

# Tema 1

## Soluții

### Exercițiul 1

- a)  $A$  singur se realizează:  $A \cap B^c \cap C^c$
- b)  $A$  și  $C$  se realizează dar nu și  $B$ :  $A \cap B^c \cap C$
- c) cele trei evenimente se produc:  $A \cap B \cap C$
- d) cel puțin unul dintre cele trei evenimente se produce:  $A \cup B \cup C$
- e) cel puțin două evenimente din cele trei se produc:  $(A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C)$
- f) cel mult un eveniment se produce:  $(A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$
- g) niciunul din cele trei evenimente nu se produce:  $A^c \cap B^c \cap C^c$
- h) exact două evenimente din cele trei se produc:  $(A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c)$

### Exercițiul 2

Evenimentele  $A, B, C$  și  $D$  se pot exprima în modul următor:

$$\begin{aligned} A &= (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c) \\ &\quad \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5), \\ B &= (A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5) \\ &\quad \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c), \\ C &= (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup A \bigcup_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5} (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}^c \cap A_{i_4}^c \cap A_{i_5}^c), \\ D &= (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup B \bigcup_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5} (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}^c \cap A_{i_5}^c), \\ E &= \bigcup_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5} (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}^c \cap A_{i_5}^c). \end{aligned}$$

### Exercițiul 3

1. (a) Spațiul stărilor  $\Omega$  este  $\Omega = \{(O, b), (O, m), (O, s), (N, b), (N, m), (N, s)\}$ .  
(b) Avem

$$\begin{aligned} A &= \text{starea de sănătate a pacientului este serioasă} = \{(O, s), (N, s)\}, \\ B &= \text{pacientul nu este asigurat} = \{(N, b), (N, m), (N, s)\}, \\ B^c \cup A &= \text{sau pacientul este asigurat sau starea acestuia este serioasă} \\ &= \{(O, b), (O, m), (O, s), (N, s)\}. \end{aligned}$$

2. Cum măsura de probabilitate  $\mathbb{P}$  corespunde echiprobabilității pe  $\Omega$  avem că  $\mathbb{P}((O, b)) = \mathbb{P}((O, m)) = \mathbb{P}((O, s)) = \mathbb{P}((N, b)) = \mathbb{P}((N, m)) = \mathbb{P}((N, s)) = \frac{1}{6}$ , deci

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((O, s)) + \mathbb{P}((N, s)) = \frac{1}{3},$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}((N, b)) + \mathbb{P}((N, m)) + \mathbb{P}((N, s)) = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{P}(B^c \cup A) = \mathbb{P}((O, b)) + \mathbb{P}((O, m)) + \mathbb{P}((O, s)) + \mathbb{P}((N, s)) = \frac{2}{3}.$$

3. In acest caz avem

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((O, s)) + \mathbb{P}((N, s)) = 0.1 + 0.1 = 0.2,$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}((N, b)) + \mathbb{P}((N, m)) + \mathbb{P}((N, s)) = 0.1 + 0.3 + 0.1 = 0.5,$$

$$\mathbb{P}(B^c \cup A) = \mathbb{P}((O, b)) + \mathbb{P}((O, m)) + \mathbb{P}((O, s)) + \mathbb{P}((N, s)) = 0.2 + 0.2 + 0.1 + 0.1 = 0.6.$$

## Exercițiul 4

- a) Careu:  $\frac{\binom{13}{1}\binom{12}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{624}{2598960} = 0.024\%$
- b) Full-house:  $\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{3744}{2598960} = 0.14\%$
- c) Trei cărți de același tip:  $\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{54912}{2598960} = 2.1\%$
- d) Două perechi:  $\frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{11}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{123552}{2598960} = 4.75\%$
- e) O pereche:  $\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}^3}{\binom{52}{5}} = \frac{1098240}{2598960} = 42.26\%$

## Exercițiul 5

Pentru a avea rădăcini reale, ecuația trebuie să verifice  $\Delta \geq 0$ , cu alte cuvinte

$$ac \leq \frac{b^4}{4}.$$

Cazurile favorabile pentru produsul  $ac$  sunt date în tabelul de mai jos

Valori pentru $b$ :	2	3	4	5	6
Cazuri favorabile:	1	3	8	14	17

Prin urmare numărul cazurilor favorabile este 43 iar cel al cazurilor posibile este de  $6^3 = 216$  de unde probabilitatea ca ecuația să aibă rădăcini reale este  $\frac{43}{216}$  iar rădăcini complexe (nereale) este  $\frac{173}{216}$ .

## Exercițiul 6

Fie  $A_i$  și  $B_i$  evenimentele prin care Maria este la zi cu materia, respectiv a rămas în urmă, după  $i$  săptămâni. Conform formulei probabilității totale avem

$$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3|A_2) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A_3|B_2) = \mathbb{P}(A_2) \cdot 0.8 + \mathbb{P}(B_2) \cdot 0.4$$

Probabilitățile  $\mathbb{P}(A_2)$  și  $\mathbb{P}(B_2)$  pot fi calculate în același mod:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) + \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A_2|B_1) = \mathbb{P}(A_1) \cdot 0.8 + \mathbb{P}(B_1) \cdot 0.4 \\ \mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B_2|A_1) + \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1) = \mathbb{P}(A_1) \cdot 0.2 + \mathbb{P}(B_1) \cdot 0.6\end{aligned}$$

și ținând cont de ipoteză (Maria începe semestrul cu materia la zi) avem  $\mathbb{P}(A_1) = 0.8$  și  $\mathbb{P}(B_1) = 0.2$  de unde concluzionăm că  $\mathbb{P}(A_2) = 0.72$ ,  $\mathbb{P}(B_2) = 0.28$  și prin urmare  $\mathbb{P}(A_3) = 0.688$ .

În general avem că după  $i + 1$  săptămâni

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{i+1}) &= \mathbb{P}(A_i) \cdot 0.8 + \mathbb{P}(B_i) \cdot 0.4 \\ \mathbb{P}(B_{i+1}) &= \mathbb{P}(A_i) \cdot 0.2 + \mathbb{P}(B_i) \cdot 0.6\end{aligned}$$

cu valorile inițiale  $\mathbb{P}(A_1) = 0.8$  și  $\mathbb{P}(B_1) = 0.2$ .

## Exercițiul 7

Considerăm evenimentele următoare:

- $A = \{\text{testul considerat este pozitiv}\}$
- $B = \{\text{automobilistul a depășit nivelul de alcool autorizat}\}$

1. Din ipoteză știm că  $\mathbb{P}(B) = 0.005$ ,  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A^c|B^c) = 0.99$ . Vrem să găsim probabilitatea  $\mathbb{P}(B|A)$ .  
Avem

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B|A) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + [1 - \mathbb{P}(A^c|B^c)](1 - \mathbb{P}(B))} = \frac{0.99 \times 0.005}{0.99 \times 0.005 + 0.01 \times 0.995} \approx 0.332.\end{aligned}$$

2. Căutăm  $p$  așa încât  $\mathbb{P}(B|A) = 0.95$ . Am văzut că  $\mathbb{P}(B|A) = \frac{p\mathbb{P}(B)}{p\mathbb{P}(B) + (1-p)(1-\mathbb{P}(B))}$  de unde

$$p = \frac{(1 - \mathbb{P}(B))\mathbb{P}(B|A)}{(1 - \mathbb{P}(B))\mathbb{P}(B|A) + (1 - \mathbb{P}(B|A))\mathbb{P}(B)} = \frac{0.995 \times 0.95}{0.995 \times 0.95 + 0.05 \times 0.005} \approx 0.99973.$$

3. Știm că  $\mathbb{P}(B) = 0.3$ , prin urmare  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c) = 0.99 \times 0.3 + 0.01 \times 0.7 \approx 0.304$   
și

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)} \approx 0.9769,$$

de unde tragem concluzia că testul este mult mai fiabil în această situație.

## Exercițiul 8

- a) În acest caz probabilitatea pe care o căutăm este  $\mathbb{P}(2b)$ , unde  $2b$  înseamnă că a doua bilă a fost albastră.  
Din formula probabilității totale avem:

$$\mathbb{P}(2b) = \mathbb{P}(2b|1r)\mathbb{P}(r) + \mathbb{P}(2b|1b)\mathbb{P}(b) = \frac{b}{r+b+d} \cdot \frac{r}{r+b} + \frac{b+d}{r+b+d} \cdot \frac{b}{r+b} = \frac{b}{b+r}.$$

b) Trebuie să calculăm probabilitatea:

$$\mathbb{P}(1b|2b) = \frac{\mathbb{P}(2b|1b)\mathbb{P}(1b)}{\mathbb{P}(2b)} = \frac{\frac{b+d}{r+b+d} \cdot \frac{b}{r+b}}{\frac{b}{b+r}} = \frac{b+d}{r+b+d}.$$

c) Folosim inducție. Pentru  $n = 2$  am văzut că propoziția este adevărată din punctele precedente. Să presupunem acum că  $\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(B_1)$  pentru orice  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  și vrem să arătăm că relația rămâne adevărată și pentru  $k = n$ . Observăm că dacă  $N_k(b)$  reprezintă numărul de bile albastre la pasul  $k$  atunci:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}(B_n|B_{n-1})\mathbb{P}(B_{n-1}) + \mathbb{P}(B_n|B_{n-1}^c)\mathbb{P}(B_{n-1}^c) \\ &= \frac{N_{n-2}(b) + d}{r+b+(n-1)d} \cdot \frac{b}{r+b} + \frac{N_{n-2}(b)}{r+b+(n-1)d} \cdot \frac{r}{r+b}, \end{aligned}$$

unde am folosit pasul de inducție ( $\mathbb{P}(B_{n-1}) = \frac{b}{r+b}$ ). Folosind din nou ipoteza de inducție avem

$$\mathbb{P}(B_{n-2}) = \frac{N_{n-2}(b)}{r+b+(n-2)d} = \frac{b}{r+b}$$

de unde găsim  $N_{n-2}(b) = \frac{b}{r+b} \cdot [r+b+(n-2)d]$ . Înlocuind această relație în expresia lui  $\mathbb{P}(B_n)$  obținem:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n) &= \frac{N_{n-2}(b)(b+r) + bd}{(b+r)[r+b+(n-1)d]} = \frac{\frac{b}{r+b} \cdot [r+b+(n-2)d](b+r) + bd}{(b+r)[r+b+(n-1)d]} \\ &= \frac{b[r+b+(n-1)d]}{(b+r)[r+b+(n-1)d]} = \frac{b}{b+r} = \mathbb{P}(B_1). \end{aligned}$$

d) Trebuie să găsim probabilitatea  $\mathbb{P}(B_1|B_2, \dots, B_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(B_1, \dots, B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_2, \dots, B_{n+1})}$ . Avem din formula probabilității totale că:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_1, \dots, B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1, \dots, B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1, \dots, B_{n-1}) \dots \mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1) \\ &= \frac{b+nd}{b+r+nd} \cdot \frac{b+(n-1)d}{b+r+(n-1)d} \dots \frac{b+d}{b+r+d} \cdot \frac{b}{b+r} \\ &= \frac{b(b+d) \dots (b+nd)}{(b+r)(b+r+d) \dots (b+r+nd)} \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_2, \dots, B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_1, B_2, \dots, B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_1^c, B_2, \dots, B_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1, \dots, B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1, \dots, B_{n-1}) \dots \mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \\ &\quad + \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1^c, \dots, B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1^c, \dots, B_{n-1}) \dots \mathbb{P}(B_2|B_1^c)\mathbb{P}(B_1^c) \\ &= \frac{b+nd}{b+r+nd} \cdot \frac{b+(n-1)d}{b+r+(n-1)d} \dots \frac{b+d}{b+r+d} \cdot \frac{b}{b+r} + \\ &\quad + \frac{b+(n-1)d}{b+r+nd} \dots \frac{b}{b+r+d} \cdot \frac{r}{b+r} \\ &= \frac{b(b+d) \dots [b+(n-1)d](b+r+nd)}{(b+r)(b+r+d) \dots (b+r+nd)}. \end{aligned}$$

Observăm că

$$\mathbb{P}(B_1|B_2, \dots, B_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(B_1, \dots, B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_2, \dots, B_{n+1})} = \frac{\frac{b(b+d)\dots(b+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}}{\frac{b(b+d)\dots[b+(n-1)d](b+r+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}} = \frac{b+nd}{b+r+nd} \rightarrow 1.$$

## Exercițiul 9

1. Considerăm evenimentele următoare:

- $A_i = \{\text{suma celor două zaruri la cea de- a } i\text{-a aruncare este } 5\}$
- $B_i = \{\text{suma celor două zaruri la cea de- a } i\text{-a aruncare este } 7\}$

Evenimentul  $E_n$  se scrie

$$E_n = (A_1^c \cap B_1^c) \cap (A_2^c \cap B_2^c) \cap \dots \cap (A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap A_n.$$

Aplicand independența avem că

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_n) &= \mathbb{P}((A_1^c \cap B_1^c) \cap (A_2^c \cap B_2^c) \cap \dots \cap (A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap A_n) \\ &\stackrel{\text{indep.}}{=} \mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c) \times \mathbb{P}(A_2^c \cap B_2^c) \times \dots \times \mathbb{P}(A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \times \mathbb{P}(A_n) \\ &= \mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c)^{n-1} \mathbb{P}(A_n). \end{aligned}$$

Observăm că spațiul stărilor la cea de-a  $n$ -a lansare este  $\Omega = \{(i, j) | 1 \leq i, j \leq 6\}$  și probabilitatea ca suma celor două zaruri să fie 5 este  $\mathbb{P}(A_n) = \frac{4}{36}$ , deoarece cazurile favorabile sunt  $\{(1, 4), (2, 3), (4, 1), (3, 2)\}$ . Obținem de asemenea că probabilitatea ca suma să nu fie nici 5 și nici 7 la prima lansare este  $\mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c) = \frac{26}{36}$ , deoarece situațiile în care suma este 7 sunt  $\{(1, 6), (2, 3), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$ .

În concluzie, probabilitatea evenimentului

$$A = \{\text{suma 5 (a fețelor celor două zaruri) să apară înaintea sumei 7}\}$$

este

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \frac{4}{36} \\ &= \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^n = \frac{1}{9} \frac{1}{1 - \frac{13}{18}} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

2. Fie  $F_n$  evenimentul ce corespunde la: *în primele  $n - 1$  aruncări nu a apărut nici suma 2 și nici suma 7 iar în a  $n$ -a aruncare a apărut suma 2* și  $C_i$  evenimentul ce corespunde la suma celor două zaruri la cea de-a  $i$ -a aruncare este 2. Avem

$$F_n = (C_1^c \cap B_1^c) \cap (C_2^c \cap B_2^c) \cap \dots \cap (C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap C_n$$

și probabilitatea lui  $\mathbb{P}(F_n)$  este

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F_n) &= \mathbb{P}((C_1^c \cap B_1^c) \cap (C_2^c \cap B_2^c) \cap \dots \cap (C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap C_n) \\ &\stackrel{\text{indep.}}{=} \mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c) \times \mathbb{P}(C_2^c \cap B_2^c) \times \dots \times \mathbb{P}(C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \times \mathbb{P}(C_n) \\ &= \mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c)^{n-1} \mathbb{P}(C_n). \end{aligned}$$

Avem  $\mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{36}$  (deoarece doar  $(1, 1)$  ne dă suma 2) și  $\mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c) = \frac{36-7}{36} = \frac{29}{36}$ . Prin urmare probabilitatea evenimentului căutat, pe care îl notă cu  $B$ , este

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{29}{36}\right)^{n-1} \frac{1}{36} \\ &= \frac{1}{36} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{29}{36}\right)^n = \frac{1}{36} \frac{1}{1 - \frac{29}{36}} = \frac{1}{7}.\end{aligned}$$

## Tema 2

### Soluții

#### Exercițiul 1

Se poate observa cu ușurință că variabila aleatoare  $3X + 7 \in \{4, 7, 10\}$  cu probabilitățile 0.3, 0.2 respectiv 0.5, de unde deducem că  $3X + 7$  este repartizată

$$3X + 7 \sim \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Pentru variabila aleatoare  $X^2$  observăm că  $X^2 \in \{0, 1\}$  iar  $\mathbb{P}(X^2 = 0) = 0.2$  și  $\mathbb{P}(X^2 = 1) = \mathbb{P}(X = -1) + \mathbb{P}(X = 1) = 0.8$ , astfel

$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

În mod similar obținem:

$$X^3 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad X + X^2 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

De asemenea avem că

$$\mathbb{P}\left(X > -\frac{1}{3}\right) = \mathbb{P}(\{X = 0\} \cup \{X = 1\}) = 0.7,$$

iar

$$\mathbb{P}\left(X < \frac{1}{4} \mid X \geq -\frac{1}{2}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(-\frac{1}{2} \leq X < \frac{1}{4}\right)}{\mathbb{P}\left(X \geq -\frac{1}{2}\right)} = \frac{0.2}{0.7} = \frac{2}{7}.$$

#### Exercițiul 2

a) Dacă i) este adevărată atunci  $p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$  de unde obținem imediat ii). Reciproc, presupunem ii) adevărată și avem că  $\frac{p_n}{p_0} = \frac{p_1}{p_0} \frac{p_2}{p_1} \dots \frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda^n}{n!}$  de unde  $p_n = p_0 \frac{\lambda^n}{n!}$ . Cum  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$  obținem că  $p_0 = e^{-\lambda}$  și putem să concluzionăm.

b) i) Știm că  $\mathbb{P}(X = j) = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$  și vrem să evaluăm raportul  $\frac{\mathbb{P}(X=j)}{\mathbb{P}(X=j-1)}$ :

$$\frac{\mathbb{P}(X = j)}{\mathbb{P}(X = j - 1)} = \frac{\frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{j}.$$

Putem observa că

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = j) &\geq \mathbb{P}(X = j - 1), & \text{dacă } \lambda \geq j \\ \mathbb{P}(X = j) &< \mathbb{P}(X = j - 1), & \text{dacă } \lambda < j. \end{aligned}$$

ceea ce arată că  $j = [\lambda]$  este punctul maxim și  $\mathbb{P}(X = [\lambda]) = \frac{\lambda^{[\lambda]}}{[\lambda]!} e^{-\lambda}$  este valoarea maximă.

- ii) După cum am văzut la punctul precedent avem  $\frac{\mathbb{P}(X=j)}{\mathbb{P}(X=j-1)} = \frac{\lambda}{j}$ . Dacă  $j > 0$  este fixat atunci putem observa că maximum este atins pentru  $\lambda = j$ .

### Exercițiul 3

- a) Fie  $L$  durata unui meci (numărul de partide jucate până la câștig). Dacă Fischer câștigă un meci care constă din  $L$  partide atunci primele  $L - 1$  partide au fost remiză. Astfel obținem că probabilitatea ca Fischer să câștige este

$$\mathbb{P}(\text{Fischer câștigă}) = \sum_{l=1}^{10} \mathbb{P}(L=l) = \sum_{l=1}^{10} 0.3^{l-1} \times 0.4 = 0.571425.$$

- b) Meciul are durata  $L$  cu  $L < 10$  dacă și numai dacă au loc  $L - 1$  remize urmate de un câștig de către oricare dintre cei doi jucători. Jocul are lungimea 10 dacă și numai dacă au avut loc 9 remize. Probabilitatea ca unul din cei doi jucători să câștige o partidă este de 0.7 ( $0.4 + 0.3$ ). Obținem astfel

$$\mathbb{P}(L=l) = \begin{cases} 0.3^{l-1} \times 0.7, & l = 1 \dots 9 \\ 0.3^9, & l = 10 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

### Exercițiul 4

Pentru calculul mediei folosim definiția și obținem:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(1-p)^k}{-k \log(p)} = -\frac{1}{\log(p)} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k \\ &= -\frac{1}{\log(p)} \left[ \frac{1}{1-(1-p)} - 1 \right] = -\frac{1-p}{p \log(p)}. \end{aligned}$$

Pentru calculul momentului de ordin 2 avem:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{(1-p)^k}{-k \log(p)} = -\frac{1}{\log(p)} \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k \\ &= -\frac{1}{\log(p)} (1-p) \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)^k)' = -\frac{1}{\log(p)} \frac{1-p}{p^2} = -\frac{1-p}{p^2 \log(p)}. \end{aligned}$$

Cum  $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$  deducem că

$$\text{Var}[X] = -\frac{1-p}{p^2 \log(p)} - \left( \frac{1-p}{p \log(p)} \right)^2 = \frac{(1-p)(1-p+\log(p))}{-p^2 \log^2(p)}.$$

### Exercițiul 5

Din ipoteză deducem că funcția de masă a variabilei aleatoare  $X$  este



$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1}, & \text{dacă } x = 2^k, a \leq k \leq b, k \text{ întreg} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

prin urmare

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=a}^b \frac{1}{b-a+1} 2^k = \frac{2^{b+1} - 2^a}{b-a+1}.$$

În mod similar avem momentul de ordin 2

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=a}^b \frac{1}{b-a+1} (2^k)^2 = \frac{4^{b+1} - 4^a}{3(b-a+1)}$$

de unde varianța este

$$Var[X] = \frac{4^{b+1} - 4^a}{3(b-a+1)} - \left( \frac{2^{b+1} - 2^a}{b-a+1} \right)^2.$$

Pentru momentul de ordin 3 avem

$$\mathbb{E}[X^3] = \sum_{k=a}^b \frac{1}{b-a+1} (2^k)^3 = \frac{8^{b+1} - 8^a}{7(b-a+1)}.$$

## Exercițiul 6

Dacă numărul de mașini vandute într-un an de reprezentanță este mai mare decât  $N$ ,  $X \geq N$ , atunci câștigul administratorului este  $G = aN$ . Dacă  $X < N$ , atunci administratorul vinde  $X$  mașini și îi rămân  $N - X$ , deci câștigul devine  $G = aX - b(N - X)$ . Prin urmare avem

$$G = \begin{cases} aN & \text{dacă } X \geq N \\ aX - b(N - X) & \text{dacă } X < N \end{cases}$$

deci

$$\mathbb{E}[G] = aN\mathbb{P}(X \geq N) + \sum_{x=0}^{N-1} [ax - b(N - x)]\mathbb{P}(X = x).$$

Din ipoteză știm că toți întregii  $x \in \{0, 1, \dots, n\}$  sunt de aceeași probabilitate, mai exact știm că  $X$  este o variabilă aleatoare uniformă, deci  $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n+1}$  (administratorul vinde același număr de mașini cu aceeași probabilitate - în realitate nu este cazul !). Obținem că:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G] &= aN \sum_{x=N}^n \frac{1}{n+1} + \sum_{x=0}^N \frac{(a+b)x - bN}{n+1} \\ &= \frac{aN(n - N + 1)}{n+1} + (a+b) \frac{N(N-1)}{2(n+1)} - \frac{bN^2}{n+1} \\ &= \frac{N[(2n+1)a - b - (a+b)N]}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Pentru a găsi valoarea optimă a numărului de mașini pe care administratorul ar trebui să le comande este suficient să găsim maximul număratorului lui  $\mathbb{E}[G]$ . Fie  $g(N) = N[(2n+1)a - b - (a+b)N]$  atunci  $g'(N) = (2n+1)a - b - 2(a+b)N$  de unde rezolvând ecuația  $g'(N) = 0$  deducem că  $N = \frac{(2n+1)a-b}{2(a+b)}$ . Mai mult derivata a doua ne dă  $g''(N) = -2(a+b) < 0$  ceea ce ne arată că valoarea găsită corespunde maximului.

## Exercițiul 7

Avem că legea lui  $X$  este uniformă pe mulțimea  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  iar din definiția lui  $Y = X(7 - X)$  observăm că  $Y \in \{6, 10, 12\}$  cu  $\mathbb{P}(Y = 6) = \mathbb{P}(Y = 10) = \mathbb{P}(Y = 12) = \frac{1}{3}$ . Obținem că

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \frac{1}{3}(6 + 10 + 12) = \frac{28}{3} \\ \mathbb{E}[Y^2] &= \frac{1}{3}(36 + 100 + 144) = \frac{280}{3} \\ \mathbb{V}[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \frac{56}{9}.\end{aligned}$$

Variabila aleatoare  $M_n$  ia valori în aceeași mulțime ca și  $Y$ ,  $M_n \in \{6, 10, 12\}$ . Pentru a găsi legea lui  $M_n$  trebuie să calculăm  $\mathbb{P}(M_n = x)$  cu  $x \in \{6, 10, 12\}$ .

Pentru evenimentul  $\{M_n = 6\}$  este necesar ca toate variabilele  $Y_i = 6$  deci

$$\mathbb{P}(M_n = 6) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{Y_i = 6\}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Dacă  $\{M_n = 12\}$  atunci cel puțin unul din evenimentele  $\{Y_i = 12\}$  se realizează, prin urmare

$$\mathbb{P}(M_n = 12) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n \{Y_i = 12\}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{Y_i \leq 10\}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Pentru a calcula  $\mathbb{P}(M_n = 10)$  (fără a face diferența  $1 - \mathbb{P}(M_n = 6) - \mathbb{P}(M_n = 12)$ ) observăm că realizarea evenimentului  $\{M_n = 10\}$  implică realizarea tuturor evenimentelor  $\{Y_i \leq 10\}$  dar excludem evenimentul în care toți  $\{Y_i = 6\}$ . Astfel

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_n = 10) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{Y_i \leq 10\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \{Y_i = 6\}\right)^c\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{Y_i \leq 10\}\right) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^n \{Y_i = 6\}\right)^c\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n.\end{aligned}$$

# Tema 3

## Soluții

### Exercițiul 1

Fie  $N_1$  numărul de teste necesare pentru indentificarea primului tranzistor defect, și  $N_2$  numărul de teste suplimentare necesare pentru identificarea celui de-al doilea tranzistor defect. Cum sunt 5 tranzistori avem  $0 \leq N_1 + N_2 \leq 5$ . Dacă notăm cu  $T_s$  al  $s$ -lea tranzistorul,  $1 \leq s \leq 5$ , avem  $\mathbb{P}((T_i, T_j)) = \frac{1}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$  deoarece tranzistorii au aceeași șansă să fie defecti. Prin urmare

$$\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 1) = \mathbb{P}((T_1, T_2)) = \frac{1}{10},$$

$$\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 2) = \mathbb{P}((T_1, T_3)) = \frac{1}{10},$$

$$\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 3) = \mathbb{P}((T_1, T_4) \cup (T_1, T_5)) = \frac{2}{10}, (N_1 = 1 \text{ și } 2, 3, 4^e \text{ OK deci } 5^e \text{ defect})$$

$$\mathbb{P}(N_1 = 2, N_2 = 1) = \mathbb{P}((T_2, T_3)) = \frac{1}{10},$$

$$\mathbb{P}(N_1 = 2, N_2 = 2) = \mathbb{P}((T_2, T_4) \cup (T_2, T_5)) = \frac{2}{10}, (N_1 = 2 \text{ și } N_2 = 2 \text{ sau } 4 \text{ sau } 5 \text{ defecte})$$

$$\mathbb{P}(N_1 = 3, N_2 = 1) = \mathbb{P}((T_3, T_4) \cup (T_3, T_5)) = \frac{2}{10}, (N_1 = 3 \text{ și } N_2 = 1 \text{ sau } 4 \text{ sau } 5 \text{ defecte})$$

$$\mathbb{P}(N_1 = 3, N_2 = 0) = \mathbb{P}((T_4, T_5)) = \frac{1}{10}, (N_1 = 3 \text{ și primele } 3 \text{ OK atunci } 4 \text{ și } 5 \text{ defecte})$$

$N_1 \backslash N_2$	0	1	2	3	$\Sigma$
1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$
2	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
3	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	0	$\frac{3}{10}$
$\Sigma$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	

Legea lui  $N_1$  este dată de suma pe linii și legea lui  $N_2$  de suma pe coloane. Astfel

$$N_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \quad N_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

Deci  $\mathbb{E}[N_1] = 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{3}{10} = \frac{19}{10}$  și  $\mathbb{E}[N_2] = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{2}{10} + 4 \times 0 = \frac{16}{10}$ .

### Exercițiul 2

a) Observăm că legea lui  $X$  este (făcând suma pe linii)  $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$  și legea lui  $Y$  este (făcând suma pe coloane)  $Y \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0.35 & 0.4 & 0.25 \end{pmatrix}$  prin urmare

$$\mathbb{E}[Y] = 2 \times 0.35 + 4 \times 0.4 + 6 \times 0.25 = 3.8,$$

$$Var[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = (2^2 \times 0.35 + 4^2 \times 0.4 + 6^2 \times 0.25) - 3.8^2 = 2.36.$$

b) Pentru legea v.a. condiționate  $\mathbb{E}[Y|X]$  avem

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y|X=0] &= 2\mathbb{P}(Y=2|X=0) + 4\mathbb{P}(Y=4|X=0) + 6\mathbb{P}(Y=6|X=0) \\ &= 2 \times \frac{0.1}{0.4} + 4 \times \frac{0.2}{0.4} + 6 \times \frac{0.1}{0.4} = 4, \\ \mathbb{E}[Y|X=1] &= 2\mathbb{P}(Y=2|X=1) + 4\mathbb{P}(Y=4|X=1) + 6\mathbb{P}(Y=6|X=1) \\ &= 2 \times \frac{0.1}{0.3} + 4 \times \frac{0.1}{0.3} + 6 \times \frac{0.1}{0.3} = 4, \\ \mathbb{E}[Y|X=2] &= 2\mathbb{P}(Y=2|X=2) + 4\mathbb{P}(Y=4|X=2) + 6\mathbb{P}(Y=6|X=2) \\ &= 2 \times \frac{0.1}{0.2} + 4 \times \frac{0.1}{0.2} + 6 \times \frac{0}{0.2} = 3, \\ \mathbb{E}[Y|X=3] &= 2\mathbb{P}(Y=2|X=3) + 4\mathbb{P}(Y=4|X=3) + 6\mathbb{P}(Y=6|X=3) \\ &= 2 \times \frac{0.05}{0.1} + 4 \times \frac{0}{0.1} + 6 \times \frac{0.05}{0.1} = 4,\end{aligned}$$

deci  $\mathbb{E}[Y|X] \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$  deoarece  $\mathbb{E}[Y|X]$  ia valoarea 3 cu probabilitatea  $\mathbb{P}(X=2)$  și valoarea 4 cu probabilitatea  $\mathbb{P}(X \neq 2)$ .

Pentru legea v.a.  $Var(Y|X)$  observăm că

$$\begin{aligned}Var[Y|X=0] &= \mathbb{E}[Y^2|X=0] - \mathbb{E}[Y|X=0]^2 = \left( 2^2 \times \frac{0.1}{0.4} + 4^2 \times \frac{0.2}{0.4} + 6^2 \times \frac{0.1}{0.4} \right) - 16 = 2, \\ Var[Y|X=1] &= \mathbb{E}[Y^2|X=1] - \mathbb{E}[Y|X=1]^2 = \left( 2^2 \times \frac{0.1}{0.3} + 4^2 \times \frac{0.1}{0.3} + 6^2 \times \frac{0.1}{0.3} \right) - 16 = 2.66, \\ Var[Y|X=2] &= \mathbb{E}[Y^2|X=2] - \mathbb{E}[Y|X=2]^2 = \left( 2^2 \times \frac{0.1}{0.2} + 4^2 \times \frac{0.1}{0.2} + 6^2 \times \frac{0}{0.2} \right) - 9 = 1, \\ Var[Y|X=3] &= \mathbb{E}[Y^2|X=3] - \mathbb{E}[Y|X=3]^2 = \left( 2^2 \times \frac{0.05}{0.1} + 4^2 \times \frac{0}{0.1} + 6^2 \times \frac{0.05}{0.1} \right) - 16 = 4,\end{aligned}$$

astfel  $Var(Y|X) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2.66 & 4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$  deoarece v.a.  $Var(Y|X)$  ia valoarea 1 cu probabilitatea  $\mathbb{P}(X=2)$ , valoarea 2 cu probabilitatea  $\mathbb{P}(X=0)$ , valoarea 2.66 cu probabilitatea  $\mathbb{P}(X=1)$  și valoarea 4 cu probabilitatea  $\mathbb{P}(X=3)$ .

c) Cunoscând legile variabilelor aleatoare  $\mathbb{E}[Y|X]$  și  $Var(Y|X)$  observăm că

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Var[Y|X]] &= 1 \times 0.2 + 2 \times 0.4 + 2.66 \times 0.3 + 4 \times 0.1 \approx 2.2, \\ Var[\mathbb{E}[Y|X]] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]^2] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]^2 = (3^2 \times 0.2 + 4^2 \times 0.8) - \mathbb{E}[Y]^2 = 0.16, \\ Var[Y] &= 2.36,\end{aligned}$$

deci  $Var[Y] = 2.2 + 0.16 = 2.36$  de unde  $Var(Y) = \mathbb{E}[Var(Y|X)] + Var(\mathbb{E}[Y|X])$ .

### Exercițiul 3

a) Observăm că:

$$\mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}(X = n+1) + \mathbb{P}(X = n+2) + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)$$

și

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) &= (\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \dots) + (\mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \dots) \\ &\quad + (\mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \dots) + \dots \\ &= 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) + 3 \cdot \mathbb{P}(X = 3) + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}[X]. \end{aligned}$$

O altă idee ar fi să luăm  $X = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X > i\}}$  și să inversăm  $\sum$  cu  $\mathbb{E}$  (de ce putem?).

b) Avem

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq x) dx = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X \geq x\}}] dx \stackrel{\text{Tonelli-Fubini}}{=} \mathbb{E} \left[ \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{\{X \geq x\}} dx \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^X dx \right] = \mathbb{E}[X].$$

## Exercițiul 4

a) Din condiția  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$  obținem

$$\int_0^{\infty} \alpha x^2 e^{-kx} dx \stackrel{y=kx}{=} \frac{\alpha}{k^3} \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy = \frac{2\alpha}{k^3} = 1$$

de unde rezultă  $\alpha = \frac{k^3}{2}$ . Pentru această valoare a lui  $\alpha$  se indeplinește și condiția  $f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$ .

b) Aplicând definiția funcției de repartiție,  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ , efectuând calculele obținem

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{k^2 x^2 + 2kx + 2}{2} e^{-kx}, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

c) Avem

$$\mathbb{P}\left(0 < X < \frac{1}{k}\right) = F\left(\frac{1}{k}\right) - F(0) = F\left(\frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{5}{2e}.$$

## Exercițiul 5

a) Dacă  $X \sim \text{Exp}(\alpha)$  atunci densitatea sa este  $f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)$  și are funcția de repartiție  $F(x) = (1 - e^{-\alpha x}) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)$ . Observăm că  $\mathbb{P}(X > t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - F(t) = e^{-\alpha t}$ , deci

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > t + s, X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{e^{-\alpha(t+s)}}{e^{-\alpha s}} = e^{-\alpha t} = \mathbb{P}(X > t).$$

Interpretare: Să presupunem că  $X$  reprezintă durata de viață a unei componente electrice. Știind că  $X$  a funcționat deja un timp  $s$  ( $X > s$ ), probabilitatea ca  $X$  să funcționeze un timp  $t$  suplimentar ( $X > t + s$ ) este egală cu probabilitatea ca  $X$  să funcționeze un timp  $t$ . Faptul că a funcționat deja un timp  $s$  nu influențează probabilitatea să funcționeze un timp  $t$  în plus.

b) Din relația

$$\mathbb{P}(X > s+t | X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > s+t, X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(X > s+t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \mathbb{P}(X > t)$$

obținem  $\mathbb{P}(X > s+t) = \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t)$  de unde notând cu  $h(t) = \mathbb{P}(X > t)$  avem  $h(s+t) = h(s)h(t)$  pentru  $s > 0, t > 0$ .

Pentru a verifica că v.a.  $X$  este distribuită exponențial trebuie să rezolvăm ecuația funcțională Cauchy. Observăm pentru început că dacă  $s = t$  atunci  $h(2s) = h^2(s)$  și prin inducție avem  $h(ks) = h^k(s)$  pentru  $k \in \mathbb{N}$ . Luând  $s = \frac{1}{2}$  avem  $h(1) = h^2(\frac{1}{2})$  de unde  $h(\frac{1}{2}) = h^{\frac{1}{2}}(1)$  și pentru  $s = \frac{1}{k}$  rezultă că  $h(\frac{1}{k}) = h^{\frac{1}{k}}(1)$  (prin aceeași argumentare). Combinând rezultatele avem  $h(\frac{m}{n}) = h(m\frac{1}{n}) = h^m(\frac{1}{n}) = h^{\frac{m}{n}}(1)$ . Prin urmare  $h(q) = h^q(1)$  pentru orice  $q \in \mathbb{Q}_+$ . Dacă  $r \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{Q}_+$  există un șir  $(q_n)_n \subset \mathbb{Q}_+$  așa încât  $q_n \downarrow r$  și folosind continuitatea la dreapta avem  $h(q_n) \downarrow h(r)$  deci  $h(r) = a^r$ , unde  $a = h(1)$ . În final am găsit că  $h(t) = e^{-t \log \frac{1}{h(1)}}$ .

## Exercițiul 6

Densitatea variabilei aleatoare  $X$  se mai poate scrie sub forma

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\beta} e^{\frac{x-\alpha}{\beta}}, & x \leq \alpha \\ \frac{1}{2\beta} e^{\frac{-x+\alpha}{\beta}}, & x > \alpha \end{cases}$$

de unde, aplicând definiția mediei rezultă

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \frac{1}{2\beta} \int_{-\infty}^{\alpha} x e^{\frac{x-\alpha}{\beta}} dx + \frac{1}{2\beta} \int_{\alpha}^{\infty} x e^{\frac{-x+\alpha}{\beta}} dx$$

În prima integrală din membrul drept facem schimbarea de variabilă  $t = \frac{x-\alpha}{\beta}$  iar în a doua schimbarea de variabilă  $t = \frac{-x+\alpha}{\beta}$  și obținem

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2\beta} \int_{-\infty}^0 \beta(\alpha + \beta t) e^t dt + \frac{1}{2\beta} \int_0^{\infty} -\beta(\alpha - \beta t) e^t dt = \alpha.$$

Momentul de ordin 2 se calculează în mod similar și obținem

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx = \frac{1}{2\beta} \int_{-\infty}^{\alpha} x^2 e^{\frac{x-\alpha}{\beta}} dx + \frac{1}{2\beta} \int_{\alpha}^{\infty} x^2 e^{\frac{-x+\alpha}{\beta}} dx \\ &= \frac{1}{2\beta} \int_{-\infty}^0 \beta(\alpha + \beta t)^2 e^t dt + \frac{1}{2\beta} \int_0^{\infty} -\beta(\alpha - \beta t)^2 e^t dt \\ &= \alpha^2 + 2\beta^2 \end{aligned}$$

prin urmare varianța este  $Var[X] = \alpha^2 + 2\beta^2 - \alpha^2 = 2\beta^2$ .

## Exercițiul 7

Fie  $N$  numărul de clienți care intră în magazin și fie  $X_k$  v.a. care reprezintă suma cheltuită de clientul  $k$ . Din ipoteză știm că  $\mathbb{E}[N] = 50$ ,  $\mathbb{E}[X_i] = 30$ ,  $X_i \perp X_j$  și  $X_i \perp N$  ( $\perp$  - semnul pentru independență). Putem observa că cifra de afaceri a magazinului este dată de v.a.  $Z = \sum_{i=1}^N X_i$ . Avem

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{cifrei de afaceri}] &= \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N X_i \middle| N\right]\right] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N X_i \middle| N = n\right] \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i \middle| N = n\right] \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i \middle| N = n]\right) \mathbb{P}(N = n) \\ &\stackrel{\text{indep.}}{=} \sum_{n \geq 1} n \mathbb{E}[X_1] \mathbb{P}(N = n) = \mathbb{E}[X_1] \sum_{n \geq 1} n \mathbb{P}(N = n) = \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[N] \\ &= 30 \times 50 = 1500,\end{aligned}$$

prin urmare cifra de afaceri pe care o inregistrează magazinul în ziua respectivă este de 1500 RON.

## Tema 4

### Soluții

#### Exercițiul 1

- a) Pentru ca  $f(x)$  să fie densitate de probabilitate trebuie să verifice proprietățile  $f(x) \geq 0$  și  $\int f(x) dx = 1$ .  
Avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = c \int_0^7 \ln\left(\frac{7}{x}\right) dx = 7c \int_0^{\infty} te^{-t} dt = 7c$$

deci  $c = \frac{1}{7}$ . Pentru funcția de repartiție avem

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{7} \ln\left(\frac{7}{t}\right) dt = \int_{\ln(7/x)}^{\infty} ue^{-u} du = \frac{x}{7} \left[ 1 + \ln\left(\frac{7}{x}\right) \right], \quad x \in (0, 7)$$

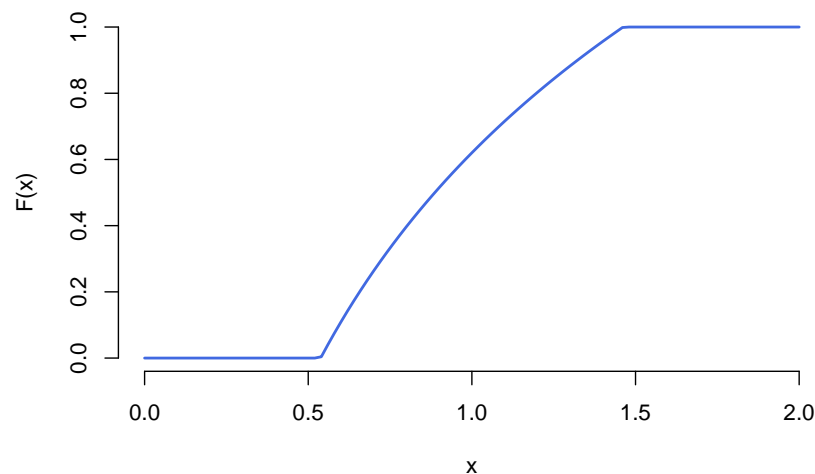
iar  $\mathbb{P}(X > 3) = 1 - F(3) = \frac{4}{7} - \frac{3}{7} \ln\left(\frac{7}{3}\right) = 0.087$ .

- b) Din condiția  $\int f(x) dx = 1$  decucem

$$\int_{1-c}^{1+c} \frac{1}{x} dx = \ln \frac{1+c}{1-c} = 1$$

ceea ce implică  $c = \frac{e-1}{e+1}$ . Pentru funcția de repartiție avem

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{1-c}^x \frac{1}{t} dt = \ln \frac{x}{1-c}, \quad x \in (1-c, 1+c).$$





## Exercițiul 2

- a) Fie  $X$  nivelul de zgomot produs de o mașină de spălat luată la intamplare și  $\bar{X}_{10}$  media unui eșantion de talie 10. Presupunem că aproximarea gaussiană are loc pentru  $n = 10$ . Avem

$$\bar{X}_{10} \sim \mathcal{N}\left(44, \frac{5^2}{10}\right),$$

de unde  $\mathbb{P}(\bar{X}_{10} > 48) \simeq \mathbb{P}\left(Z > \frac{48-44}{5/\sqrt{10}}\right) = \mathbb{P}(Z > 2.53) = 1 - 0.9943 = 0.0057$ , unde  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Observăm că această probabilitate este foarte mică.

- b) Fie  $X$  greutatea unei persoane luate la intamplare și  $\bar{X}_{100}$  greutatea media a unui eșantion de 100 de persoane. Aplicând aproximarea gaussiană (Teorema Limită Centrală) avem

$$\bar{X}_{100} \simeq \mathcal{N}\left(66.3, \frac{15.6^2}{100}\right),$$

de unde  $\mathbb{P}(\bar{X}_{100} > \frac{7000}{100}) \simeq \mathbb{P}\left(Z > \frac{70-66.3}{15.6/\sqrt{100}}\right) = \mathbb{P}(Z > 2.37) = 0.0089$ , unde  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

## Exercițiul 3

Fie  $X_i$  rezultatul obținut în urma celei de-a  $i$ -a aruncare cu banul,  $X_i = 1$  dacă banul a picat cap și  $X_i = 0$  dacă a picat pajură. Dacă notăm cu  $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$  frecvența de apariție a capului în primele  $n$  aruncări atunci conform *Teoremei Limită Centrale* avem

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \leq x\right) \approx \Phi(x)$$

unde  $\mu = \mathbb{P}(X_1 = 1) = p$  și  $\sigma^2 = \text{Var}(X_1) = p(1 - p)$ . Prin urmare

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n} \frac{|\bar{X}_n - p|}{\sqrt{p(1-p)}} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \leq x\right) + \mathbb{P}\left(\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \leq -x\right) \approx 2\Phi(x) - 1$$

deci

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - p| \leq x) = \mathbb{P}\left(\sqrt{n} \frac{|\bar{X}_n - p|}{\sqrt{p(1-p)}} \leq x \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) \approx 2\Phi\left(x \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) - 1.$$

În cazul nostru  $p = \frac{1}{2}$ ,  $x = 0.01$  iar  $\mathbb{P}(|\bar{X}_n - p| \leq x) \leq 0.6$  astfel  $n$  se determină rezolvând ecuația

$$2\Phi\left(0.01 \sqrt{\frac{n}{0.5(1-0.5)}}\right) - 1 = 0.6$$

care implică  $0.01 \sqrt{\frac{n}{0.5(1-0.5)}} = 0.84$  adică  $n = 1764$ .

## Exercițiul 4

a) Se observă cu ușurință că

$$H_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) \stackrel{\text{indep.}}{=} F(x)^n$$

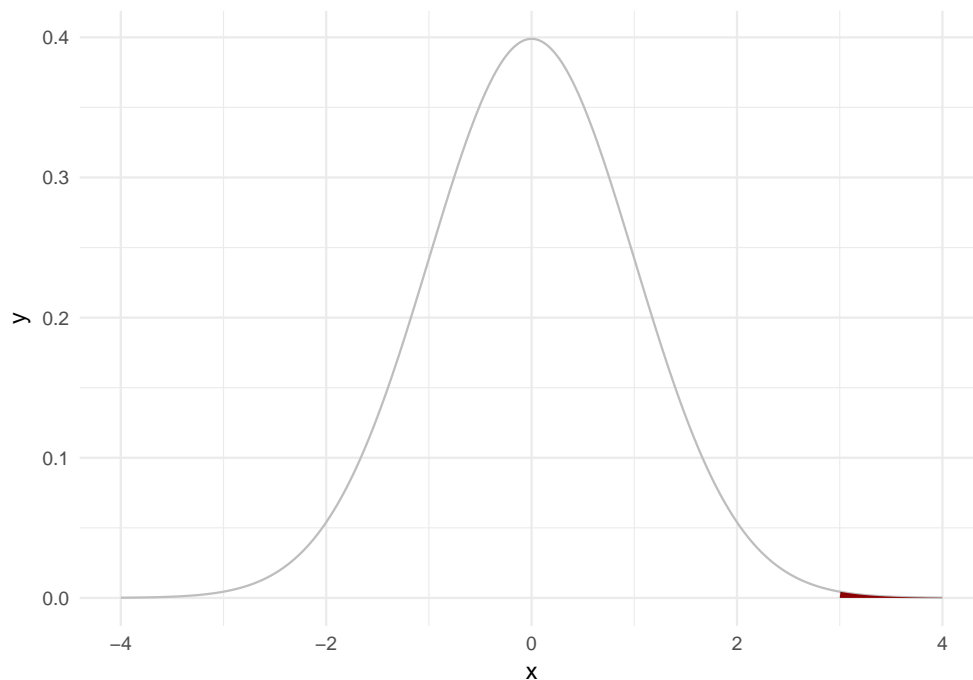
$$h_n(x) = \frac{d}{dx} H_n(x) = n f(x) F(x)^{n-1}$$

$$H_1(x) = \mathbb{P}(Y_1 \leq x) = 1 - \mathbb{P}(Y_1 > x) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > x, \dots, X_n > x) \stackrel{\text{indep.}}{=} 1 - (1 - F(x))^n$$

$$h_1(x) = \frac{d}{dx} H_1(x) = n f(x) (1 - F(x))^{n-1}$$

b) Fie  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Problema cere să găsim probabilitatea  $\mathbb{P}(X > \mu + 3\sigma)$ . Avem (vezi porțiunea roșie din figură)

$$\mathbb{P}(X > \mu + 3\sigma) = \mathbb{P}\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > 3\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq 3\right) = 0.00135$$



c) Fie  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un e santion de talie  $n = 100$  dintr-o populație normală  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  și fie  $Z_i = \mathbf{1}_{\{X_i > \mu + 3\sigma\}}$  variabilele Bernoulli care iau valoarea 1 atunci cand  $X_i > \mu + 3\sigma$  și 0 in rest. Problema revine la a determina probabilitatea

$$\mathbb{P}(Z_1 + \dots + Z_n = 1) \stackrel{i.i.d.}{=} \binom{n}{1} \mathbb{P}(Z_1 = 1) \mathbb{P}(Z_1 = 0)^{n-1} = n \mathbb{P}(X_1 > \mu + 3\sigma) \mathbb{P}(X_1 < \mu + 3\sigma)^{n-1} \simeq 0.11809$$

d) Fie  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un e santion de talie  $n = 100$  dintr-o populație normală  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Problema ne cere să găsim valoarea lui  $x$  pentru care probabilitatea  $\mathbb{P}(X_1 < x, X_2 < x, \dots, X_n < x) = 0.99$ . Prin urmare vrem să găsim pe  $x$  așa incat  $H_n(x) = 0.99$ . Din punctul a) avem  $H_n(x) = F(x)^n$  deci  $x = F^{-1}(\sqrt[n]{0.99}) = 3.7177$ .

- e) Fie  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un e santion de talie  $n = 50$  dintr-o populație normală  $\mathcal{N}(10, 1)$  ( $n = 50$  reprezintă numărul de laboratoare iar  $X_i$  este concentrația de crom din laboratorul  $i$ ). Din datele problemei avem că laboratorul 1 a înregistrat cea mai mică valoare (6 mg/l) iar laboratorul 2 a înregistrat cea mai mare valoare (13 mg/l). Problema ne cere să evaluăm probabilitatea

$$\mathbb{P}(Y_1 \leq 6, Y_n \geq 13) = 1 - \mathbb{P}(\{Y_1 > 6\} \cup \{Y_n < 13\}) = 1 - \mathbb{P}(Y_1 > 6) - \mathbb{P}(Y_n < 13) + \mathbb{P}(Y_1 > 6, Y_n < 13).$$

$$\text{Avem că } \mathbb{P}(Y_1 > 6) = \mathbb{P}(X_1 > 6, \dots, X_n > 6) = (1 - F(6))^n \text{ iar } F(6) = \mathbb{P}(X_1 \leq 6) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1 - 10}{1} \leq -4\right) \simeq 0.00003 \text{ deci } \mathbb{P}(Y_1 > 6) \simeq 0.99871.$$

De asemenea  $\mathbb{P}(Y_n < 13) = F(13)^n$  iar cum  $F(13) = \mathbb{P}(X_1 \leq 13) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1 - 10}{1} \leq 3\right) \simeq 0.9986$  rezultă că  $\mathbb{P}(Y_n < 13) \simeq 0.9346$ .

În mod similar,  $\mathbb{P}(Y_1 > 6, Y_n < 13) = \mathbb{P}(6 < X_1 < 13, \dots, 6 < X_n < 13) = \mathbb{P}(6 < X_1 < 13)^n$  și cum  $\mathbb{P}(6 < X_1 < 13) = \mathbb{P}(X_1 < 13) - \mathbb{P}(X_1 \leq 6) \simeq 0.9986$  obținem că  $\mathbb{P}(Y_1 > 6, Y_n < 13) \simeq 0.9332$ .

În concluzie avem că  $\mathbb{P}(Y_1 \leq 6, Y_n \geq 13) \simeq 0.0001$ .

## Exercițiul 5

- a) Pentru ca  $f_{(X,Y)}$  să fie densitate trebuie ca  $f_{(X,Y)}(x, y) \geq 0$  de unde  $k \geq 0$  și

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x, y) dx dy = 1,$$

altfel spus  $\int_0^1 \int_0^2 k(x + y + 1) dx dy = 1$  de unde  $k = \frac{1}{5}$ .

- b) Pentru a găsi densitățile marginale avem pentru  $X$

$$f_X(x) = \int f_{(X,Y)}(x, y) dy = \int_0^2 \frac{x + y + 1}{5} \mathbb{I}_{[0,1]}(x) dy = \frac{2x + 4}{5} \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$$

și pentru  $Y$

$$f_Y(y) = \int f_{(X,Y)}(x, y) dx = \int_0^1 \frac{x + y + 1}{5} \mathbb{I}_{[0,2]}(y) dx = \frac{2y + 3}{10} \mathbb{I}_{[0,2]}(y).$$

- c) Observăm că  $X$  și  $Y$  nu sunt independente deoarece  $f_{(X,Y)}(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ .  
d) Funcția de repartiție a vectorului  $(X, Y)$  este dată de

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{(X,Y)}(u, v) du dv$$

prin urmare dacă  $x \in (0, 1]$  și  $y \in (0, 2]$  avem

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y \frac{u + v + 1}{5} du dv = \frac{xy}{10}(x + y + 2),$$

dacă  $x \in (1, \infty)$  și  $y \in (0, 2]$  atunci

$$F(x, y) = \int_0^1 \int_0^y \frac{u + v + 1}{5} du dv = \frac{y}{10}(y + 3),$$

dacă  $x \in (0, 1]$  și  $y \in (2, \infty)$  atunci

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^2 \frac{u+v+1}{5} dudv = \frac{x}{5}(x+4),$$

iar dacă  $x \in (1, \infty)$  și  $y \in (2, \infty)$  atunci

$$F(x, y) = \int_0^1 \int_0^2 \frac{u+v+1}{5} dudv = 1.$$

Pentru a găsi funcțiile de repartiție marginale putem sau să folosim densitățile marginale sau să folosim relațiile

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y), \quad F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y).$$

Obținem

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{5}(x+4), & x \in (0, 1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

și

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \frac{y}{10}(y+3), & y \in (0, 2] \\ 1, & y > 2 \end{cases}$$

e) Folosind definiția densității marginale avem

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{2(x+y+1)}{2y+3} \mathbb{I}_{[0,1]}(x) \mathbb{I}_{[0,2]}(y)$$

și

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{x+y+1}{2x+4} \mathbb{I}_{[0,1]}(x) \mathbb{I}_{[0,2]}(y).$$

## Exercițiul 6

Fie  $A_j$  evenimentul ca cel puțin o persoană din cele 110 să fie născută în ziua  $j$ ,  $1 \leq j \leq 365$  și fie  $X_j = \mathbf{1}_{A_j}$ . Variabila de interes  $X$ , numărul de zile de naștere distincte din grup, este

$$X = \sum_{j=1}^{365} X_j,$$

cu  $X_j$  repartizate Bernoulli de parametru  $p = \mathbb{P}(A_j)$ . Probabilitatea  $p$  se calculează din

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}(A_j) = 1 - \mathbb{P}(A_j^c) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\text{nicio persoană din grup nu este născută în ziua } j) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{110}. \end{aligned}$$

Putem observa că variabilele aleatoare  $X_j$  nu sunt independente (doar identic repartizate) dar folosind proprietatea de liniaritate a mediei avem

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j=1}^{365} \mathbb{E}[X_j] = 365p \approx 95.083.$$

Pentru calculul varianței avem

$$\text{Var}(X) = \sum_{j=1}^{365} \text{Var}[X_j] + \sum_{i \neq j} \text{Cov}[X_i, X_j]$$

care din simetrie devine

$$\text{Var}(X) = 365\text{Var}(X_1) + 2\binom{365}{2}\text{Cov}(X_1, X_2).$$

Cum  $\text{Var}(X_1) = p(1-p)$ , ne rămâne să calculăm covarianța  $\text{Cov}(X_1, X_2)$ . Aceasta din urmă verifică

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}[X_1 X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] = \mathbb{E}[X_1 X_2] - p^2$$

iar  $\mathbb{E}[X_1 X_2] = \mathbb{P}(X_1 X_2 = 1) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ . Prin complementare avem

$$\mathbb{P}(A_1^c \cup A_2^c) = \mathbb{P}(A_1^c) + \mathbb{P}(A_2^c) - \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c) = 2\left(\frac{364}{365}\right)^{110} - \left(\frac{363}{365}\right)^{110}$$

de unde găsim că

$$\text{Var}(X) = 365p(1-p) + 365 \times 364 \times \left[1 - 2\left(\frac{364}{365}\right)^{110} + \left(\frac{363}{365}\right)^{110} - p^2\right] \approx 10.019.$$

## Exercițiul 7

Fie  $X$  și  $Y$  cele două măsurători, iar conform ipotezei acestea sunt variabile aleatoare independente și  $\mathcal{N}(0, 1)$  repartizate. Fie de asemenea  $M = \max(X, Y)$  și  $L = \min(X, Y)$ , cea mai mare și respectiv cea mai mică dintre valori. Cum pentru  $x, y \in \mathbb{R}$  avem

$$\max(x, y) + \min(x, y) = x + y \quad \text{și} \quad \max(x, y) - \min(x, y) = |x - y|$$

deducem că

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M] + \mathbb{E}[L] &= \mathbb{E}[M + L] = \mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 0 \\ \mathbb{E}[M] - \mathbb{E}[L] &= \mathbb{E}[M - L] = \mathbb{E}[|X - Y|].\end{aligned}$$

Pentru a calcula  $\mathbb{E}[|X - Y|]$  să observăm că  $X - Y \sim \mathcal{N}(0, 2)$  (deoarece  $X$  și  $Y$  sunt independente) prin urmare notând  $X - Y = Z\sqrt{2}$ , cu  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , obținem

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X - Y|] &= \sqrt{2}\mathbb{E}[|Z|] = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.\end{aligned}$$

Astfel deducem că  $\mathbb{E}[M] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$  și  $\mathbb{E}[L] = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}$  iar

$$\text{Cov}(M, L) = \mathbb{E}[ML] - \mathbb{E}[M]\mathbb{E}[L] = \mathbb{E}[XY] + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}$$

deoarece  $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$ . Cum corelația dintre  $M$  și  $L$  este definită prin

$$\rho(M, L) = \frac{\text{Cov}(M, L)}{\sqrt{\text{Var}(M)}\sqrt{\text{Var}(L)}},$$

trebuie să mai calculăm  $\text{Var}(M)$  și  $\text{Var}(L)$ . Cum  $M + L = X + Y$ , luând varianța avem

$$\text{Var}(M + L) = \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 2$$

de unde

$$\text{Var}(M) + \text{Var}(L) + 2\text{Cov}(M, L) = 2$$

deci  $\text{Var}(M) + \text{Var}(L) = 2\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)$ . Cum  $\max(X, Y) = -\min(-X, -Y)$  și cum, din simetria repartiției normale standard,  $(-X, -Y)$  este repartizat la fel ca  $(X, Y)$  deducem că

$$\text{Var}(M) = \text{Var}(\max(X, Y)) = \text{Var}(-\min(-X, -Y)) = \text{Var}(\min(-X, -Y)) = \text{Var}(\min(X, Y)) = \text{Var}(L)$$

prin urmare  $\text{Var}(M) = \text{Var}(L) = 1 - \frac{1}{\pi}$  de unde

$$\rho(M, L) = \frac{\text{Cov}(M, L)}{\sqrt{\text{Var}(M)}\sqrt{\text{Var}(L)}} = \frac{\frac{1}{\pi}}{1 - \frac{1}{\pi}} = \frac{1}{\pi - 1}.$$