Algoritmi avansaţi

Seminar 5 (săpt. 9 şi 10)

1. *Fie punctele* $A = (1, 2, 3), B = (4, 5, 6) \in \mathbb{R}^3$.

a) *Fie* $C = (a, 7, 8)$. *Arătaţi că există* a *astfel ca punctele* A, B, C *să fie coliniare şi pentru* a *astfel determinat calculaţi raportul* $r(A, B, C)$.

b) *Determinaţi punctul* P *astfel ca raportul* $r(A, P, B) = 1$.

c) *Daţi exemplu de punct* Q *astfel ca* $r(A, B, Q) < 0$ *şi* $r(A, Q, B) < 0$.

Soluţie.

a) Condiţia de coliniaritate a punctelor A, B, C este echivalentă cu coliniaritatea vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$. Au loc relaţiile:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 3, 3), \quad \overrightarrow{BC} = (a - 4, 2, 2).$$

Vectorii daţi sunt proporţionali dacă şi numai dacă $a - 4 = 2$, deci $a = 6$. De fapt, dreapta AB este direcţionată de vectorul $(1, 1, 1)$ (şi de orice vector proporţional cu acesta).

În acest caz, avem $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 3, 3)$, $\quad \overrightarrow{BC} = (2, 2, 2)$, deci

$$\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{BC},$$

adică $r(A, B, C) = \frac{3}{2}$ (raportul $r(A, B, C)$ este acel scalar r pentru care are loc relaţia $\overrightarrow{AB} = r\,\overrightarrow{BC}$).

b) Condiţia $r(A, P, B) = 1$ este echivalentă cu $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$. Punctul P care verifică această condiţie este mijlocul segmentului $[AB]$, deci $P = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = (\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2})$.

c) Semnele rapoartelor indică faptul că (i) B nu este între A şi Q; (ii) Q nu este între A şi B. Trebuie deci ca A să fie situat între Q şi B. Un astfel de punct este $Q = (0, 1, 2)$ (l-am ales ca fiind $A - (1, 1, 1)$). Au loc relaţiile

$$\overrightarrow{AB} = (3, 3, 3), \quad \overrightarrow{BQ} = (-4, -4, -4), \quad r(A, B, Q) = -\frac{3}{4},$$

$$\overrightarrow{AQ} = (-1, -1, -1), \quad \overrightarrow{QB} = (4, 4, 4), \quad r(A, Q, B) = -\frac{1}{4},$$

deci sunt verificate cerinţele din enunţ.

2. *Fie punctele* $P=(1,-1), Q=(3,3)$.

a) *Calculaţi valoarea determinantului care apare în testul de orientare pentru muchia orientată* $\overrightarrow{PQ}$ *şi punctul de testare* $O=(0,0)$.

b) *Fie* $R_\alpha=(\alpha,-\alpha)$, *unde* $\alpha\in\mathbb{R}$. *Determinaţi valorile lui* α *pentru care punctul* R_α *este situat în dreapta muchiei orientate* $\overrightarrow{PQ}$.

Soluţie.
a) Conform teoriei,

$$\Delta(P,Q,R)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}.$$

În exemplu avem:

$$\Delta(P,Q,R)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=6 \text{ (dezvoltare după ultima coloană).}$$

Se poate verifica şi pe un desen că O este la stânga muchiei orientate $\overrightarrow{PQ}$.

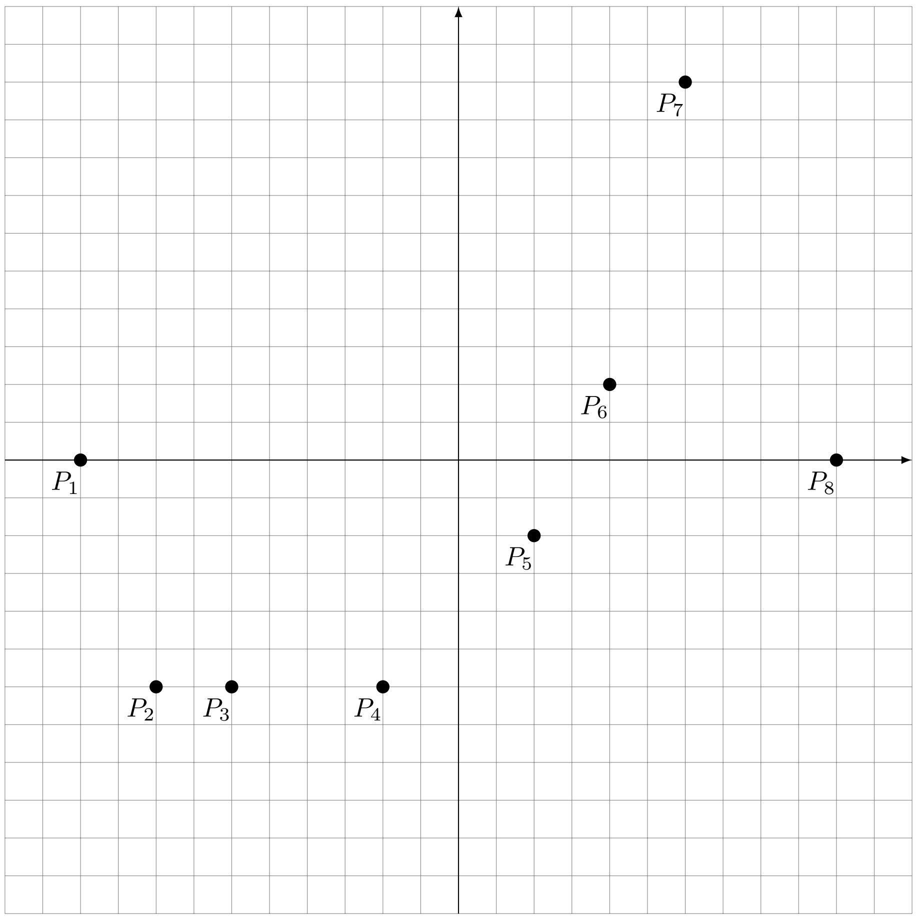
b) Calculăm, pentru un α, valoarea $\Delta(P,Q,R_\alpha)$:

$$\Delta(P,Q,R_\alpha)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & \alpha \\ -1 & 3 & -\alpha \end{vmatrix}=6(1-\alpha).$$

Punctul R_α este situat în dreapta muchiei orientate $\overrightarrow{PQ}\Leftrightarrow\Delta(P,Q,R_\alpha)<0$ $\Leftrightarrow\alpha>1$. Acest lucru poate fi verificat şi pe desen, punctul R_α este variabil pe cea de-a doua bisectoare (de ecuaţie $x+y=0$), iar pentru $\alpha>1$ acest punct este situat în dreapta muchiei orientate $\overrightarrow{PQ}$.

3. *Fie* $\mathcal{M} = \{P_1, P_2, \ldots, P_9\}$, *unde* $P_1 = (-5, 0)$, $P_2 = (-4, -3)$, $P_3 = (-3, -3)$, $P_4 = (-1, -3)$, $P_5 = (1, -1)$, $P_6 = (2, 1)$, $P_7 = (3, 5)$, $P_8 = (5, 0)$. *Detaliaţi cum evoluează lista* $\mathcal{L}_i$ *a vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui* $\mathcal{M}$, *obţinută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew.*

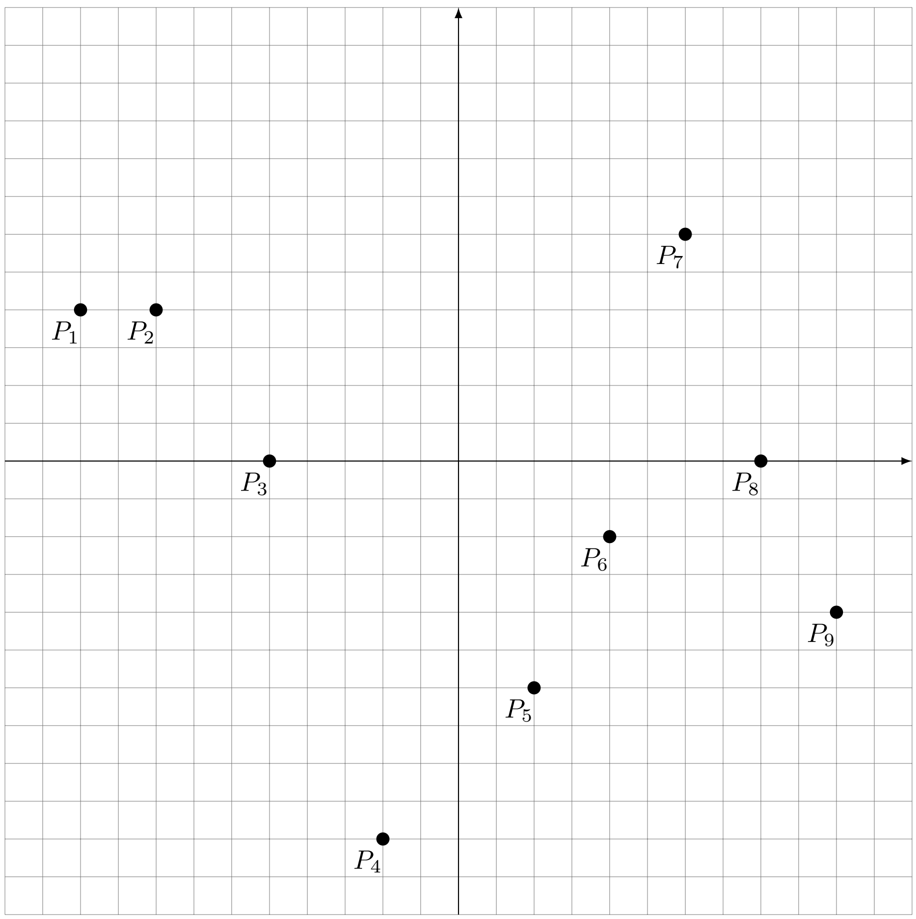
Soluţie.



Lista $\mathcal{L}_i$ evoluează astfel:
P_1P_2
$P_1P_2P_3$
$P_1P_2P_3P_4$ // este eliminat P_3, deoarece P_2, P_3, P_4 coliniare (nu viraj la stânga)
$P_1P_2P_4$
$P_1P_2P_4P_5$
$P_1P_2P_4P_5P_6$
$P_1P_2P_4P_5P_6P_7$
$P_1P_2P_4P_5P_6P_7P_8$ // punctele P_7, P_6, P_5 sunt eliminate în această ordine
$P_1P_2P_4P_8$ // lista finală ($\mathcal{L}_i$) a vârfurilor care determină marginea inferioară

4. *Daţi un exemplu de mulţime $\mathcal{M}$ din planul $\mathbb{R}^2$ pentru care, la final, $\mathcal{L}_i$ are 3 elemente, dar, pe parcursul algoritmului, numărul maxim de elemente al lui $\mathcal{L}_i$ este egal cu 6 ($\mathcal{L}_i$ este lista vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui $\mathcal{M}$, obţinută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew). Justificaţi!*

Soluţie.



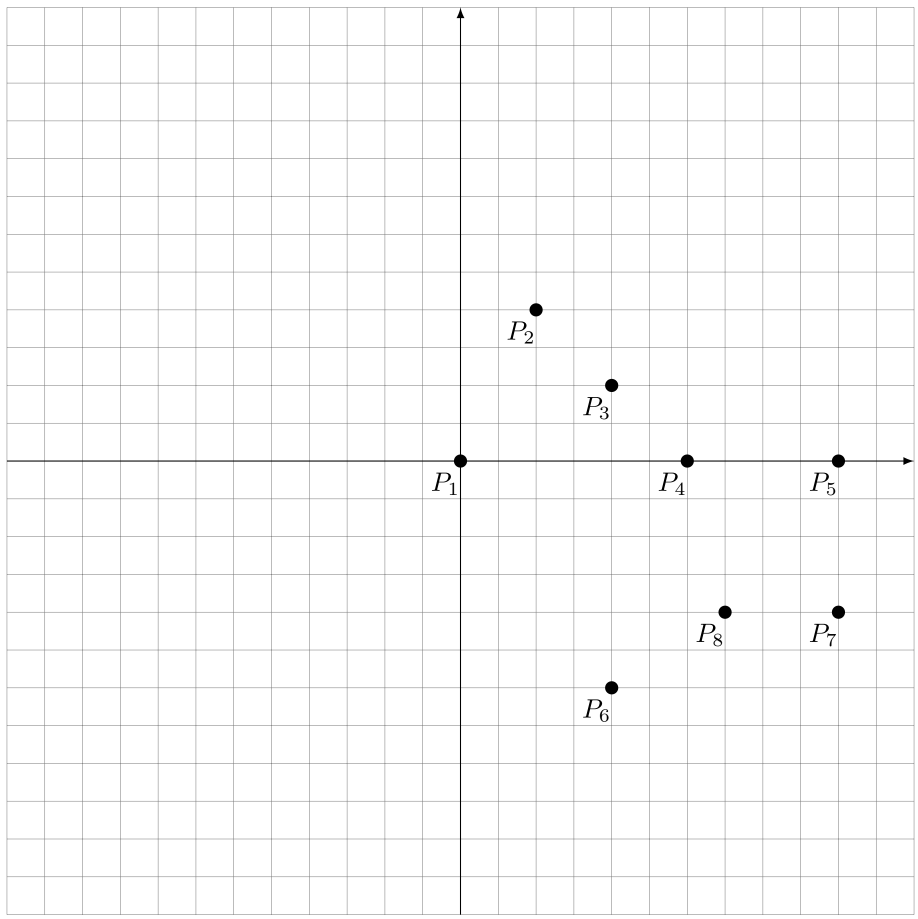
Lista $\mathcal{L}_i$ are la final 3 elemente (P_1, P_4, P_9).

Numărul maxim de elemente este 6: $P_1P_4P_5P_6P_7P_8$ (la adăugarea lui P_8 în listă).

Obs. Numărul maxim de elemente *după verificări ale virajelor* este 5: $P_1P_4P_5P_6P_7$.

5. *Fie mulţimea $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_7\}$, unde $P_1 = (0,0), P_2 = (1,2)$, $P_3 = (2,1), P_4 = (3,0), P_5 = (5,0), P_6 = (2,-3), P_7 = (5,-2)$. Indicaţi testele care trebuie făcute pentru a găsi succesorul lui P_1 atunci când aplicăm Jarvis' march pentru a determina marginea inferioară a acoperirii convexe a lui $\mathcal{P}$, parcursă în sens trigonometric (drept pivot iniţial va fi considerat P_2).*

Soluţie.



Pentru a găsi succesorul lui P_1 este adăugat pivotul P_2 (S cu notaţia din suportul de curs). Punctele sunt apoi testate, iar dacă un punct P este la dreapta muchiei orientate P_1S, punctul P devine noul pivot.
Punctul P_3: este în dreapta muchiei P_1P_2, deci pivotul P_2 este înlocuit cu P_3.
Punctul P_4: este în dreapta muchiei P_1P_3, deci pivotul P_3 este înlocuit cu P_4.
Punctul P_5: nu este în dreapta muchiei P_1P_4, deci pivotul P_4 rămâne.
Punctul P_6: este în dreapta muchiei P_1P_4, deci pivotul P_4 este înlocuit cu P_6.
Punctul P_7: nu este în dreapta muchiei P_1P_6, deci pivotul P_6 rămâne.
Punctul P_8: nu este în dreapta muchiei P_1P_6, deci pivotul P_6 rămâne.

Au fost parcurse toate punctele. Ultimul pivot (P_6) este succesorul lui P_1 în parcurgerea frontierei acoperirii convexe a mulţimii date în sens trigonometric.

6. *Discutaţi un algoritm bazat pe paradigma Divide et impera pentru determinarea acoperirii convexe. Analizaţi complexitatea-timp.*

Soluţie. Complexitatea-timp este $O(n \log n)$. O descriere a algoritmului şi a analizei complexităţii poate fi găsită în survey-ul [Lee & Preparata, 1984].