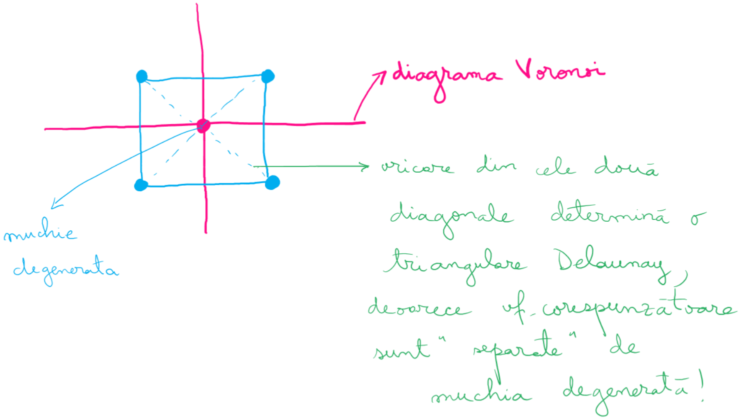
Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- Construcție:
  - Mulțime de puncte $\mathcal{P}$ în planul $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow$
  - Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P}) \Longrightarrow$
  - Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună $\Longrightarrow$
  - Triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ (numită **triangulare Delaunay**)
- **Propoziție.** *Fie $\mathcal{T}$ o triangulare a lui $\mathcal{P}$. Atunci $\mathcal{T}$ este o triangulare Delaunay dacă și numai dacă pentru orice triunghi din $\mathcal{T}$ cercul circumscris nu conține în interiorul său niciun punct al lui $\mathcal{P}$.*
- **Teoremă.** *O triangulare este legală dacă și numai dacă este o triangulare Delaunay.*
- **Teoremă.** *Orice triangulare unghiular optimă este o triangulare Delaunay. Orice triangulare Delaunay maximizează cel mai mic unghi, comparativ cu toate triangulările lui $\mathcal{P}$.*
- **Întrebare:** Cum "funcționează" această construcție când punctele din $\mathcal{P}$ sunt (de exemplu) vârfurile unui pătrat? (cf. slide următor)

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- Construcție:
  - Mulțime de puncte $\mathcal{P}$ în planul $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow$
  - Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P}) \Longrightarrow$
  - Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună $\Longrightarrow$
  - Triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ (numită **triangulare Delaunay**)
- **Propoziție.** *Fie $\mathcal{T}$ o triangulare a lui $\mathcal{P}$. Atunci $\mathcal{T}$ este o triangulare Delaunay dacă și numai dacă pentru orice triunghi din $\mathcal{T}$ cercul circumscris nu conține în interiorul său niciun punct al lui $\mathcal{P}$.*
- **Teoremă.** *O triangulare este legală dacă și numai dacă este o triangulare Delaunay.*
- **Teoremă.** *Orice triangulare unghiular optimă este o triangulare Delaunay. Orice triangulare Delaunay maximizează cel mai mic unghi, comparativ cu toate triangulările lui $\mathcal{P}$.*
- **Întrebare:** Cum "funcționează" această construcție când punctele din $\mathcal{P}$ sunt (de exemplu) vârfurile unui pătrat? (cf. slide următor)
- Exemple (alte link-uri):
  http://www.cs.cornell.edu/info/people/chew/Delaunay.html
  http://cgm.cs.mcgill.ca/~godfried/teaching/projects.pr.98/tesson/taxi/taxivoro.html

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime - cazul unui pătrat



Algoritmul lui Fortune [1987]

- Metodă clasică (și eficientă) de determinare a diagramei Voronoi pentru o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$. Complexitate: $O(n \log n)$. Detalii: http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-voronoi. Suport vizual disponibil pe grupul MSTeams.

Algoritmul lui Fortune [1987]

- Metodă clasică (și eficientă) de determinare a diagramei Voronoi pentru o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$. Complexitate: $O(n \log n)$. Detalii: http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-voronoi. Suport vizual disponibil pe grupul MSTeams.
- **Principiu (paradigmă):** sweep line / dreaptă de baleiere.

Algoritmul lui Fortune [1987]

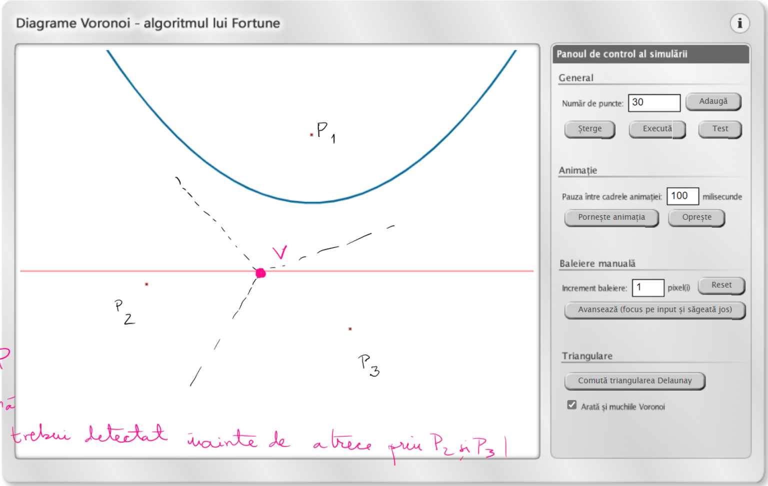
- Metodă clasică (și eficientă) de determinare a diagramei Voronoi pentru o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$. Complexitate: $O(n \log n)$. Detalii: http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-voronoi. Suport vizual disponibil pe grupul MSTeams.
- **Principiu (paradigmă):** sweep line / dreaptă de baleiere.
- **Inconvenient:** la întâlnirea unui vârf al diagramei, dreapta de baleiere nu a întâlnit încă toate siturile (puncte din $\mathcal{P}$) care determină acest vârf!

Algoritmul lui Fortune [1987]

- Metodă clasică (și eficientă) de determinare a diagramei Voronoi pentru o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$. Complexitate: $O(n \log n)$. Detalii: http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-voronoi. Suport vizual disponibil pe grupul MSTeams.
- **Principiu (paradigmă):** sweep line / dreaptă de baleiere.
- **Inconvenient:** la întâlnirea unui vârf al diagramei, dreapta de baleiere nu a întâlnit încă toate siturile (puncte din $\mathcal{P}$) care determină acest vârf!
- **Adaptare:** nu reținem informația legată de intersecția dintre dreapta de baleiere și diagramă, ci doar informația legată de partea diagramei care nu mai poate fi influențată de punctele situate de dincolo de dreapta de baleiere. Din punct de vedere practic, apare o reuniune de arce de parabolă (**curbă parabolică)**, ceea ce este situat deasupra acestei curbe nu mai poate fi influențat de evenimentele nedetectate.

Adaptarea paradigmei dreptei de baleiere - problematizare

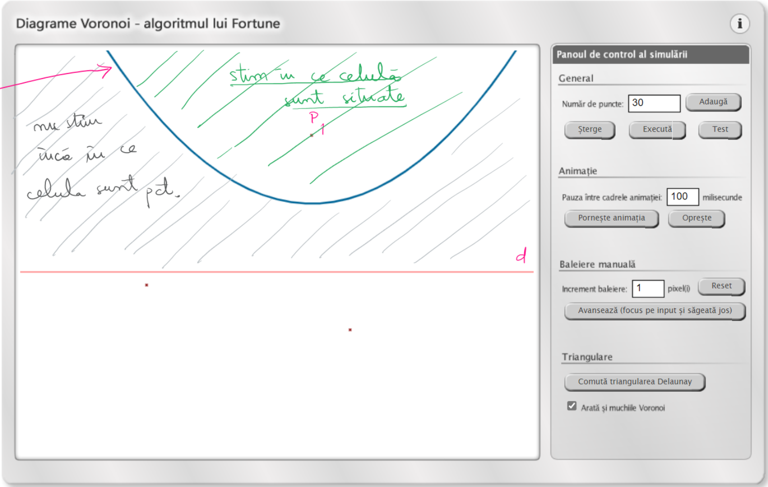
la trecerea prin vârful V al diagramei Voronoi, dreapta de baleiere nu a întâlnit (încă) toate punctele din P care îl determină



(în figură ar trebui detectat înainte de a trece prin P_2 și P_3)

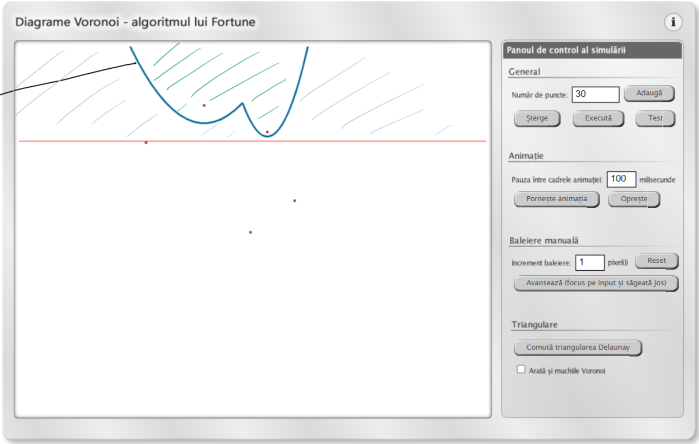
Adaptarea paradigmei dreptei de baleiere

arc de parabolă: pct. egal depărtate de P_1 și d



Adaptarea paradigmei dreptei de baleiere - curba parabolică

curbă parabolică



Despre curba parabolică (I)

- **Curba parabolică (*beach line*):**

Despre curba parabolică (I)

- **Curba parabolică (*beach line*):**
  - Este o reuniune de arce de parabolă.
  - Un punct de pe curba parabolică este egal depărtat de situl care determină arcul de parabolă și dreapta de baleiere. Presupunem că dreapta de baleiere d are ecuația $y = 0$, iar situl P_i, situat deasupra lui d (adică $y_i > 0$) are coordonatele (x_i, y_i). Locul geometric al punctelor egal depărtate de d și P_i are ecuația

$$y = \frac{1}{2y_i}x^2 - \frac{x_i}{y_i}x + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2y_i}.$$

Despre curba parabolică (I)

- **Curba parabolică (*beach line*):**
  - Este o reuniune de arce de parabolă.
  - Un punct de pe curba parabolică este egal depărtat de situl care determină arcul de parabolă și dreapta de baleiere. Presupunem că dreapta de baleiere d are ecuația $y = 0$, iar situl P_i, situat deasupra lui d (adică $y_i > 0$) are coordonatele (x_i, y_i). Locul geometric al punctelor egal depărtate de d și P_i are ecuația

$$y = \frac{1}{2y_i}x^2 - \frac{x_i}{y_i}x + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2y_i}.$$

  - Punctele de racord ale arcelor de parabolă aparțin muchiilor diagramei Voronoi;

Despre curba parabolică (I)

- **Curba parabolică (*beach line*):**
  - Este o reuniune de arce de parabolă.
  - Un punct de pe curba parabolică este egal depărtat de situl care determină arcul de parabolă și dreapta de baleiere. Presupunem că dreapta de baleiere d are ecuația $y = 0$, iar situl P_i, situat deasupra lui d (adică $y_i > 0$) are coordonatele (x_i, y_i). Locul geometric al punctelor egal depărtate de d și P_i are ecuația

$$y = \frac{1}{2y_i}x^2 - \frac{x_i}{y_i}x + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2y_i}.$$

  - Punctele de racord ale arcelor de parabolă aparțin muchiilor diagramei Voronoi;
  - Curba parabolică este x-monotonă, adică orice dreaptă verticală o intersectează *exact* într-un punct (la ce folosește această proprietate?).

Despre curba parabolică (II)

- Modificarea curbei parabolice:

Despre curba parabolică (II)

- Modificarea curbei parabolice:
  - **Site event / eveniment de tip locație.** (i) La trecerea printr-un sit apare un arc de parabolă (care "la început" este degenerat) și, reciproc, apariția unui nou arc este posibilă doar la trecerea printr-un sit. (ii) În consecință, la un moment fixat, curba parabolică are maxim $(2n-1)$ arce.

Despre curba parabolică (II)

- Modificarea curbei parabolice:
  - **Site event / eveniment de tip locație.** (i) La trecerea printr-un sit apare un arc de parabolă (care "la început" este degenerat) și, reciproc, apariția unui nou arc este posibilă doar la trecerea printr-un sit. (ii) În consecință, la un moment fixat, curba parabolică are maxim $(2n-1)$ arce.
  - **Circle event / eveniment de tip cerc.** (i) La întâlnirea punctului inferior al unui cerc care trece prin cel puțin trei situri și este tangent la dreapta de baleiere dispare un arc de parabolă și, reciproc, arcele de parabolă dispar doar la acest tip de evenimente. (ii) Un eveniment de tip cerc este dat de trei arce de parabolă consecutive de pe curba parabolică, deci trebuie testate toate tripletele consecutive de arce, pe măsură ce ele apar. (iii) Un astfel de eveniment este asociat unui vârf al diagramei Voronoi. (iv) Există triplete de arce consecutive (muchii ale diagramei Voronoi) pentru care muchiile nu se întâlnesc. (v) Unele evenimente de tip cerc detectate nu au loc.

Adaptarea paradigmei dreptei de baleiere - formalizare

- **Statut:** structura curbei parabolice (succesiunea de arce de parabolă); este modificat de două tipuri de evenimente

Adaptarea paradigmei dreptei de baleiere - formalizare

- **Statut:** structura curbei parabolice (succesiunea de arce de parabolă); este modificat de două tipuri de evenimente
- **Evenimente:**
  - site event / eveniment de tip locație: întâlnirea unui sit, adică a unui punct din mulțimea $\mathcal{P}$ (apare un arc de parabolă)
  - circle event / eveniment de tip cerc: întâlnirea unui "punct inferior" al unui cerc care trece prin cel puțin trei situri, tangent la dreapta de baleiere (dispare un arc de parabolă) - **vârf al diagramei Voronoi**

Structuri de date utilizate

- **Diagrama Voronoi:** listă dublu înlănțuită DCEL $\mathcal{D}$

Structuri de date utilizate

- **Diagrama Voronoi:** listă dublu înlănțuită DCEL $\mathcal{D}$
- **Evenimente:** coadă de priorități / evenimente $\mathcal{Q}$ și arbore de căutare binar echilibrat. Sunt reținute evenimentele de tip sit, precum și evenimentele de tip cerc - acestea fiind detectate pe parcursul algoritmului.

Structuri de date utilizate

- **Diagrama Voronoi:** listă dublu înlănțuită DCEL $\mathcal{D}$
- **Evenimente:** coadă de priorități / evenimente $\mathcal{Q}$ și arbore de căutare binar echilibrat. Sunt reținute evenimentele de tip sit, precum și evenimentele de tip cerc - acestea fiind detectate pe parcursul algoritmului.
- **Statut:** Structura curbei parabolice - arbore de căutare binar echilibrat $\mathcal{T}$.

Structuri de date utilizate

- **Diagrama Voronoi:** listă dublu înlănțuită DCEL $\mathcal{D}$
- **Evenimente:** coadă de priorități / evenimente $\mathcal{Q}$ și arbore de căutare binar echilibrat. Sunt reținute evenimentele de tip sit, precum și evenimentele de tip cerc - acestea fiind detectate pe parcursul algoritmului.
- **Statut:** Structura curbei parabolice - arbore de căutare binar echilibrat $\mathcal{T}$.
  - **pe frunze:** siturile care au arce active, la ajungerea într-un sit se insereaza un arc, la ajungerea într-un eveniment de tip cerc se șterge un arc;

Structuri de date utilizate

- **Diagrama Voronoi:** listă dublu înlănțuită DCEL $\mathcal{D}$
- **Evenimente:** coadă de priorități / evenimente $\mathcal{Q}$ și arbore de căutare binar echilibrat. Sunt reținute evenimentele de tip sit, precum și evenimentele de tip cerc - acestea fiind detectate pe parcursul algoritmului.
- **Statut:** Structura curbei parabolice - arbore de căutare binar echilibrat $\mathcal{T}$.
  - **pe frunze:** siturile care au arce active, la ajungerea într-un sit se insereaza un arc, la ajungerea într-un eveniment de tip cerc se șterge un arc;
  - **în nodurile interne:** punctele de racord ale arcelor de parabolă (memorate simbolic) - corespund muchiilor diagramei Voronoi

Structuri de date utilizate

- **Diagrama Voronoi:** listă dublu înlănțuită DCEL $\mathcal{D}$
- **Evenimente:** coadă de priorități / evenimente $\mathcal{Q}$ și arbore de căutare binar echilibrat. Sunt reținute evenimentele de tip sit, precum și evenimentele de tip cerc - acestea fiind detectate pe parcursul algoritmului.
- **Statut:** Structura curbei parabolice - arbore de căutare binar echilibrat $\mathcal{T}$.
  - **pe frunze:** siturile care au arce active, la ajungerea într-un sit se insereaza un arc, la ajungerea într-un eveniment de tip cerc se șterge un arc;
  - **în nodurile interne:** punctele de racord ale arcelor de parabolă (memorate simbolic) - corespund muchiilor diagramei Voronoi
  - pointeri (eventual nuli) de la frunze către evenimentele de tip cerc; de la nodurile interne către muchiile diagramei Voronoi

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ de situri în plan.
Output. Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlănțuită $\mathcal{D}$.

1. Inițializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlănțuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ de situri în plan.
Output. Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlănțuită $\mathcal{D}$.

1. Inițializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlănțuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.
2. **while** $\mathcal{Q} \neq \emptyset$

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ de situri în plan.
Output. Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlănțuită $\mathcal{D}$.

1. Inițializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlănțuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.
2. **while** $\mathcal{Q} \neq \emptyset$
3. **do** elimină evenimentul cu cel mai mare y din $\mathcal{Q}$

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ de situri în plan.
Output. Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlănțuită $\mathcal{D}$.

1. Inițializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlănțuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.
2. **while** $\mathcal{Q} \neq \emptyset$
3. **do** elimină evenimentul cu cel mai mare y din $\mathcal{Q}$
4. **if** evenimentul **ev** este un eveniment de tip sit

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ de situri în plan.
Output. Diagrama Voronoi $\mathrm{VOR}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlănțuită $\mathcal{D}$.

1. Inițializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlănțuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.
2. **while** $\mathcal{Q} \neq \emptyset$
3. **do** elimină evenimentul cu cel mai mare y din $\mathcal{Q}$
4. **if** evenimentul **ev** este un eveniment de tip sit
5. **then** $\textsc{ProcessEvSit}(p_i)$, cu p_i=**ev**

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ de situri în plan.
Output. Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlănțuită $\mathcal{D}$.

1. Inițializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlănțuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.
2. **while** $\mathcal{Q} \neq \emptyset$
3. **do** elimină evenimentul cu cel mai mare y din $\mathcal{Q}$
4. **if** evenimentul **ev** este un eveniment de tip sit
5. **then** $\textsc{ProcessEvSit}(p_i)$, cu p_i=**ev**
6. **else** $\textsc{ProcessEvCerc}(\gamma)$, cu $\gamma = arc(\mathrm{ev}) \in \mathcal{T}$

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ de situri în plan.
Output. Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlănțuită $\mathcal{D}$.

1. Inițializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlănțuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.
2. **while** $\mathcal{Q} \neq \emptyset$
3. **do** elimină evenimentul cu cel mai mare y din $\mathcal{Q}$
4. **if** evenimentul **ev** este un eveniment de tip sit
5. **then** $\textsc{ProcessEvSit}(p_i)$, cu p_i=**ev**
6. **else** $\textsc{ProcessEvCerc}(\gamma)$, cu $\gamma = arc(\text{ev}) \in \mathcal{T}$
7. Nodurile interne încă prezente în $\mathcal{T}$ corespund semidreptelor diagramei Voronoi. Consideră un *bounding box* care conține toate vârfurile diagramei Voronoi în interiorul să și leagă semidreptele de acest *bounding box*, prin actualizarea corespunzătoare a lui $\mathcal{D}$.

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ de situri în plan.
Output. Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlănțuită $\mathcal{D}$.

1. Inițializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlănțuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.
2. **while** $\mathcal{Q} \neq \emptyset$
3. **do** elimină evenimentul cu cel mai mare y din $\mathcal{Q}$
4. **if** evenimentul **ev** este un eveniment de tip sit
5. **then** $\textsc{ProcessEvSit}(p_i)$, cu p_i=**ev**
6. **else** $\textsc{ProcessEvCerc}(\gamma)$, cu $\gamma = arc(\mathrm{ev}) \in \mathcal{T}$
7. Nodurile interne încă prezente în $\mathcal{T}$ corespund semidreptelor diagramei Voronoi. Consideră un *bounding box* care conține toate vârfurile diagramei Voronoi în interiorul să și leagă semidreptele de acest *bounding box*, prin actualizarea corespunzătoare a lui $\mathcal{D}$.
8. Traversează muchiile pentru a adăuga celulele diagramei și pointeri corespunzători.

Procedura ProcessEvSit (p_i)

1. Dacă $\mathcal{T}$ este vidă, inserează p_i și revine, dacă nu continuă cu 2.$-$5.

Procedura ProcessEvSit (p_i)

1. Dacă $\mathcal{T}$ este vidă, inserează p_i și revine, dacă nu continuă cu 2.−5.
2. Caută în $\mathcal{T}$ arcul α situat deasupra lui p_i. Dacă frunza reprezentând α are un pointer către un eveniment de tip cerc **ev** din $\mathcal{Q}$, atunci **ev** este o alarmă falsă și trebuie șters.

Procedura ProcessEvSit (p_i)

1. Dacă $\mathcal{T}$ este vidă, inserează p_i și revine, dacă nu continuă cu 2.−5.
2. Caută în $\mathcal{T}$ arcul α situat deasupra lui p_i. Dacă frunza reprezentând α are un pointer către un eveniment de tip cerc **ev** din $\mathcal{Q}$, atunci **ev** este o alarmă falsă și trebuie șters.
3. Înlocuiește frunza lui $\mathcal{T}$ care reprezintă α cu un subarbore cu trei frunze: cea din mijloc reține situl p_i și celelalte două situl p_j asociat lui α. Memorează perechile reprezentând punctele de racord în două noduri interne. Efectuează rebalansări în $\mathcal{T}$, dacă este necesar.

Procedura PROCESSEVSIT (p_i)

1. Dacă $\mathcal{T}$ este vidă, inserează p_i și revine, dacă nu continuă cu 2.$-$5.
2. Caută în $\mathcal{T}$ arcul α situat deasupra lui p_i. Dacă frunza reprezentând α are un pointer către un eveniment de tip cerc **ev** din $\mathcal{Q}$, atunci **ev** este o alarmă falsă și trebuie șters.
3. Înlocuiește frunza lui $\mathcal{T}$ care reprezintă α cu un subarbore cu trei frunze: cea din mijloc reține situl p_i și celelalte două situl p_j asociat lui α. Memorează perechile reprezentând punctele de racord în două noduri interne. Efectuează rebalansări în $\mathcal{T}$, dacă este necesar.
4. Generează noi înregistrări de tip semi-muchie în structura diagramei Voronoi ($\mathcal{D}$), pentru muchiile care separă celulele $V(p_i)$ și $V(p_j)$, corespunzând celor două noi puncte de racord.

Procedura ProcessEvSit (p_i)

1. Dacă $\mathcal{T}$ este vidă, inserează p_i și revine, dacă nu continuă cu 2.−5.
2. Caută în $\mathcal{T}$ arcul α situat deasupra lui p_i. Dacă frunza reprezentând α are un pointer către un eveniment de tip cerc **ev** din $\mathcal{Q}$, atunci **ev** este o alarmă falsă și trebuie șters.
3. Înlocuiește frunza lui $\mathcal{T}$ care reprezintă α cu un subarbore cu trei frunze: cea din mijloc reține situl p_i și celelalte două situl p_j asociat lui α. Memorează perechile reprezentând punctele de racord în două noduri interne. Efectuează rebalansări în $\mathcal{T}$, dacă este necesar.
4. Generează noi înregistrări de tip semi-muchie în structura diagramei Voronoi ($\mathcal{D}$), pentru muchiile care separă celulele $V(p_i)$ și $V(p_j)$, corespunzând celor două noi puncte de racord.
5. Verifică tripletele de arce consecutive nou create, pentru a verifica dacă muchiile corespunzătoare punctelor de racord se întâlnesc. Dacă da, inserează evenimente de tip cerc în $\mathcal{Q}$ și adaugă pointeri de la nodurile lui $\mathcal{T}$ la evenimentele corespunzătoare din $\mathcal{Q}$.

Procedura ProcessEvCerc (γ)

1. Șterge frunza $\gamma \in \mathcal{T}$ care corespunde arcului de cerc α care dispare. Actualizează în nodurile interne perechile care corespund punctelor de racord. Efectuează rebalansări în $\mathcal{T}$, dacă este necesar. Șterge toate evenimentele de tip cerc care îi corespund lui α (cu ajutorul pointerilor de la predecesorul și succesorul lui γ în $\mathcal{T}$.

Procedura ProcessEvCerc (γ)

1. Șterge frunza $\gamma \in \mathcal{T}$ care corespunde arcului de cerc α care dispare. Actualizează în nodurile interne perechile care corespund punctelor de racord. Efectuează rebalansări în $\mathcal{T}$, dacă este necesar. Șterge toate evenimentele de tip cerc care îi corespund lui α (cu ajutorul pointerilor de la predecesorul și succesorul lui γ în $\mathcal{T}$.
2. Adaugă centrul cercului care determină evenimentul ca înregistrare de tip vârf în $\mathcal{D}$. Creează înregistrări de tip semi-muchie corespunzând noului punct de racord de pe linia parabolică și asignează pointeri corespunzători.

Procedura ProcessEvCerc (γ)

1. Șterge frunza $\gamma \in \mathcal{T}$ care corespunde arcului de cerc α care dispare. Actualizează în nodurile interne perechile care corespund punctelor de racord. Efectuează rebalansări în $\mathcal{T}$, dacă este necesar. Șterge toate evenimentele de tip cerc care îi corespund lui α (cu ajutorul pointerilor de la predecesorul și succesorul lui γ în $\mathcal{T}$.
2. Adaugă centrul cercului care determină evenimentul ca înregistrare de tip vârf în $\mathcal{D}$. Creează înregistrări de tip semi-muchie corespunzând noului punct de racord de pe linia parabolică și asignează pointeri corespunzători.
3. Verifică tripletele de arce consecutive nou create (care au foștii vecini ai lui α în centru), pentru a verifica dacă muchiile corespunzătoare punctelor de racord se întâlnesc. Dacă da, inserează evenimente de tip cerc în $\mathcal{Q}$ și adaugă pointeri de la nodurile lui $\mathcal{T}$ la evenimentele corespunzătoare din $\mathcal{Q}$.

Rezultate principale

- **Teoremă**. *Diagrama Voronoi a unei mulțimi de n situri poate fi determinată cu un algoritm de tip "line sweep" de complexitate* $O(n \log n)$, *folosind* $O(n)$ *spațiu de memorie.*

Rezultate principale

- **Teoremă**. *Diagrama Voronoi a unei mulțimi de n situri poate fi determinată cu un algoritm de tip "line sweep" de complexitate* $O(n \log n)$, *folosind* $O(n)$ *spațiu de memorie.*
- **Teoremă**. *Triangularea Delaunay a unei mulțimi de n situri poate fi determinată cu un algoritm de tip "line sweep" de complexitate* $O(n \log n)$, *folosind* $O(n)$ *spațiu de memorie.*