①

$X \sim \mathcal{U}([0,1])$

Care e probab ca cea de-a doua zecimală a radicalului nr să fie 3?

Notăm cu A_K - mult, nr din $[0,1)$ care au a doua zecimală a radicalului egală cu K

$x \in A_K \iff \left. m + \frac{K}{10} \le \underbrace{10\sqrt{x}}_{} < m + \frac{K+1}{10} \right|^2$

iau prima zecimală, a doua zecimală

$m \in \{0,1,\dots,9\}$
ptoric m

$$\left(m+\frac{K}{10}\right)^2 \le 100x < \left(m+\frac{K+1}{10}\right)^2 \Big| \cdot \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{100}\left(m+\frac{K}{10}\right)^2 \le x < \frac{1}{100}\left(m+\frac{K+1}{10}\right)^2$$

Lungimea intervalului $\left[\frac{1}{100}\left(m+\frac{K}{10}\right)^2, \frac{1}{100}\left(m+\frac{K+1}{10}\right)^2\right)$

este $\frac{1}{100}\left[\left(m+\frac{K+1}{10}\right)^2 - \left(m+\frac{K}{10}\right)^2\right] = \frac{1}{1000}\left(2m+\frac{2K+1}{10}\right) =$

$$= \frac{1}{10^4}(20m+2K+1)$$

$$\mathbb{P}(A_K) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{m\ge 0}^{9}\left[\frac{1}{100}\left(m+\frac{K}{10}\right)^2, \frac{1}{100}\left(m+\frac{K+1}{10}\right)^2\right]\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{9}\frac{1}{10^4}(20m+2K+1) = \frac{1}{10^4}\left[10\cdot(2K+1) + 20\sum_{m=0}^{9} m\right] = \frac{1}{10^4}\left[10(2K+1)+900\right] = \frac{20K}{10^4} + \frac{910}{10^4} =$$

$$= 0{,}091 + 0{,}002K$$

1

$K=3 \Rightarrow \mathbb{P}(A_3) = 0{,}097$

Dacă mă interesează zecimala a 3-a:

$$10m_1 + m_2 + \frac{K}{100} \le 100\sqrt{x} < 10m_1 + m_2 + \frac{K+1}{100}$$

$m_1, m_2 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ le fixez pe primele 2

Și sumă dublă după m_1 și m_2

② $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ $Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ independente

$X+Y \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ → adun fiecare rând

$0-1=-1$ $\quad 0+2=2$

$0+0=0$ $\quad 1-1=0$

$0+1=1$ $\quad 1+0=1$

$1+1=2$

$X+Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{,}03 & & 0{,}23 & & & \end{pmatrix}$

$\mathbb{P}(X+Y=-1) = \mathbb{P}(X=0, Y=-1) = \mathbb{P}(X=0) \cdot \mathbb{P}(Y=-1) = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03$

$\mathbb{P}(X+Y=1) = \mathbb{P}(\{X=0, Y=1\} \cup \{X=1, Y=0\} \cup \{X=2, Y=-1\}) =$

sau $\begin{cases} X=0 & Y=1 \\ X=1 & Y=0 \\ X=2 & Y=-1 \end{cases}$

$= \mathbb{P}(X=0, Y=1) + \mathbb{P}(X=1, Y=0) + \mathbb{P}(X=2, Y=-1) =$

$= 0{,}3 \times 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 =$

$= 0{,}23$

$\mathbb{P}(X+Y=2) = \mathbb{P}(\{X=1, Y=1\} \cup \{X=2, Y=0\} \cup \{X=0, Y=2\})$

$= \mathbb{P}(X=1, Y=1) + \mathbb{P}(X=2, Y=1) + \mathbb{P}(X=0, Y=2) =$

$= \_\_\_$

Scanned with CamScanner

Ca să ne verificăm le adunăm pe toate la final =1

$X \cdot Y \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$

$$X \cdot Y \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ & & 0{,}51 & & & \end{pmatrix}$$

$\mathbb{P}(X \cdot Y = 0) = \mathbb{P}(\{X=0, Y \in \{-1,0,1,2\}\} \cup \{X \in \{1,2\}, Y=0\})$

$= \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(Y=0)(1-\mathbb{P}(X=0))$

$= 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}51$

X să fie sau 1 sau 2

---

③ (X,Y)

X\Y	1	2	3	
1	0,22	0,11	0,02	0,35
2	0,2	0,15	0,1	0,45
3	0,06	0,07	0,07	0,2
	0,48	0,33	0,19	

repartiția marginală X

rep. marg Y

a) Vreau repartițiile marginale pt X și Y

b) Calculăm media $\mathbb{E}[X]$, varianța $Var(X)$, $Var(Y)$

c) Coeficientul de corelație $\rho(X,Y)$

d) Repartiția condiționată a lui X la $Y=2$ și respectiv a lui Y condiționat (|) la $X=2$

e) Media și varianța acestor repartiții condiționale

$\mathbb{E}[X \mid Y=2]$, $Var(X \mid Y=2)$

a) Mă interesează toate probabilitățile
Însumez liniile, respectiv coloanele

Repartiția marginală a lui X $\longrightarrow$ însumez pe linii

$P(X=1)=0,35$
$P(X=2)=0,45$
$P(X=3)=0,2$

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,35 & 0,45 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Repartiția marginală a lui Y $\longrightarrow$ însumez pe coloane

$$Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,48 & 0,33 & 0,19 \end{pmatrix}$$

b) Media și varianța

$\mathbb{E}[X]$ = suma produselor $= 1\cdot 0,35 + 2\cdot 0,45 + 3\cdot 0,2$
$= 1,85$

$$Var(X) = \underbrace{\mathbb{E}[X^2]}_{\text{momentul de ordin 2}} - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - (1,85)^2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = 1^2\cdot 0,35 + 2^2\cdot 0,45 + 3^2\cdot 0,2 = \ldots$$

Dacă varianța e negativă $\Rightarrow$ AM GREȘIT UNDEVA!

c) Coeficientul de corelație $\longrightarrow$ covarianța

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\underbrace{Var(X)\,Var(Y)}_{\text{calculate la b)}}}}$$

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$$

$\mathbb{E}[XY]$ = suma produselor = $\sum xy\, \mathbb{P}(X=x, Y=y)$

X\Y	y
x	probabilitatea $\mathbb{P}(X=x, Y=y)$

! Trebuie să obținem $\rho(X, Y) \in [-1,1]$ altfel am greșit

---

d) $X|Y=2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{0{,}11}{0{,}33} & \frac{0{,}15}{0{,}33} & \frac{0{,}07}{0{,}33} \end{pmatrix}$ → val lui X

$\mathbb{P}(X=x \mid Y=2)$, $x \in \{1,2,3\}$

$$\mathbb{P}(X=x \mid Y=2) = \frac{\mathbb{P}(X=x, Y=2)}{\mathbb{P}(Y=2)}$$

X\Y		y		
x		$\mathbb{P}(X=x, Y=y)$		$\mathbb{P}(X=x)$
		$\mathbb{P}(Y=y)$		

împart elem de pe coloana asta la $\mathbb{P}(Y=y)$

↪ coloana corespunzătoare lui y

---

e) $X|Y=2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{11}{33} & \frac{15}{33} & \frac{7}{33} \end{pmatrix}$

$$\mathbb{E}[X|Y=2] = 1\cdot\frac{11}{33} + 2\cdot\frac{15}{33} + 3\cdot\frac{7}{33} = \ldots$$

$$Var(X|Y=2) = \mathbb{E}[X^2|Y=2] - (\mathbb{E}[X|Y=2])^2$$

$$1^2 \cdot \frac{11}{33} + 2^2 \cdot \frac{15}{33} + 3^2 \cdot \frac{7}{33}$$

---

(4) $X \sim \begin{pmatrix} 2,5 & 4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ $Y \sim \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$

$p_1, p_2 \in (0,1)$

a) Det p_1, p_2 a.î. $\mathbb{P}(X=2,5, Y=-1)=0,2$

și $\mathbb{E}[X|Y=-1]=3$

b) Calculați coef de corelație $\rho(X,Y)=?$

Nu știu că X și Y sunt independente!!

a) Ne uităm la cum este repartizat cuplul (X, Y)

X\Y	-4	-1
2,5	0,4-0,2= 0,2	0,2
4	$p_1-0,2$	$0,8-p_1$
	$\mathbb{P}(Y=-4)$ = p_1	$\mathbb{P}(Y=-1)$ = p_2

din ipoteză

$\mathbb{P}(X=2,5)=0,4$

$\mathbb{P}(X=4)=0,6$

din ipoteză știu repartițiile marginale ale lui X și Y

caut să am o singură necunoscută

suma pe prima linie trebuie să fie 0,4

suma pe prima coloană trebuie să fie p_1

Știm că între $\boxed{p_1+p_2=1}$

$\mathbb{E}[X|Y=-1]=3$

6.

$$X|Y=-1 \sim \begin{pmatrix} 2,5 & 4 \\ \frac{0,2}{p_2} & \frac{0,8-p_1}{p_2} \end{pmatrix}$$

Mă uit pe coloana cu $y=-1$ și împart la $P(Y=-1)$

Trebuie să înlocuiesc să ajung la o ec necunoscută

$$X|Y=-1 \sim \begin{pmatrix} 2,5 & 4 \\ \frac{0,2}{p_2} & \frac{p_2-0,2}{p_2} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{E}[X|Y=-1]=3 \Leftrightarrow 2,5 \cdot \frac{0,2}{p_2}+4\cdot\frac{(p_2-0,2)}{p_2}=3 \Rightarrow p_2=\dots$

$p_1+p_2=1 \Rightarrow p_1$

$\boxed{p_2=0,3 \Rightarrow p_1=0,7}$

b) $\rho(X,Y)$

Dacă îl știu pe p1 și p2 înlocuiesc:

$X \backslash Y$	-4	-1
2,5	0,2	0,2
4	0,5	0,1

Repartiția comună a lui X și Y

Fac ca la exercițiul 3

~~independente și identic repartizate~~

5 X, Y iid, $c>0$; $X, Y>0$

Vrea să completăm și să justificăm fiecare relație de mai jos:

a) $\mathbb{E}[\ln(X)]$ $\underline{\leq}$ $\ln(\mathbb{E}[X])$

b) $\mathbb{E}[X]$ $\underline{\leq}$ $\sqrt{\mathbb{E}[X^2]}$

c) $\mathbb{E}[|X|]$ $\underline{\leq}$ $\sqrt{\mathbb{E}[X^2]}$

$=$
$\geq$
$\leq$
$>$
$<$
$?$

d) $\mathbb{P}(X>c)$ ______$\le$______ $\frac{\mathbb{E}[X^3]}{c^3}$

e) $\mathbb{P}(X\le Y)$ ______$=$______ $\mathbb{P}(X\ge Y)$

f) $\mathbb{P}(X+Y>10)$ ______$\le$______ $\mathbb{P}(X>5$ sau $Y>5)$

g) $\mathbb{E}[X^2(X^2+1)]$ ______$\ge$______ $\mathbb{E}[X^2(Y^2+1)]$

Trebuie să folosim inegalitățile pe care le-am învățat: Ineg lui Marcov, CBS, Cauchy S(x), ~~Jensen~~ Jensen

---

a) Ineg Jensen pt funcția $\ln()$

$\ln()$ este concav

b) Ineg Jensen

Ridicăm la pătrat ineg lui Jensen

Varianta e pozitivă

$\boxed{\varphi(\mathbb{E}[X]) \le \mathbb{E}[\varphi(X)]}$, dacă φ este convexă

dacă φ este concavă sgn e invers

d) Ineg lui Marcov.

~~$\mathbb{P}(X^2>c^2)$~~ $\mathbb{P}(X>c) = \mathbb{P}(X^3>c^3) \le \frac{\mathbb{E}[X^3]}{c^3}$

e) Egalitate din simetrie

f) $\{X+Y>10\} \ni \omega$ atunci $X(\omega)+Y(\omega)>10 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sau $X(\omega)>5$ sau $Y(\omega)>5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega \in \{X>5\} \cup \{Y>5\} \Rightarrow \{X+Y>10\} \subseteq \{X>5\} \cup \{Y>5\}$

g) Compar $\mathbb{E}[X^4]$ cu $\mathbb{E}[X^2Y^2]$

$\mathbb{E}[X^2Y^2] \overset{\text{indep}}{=} \mathbb{E}[X^2]\cdot\mathbb{E}[Y^2]$

$\overset{\text{identic repartizate}}{=}$ $\mathbb{E}[X^2]=\mathbb{E}[Y^2]$

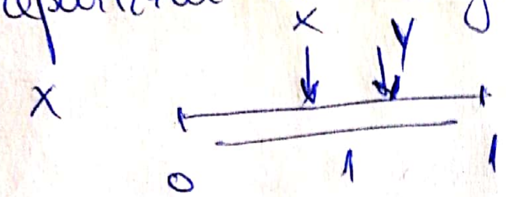
Ineg. lui Jensen sau variața

$\mathbb{E}[X^4] \geq \left(\mathbb{E}[X^2]\right)^2$

(ca dacă mut într-o parte obțin Variața lui $X^2 > 0$)

---

⑤ Un accident se produce într-un pct X uniform repartizat de lungime 1.



O ambulanță se găsește într-un alt pct Y tot uniform repartizat pe acest interval.

Pp că X și Y sunt independente.

Vreau să calculez media și variața distanței care separă ambulanța de locul accidentului.

$X \sim \mathcal{U}[0,1]$, $Y \sim \mathcal{U}[0,1]$, $X \perp\!\!\!\perp Y$

~~Distanța = |X~~

Distanța care separă cele 2 puncte: $|X-Y|$

Vreau să calculez: $\mathbb{E}[|X-Y|]=?$

$Var[|X-Y|]=?$ $\longrightarrow$ densitatea comună

$\mathbb{E}[|X-Y|]=\iint |X-Y| \, f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$

$$f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy \underset{=}{\text{independente}} f_X(x) \cdot f_Y(y) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x) \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(y)$$

- Dacă era pe $[a,b]$ era $\frac{1}{b-a}$ ori funcția indicator pe a,b

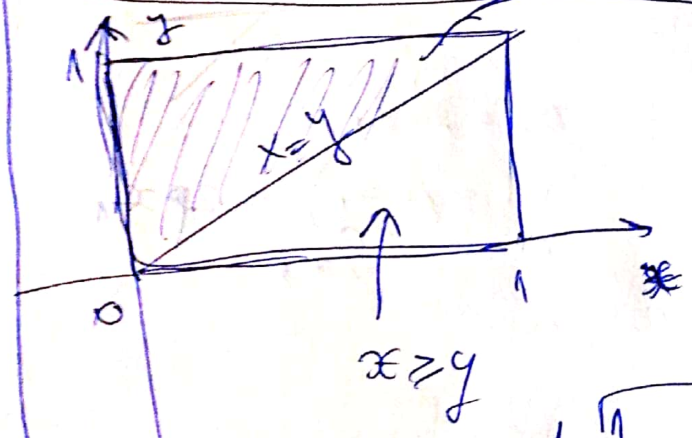
$\mathbb{E}[|X-Y|] = \int_0^1\int_0^1 |x-y|\,dx\,dy \to$ sparg în 2 integrale după cum $x>y$ sau $y>x$

- Dacă eram pe $[0,\ell] \Rightarrow f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\ell}\mathbb{1} \cdot \frac{1}{\ell}\mathbb{1}$

deci $\mathbb{E}[|X-Y|] = \frac{1}{\ell^2}\iint \dots$

$\mathbb{E}[|X-Y|] =$

$\{x<y\}$ sau $\{x \geq y\}$



Din simetrie $|x-y| = |y-x| \Rightarrow \int$ pe $x<y = \int$ pe $x \geq y$

putem să ne uităm doar pt $x>y$

$$\mathbb{E}[|X-Y|] = 2\int_0^1\int_y^1 (x-y)\,dx\,dy = 2\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - yx\right)\Big|_y^1 dy =$$

$$= 2\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - y + \frac{y^2}{2}\right)dy = 2\left(\frac{y}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \quad \boxed{\frac{L}{3}}$$

dacă avem pe $[0,L]$

$Var(|X-Y|) = ?$

$\mathbb{E}[(|X-Y|)^2] = \mathbb{E}[(X-Y)^2] = \int_0^1\int_0^1 (x-y)^2 dx\, dy$

sau pot să desfac paranteza

$= \underbrace{\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2]}_{\text{egale pt că sunt iid}} - 2\underbrace{\mathbb{E}[XY]}_{\text{produsul mediilor pt } X \perp\!\!\!\perp Y} =$

$= \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[X^2] - 2(\mathbb{E}[X])^2 =$

$= 2(\mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2) = 2\,Var(X) = 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$

$Var(|X-Y|) = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$

---

6. $X_1, X_2, X_3 \sim \mathcal{U}(0,1)$ iid

$L = \min\{X_1, X_2, X_3\}$

$M = \max\{X_1, X_2, X_3\}$

~~a) Det ... marginale~~

a) Det densitatea și funcția de repartiție a lui M și densitatea și funcția de repartiție a lui (L, M)

b) Det densitatea condiționată a lui M la $L = \ell$.

$\mathbb{P}(L \leq \ell, M \leq m) \longrightarrow$ sugestie

$f_{(L,M)}(\ell, m) = \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial m}$

Trebuie să plecăm de la $\mathbb{P}(\underbrace{L \geq \ell, M \leq m}_{\text{cele trei pct se află între } \ell \text{ și } m}) =$

$= (m-\ell)^3$ (pt că sunt independente)

$\mathbb{P}(L \leq \ell, M \leq m) = m^3 - (m-\ell)^3$

$f_{(L,M)}(\ell, m) = 6(m-\ell)$ (după derivare)

---

⑦ Avem 2 zaruri (albastru și roșu) echilibrate.
Arunc cele 2 zaruri.
X e rezultatul obținut pe albastru.
Y e rezultatul obținut pe roșu.

---

a) $Cov(X+Y, X-Y)$

b) Sunt $X+Y$ și $X-Y$ independente?

$\mathbb{P}(X-Y=0 \mid X+Y=12) = 1 \neq \mathbb{P}(X-Y=0)$