CURS 8

* V.a. X și Y discrete sunt independente ($X \perp\!\!\!\perp Y$) dacă:

$$\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y)$$

X, Y indp. $\iff \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y)$

* Media și momentele v.a. discrete

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \rightarrow \text{media aritmetică}$$

$$m \simeq \frac{1}{N}\sum_{x} x N f(x) = \sum_{x} x f(x) \rightarrow \text{suma ponderată}$$

$E[X] = \sum_{x} x f(x) \rightarrow$ media v.a. discrete

Prop: a) Dacă $X = c \Rightarrow E[X] = c$

b) $X \geq 0 \Rightarrow E[X] \geq 0$; $X \geq Y \Rightarrow E[X] \geq E[Y]$

c) $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$

Prop: Dacă $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow E[XY] = E[X]\,E[Y]$

Prop.: Dacă X v.a.d. și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci $Y = g(X)$ are media:

$$E[Y] = E[g(X)] = \sum_{x} g(x)\mathbb{P}(X=x)$$

- Moment de ordin k: $E[X^k]$
- Moment centrat în a ~~de ordin k~~: $E[(X - E[X])^k]$

Dacă $a = E[X]$, atunci $E[(X-E[X])^k]$ s.n. mom. centrat de or. k

- Varianța: $Var(X) = E[(X - E[X])^2] \rightarrow k = 2$

↳ gradul de împrăștiere a datelor

- Abaterea standard: $SD(X) := \sigma = \sqrt{Var(X)}$

Prop.: a) $Var(X+a) = Var(X)$

b) $Var(a \cdot X) = a^2 Var(X)$

c) X, Y indep. $\Rightarrow Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

d) $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$

CURS 9

* v.a. X este continuă (absolută) dacă $\exists f \geq 0$ cu prop.:

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x) \cdot dx \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}$$

densitate de repartiție (nu e probabilitate)

Scanned with CamScanner

* $\boxed{\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx}$
* Prop. densității de rep.: a) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
* $\int_x^{x+dx} f(t)\,dt \simeq f(x)\cdot dx$

V.a. discrete	V.a. continue
Σ	$\int$
$p(x)$	$f(x)\,dx$

* Funcția de repartiție a v.a. cont.:

f.d.r. → d $\quad$ • $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \ \forall x \in \mathbb{R}$

d → f.d.r. $\quad$ • $F'(x) = f(x), \forall x$

* În general, $\mathbb{P}(X \in [a,b]) = F(b) - F(a), \ \forall a < b$

* Media v.a. X cont. este $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$ dacă $E[|X|] < \infty$
* Varianța v.a X cont. este:

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2 \geq 0$$

* O v.a. U este repartizată uniform pe (a,b) dacă admite densitatea $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$ Notație: $U \sim (\mathcal{U}(a,b))$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

CURS 10

* Universalitatea variabilei aleatoare uniforme

a) Dacă $U \sim \mathcal{U}((0,1))$ atunci $F^{-1}(U)$ are aceeași rep. cu X

b) $F(X) \sim \mathcal{U}((0,1))$

Pentru a afla $F^{-1}(u)$ rez. ec. $F(x) = u$

* $F^{-1}(u) = \inf\{x \mid F(x) \geq u\}$ → funcție cuantilă

F bij. $\Rightarrow F^{-1}$ este inversa

- generarea v.a. Bernoulli de param. p

* Repartiția exponențială (varianta cont. a rep. geom.)

→ tp. de așteptare până la ap. unui even. de interes

• V.a. X este rep. exp. dacă densitatea de rep. f a lui X este:

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \quad x>0, \lambda>0$$

Notație: $X \sim Exp(\lambda)$

• F.d.r.: $F(x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{\lambda x}, \quad x>0$

• media: $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$; $E[X^2] = \frac{2}{\lambda^2}$

• var.: $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

* Proprietatea lipsei de memorie:

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq s+t \mid X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t)}$$

a) v.a. rep. $Exp(\lambda)$ admite prop. l.d.m.

b) Dacă v.a. X admite p.l.d.m. ⇒ X este rep. expon.

* Repartiția normală

→ Spunem că v.a X este rep. normal (Gaussian) de param. μ și σ^2 dacă adm. densitate:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Notație: $X \sim N(\underbrace{\mu}_{E[X]}, \underbrace{\sigma^2}_{Var(X)})$

• $\mu = 0$; $\sigma^2 = 1$ ⇒ v.a. X este rep. normal standard și not. $X \sim N(0,1)$

• $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$

• f. de rep.: $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt}$

⇒ transf. în coord. polare:

$(x,y) \to (r\cos\theta, r\sin\theta)$

• $E[X]=0$; $E[X^2]=1$; $Var(X)=1$

* O v.a. X rep. $N(\mu, \sigma^2)$ se poate scrie sub forma

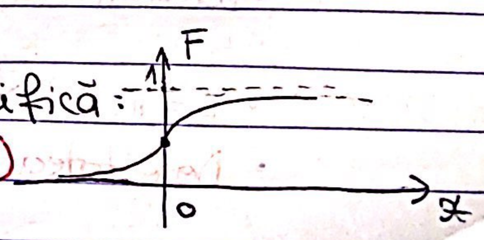
$$X = \mu + \sigma Z, \quad \text{unde } Z \sim N(0;1)$$

$$\Rightarrow E[X] = \mu \; ; \; Var(X) = \sigma^2$$

CURS 11

* Funcția de rep. Φ a $N(0,1)$ verifică:

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$



* **Regula (68 - 95 - 99,7 %)**
  - Dacă $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ atunci
$$\mathbb{P}(|X-\mu| \leq \sigma) \simeq 0.68$$
$$\mathbb{P}(|X-\mu| \leq 2\sigma) \simeq 0.95$$
$$\mathbb{P}(|X-\mu| \leq 3\sigma) \simeq 0.997$$

* **Repartiția comună**

$\mathbb{P}((X,Y) \in B)$

→ rep. marginală - ne interesăm de o v.a și o ignorăm pe cealaltă

→ rep. condiționată a lui X știind $Y=y$ - rep îmbunătățită a lui X știind $Y=y$

- **Cazul v.a. discrete**

f. de masă $(X,Y): \Omega \to \mathbb{R}^2$

$$P_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

f. de rep.: $F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$

- Repartiția marginală $\mathbb{P}(X=x) = \sum_y \mathbb{P}(X=x, Y=y)$

F. de masă a lui X cond. la A:

$$P_{X|A}(x) = \mathbb{P}(X=x|A) = \frac{\mathbb{P}(\{X=x\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

- $P_{X,Y}(x,y) = P_Y(y) P_{X/Y}(x|y) = P_X(x) P_{Y/X}(y|x)$

CURS 12

- $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) P_{X,Y}(x,y)$
- Dacă $g(x,y) = ax + by + c$ atunci:

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y] + c$$

- **Cazul v.a. continue**

- $\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \iint_{(x,y) \in A} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^2$

- Dacă $A = [a,b] \times [c,d]$ atunci $\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \int_a^b \int_c^d f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$

- $A = \mathbb{R}^2 \Rightarrow = 1$

- Densitatea marginală a lui X:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$