# Algoritmi avansați

**C10** - Triangularea mulțimilor de puncte

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. al II-lea, 2020 - 2021

## Triangularea unei mulțimi arbitrare de puncte

## Triangulări legale și triangulări unghiular optime

# Problematizare

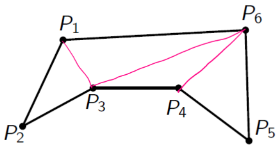
- Tema anterioară: triangularea unui poligon (listă ordonată de puncte $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$).

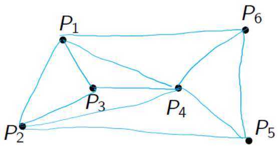
# Problematizare

- Tema anterioară: triangularea unui poligon (listă ordonată de puncte $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$).
- Are sens să vorbim de triangulare pentru <u>mulțimea</u> $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$?

# Problematizare

- Tema anterioară: triangularea unui poligon (listă ordonată de puncte $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$).
- Are sens să vorbim de triangulare pentru <u>mulțimea</u> $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$?
- **Exemplu:**




- **În cele ce urmeaza vom considera doar mulțimi de puncte din planul $\mathbb{R}^2$.**

# Problematizare

- **Definiție.** O **triangulare** a unei mulțimi $\mathcal{P}$ este o subdivizare maximală a acoperirii convexe $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$ a lui $\mathcal{P}$ cu triunghiuri ale căror vârfuri sunt elemente ale lui $\mathcal{P}$ (fără autointersecții!)

# Problematizare

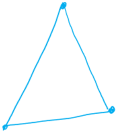
- **Definiție.** O **triangulare** a unei mulțimi $\mathcal{P}$ este o subdivizare maximală a acoperirii convexe $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$ a lui $\mathcal{P}$ cu triunghiuri ale căror vârfuri sunt elemente ale lui $\mathcal{P}$ (fără autointersecții!)
- Trebuie făcută distincție între triangulare a unui poligon $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ și triangulare a mulțimii subdiacente $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ (coincid dacă poligonul este convex!)

# Problematizare

- **Definiție.** O **triangulare** a unei mulțimi $\mathcal{P}$ este o subdivizare maximală a acoperirii convexe $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$ a lui $\mathcal{P}$ cu triunghiuri ale căror vârfuri sunt elemente ale lui $\mathcal{P}$ (fără autointersecții!)
- Trebuie făcută distincție între triangulare a unui poligon $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ și triangulare a mulțimii subdiacente $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ (coincid dacă poligonul este convex!)
- **Comentariu:** Triangulările mulțimilor de puncte sunt esențiale în grafica pe calculator.

# Exemple

(i) 3 puncte necoliniare

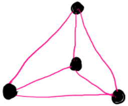


3 vârfuri
3 muchii
1 față

# Exemple

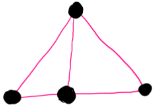
(ii) 4 puncte necoliniare, nesituate toate pe o aceeași dreaptă

a



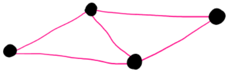
4 vârfuri
6 muchii
3 fețe (3 Δ)

b



4 vârfuri
5 muchii
2 fețe (2 Δ)

c



4 vârfuri
5 muchii
2 fețe (2 Δ)

# Elemente ale unei triangulări

- Dată o mulțime de puncte $\mathcal{P}$ și o triangulare $\mathcal{T}_P$ a sa: **vârfuri, muchii, triunghiuri**.

# Elemente ale unei triangulări

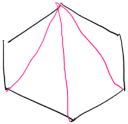
- Dată o mulțime de puncte $\mathcal{P}$ și o triangulare $\mathcal{T}_P$ a sa: **vârfuri, muchii, triunghiuri**.
- Legătură cantitativă între aceste elemente?

# Elemente ale unei triangulări

- Dată o mulțime de puncte $\mathcal{P}$ și o triangulare $\mathcal{T}_P$ a sa: **vârfuri, muchii, triunghiuri**.
- Legătură cantitativă între aceste elemente?
- **Propoziție.** *Fie $\mathcal{P}$ o mulțime de $n$ puncte din plan nesituate toate pe o aceeași dreaptă. Notăm cu $k$ numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$. Orice triangulare a lui $\mathcal{P}$ are $(2n-k-2)$ triunghiuri și $(3n-k-3)$ muchii.*

# Elemente ale unei triangulări

- Dată o mulțime de puncte $\mathcal{P}$ și o triangulare $\mathcal{T}_P$ a sa: **vârfuri, muchii, triunghiuri**.
- Legătură cantitativă între aceste elemente?
- **Propoziție.** *Fie $\mathcal{P}$ o mulțime de $n$ puncte din plan nesituate toate pe o aceeași dreaptă. Notăm cu $k$ numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$. Orice triangulare a lui $\mathcal{P}$ are $(2n-k-2)$ triunghiuri și $(3n-k-3)$ muchii.*
- **Exemplu:** Cazul unui poligon convex: un poligon convex cu $n$ vârfuri poate fi triangulat cu $(n-2)$ triunghiuri, având $(2n-3)$ muchii.

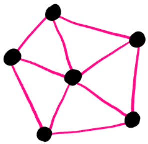


$\underline{n = 6}$

4 $\triangle$

9 muchii

# Demonstrație



Graf:

nodurile: punctele inițiale ($n$)

muchiile: laturile $\Delta$ ($n_m = ?$)

fețele: fețele $\Delta$ + fața exterioară

($n_t + 1$), $n_t = ?$

- Relația lui Euler: $n - n_m + (n_t + 1) = 2$
- Incidențe dintre muchii și fețe

$$\underbrace{2 \cdot n_m}_{\text{"perspectiva muchiilor"}} = \underbrace{\overset{\text{ptr. }\Delta}{3 \cdot n_t} + \overset{\text{ptr. fața exterioară}}{k}}_{\text{"perspectiva fețelor"}}$$

$\Rightarrow \ldots$

$\Rightarrow \ldots$

$n_m = \ldots$

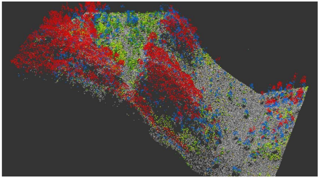
$n_t = \ldots$

# Problematizare

- **Problemă.** Se fac măsurători ale altitidinii pentru un teren. Se dorește reprezentarea tridimensională (cât mai sugestivă) . Alternativ: se dorește generarea unui teren pentru o aplicație.

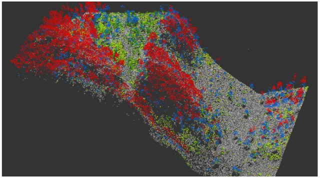
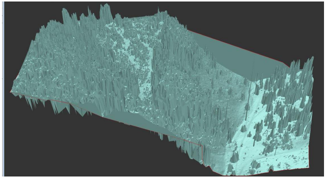
# Problematizare

- **Problemă.** Se fac măsurători ale altitidinii pentru un teren. Se dorește reprezentarea tridimensională (cât mai sugestivă) . Alternativ: se dorește generarea unui teren pentru o aplicație.



# Problematizare

- **Problemă.** Se fac măsurători ale altitidinii pentru un teren. Se dorește reprezentarea tridimensională (cât mai sugestivă) . Alternativ: se dorește generarea unui teren pentru o aplicație.

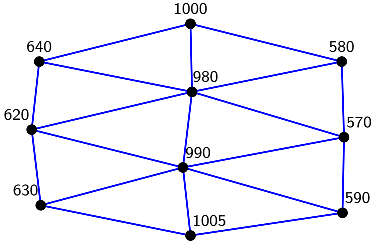



# Problematizare - continuare

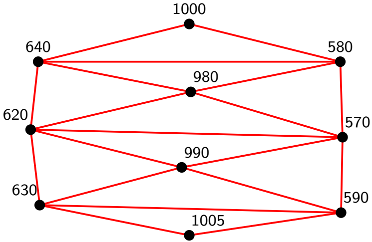
- **Problemă (reformulată).** Cum "comparăm triangulările" unei mulțimi de puncte fixate?

# Problematizare - continuare

- **Problemă (reformulată).** Cum "comparăm triangulările" unei mulțimi de puncte fixate?
- **Exemplu.** Măsurători ale altitudinii.



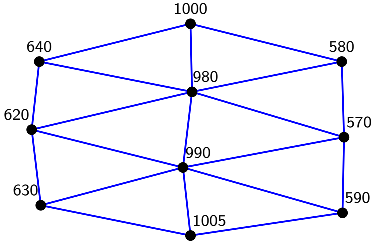

Triangulare 1



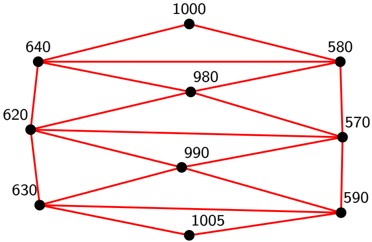

Triangulare 2

# Problematizare - continuare

- **Problemă (reformulată).** Cum "comparăm triangulările" unei mulțimi de puncte fixate?
- **Exemplu.** Măsurători ale altitudinii.




Triangulare 1




Triangulare 2

- **Întrebări naturale:** (i) Există o triangulare "convenabilă" a unei mulțimi de puncte? (ii) Cum poate fi determinată eficient o astfel de triangulare?

# Terminologie, triangulări legale

- Fixată: o mulțime de puncte $\mathcal{P}$. **În cele ce urmează vom presupune că $\mathcal{P}$ este o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$.**

# Terminologie, triangulări legale

- Fixată: o mulțime de puncte $\mathcal{P}$. **În cele ce urmează vom presupune că $\mathcal{P}$ este o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$.**
- Fie $\mathcal{T}$ o triangulare a lui $\mathcal{P}$ cu $m$ triunghiuri. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3m}$ unghiurile lui $\mathcal{T}$, ordonate crescător. **Vectorul unghiurilor lui $\mathcal{T}$ este** $A(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3m})$.

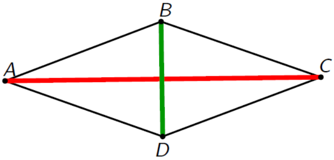
# Terminologie, triangulări legale

- Fixată: o mulțime de puncte $\mathcal{P}$. **În cele ce urmează vom presupune că $\mathcal{P}$ este o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$.**
- Fie $\mathcal{T}$ o triangulare a lui $\mathcal{P}$ cu $m$ triunghiuri. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3m}$ unghiurile lui $\mathcal{T}$, ordonate crescător. **Vectorul unghiurilor lui $\mathcal{T}$ este** $A(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3m})$.
- **Relație de ordine pe mulțimea triangulărilor lui $\mathcal{P}$:** ordinea lexicografică pentru vectorii unghiurilor. Fie $\mathcal{T}$ și $\mathcal{T}'$ două triangulări ale lui $\mathcal{P}$. Atunci $A(\mathcal{T}) > A(\mathcal{T}')$ dacă $\exists i$ astfel ca $\alpha_j = \alpha'_j$, $\forall 1 \leq j < i$ și $\alpha_i > \alpha'_i$.

# Terminologie, triangulări legale

- Fixată: o mulțime de puncte $\mathcal{P}$. **În cele ce urmează vom presupune că $\mathcal{P}$ este o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$.**
- Fie $\mathcal{T}$ o triangulare a lui $\mathcal{P}$ cu $m$ triunghiuri. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3m}$ unghiurile lui $\mathcal{T}$, ordonate crescător. **Vectorul unghiurilor lui $\mathcal{T}$ este** $A(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3m})$.
- **Relație de ordine pe mulțimea triangulărilor lui $\mathcal{P}$:** ordinea lexicografică pentru vectorii unghiurilor. Fie $\mathcal{T}$ și $\mathcal{T}'$ două triangulări ale lui $\mathcal{P}$. Atunci $A(\mathcal{T}) > A(\mathcal{T}')$ dacă $\exists i$ astfel ca $\alpha_j = \alpha'_j$, $\forall 1 \leq j < i$ și $\alpha_i > \alpha'_i$.
- **Triangulare unghiular optimă:** $\mathcal{T}$ astfel ca $A(\mathcal{T}) \geq A(\mathcal{T}')$, pentru orice triangulare $\mathcal{T}'$.

# Exemplu - cazul unui patrulater convex




diagonala AC
$\Rightarrow \Delta BAC$ și $\Delta DAC$

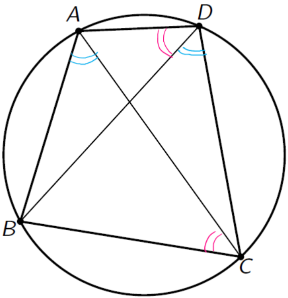
diagonala BD
$\rightarrow \Delta ABD$ și $\Delta CBD$

diagonala AC $\Rightarrow$ vectorul unghiurilor $(\alpha)$
BD $\Rightarrow$ — · — — $(\beta)$

$\alpha < \beta$

"cel mai mic unghi care apare în triangularea dată de AC este mai mic decât cel mai mic unghi care apare în triangularea dată de BD"

# Exemplu - cazul unui patrulater inscriptibil



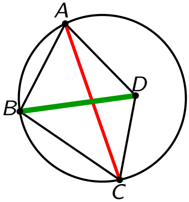

În acest caz triunghiurile formate de diagonale au "cele mai mici unghiuri" congruente ⟹ nu putem "distinge" între cele două diagonale

# Muchii ilegale

- **Conceptul de muchie ilegală.** Fie $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ fixate astfel ca $ABCD$ să fie un patrulater convex; fie $\mathcal{T}_{AC}$, $\mathcal{T}_{BD}$ triangulările date de diagonalele $AC$, respectiv $BD$. Muchia $AC$ este **ilegală** dacă
$$\min A(\mathcal{T}_{AC}) < \min A(\mathcal{T}_{BD}).$$

# Muchii ilegale

- **Conceptul de muchie ilegală.** Fie $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ fixate astfel ca $ABCD$ să fie un patrulater convex; fie $\mathcal{T}_{AC}$, $\mathcal{T}_{BD}$ triangulările date de diagonalele $AC$, respectiv $BD$. Muchia $AC$ este **ilegală** dacă
$$\min A(\mathcal{T}_{AC}) < \min A(\mathcal{T}_{BD}).$$
- **Criteriu geometric** pentru a testa dacă o muchie este legală: muchia $AC$, adiacentă cu triunghiurile $\Delta ACB$ și $\Delta ACD$ este ilegală dacă și numai dacă punctul $D$ este situat în interiorul cercului circumscris $\Delta ABC$.



# Muchii ilegale

- **Criteriu numeric / analitic** pentru a testa dacă o muchie este ilegală.
  - Pentru puncte $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B), C = (x_C, y_C), D = (x_D, y_D)$:

$$\Theta(A, B, C, D) = \begin{vmatrix} x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 & 1 \\ x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 & 1 \\ x_C & y_C & x_C^2 + y_C^2 & 1 \\ x_D & y_D & x_D^2 + y_D^2 & 1 \end{vmatrix}$$

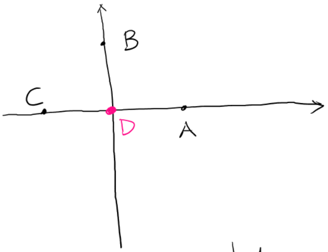
# Muchii ilegale

- **Criteriu numeric / analitic** pentru a testa dacă o muchie este ilegală.
  - Pentru puncte $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B), C = (x_C, y_C), D = (x_D, y_D)$:

$$\Theta(A, B, C, D) = \begin{vmatrix} x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 & 1 \\ x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 & 1 \\ x_C & y_C & x_C^2 + y_C^2 & 1 \\ x_D & y_D & x_D^2 + y_D^2 & 1 \end{vmatrix}$$

  - (i) Punctele $A, B, C, D$ sunt conciclice $\Leftrightarrow \Theta(A, B, C, D) = 0$.
    (ii) Fie $A, B, C$ astfel ca $ABC$ să fie un viraj la stânga. Un punct $D$ este situat în interiorul cercului circumscris $\Delta ABC \Leftrightarrow \Theta(A, B, C, D) > 0$.

# Exemplu




$A = (1, 0)$

$B = (0, 1)$

$C = (-1, 0)$

- $ABC$ este viraj la stânga

$D = (0, 0)$

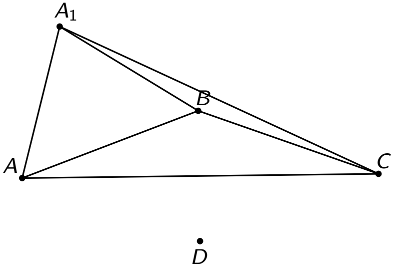
- $$\Theta(A, B, C, D) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

D este în interiorul cercului circumscris $\Delta ABC$.

Exercițiu calculați ptr. $E = (0, -1)$ și $F = (0, -2)$

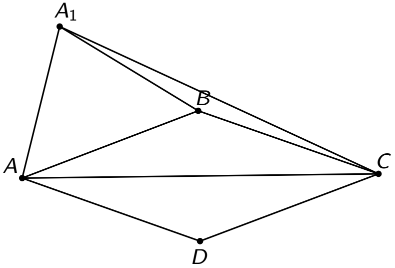
# Muchii ilegale, triangulări legale

- **Concluzie:** Dacă muchia $AC$ este ilegală, printr-un *flip* (înlocuirea ei cu $BD$), cel mai mic unghi poate fi mărit (local).



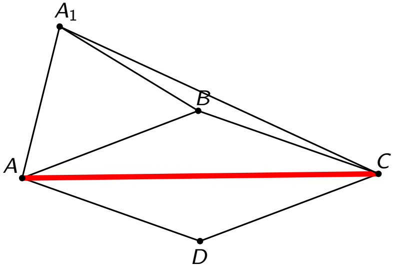
# Muchii ilegale, triangulări legale

- **Concluzie:** Dacă muchia $AC$ este ilegală, printr-un *flip* (înlocuirea ei cu $BD$), cel mai mic unghi poate fi mărit (local).



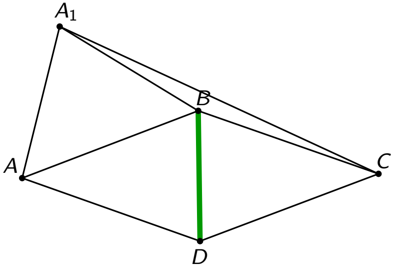
# Muchii ilegale, triangulări legale

- **Concluzie:** Dacă muchia $AC$ este ilegală, printr-un *flip* (înlocuirea ei cu $BD$), cel mai mic unghi poate fi mărit (local).



# Muchii ilegale, triangulări legale

- **Concluzie:** Dacă muchia $AC$ este ilegală, printr-un *flip* (înlocuirea ei cu $BD$), cel mai mic unghi poate fi mărit (local).



# Muchii ilegale, triangulări legale

- **Concluzie:** Dacă muchia $AC$ este ilegală, printr-un *flip* (înlocuirea ei cu $BD$), cel mai mic unghi poate fi mărit (local). Printr-un flip, vectorul unghiurilor crește.

# Muchii ilegale, triangulări legale

- **Concluzie:** Dacă muchia $AC$ este ilegală, printr-un *flip* (înlocuirea ei cu $BD$), cel mai mic unghi poate fi mărit (local). Printr-un flip, vectorul unghiurilor crește.
- **Concluzie (reformulare):** Fie $\mathcal{T}$ o triangulare cu o muchie ilegală $e$, fie $\mathcal{T}'$ triangularea obținută din $\mathcal{T}$ prin *flip*-ul muchiei $e$. Atunci $A(\mathcal{T}') > A(\mathcal{T})$.

# Muchii ilegale, triangulări legale

- **Concluzie:** Dacă muchia $AC$ este ilegală, printr-un *flip* (înlocuirea ei cu $BD$), cel mai mic unghi poate fi mărit (local). Printr-un flip, vectorul unghiurilor crește.
- **Concluzie (reformulare):** Fie $\mathcal{T}$ o triangulare cu o muchie ilegală $e$, fie $\mathcal{T}'$ triangularea obținută din $\mathcal{T}$ prin *flip*-ul muchiei $e$. Atunci $A(\mathcal{T}') > A(\mathcal{T})$.
- **Triangulare legală:** nu are muchii ilegale. **Fapt:** O triangulare legală a unei mulțimi cu $n$ puncte poate fi determinată printr-un algoritm incremental randomizat, cu complexitate-timp medie $O(n \log n)$.

# Triangulări unghiular optime vs. triangulări legale

- **Propoziție.** *Fie* $\mathcal{P}$ *o mulțime de puncte din plan.*
  (i) *Orice triangulare unghiular optimă este legală.*
  (ii) *Dacă* $\mathcal{P}$ *este în poziție generală (oricare patru puncte nu sunt conciclice), atunci există o unică triangulare legală, iar aceasta este unghiular optimă.*

# Triangulări unghiular optime vs. triangulări legale

- **Propoziție.** *Fie $\mathcal{P}$ o mulțime de puncte din plan.*
  (i) *Orice triangulare unghiular optimă este legală.*
  (ii) *Dacă $\mathcal{P}$ este în poziție generală (oricare patru puncte nu sunt conciclice), atunci există o unică triangulare legală, iar aceasta este unghiular optimă.*
- **Teoremă.** *Fie $\mathcal{P}$ o mulțime de $n$ puncte din plan, în poziție generală. Triangularea unghiular optimă poate fi construită, folosind un algoritm incremental randomizat, în timp mediu $O(n \log n)$, folosind $O(n)$ memorie medie.*