

# Calculabilitate si Complexitate

5 februarie 2022

## I CALCULABILITATE

Pentru limbajele WHILE, UNTIL si LOOP din problemele de mai jos, consideram ca comanda if  $x_i = 0$  do  $P$  else do  $Q$  end este implementata si poate fi folosita. De asemenea, pot fi folosite comenzile  $x := y + z$  si  $x := y - z$ . Reamintim ca in aceste masini cu registre, daca  $a \leq b$ ,  $a - b = 0$ .

1. Limbajul de programare UNTIL se defineste exact ca limbajul de programare WHILE, cu diferenta ca in loc de comanda while  $x_i \neq 0$  do  $P$  end acolo se introduce comanda do  $P$  until  $x_i = 0$  end. Semnificatia este ca intai se ruleaza programul  $P$ , apoi se verifica conditia  $x_i = 0$  si aceasta succesiune se repeta pana cand conditia se verifica.

(a) Simulati comanda do  $P$  until  $x_i = 0$  end in limbajul WHILE.

(b) Simulati comanda while  $x_i \neq 0$  do  $P$  end in limbajul UNTIL.

2. Notam cu  $\gcd(m, n)$  cel mai mare divizor comun al numerelor  $m$  si  $n$ . Folosim urmatoarele proprietati ale functiei  $\gcd$ : (1) daca  $m \geq 1$ ,  $\gcd(m, m) = m$ , (2) daca  $m > n$ ,  $\gcd(m, n) = \gcd(m - n, n)$ , (3)  $\gcd(m, n) = \gcd(n, m)$  si (4) daca  $m \geq 1$ ,  $\gcd(m, 0) = m$ . Valoarea  $\gcd(0, 0)$  nu este definita.

Aratati ca exista o functie primitiv recursiva  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  astfel incat

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad (m, n) \neq (0, 0) \rightarrow f(m, n) = \gcd(m, n).$$

Indicatie: puteti folosi definitia functiilor primitiv recursive, sau puteti scrie un program in limbajul LOOP.

3. Demonstrati ca exista o gramatica  $G$  cu alfabetul terminal  $\Sigma = \{0, 1\}$  care produce limbajul:

$$L(G) = H_0 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w, \text{ aplicata pe banda goala, opreste in timp finit}\},$$

unde  $M_w$  este masina Turing codificata de cuvantul  $w$ . Se cere o demonstratie neconstructiva, cu argumente teoretice.

## II COMPLEXITATE

4. Se da un graf neorientat  $G_1 = (V_1, E_1)$  unde  $V_1 = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q\}$  si  $E_1 = \{AB, AC, AD, BE, BF, BG, CH, CI, CJ, DK, DL, DM, EN, FN, GN, HO, IO, JO, KP, LP, MP, NQ, OQ, PQ\}$ . Graful neorientat  $G_2 = (V_2, E_2)$  are  $V_2 = V_1$  si  $E_2 = E_1 \cup \{AQ\}$ . Amintim ca o colorare a unui graf cu  $n$  culori este o functie  $c : \{1, \dots, n\} \rightarrow V$  astfel incat pentru orice  $x, y \in V$ , daca  $xy \in E$  atunci  $c(x) \neq c(y)$ .

- (a) Sa se afle numarul minim  $n_1$  astfel incat  $G_1$  are o colorare cu  $n_1$  culori.
- (b) Sa se afle numarul minim  $n_2$  astfel incat  $G_2$  are o colorare cu  $n_2$  culori.

Justificati raspunsurile!

- 5. Un oracol pentru problema 3COLORING este o masina ideala care accepta instantaneu exact grafurile care pot fi colorate cu  $\leq 3$  culori. Sa se arate ca, folosind un asemenea oracol, putem rezolva in timp polinomial problema TAUTOLOGY.
- 6. Decideti daca urmatoarea propozitie este sau nu in multimea TQBF:

$$\forall x \forall y \exists z \forall v (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg z \vee x) \wedge (\neg z \vee y) \wedge (\neg z \vee v).$$

Variabilele semnifica elemente din multimea  $\{0, 1\}$ .