Noţiuni introductive

Multiset

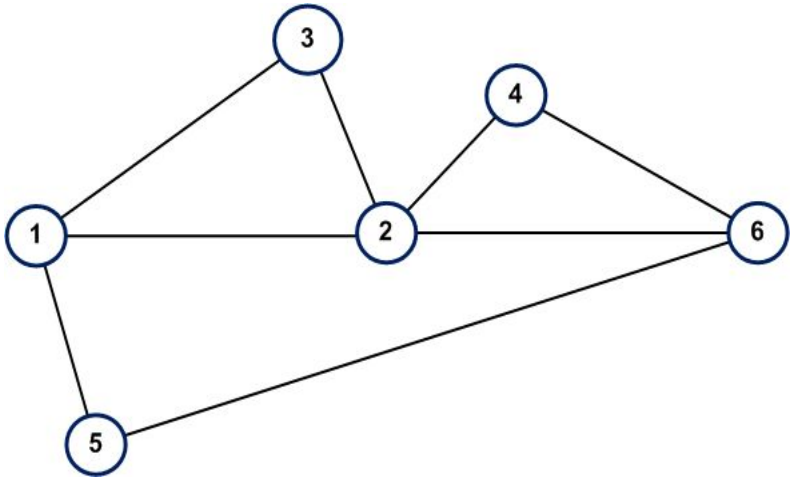
- S o mulţime (finită) nevidă
- **Multiset**
  - **Intuitiv: O “mulțime” unde elementele se pot repeta**

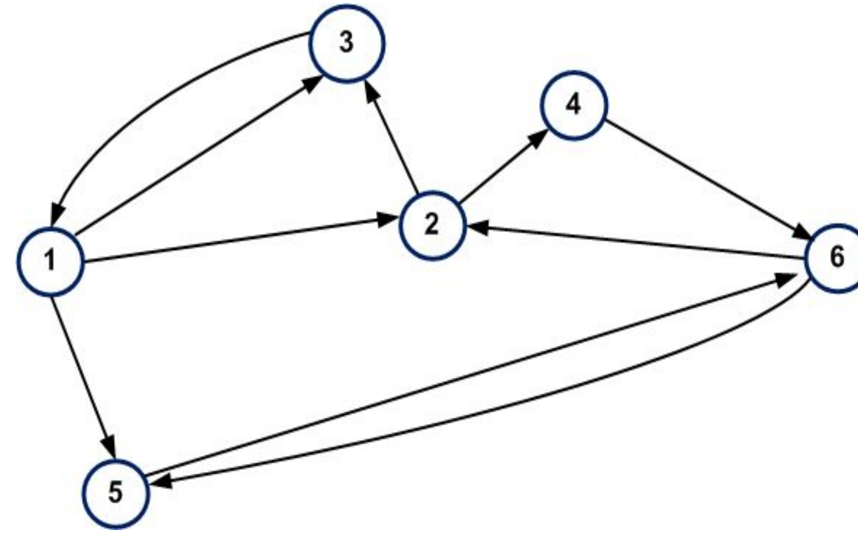
Multiset

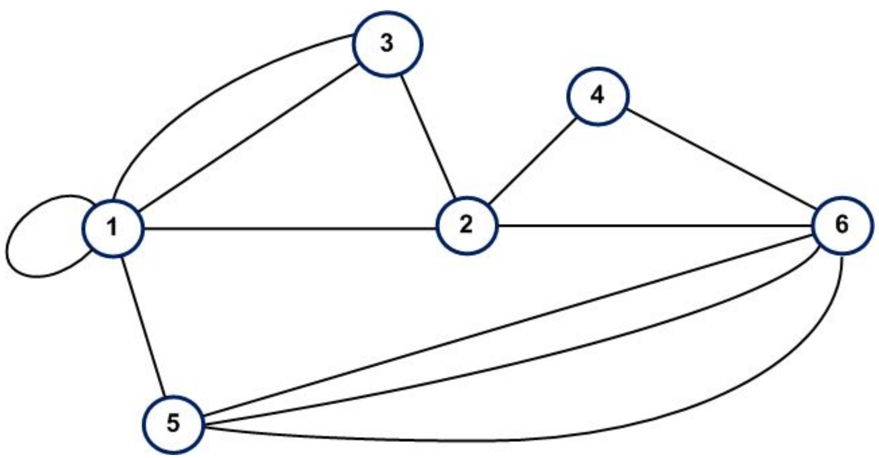
- S o mulţime (finită) nevidă
- **Multiset**
  - **R = (S, r), r : S → ℕ** **funcţie de multiplicitate**
- **Notaţie**
  - **$R = \{x^{r(x)} \mid x \in S\}$**

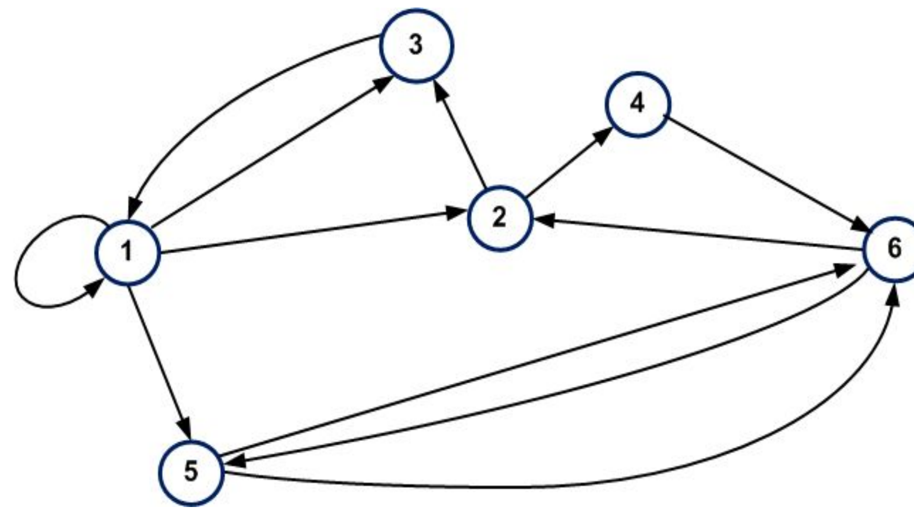
Multiset

- **Exemplu**
  - **S = {1, 2, 3, 4, 5}**
  - **R = {2^2, 3, 5^3}**
- |R| = 2+1+3 = 6 – suma multiplicităților
- 1 ∉ R

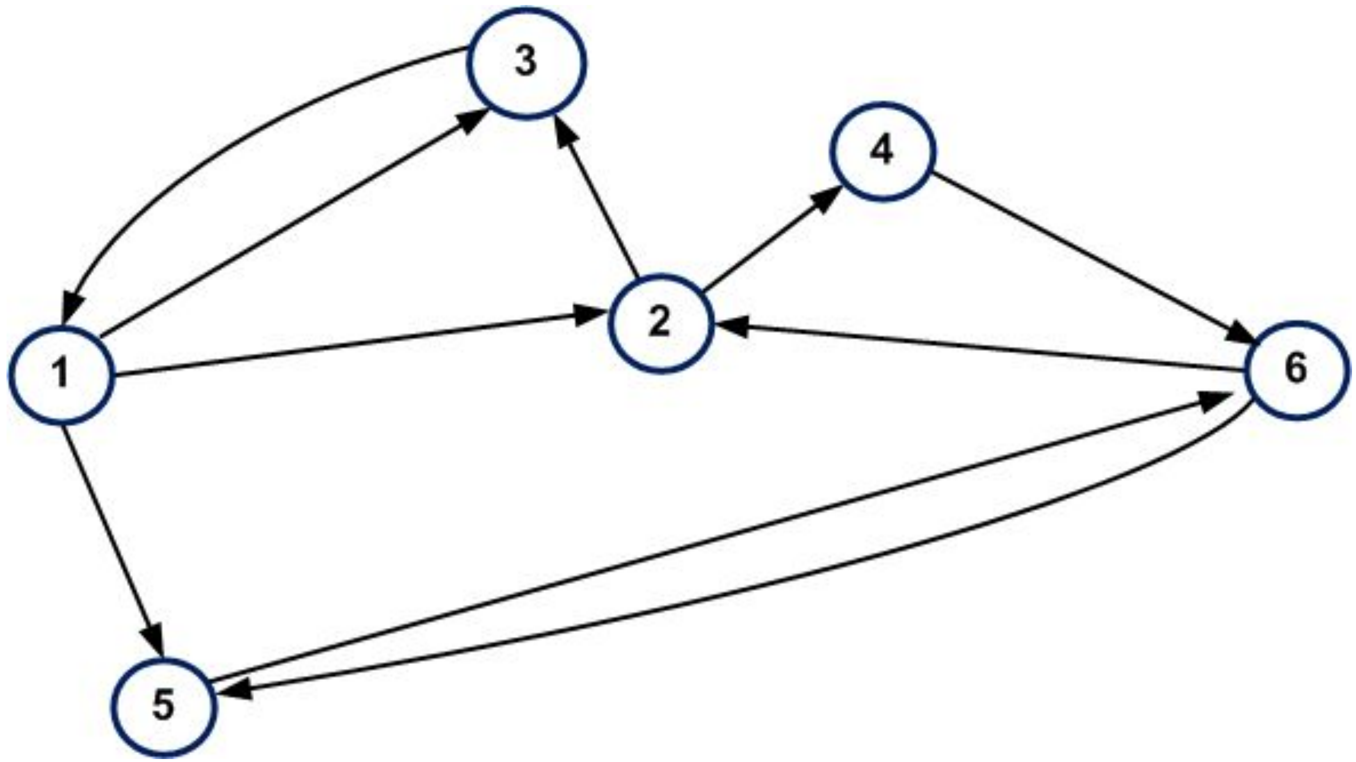

3
4
1
2
6
5


3
4
2
1
6
5


3
4
1
2
6
5


3
4
2
1
6
5

Graf orientat



Graf orientat

- **Graf orientat**: $G = (V, E)$
  - **V – finită**
  - **E - perechi (ordonate) de 2 elemente distincte din V**
  - $v \in V$ **- vârf**
  - $e = (u, v)$ **= uv - arc**
    - $u = e^-$ - **vârf iniţial / origine / extremitate iniţială**
    - $v = e^+$ - **vârf final / terminus / extremitate finală**

Graf orientat

- G = (V, E)
  - $d_G^-(u)$ - **grad interior**

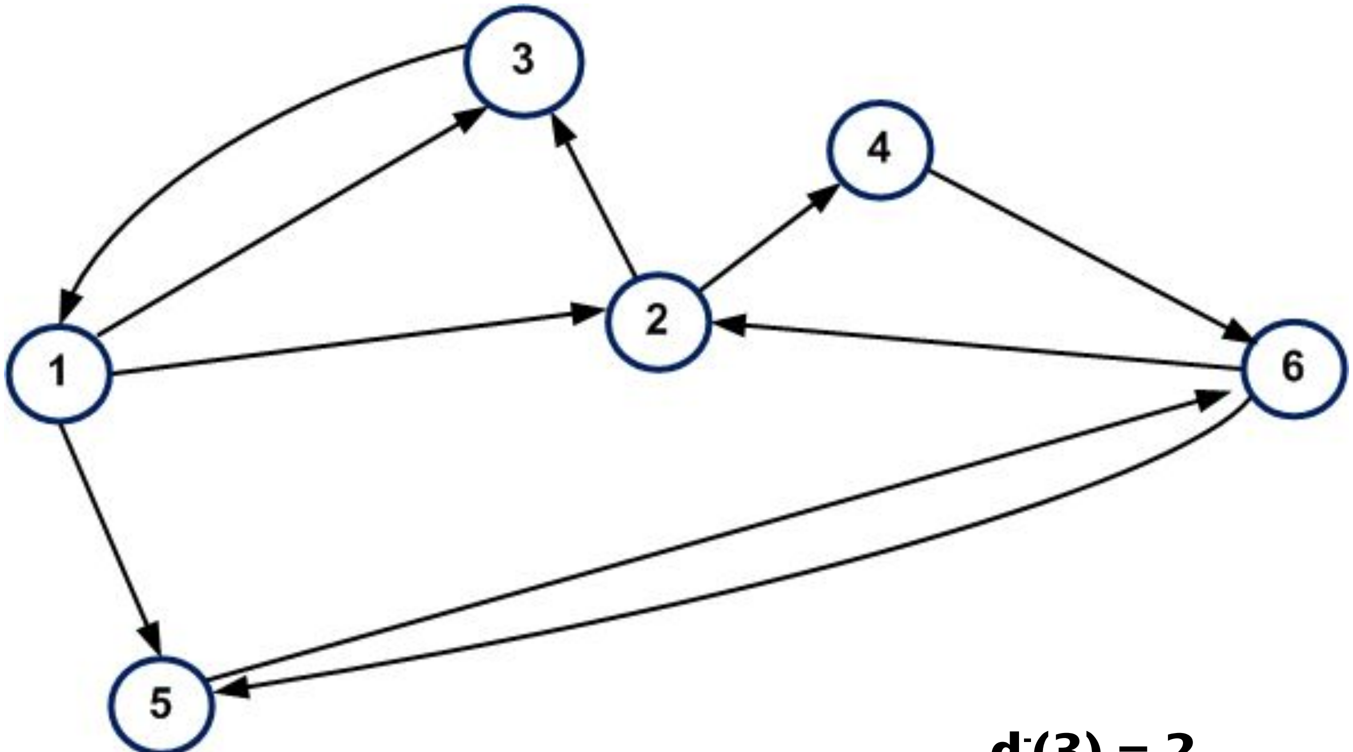
    $$d_G^-(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate finala pentru } e\}|$$

  - $d_G^+(u)$ - **grad exterior**

    $$d_G^+(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate initiala pentru } e\}|$$

  - $d_G(u)$ - **grad**

    $$d_G(u) = d_G^+(u) + d_G^-(u)$$



$d^-(3) = 2$

$d^+(3) = 1$

Graf orientat

- Are loc relația

$$\sum_{u \in V} d_G^-(u) = \sum_{u \in V} d_G^+(u) = |E|$$

Multisetul gradelor

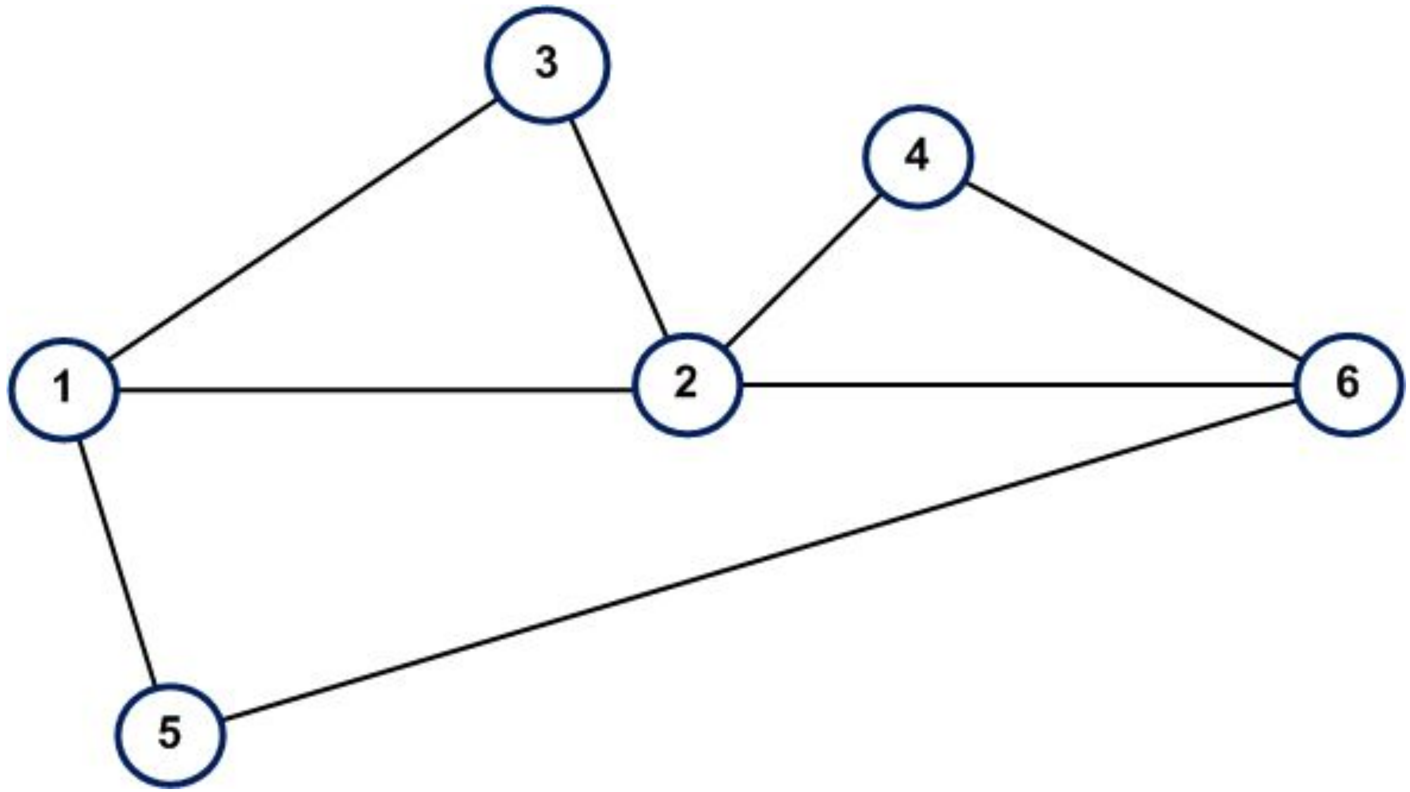
- **G orientat, V = {v_1, v_2, …, v_n}**
  - **Multisetul gradelor interioare**

$$s^-(G) = \{d_G^-(v_1), ..., d_G^-(v_n)\}$$

  - **Multisetul gradelor exterioare**

$$s^+(G) = \{d_G^+(v_1), ..., d_G^+(v_n)\}$$

Graf neorientat



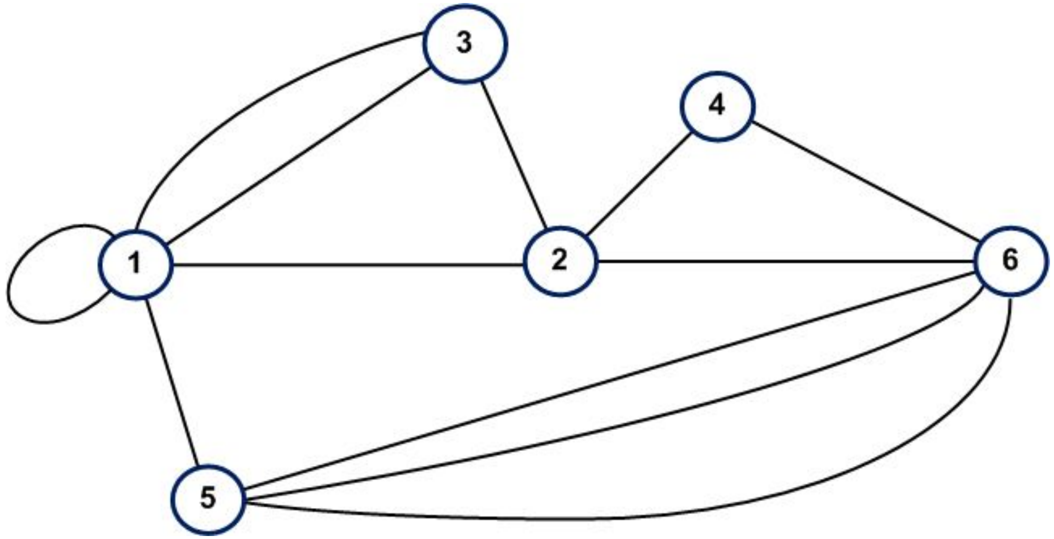
Graf neorientat

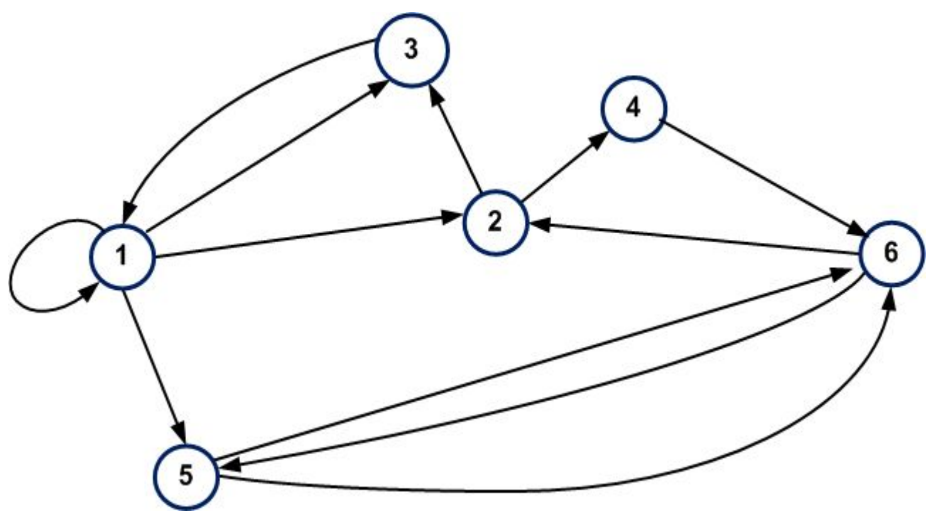
- **Graf neorientat**: G = (V, E)
  - **V – finită**
  - **E - submulțimi de 2 elemente (distincte) din V**
  - $v \in V$ - **vârf / nod**
  - $e = \{u,v\} = uv$ - **muchie**
    - u, v - **capete / extremităţi**

Notaţii

- $V(G)$, $E(G)$
- $e = uv$

Multigraf neorientat/orientat





Multigraf

- **$G = (V, E, r)$**

  $r(e)$ – **multiplicitatea muchiei e**

Multigraf neorientat

- **G = (V, E, r)**

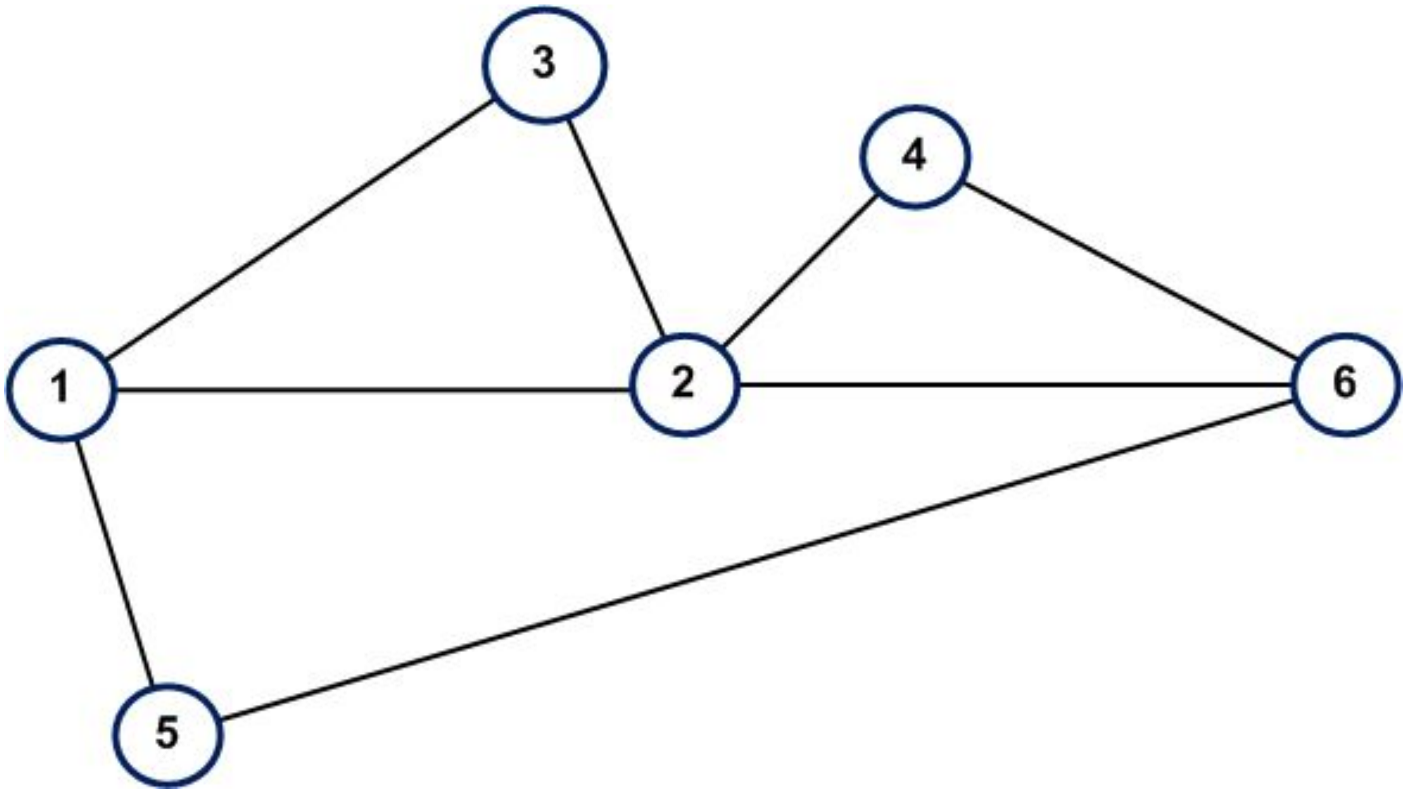
  r(e) – multiplicitatea muchiei e

  - e = {u,u} = **buclă**
  - e cu r(e) >1 = **muchie multiplă**

$$d_G(u) = |\{e \in E \mid e \text{ nu este buclă}, u \text{ extremitate a lui } e\}| +$$
$$2 \cdot |\{e \in E \mid e \text{ este buclă}, u \text{ extremitate a lui } e\}|$$

Alte noţiuni fundamentale

Adiacență. Incidență


3
4
1
2
6
5

Adiacență. Incidență

- Fie $G = (V, E)$ un graf **neorientat**
  - u și v $\in$ V sunt **adiacente** dacă uv $\in$ E
  - Un **vecin** al lui u $\in$ V este un vârf adiacent cu el
  - **Notație** $N_G(u)$ = mulțimea vecinilor lui u

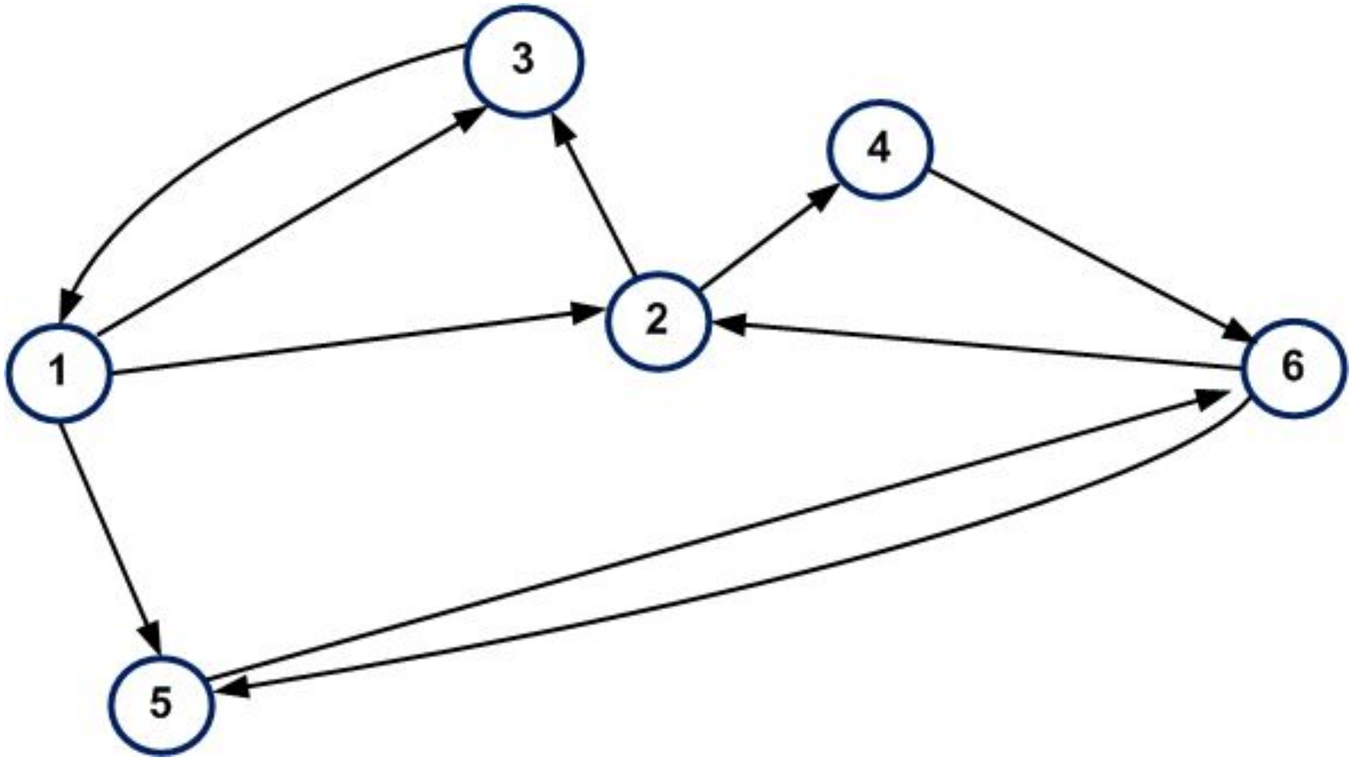
Adiacență. Incidență

- Fie $G = (V, E)$ un graf **neorientat**
  - O muchie $e \in E$ este **incidentă** cu un vârf u dacă u este extremitate a lui e
  - e și $f \in E$ sunt **adiacente** dacă există un vârf în care sunt incidente (au o extremitate în comun)

Drumuri. Circuite

Drumuri. Circuite

- Drum (walk)
- Drum simplu (trail)
- Drum elementar (path)
- Circuit + elementar
- Lungimea unui drum
- Distanță între două vârfuri


3
4
2
1
6
5

Drumuri. Circuite

Fie G un graf **orientat**

- Un **drum** este o secvență P de vârfuri

  $P = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k]$

  unde $v_1, \ldots, v_k \in V(G)$

  cu proprietatea că între oricare două vârfuri consecutive există arc:

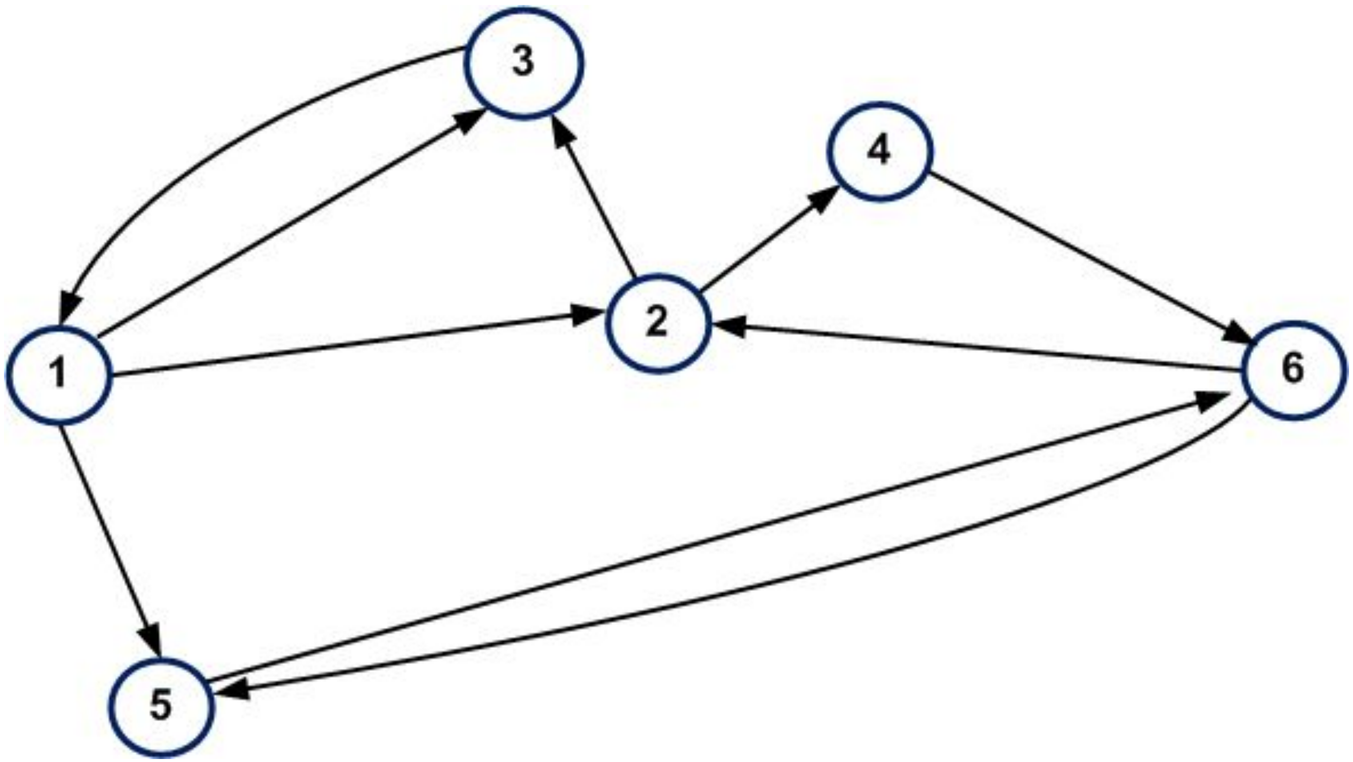
  $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, $\forall\ i \in \{1, \ldots, k - 1\}$

Drumuri. Circuite

Fie G un graf **orientat și un drum**

$$P = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k]$$

- P este **drum simplu** dacă nu conține un arc de mai multe ori ($(v_i, v_{i+1}) \neq (v_j, v_{j+1})$, $\forall i \neq j$)
- P este **drum elementar** dacă nu conține un vârf de mai multe ori ($v_i \neq v_j$, $\forall i \neq j$)



[1, 2, 4, 6, 2, 4] – drum care nu este simplu

[1, 2, 4, 6, 2, 3] – drum simplu care nu este elementar

[1, 2, 4, 6] – drum elementar

Drumuri. Circuite

$P = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k]$

- **Lungimea** lui P = **l(P) = k-1 (**cardinalul multisetului arcelor lui P)

- v_1 și v_k se numesc **capetele/ extremitățile** lui P

- P se numește și **v_1-v_k lanț**

Drumuri. Circuite

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$$

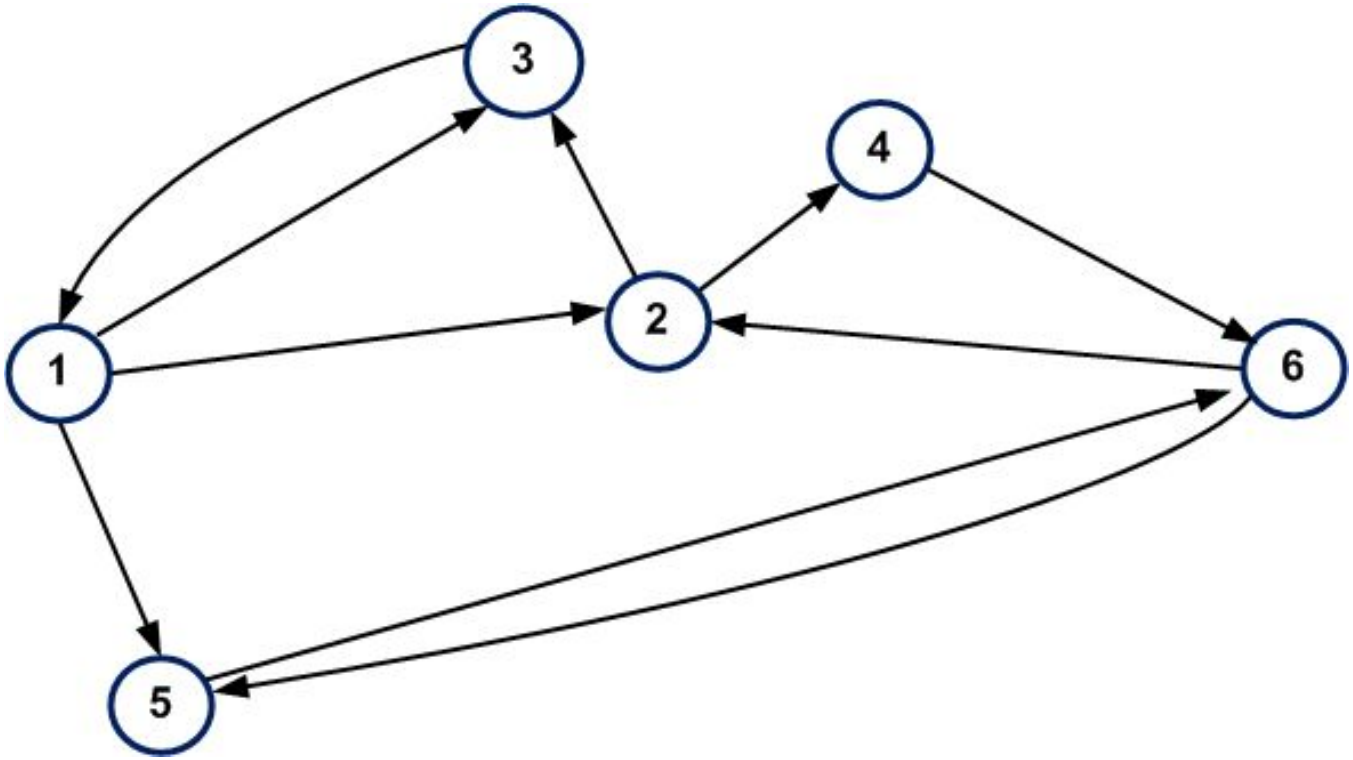
- Notăm
  - $V(P) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$
  - $e_i = (v_i, v_{i+1})$
  - $E(P) = \{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}\}$

Drumuri. Circuite

- Pentru două vârfuri u și v definim **distanța de la u la v** astfel:

$$d_G(u,v)=\begin{cases}\mathbf{0},\ \text{daca } \boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{\infty},\ \text{daca nu exista } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum in } \boldsymbol{G}\\ \mathbf{min}\{\boldsymbol{l}(\boldsymbol{P})\,|\,\boldsymbol{P} \text{ este } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum in } \boldsymbol{G}\},\ \text{altfel}\end{cases}$$

(cea mai mică lungime a unui u-v drum)


3
4
2
1
6
5

Drumuri. Circuite

- Pentru două vârfuri u și v definim **distanța de la u la v** astfel:

$$d_G(u,v)=\begin{cases}\mathbf{0}, & \text{daca } \boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{\infty}, & \text{daca nu exista } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum in } \boldsymbol{G}\\ \mathbf{min}\{\boldsymbol{l}(\boldsymbol{P})\mid \boldsymbol{P} \text{ este } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum in } \boldsymbol{G}\}, & \text{altfel}\end{cases}$$

(cea mai mică lungime a unui u-v drum)

- Un u-v drum de lungime $d_G(u,v)$ se numește **drum minim de la u la v**
- Vom nota și $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ dacă G se deduce din context

Drumuri. Circuite

- Un **circuit** este un drum simplu cu capetele identice

  $C = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_{k,} \; v_1]$

- **Circuit elementar**

- **Notații** V(C), E(C)

Drumuri. Circuite

- Un **circuit** este un drum simplu cu capetele identice

  $C = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k, v_1]$

- C este **circuit simplu** - dacă drumul asociat este simplu

- **Circuit elementar**

- **Notații** V(C), E(C)

Lanțuri. Cicluri

Lanțuri. Cicluri

Pentru G graf **neorientat – noțiuni similare**

- Un **lanț** este o secvență P de vârfuri cu proprietatea că oricare două vârfuri consecutive sunt adiacente

  $P = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k]$

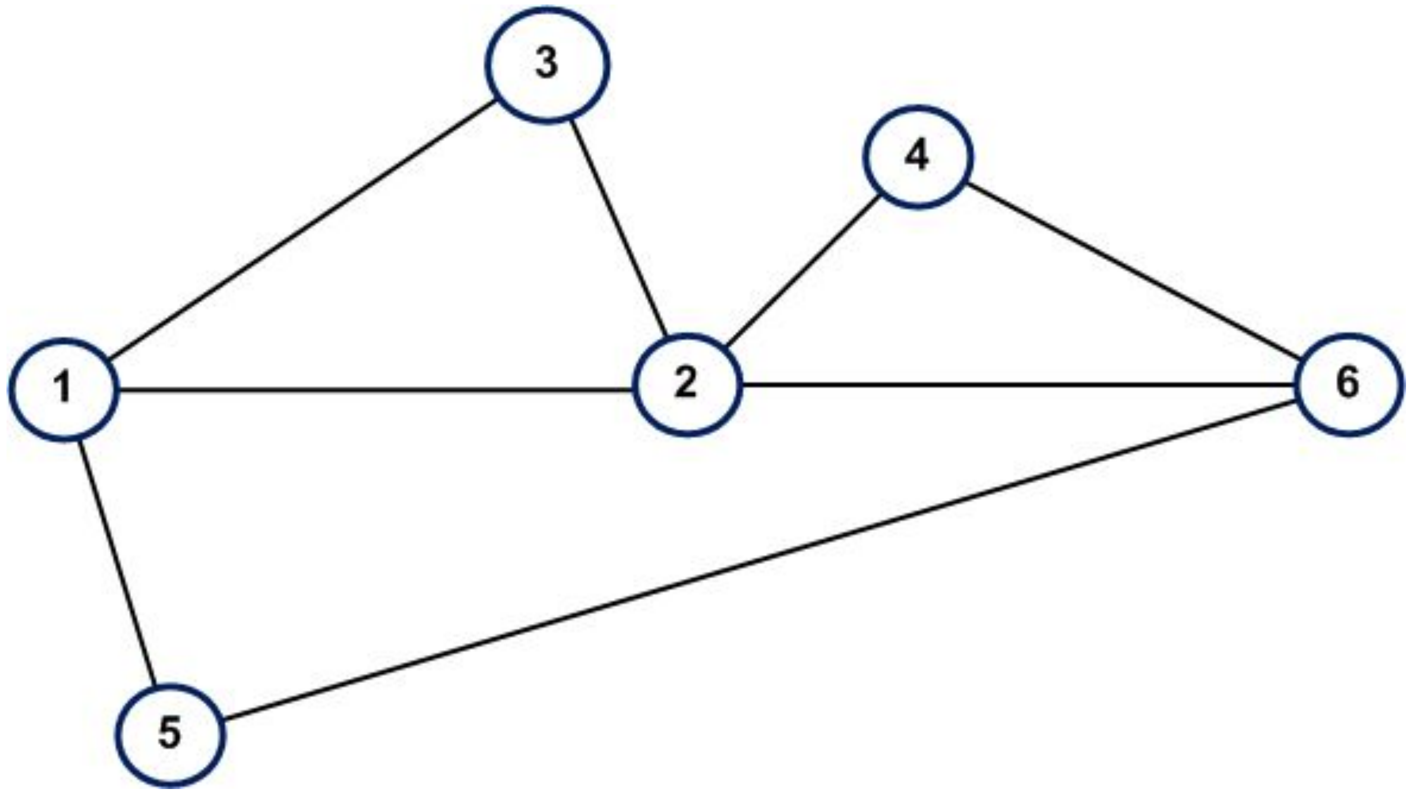
  - **lanț simplu** / **lanț elementar / lungime**
  - **ciclu / ciclu elementar**
  - **distanță / lanț minim**

Lanțuri. Cicluri

Observație

- În cazul unui graf simplu putem descrie un lanț/ciclu doar ca o **succesiune de vârfuri** (fără a mai preciza și muchiile):

  $\mathbf{P = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k]}$

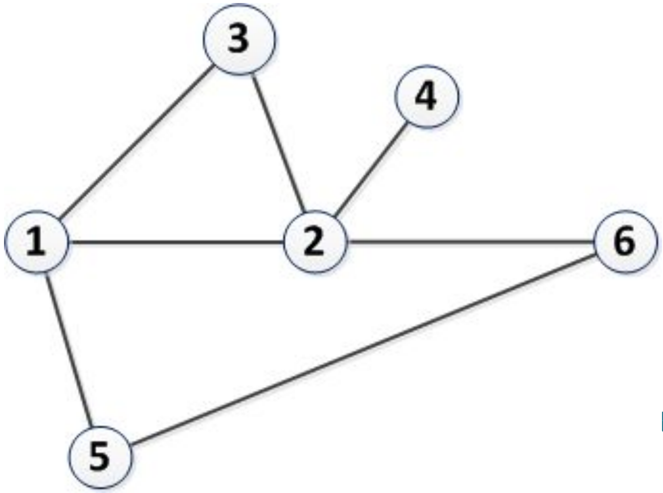


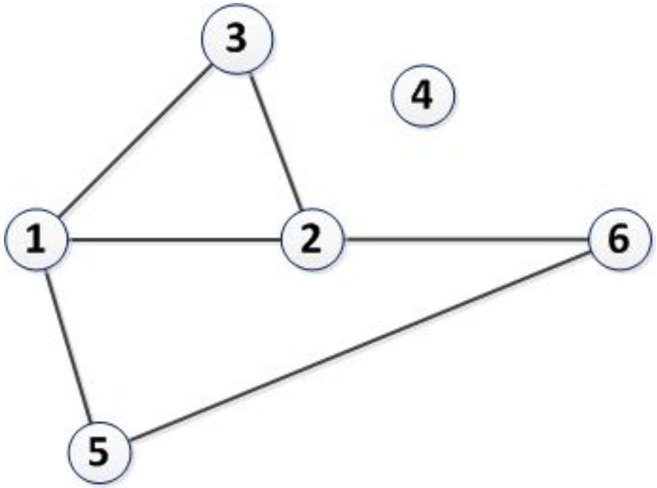
3
4
1
2
6
5

Graf parţial. Subgraf. Conexitate

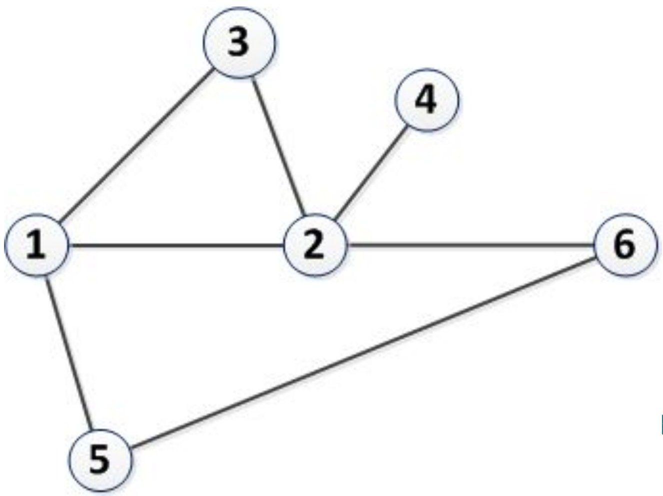
Graf parțial. Subgraf

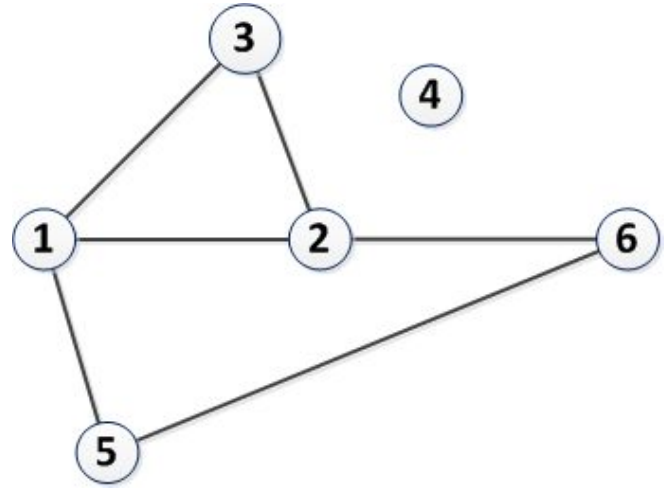
- graf parțial
- subgraf
- subgraf indus



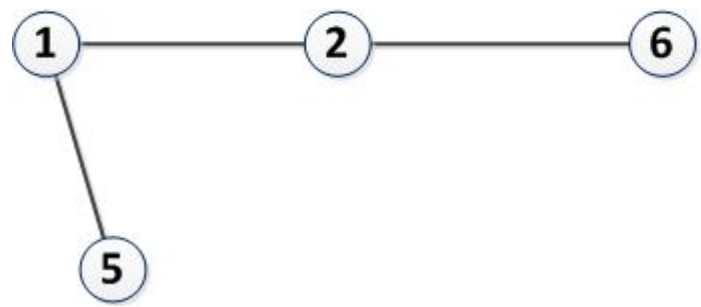


graf parțial

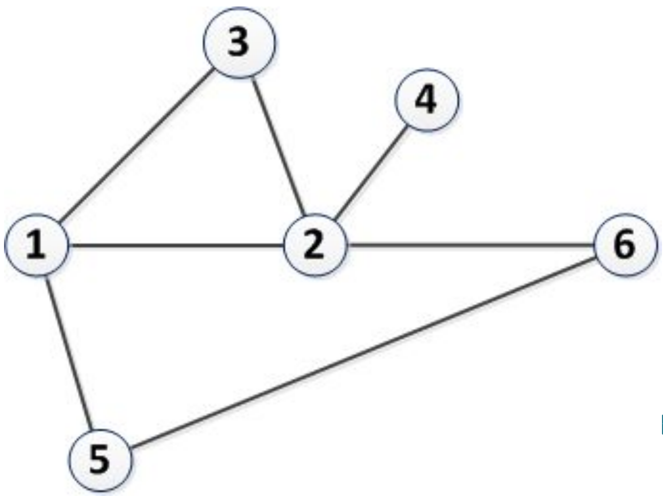


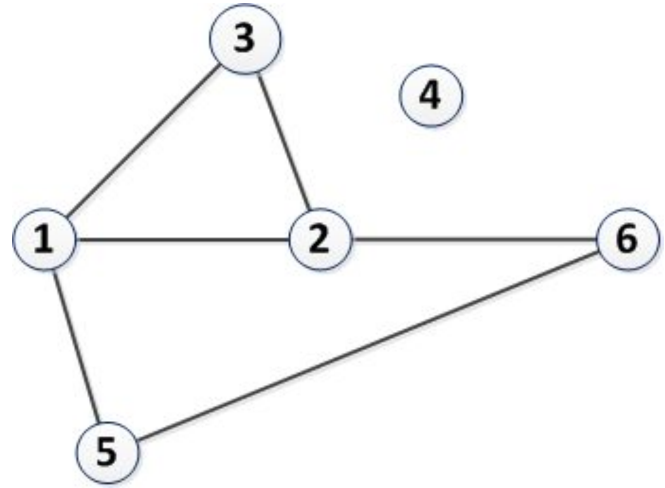


graf parțial

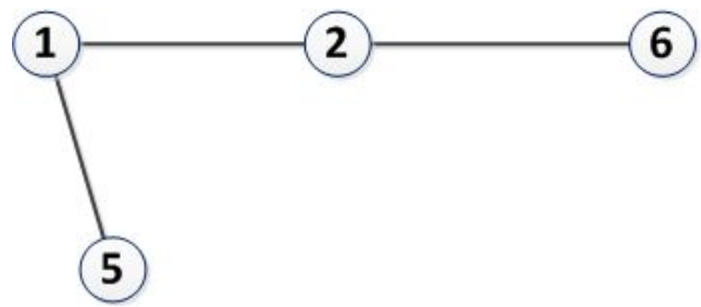


subgraf

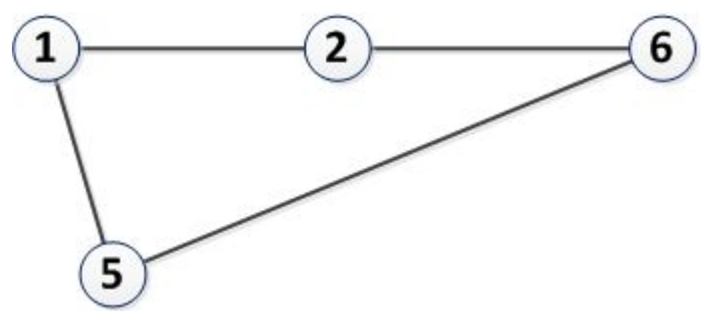




graf parțial



subgraf



subgraf indus de {1,2,5,6}

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \leq G}$) dacă

  $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \leq G}$) dacă

  $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$

- G_1 este **subgraf** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \prec G}$) dacă

  $V_1 \subseteq V, \quad E_1 \subseteq E$

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \leq G}$) dacă

  $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$

- G_1 este **subgraf** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \prec G}$) dacă

  $V_1 \subseteq V, \quad E_1 \subseteq E$

- G_1 este **subgraf indus de V_1 în** G (vom nota $\mathbf{G_1 = G[V_1]}$) dacă

  $V_1 \subseteq V,$

  $E_1 = \{e \mid e \in E(G), \text{ e are ambele extremități în } V_1\}$

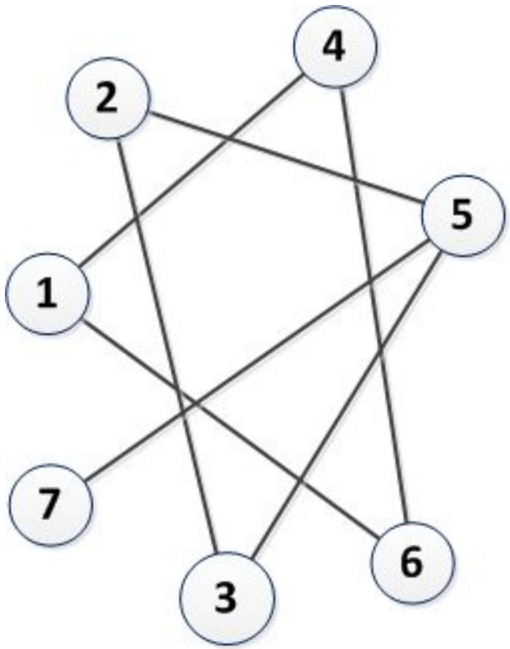
  (toate arcele/muchiile cu extremități în V_1)

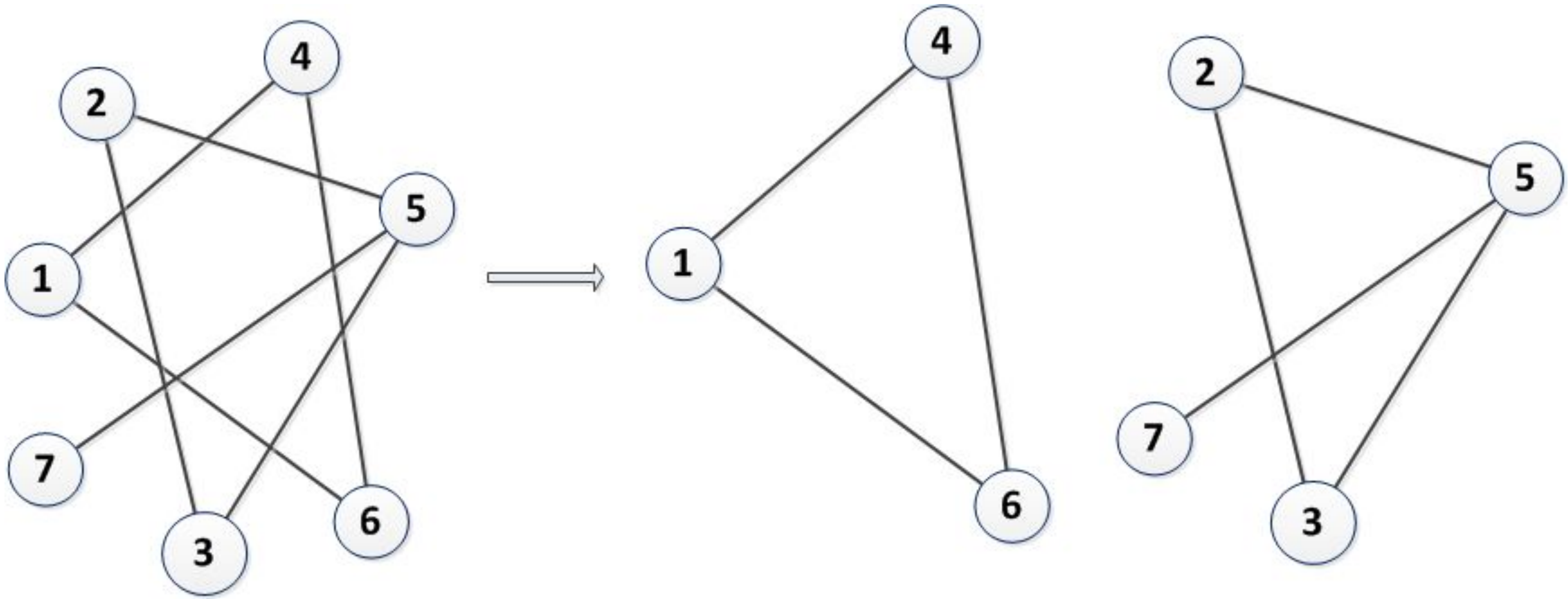
Conexitate

Fie G = (V, E) un graf neorientat

- **graf conex**

- **componentă conexă**


4
2
5
1
7
6
3



două componente conexe

Conexitate

Fie G = (V, E) un graf neorientat

- G este **graf conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un lanț

Conexitate

Fie G = (V, E) un graf neorientat

- G este **graf conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un lanț

- O **componentă conexă** a lui G este un subgraf **<u>indus</u>** conex maximal (care nu este inclus în alt subgraf conex)

Conexitate

Fie G = (V, E) un graf neorientat

- G este **graf conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un lanț

- O **componentă conexă** a lui G este un subgraf indus conex maximal (care nu este inclus în alt subgraf conex)

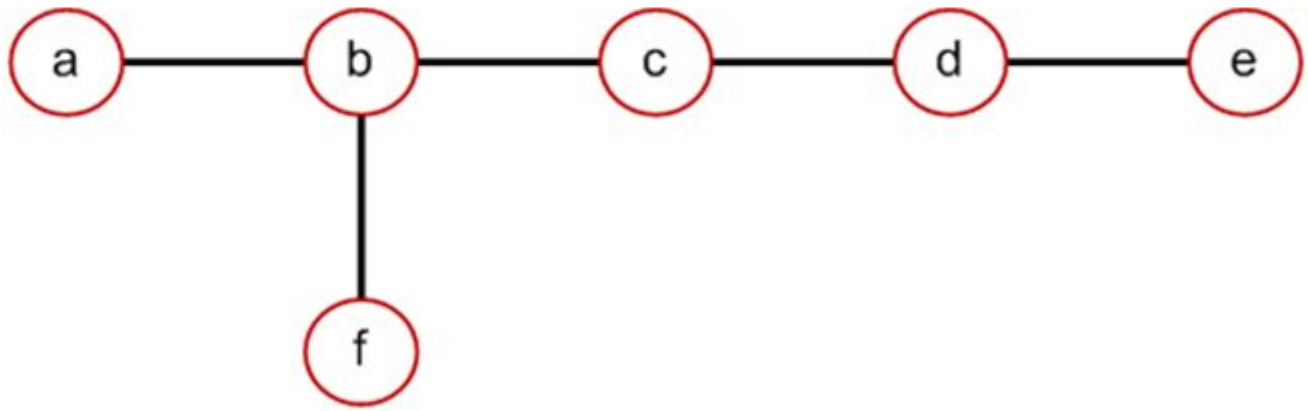
- Pentru cazul orientat – **tare-conexitate**

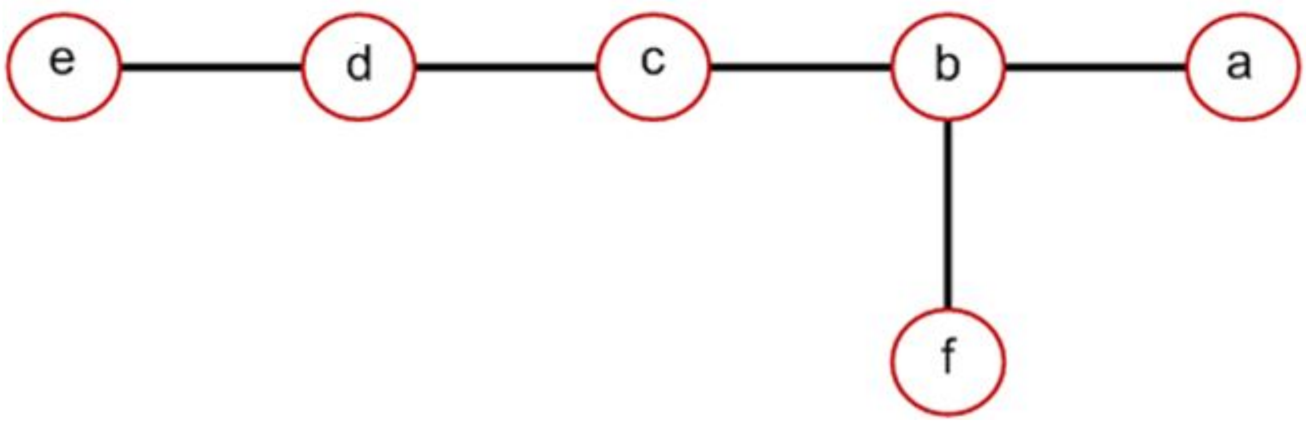
Notaţii

- **G – v** , $v \in V(G)$
- **G – e** , $e \in E(G)$
- **G – V '** , $V' \subseteq V(G)$
- **G – E'** , $E' \subseteq E(G)$
- **G + e**

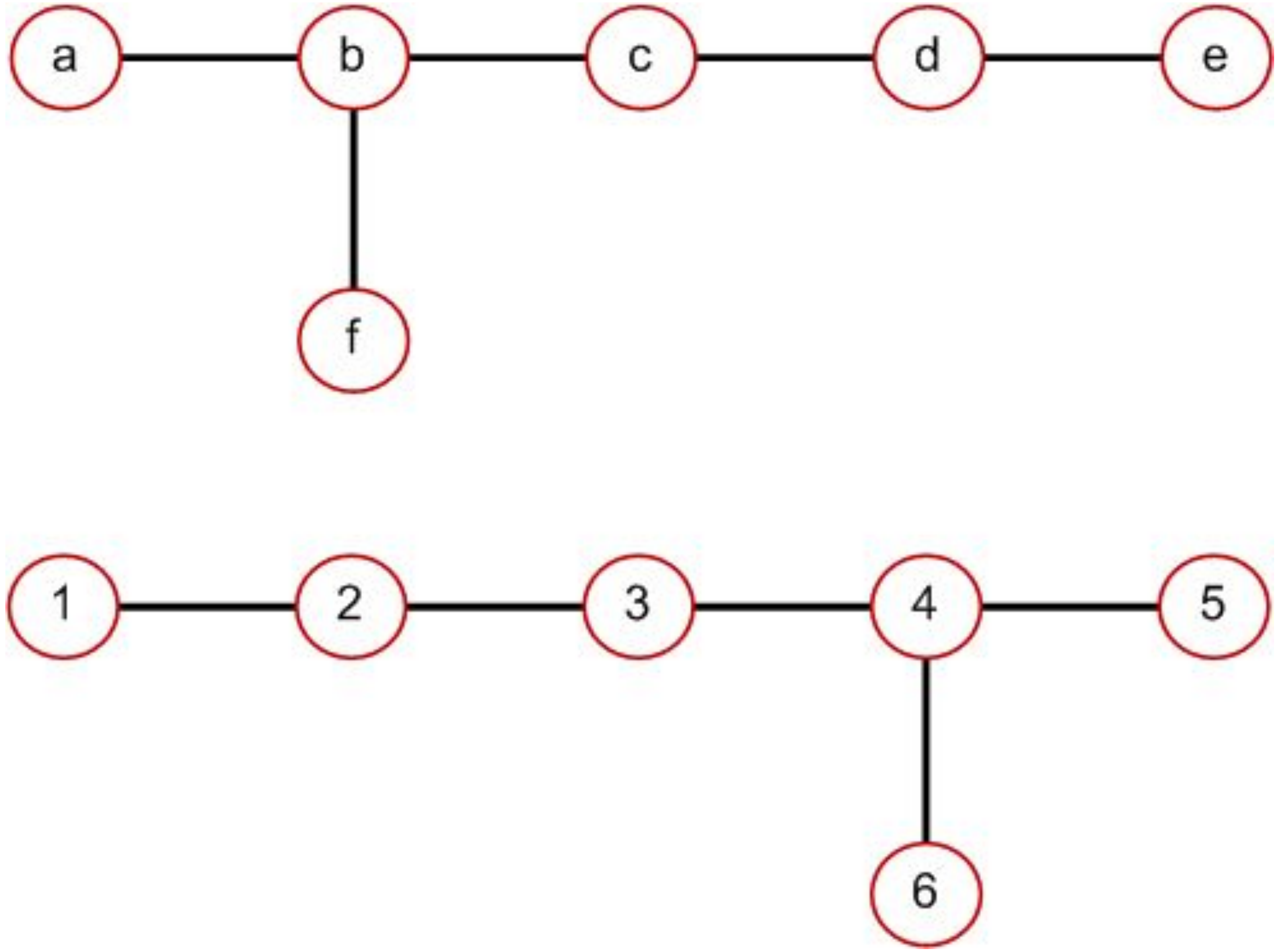
Egalitate. Izomorfism

Egalitate





Egalitate?



Izomorfism

Fie G_1, G_2 două grafuri

- $G_1 = (V_1, E_1)$
- $G_2 = (V_2, E_2)$

Grafurile G_1 și G_2 sunt **izomorfe** ($\mathbf{G_1 \sim G_2}$) $\Leftrightarrow$

există $f : V_1 \to V_2$ bijectivă cu

$$\mathbf{uv \in E_1 \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E_2}$$

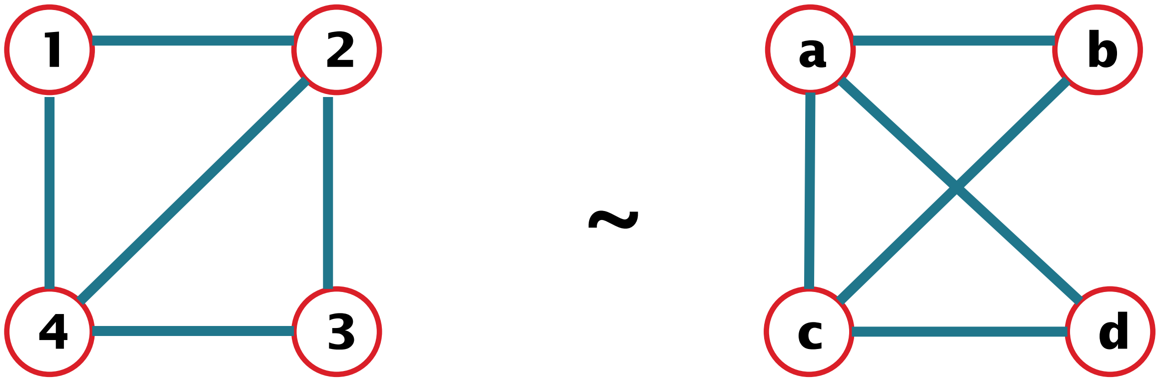
pentru orice $u,v \in V_1$

(f conservă adiacența și neadiacența)

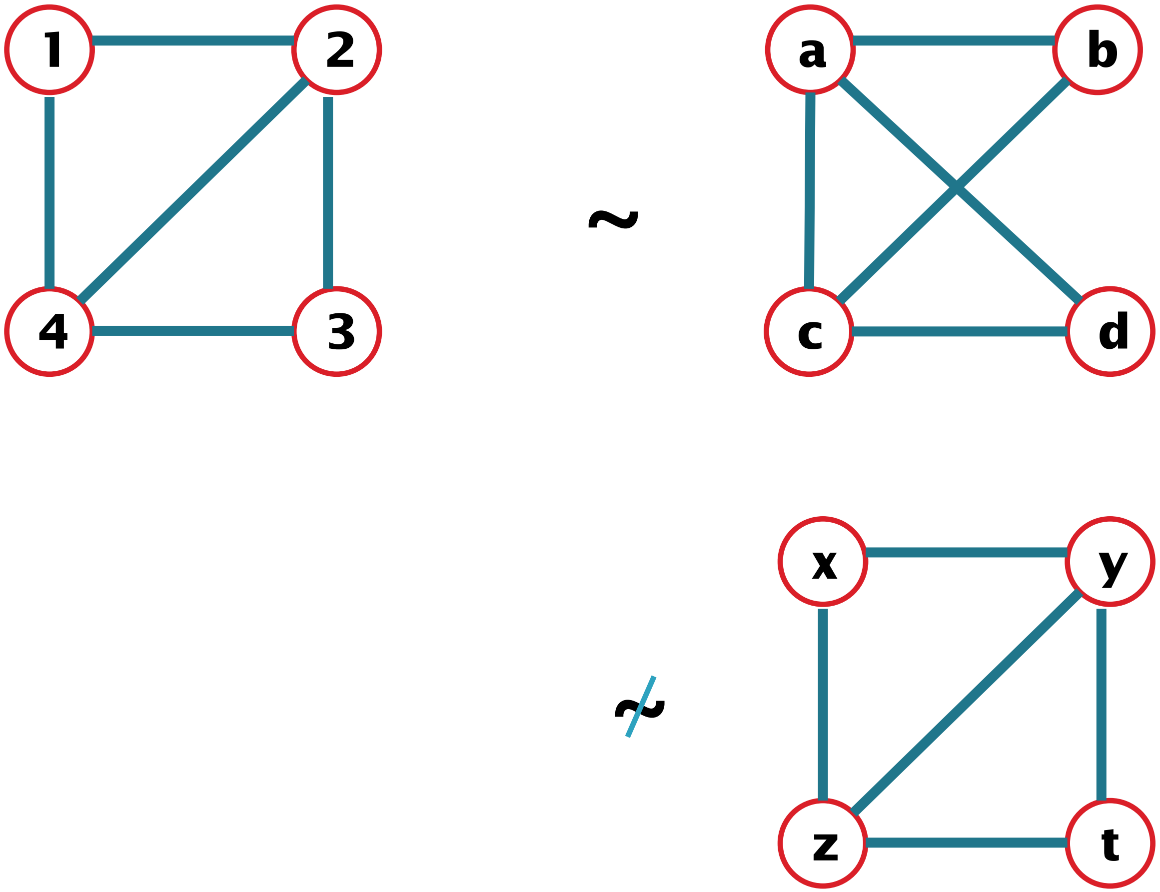
Izomorfism

Interpretare: se pot reprezenta în plan prin același desen

Izomorfism



Izomorfism

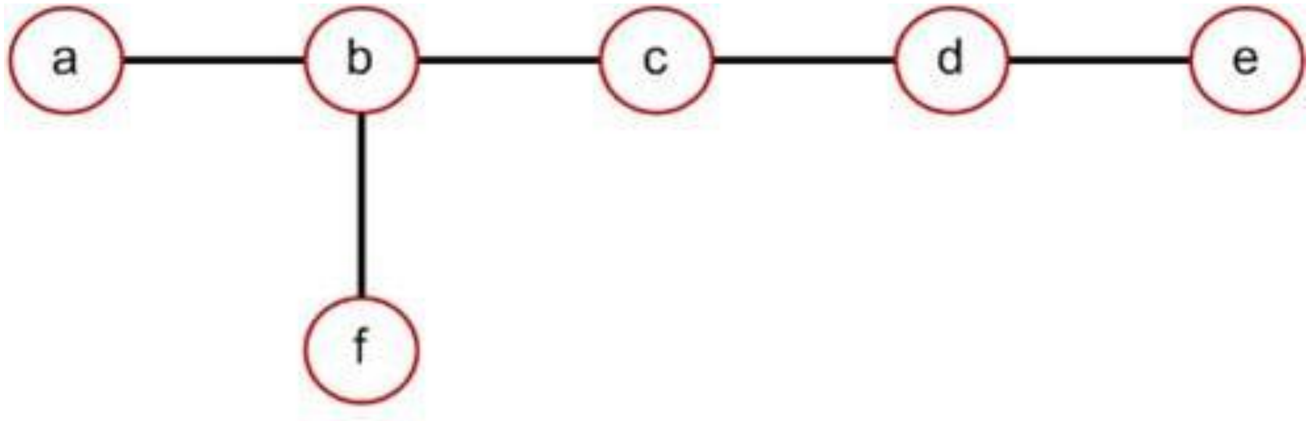


Izomorfism

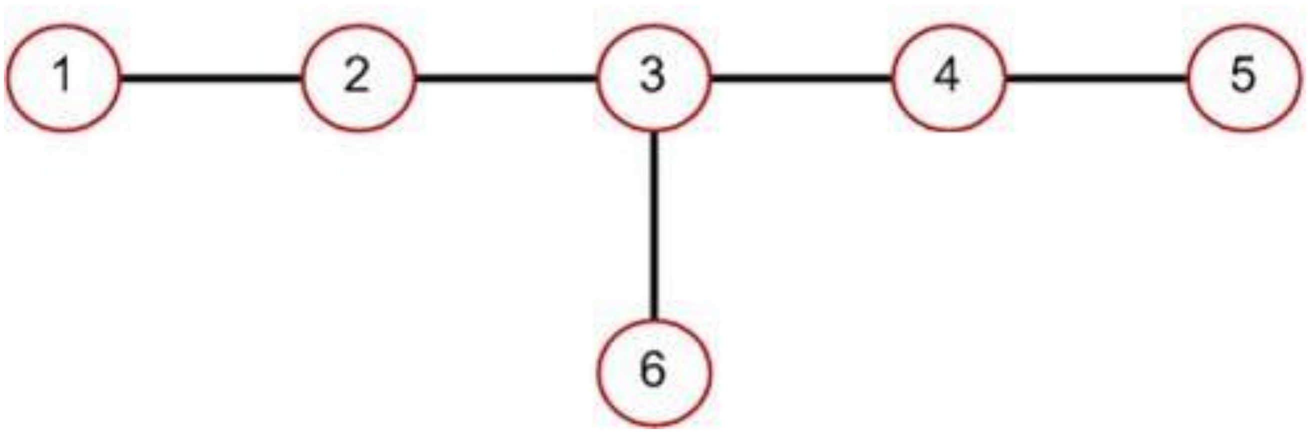
- $G_1 \sim G_2 \Rightarrow s(G_1) = s(G_2)$

- $s(G_1) = s(G_2) \not\Rightarrow G_1 \sim G_2$?

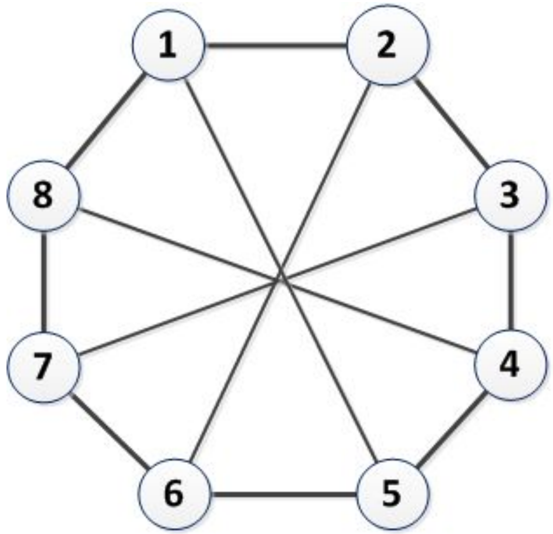
Izomorfism

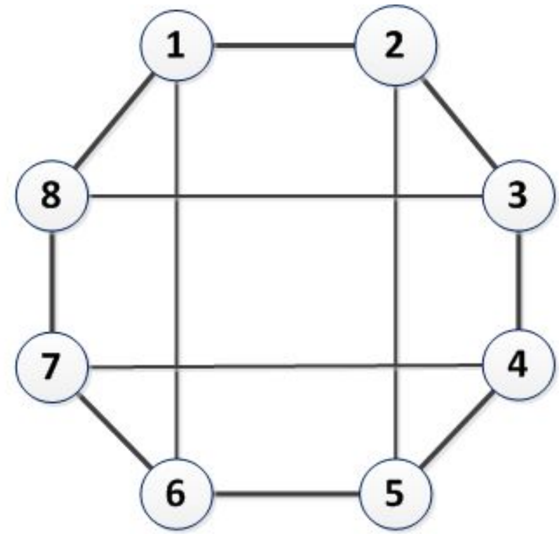


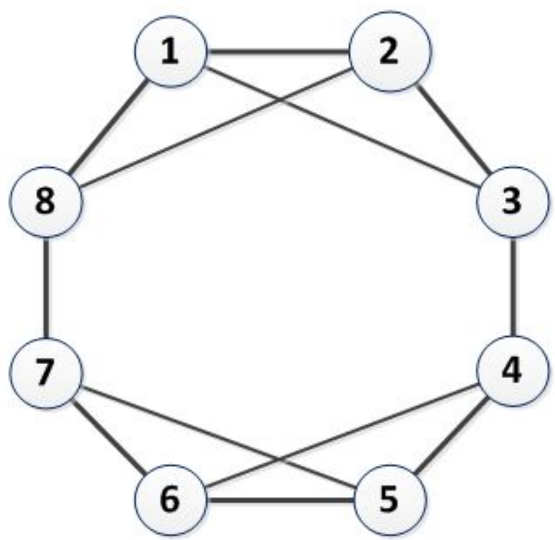
Izomorfe?



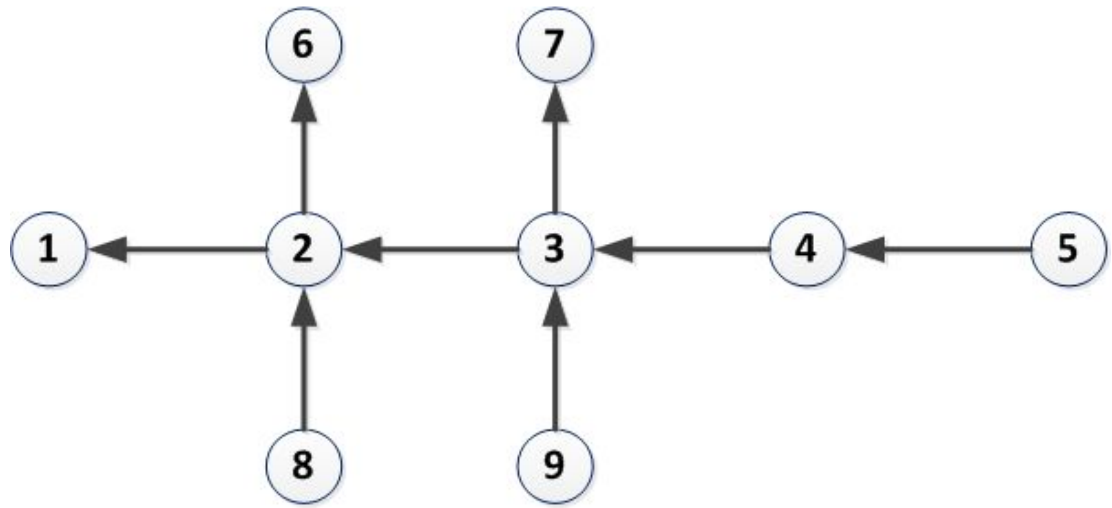
Care dintre aceste grafuri sunt izomorfe?

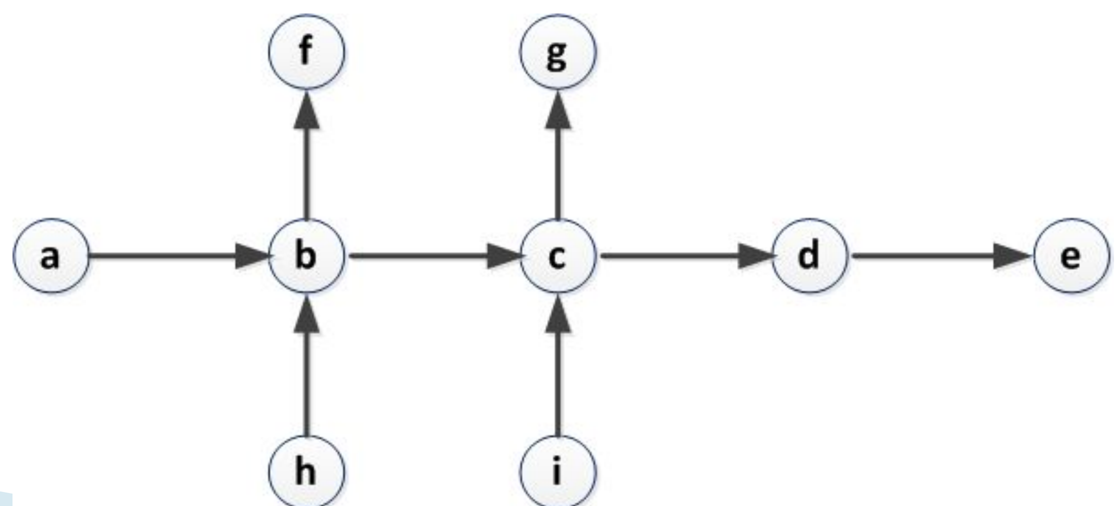






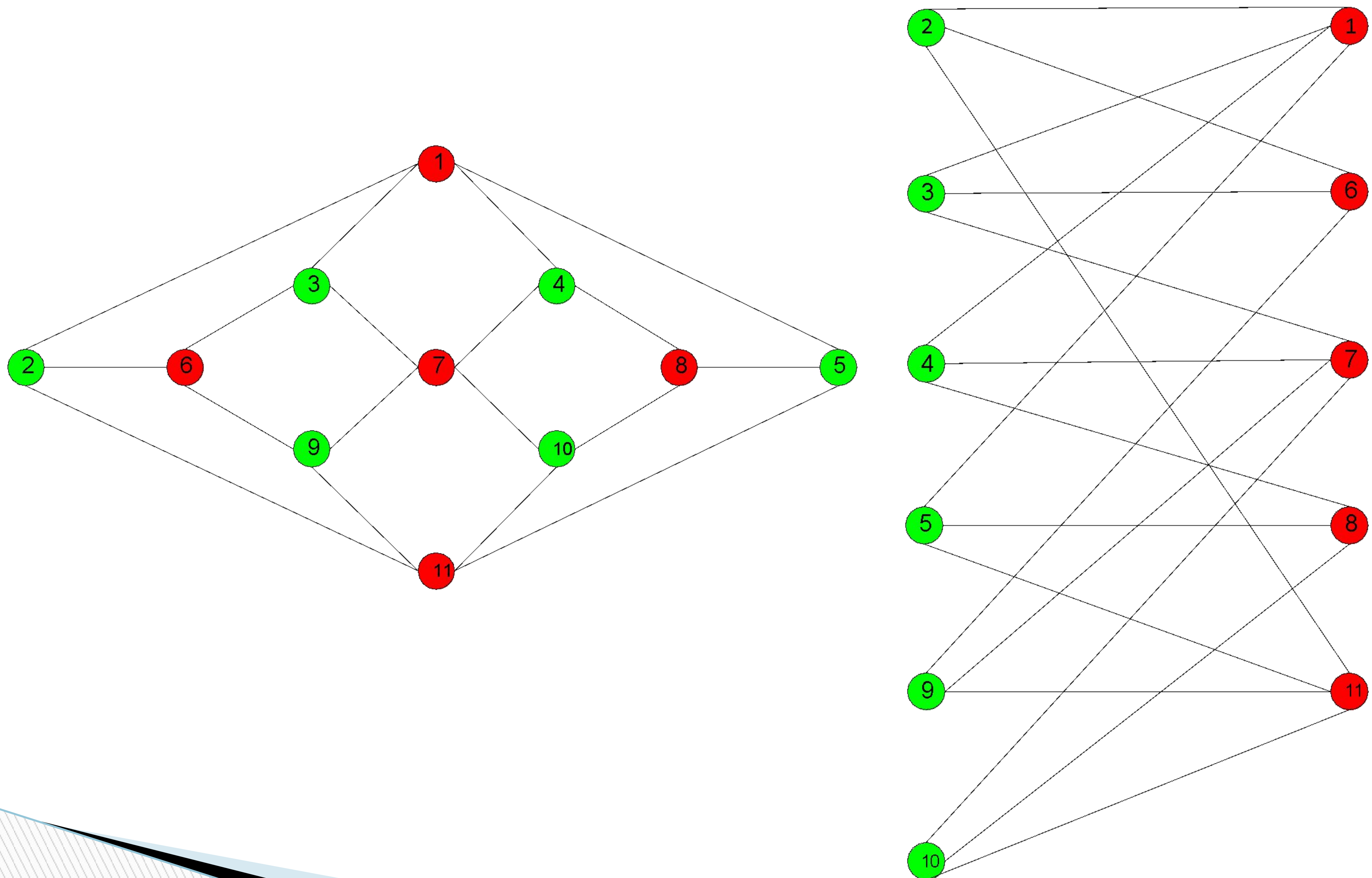
Sunt aceste grafuri izomorfe?





Grafuri standard

Graf bipartit



Graf bipartit

- Un graf neorientat $G = (V, E)$ se numește **bipartit** $\Leftrightarrow$ există o partiție a lui V în două submulțimi $\mathbf{V_1}$, $\mathbf{V_2}$ (**bipartiție**):

$$V = V_1 \cup V_2$$

$$V_1 \cap V_2 = \varnothing$$

astfel încât orice muchie $e \in E$ are o extremitate

în V_1 și cealaltă în V_2:

$$|e \cap V_1| = |e \cap V_2| = 1$$

Graf bipartit

Observații
e

- G = (V, E) **bipartit** ⇔

  există o colorare a vârfurilor cu două culori:

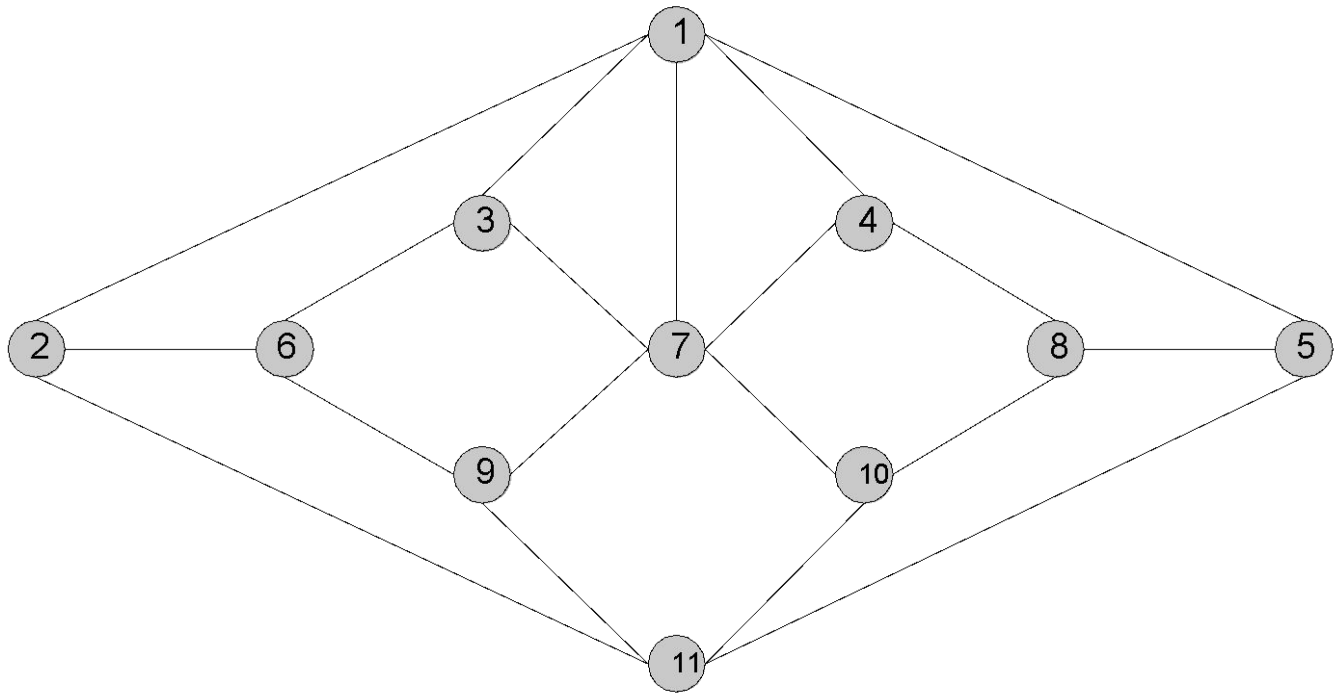
  $c : V \rightarrow \{1, 2\}$

  astfel încât pentru orice muchie $e=xy\in E$ avem

  $c(x) \neq c(y)$

  (**bicolorare**)

Graf bipartit

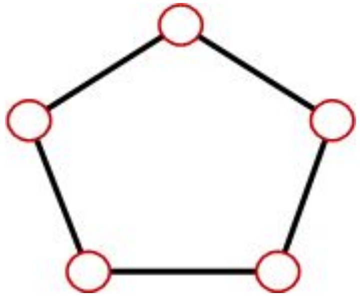


nu este bipartit

Grafuri standard

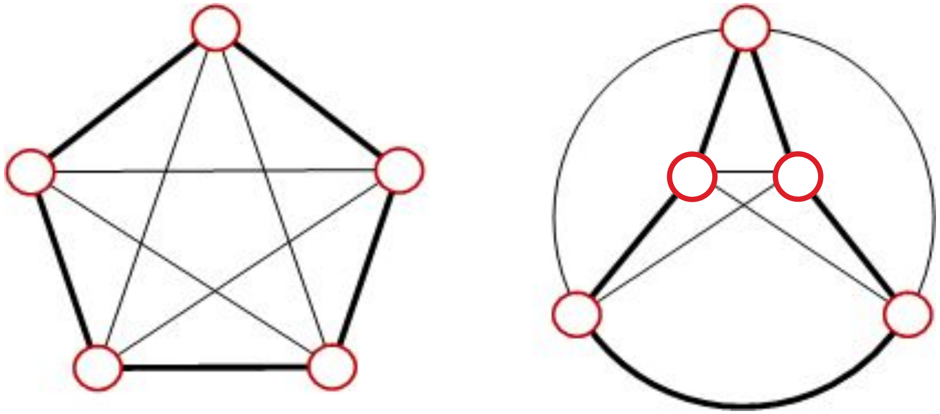
- P_n – lanţ elementar

- C_n – ciclu elementar



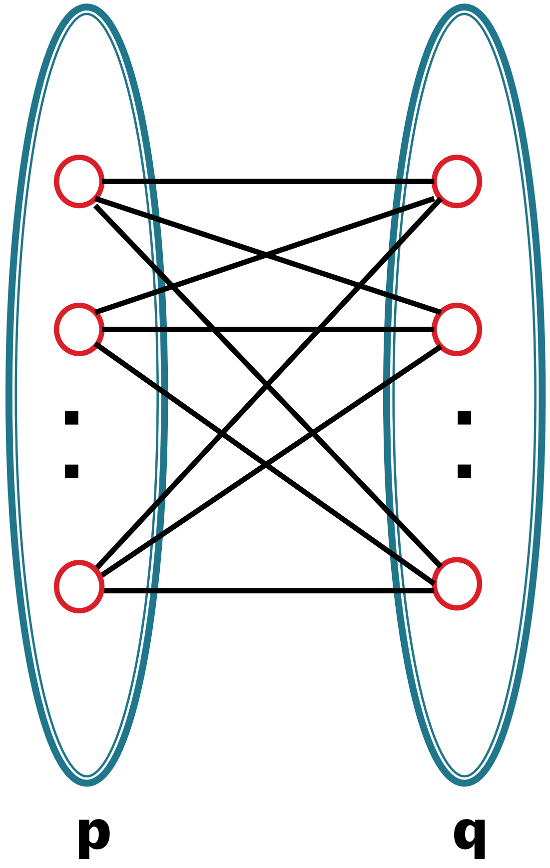
Grafuri standard

- **K_n – graf complet**



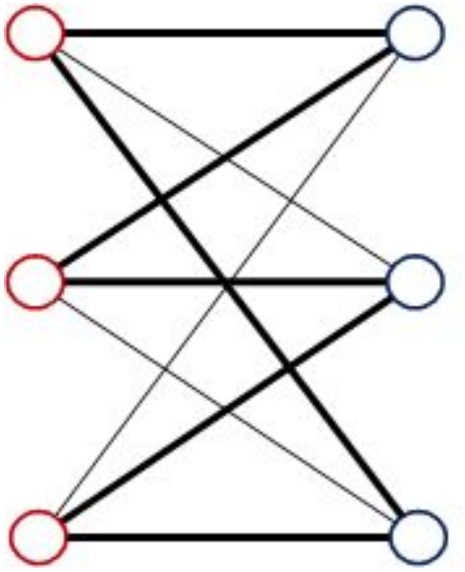
Grafuri standard

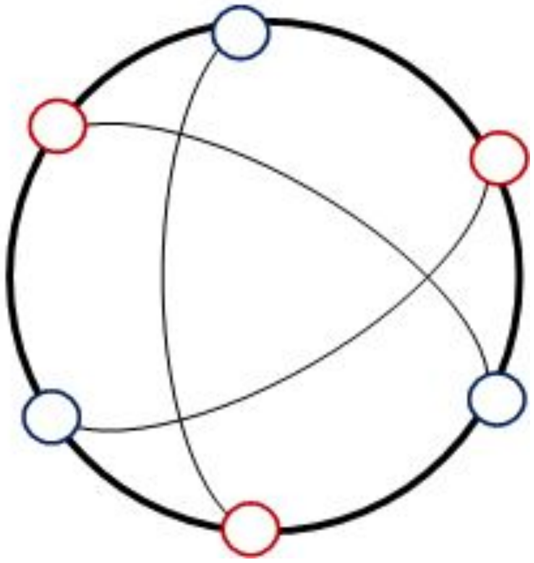
- $K_{p,q}$ – graf bipartit complet



Grafuri standard

- **$K_{3,3}$**

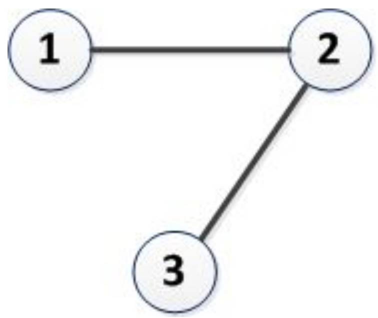




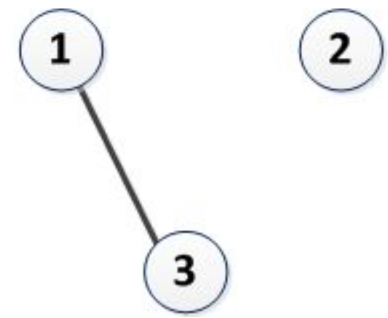
Graful complementar al unui graf neorientat

- $G = (V, E)$ graf neorientat

  $\overline{G} = (V, E)$ **graful complementar** al lui G



G



$\overline{G}$