1. 100 calculatoare de același tip: 30 de la $F_1$, 50 de la $F_2$ și 20 de la $F_3$. Apar defecțiuni în per. de garanție: 2% la $F_1$, 4% la $F_2$ și 5% la $F_3$. Determ. probab. ca:

a) un calculator din magazin să se defecteze în per. garanție.

b) un calc. care se defectează în per. de garanție să fie de la $F_2$.

$A_i$ = even. ca un calc. să fie de la $F_i$, $i=\overline{1,3}$

$X$ = even. ca un calc. la întâmplare să se defecteze în per. garanție.

$P(A_1)=\frac{3}{10}$ $\quad P(X|A_1)=\frac{2}{100}$

$P(A_2)=\frac{5}{10}$ $\quad P(X|A_2)=\frac{4}{100}$

$P(A_3)=\frac{2}{10}$ $\quad P(X|A_3)=\frac{5}{100}$

a) $A_i \cap A_j = \emptyset, (\forall) i,j=\overline{1,3}, i\neq j$

$\bigcup_{1}^{3} A_i = \Omega$

$$P(X)=P(A_1)\cdot P(X|A_1)+P(A_2)\cdot P(X|A_2)+P(A_3)\cdot P(X|A_3)=$$
$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{100}+\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{100}+\frac{2}{10}\cdot\frac{5}{100}=\frac{6+20+10}{1000}=\frac{36}{1000}$$
$$=0{,}036$$

b) $$P(A_2|X)=\frac{P(A_2)\cdot P(X|A_2)}{P(X)}=\frac{\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{100}}{\frac{36}{1000}}=\frac{20}{36}=0,(5).$$

2. 30 subiecte recomandate, 20 au fost pregătite. Fiecare subiect este scris pe un bilet și se extrag 5 bilete. Fiecare subiect corect are 2p. Prob.:

a) nota 10

b) nota 6

c) să nu promoveze.

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$$

corect

a) $$\frac{C_{20}^5\cdot C_{10}^0}{C_{30}^5}=0{,}027$$ greșit total

b) $$\frac{C_{20}^3\cdot C_{10}^2}{C_{30}^5}=0{,}359$$

c) $$\frac{C_{20}^0\cdot C_{10}^5}{C_{30}^5}+\frac{C_{20}^1\cdot C_{10}^4}{C_{30}^5}+\frac{C_{20}^2\cdot C_{10}^3}{C_{30}^5}=0{,}272$$

3. Magazinul îndeplinește planul de desfacere al produselor pe o lună cu probab. 0,75. Se cere probab. ca magazinul să-și îndeplinească planul în 8 din cele 12 luni ale unui an.

$$C_{12}^8\cdot(0{,}75)^8\cdot(0{,}25)^4=0{,}193.$$

④ Un lot conține 4 piese coresp. și 3 piese defecte. Se extrag simultan 3 piese pt. control. Fie X v.a. care indică nr. de piese coresp. obținute în cele 3 extrageri. Determinați:

a) repartiția v.a. X

b) prob. ca cel puțin 2 dintre piesele extrase să fie coresp.

a) $P(X=0)=\frac{C_4^0\cdot C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}$

$P(X=1)=\frac{C_4^1\cdot C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35}$

$P(X=2)=\frac{C_4^2\cdot C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}$

$P(X=3)=\frac{C_4^3\cdot C_3^0}{C_7^3}=\frac{4}{35}$

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{35} & \frac{12}{35} & \frac{18}{35} & \frac{4}{35}\end{pmatrix}$$

b) $P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{18}{35}+\frac{4}{35}=\frac{22}{35}$

⑤ Un furnizor livrează produse coresp. cu probab. 0,9. La întâmplare 20 buc. X este v.a. = nr. produse coresp. Determinați:

a) repartiția v.a. X

b) nr. mediu de produse coresp. și abaterea medie pătratică a nr. de buc. coresp. din eșantion

a) $p=0,9$ ; $n=20$

$$X:\begin{pmatrix} k \\ C_{20}^k\cdot(0,9)^k\cdot(0,1)^{20-k}\end{pmatrix},\ k=\overline{0,20}$$

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 20 \\ & & & C_{20}^k\cdot(0,9)^k\cdot(0,1)^{20-k} & \end{pmatrix}$$

b) $E(X)=np=20\cdot 0,9=18$

$Var(X)=npq=1,8$

$Sd(X)=\sqrt{Var(X)}$

⑥ Se aruncă o monedă de 4 ori. Scrieți repartiția v.a. X care ia ca valori nr. de apariții ale stemei.

$P(X=k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$, $k=\overline{0,4}$, $q=p=\frac{1}{2}$

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^4 & C_4^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 & C_4^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 & C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^4 & \left(\frac{1}{2}\right)^4\end{pmatrix}$$

⑦ Se aruncă cu un zar. X = nr. de aruncări până apare 1. Repartiția v.a. X

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6^2} & \frac{5^2}{6^3} & \dots & \frac{5^{n-1}}{6^n} & \dots\end{pmatrix}$$, deci X urmează o rep. geometrică de param. 1/6.

(8) Se trage într-un obiect până este doborât. Este suf. o tragere reușită. La fiecare tragere, probab. de succes este $\frac{1}{3}$. Aflați val. medie și dispersia nr. de trageri.

Tabloul reprezintă v.a. X: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3^2} & \frac{2^2}{3^3} & \dots & \frac{2^{k-1}}{3^k} & \dots \end{pmatrix}$

$$E(X) = \frac{1}{3}\left(1+2\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\dots+k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}+\dots\right) = 3.$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(3).$$

$$X^2: \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3^2} & \frac{2^2}{3^3} & \dots \end{pmatrix} \qquad E(X) = \frac{1}{3}\left(1^2+2^2\cdot\frac{2}{3}+\dots+3^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\dots\right)$$

$$Var(X) = 6$$

(9) Profitul anual al unei firme este rezultatul acțiunii a 2 grupuri de factori U și V ale căror modele probabilistice sunt $U=3X-2Y$; $V=X+5Y$. $X, Y$ = v.a. independente; $X \sim Bi(10; 0{,}8)$; $Y \sim Poisson(1)$. Calculați $E(2U+3V)$, $Var(U)$, $Var(V)$.

$X \sim Bi(10; 0{,}8) \Longrightarrow E(X) = 10\cdot 0{,}8 = 8$

$Var(X) = 1{,}6.$

$Y \sim Pois(1) \Longrightarrow E(Y) = Var(Y) = 1$

$E(2U+3V) = E(9X+11Y) = 9E(X)+11E(Y) = 9\cdot 8+11\cdot 1 = 83$

Deoarece X, Y sunt independente:

$Var(U) = Var(3X-2Y) = 9\,Var(X)+4\,Var(Y) = 18{,}4.$

$Var(V) = Var(X+5Y) = Var(X)+25\,Var(Y) = 26{,}6.$

(10) Firmă de asigurări. Ipoteza: nr. solicitărilor de despăgubire înregistrate anual pt. astfel de polițe urmează o repartiție Poisson de param. 4.

a) determ. rep. v.a. X care indică nr. solicitărilor de despăgubire înregistrate anual.

b) probabilitatea evenimentelor

A: în cursul unui an să fie înregistrate exact 2 cereri de despăgubire

B: în cursul unui an să fie înregistrate cel puțin 3 cereri de despăgubire.

a) $X: \begin{pmatrix} k \\ e^{-4}\cdot\frac{4^k}{k!} \end{pmatrix}, k \in \mathbb{N}$

b) $P(X=2) = e^{-4}\cdot\frac{4^2}{2!} = 0{,}14652$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X=0) - P(X=2)$

$= 1 - \frac{13}{e^4} = 0{,}76188$

**Ex 1.** Fie densitatea comună a variabilelor aleatoare $(X,Y)$:
$f(x,y) = x(ay+b)\,1_{[0,1]^2}(x,y),\ a,b\in\mathbb{R}.$

a) Determ. a și b știind că $a+b=0$.
$f$ densitate de probabilitate și determinăm a și b
$$1=\iint f(x,y)\,dx\,dy = \iint x(ay+b)\cdot 1_{[0,1]^2}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 x(ay+b)\,dx\,dy =$$
$$=\int_0^1 \frac{1}{2}(ay+b)\,dy \Longrightarrow \begin{cases}\frac{a}{2}+b=2\\ a+b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-4\\ b=4\end{cases}$$

b) Calculați media și varianța lui X și Y.
Determin densitățile marginale ale lui X și Y, $f_X(x)$ și $f_Y(y)$.
Pt. v.a. X: $f_X(x)=\int f(x,y)\,dy = \int_0^1 4x(1-y)\cdot 1_{[0,1]}(x)\,dy = 2x\cdot 1_{[0,1]}(x).$
Pt. v.a. Y: $f_Y(y)=\int f(x,y)\,dx = \int_0^1 4x(1-y)\cdot 1_{[0,1]}(y)\,dx = 2(1-y)\cdot 1_{[0,1]}(y).$

$E[X]=\int x\cdot f_X(x)\,dx = \frac{2}{3}$ $\quad E[Y]=\int y\cdot f_Y(y)\,dy=\frac{1}{3}$ $\quad Var(X)=\frac{1}{18}$
$E[X^2]=\int x^2 f_X(x)\,dx = \frac{1}{2}$ $\quad E[Y^2]=\int y^2\cdot f_Y(y)\,dy=\frac{1}{6}$ $\quad Var(Y)=\frac{1}{18}$

c) Determinați repartițiile variabilelor aleatoare $E[X|Y]$ și $Var(X|Y)$.
Pt. găsirea v.a. $E[X|Y]$ determ. dens. cond. a lui X la $Y=y$.
$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{4x(1-y)\cdot 1_{[0,1]}(x)\cdot 1_{[0,1]}(y)}{2(1-y)\cdot 1_{[0,1]}(y)} = 2x\cdot 1_{[0,1]}(x)$$
$$E[X|Y=y]=\int x\cdot f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}$$
$E[X|Y]=\frac{2}{3}=E[X]$ este constantă - Pt. $Var(X|Y)$ avem
$$Var(X|Y=y)=E[X^2|Y=y]-(E[X|Y=y])^2 = \int x^2\cdot 2x\cdot 1_{[0,1]}(x)\,dx - \frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$
$$Var(X|Y)=\frac{1}{18}=Var(X).$$
$$\left.\begin{array}{l} Var(E[X|Y]) = Var\left(\frac{2}{3}\right)=0 \\ E[Var(X|Y)] = E\left[\frac{1}{18}\right]=\frac{1}{18}\end{array}\right\} \Rightarrow Var(X)=E[Var(X|Y)]+Var(E[X|Y])$$
este adevărat.

d) Verificați dacă are loc relația $Var(X)=E[Var(X|Y)]+Var(E[X|Y])$.
Altă soluție: densitatea cuplului se factorizează în funcție de x și y de unde deducem că v.a. X și Y sunt independente.
$E[X|Y]=E[X]$, iar $Var(X|Y)=Var(X)$.

(2) 2 țintași. Prob. să nimerească: primul = 80%, al doilea 60%. În țintă este o săgeată. Prob. ca săgeata să aparțină primului.

$A_1$ — doar primul $\qquad P(A_1) = P(X_1 \cap X_2)^c = P(X_1)\cdot P(X_2^c) = 0{,}8\cdot 0{,}4.$

$A_2$ — doar al doilea $\qquad P(B) = P(B|A_1)\cdot P(A_1) + P(B|A_2)\cdot P(A_2) + \dots$

$A_3$ — ambii $X_1 \cap X_2$.

$A_4$ — niciunul $X_1^c \cap X_2^c$

(3) V.a. discrete $X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ $\quad \sum p_i = 1$ dacă nu știu un parametru.

a) $2X;\ 3X+X^2;\ \cos X$.

$2X \sim \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 & 4 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ $\quad 3X+X^2 \sim \begin{pmatrix} -2 & -2 & 10 & 4 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ $\quad \cos(X) \sim \begin{pmatrix} \cos(1) & \cos(2) \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

b) $E\{X + 7\sin(X)\};\ Var(9X^2 - 3X);\ Var(10X^3 + 7) = ?$

$3X+X^2 \sim \begin{pmatrix} -2 & 4 & 10 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ $\quad \cos(X) \sim \begin{pmatrix} \cos(-2) & \cos(-1) & \cos 1 & \cos 2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

$7\cdot\sin(X) \sim \begin{pmatrix} 7\sin(-2) & 7\sin(-1) & 7\sin 1 & 7\sin 2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

$7\cdot\sin(X) \sim \begin{pmatrix} -7\sin(2) & -7\sin 1 & 7\sin 1 & 7\sin 2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

---

$Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ $\quad$ a) $X+Y,\ X/Y,\ X\cdot Y$ $\quad$ b) $E\{X^2Y^3\},\ Var(X^3 - Y^3)$

a) $g(x,y) \in \{2, -2, -\frac{2}{3}, 1, -1, -\frac{1}{3}, -1, 1, 3, -2, 2, \frac{2}{3}\}$. $\qquad E\,x\cdot y =$

$\frac{X}{Y}$

$g(x,y) \in \{-2, -1, -2/3, -1/3, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 2\}$. $\qquad = \int x\cdot y\cdot f_{X,Y}(x,y)$.

$\frac{X}{Y} \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2/3 & -1/3 & \frac{1}{3} \dots \\ 0{,}18 & & & & \end{pmatrix}$

$P(X/Y = -2) = P(\{X=-2, Y=1\} \cup \{X=2, Y=-1\}) = P(X=-2)\cdot P(Y=1) + P(X=2)\cdot P(Y=-1)$

| Y\X | -1 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|
| -2 | | | |
| -1 | | | |
| 1 | | | |
| 2 | | | |

produsul probabilităților pt. că $X \perp Y$.

CONTINUARE 2 2019 ex 5

$E\{Y\} = \int_0^1 y\cdot f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y\cdot\left(\frac{ay}{2} + by^2\right)dy = \int_0^1 \frac{ay^2}{2} + by^3\,dy = \frac{ay^3}{6} + \frac{by^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{a}{6} + \frac{b}{4}.$

$E\{Y^2\} = \int_0^1 y^2\cdot f_Y(y)\,dy = \int_0^1 \frac{ay^3}{2} + by^4\,dy = \frac{ay^4}{8} + \frac{by^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{a}{8} + \frac{b}{5}$ $\quad Var\{Y\} = E\{Y^2\} - E\{Y\}^2$

$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}}$

b) $Var(X^3 - Y^3) = Var(X^3) + Var(Y^3)$ (pt. că sunt $\perp$).

(4)

| X\Y | $y_1$ ... $y_m$ | Σ |
|---|---|---|
| $x_1$ | | |
| ⋮ | | |
| $x_n$ | | |
| Σ | | Σ |

$X|Y = y_j \sim$

$Y|X = x_i \sim$

→ sel de valoare

a) repartițiile marginale ale lui X și Y. $X \sim (\dots)$ ; $Y \sim (\dots)$
b) repartițiile marginale $X | Y = y_j \sim (\quad)$ $Y | X = x_i \sim (\quad)$.
media

$E\{X|Y\}$ - var. aleat.

$$E\{X|Y\} \sim \begin{pmatrix} E\{X|Y=y_j\} \\ P(Y=y_j) \end{pmatrix}.$$

geom. = nr. de eșecuri până la primul succes.
unif. = țintă, alegere la întâmplare.
exponent. = durată de viață, timpul de așteptare.
binomială la examen → media și varianța.

(5) $X \sim f(x)$
$E\{X^3 - 7X\} =$
$F(x)$ - fct. de repartiție, $P(3 < X < 7)$. Care este densitatea $7X^2$?
$7X^2 \sim g(7x^2)$
$y = 7x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{y}{7}$

$P(Y \le y) = P(7X^2 \le y) = P\left(X^2 \le \frac{y}{7}\right) = P\left(-\sqrt{\frac{y}{7}} \le X \le \sqrt{\frac{y}{7}}\right) =$
fct. de rep. a lui Y
$= F_X\left(\sqrt{\frac{y}{7}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{y}{7}}\right)$ fct. de rep. a lui y în fct. de x.

$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = F_X'\left(\sqrt{\frac{y}{7}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{y}{7}}\right)' - F_X'\left(-\sqrt{\frac{y}{7}}\right) \cdot \left(-\sqrt{\frac{y}{7}}\right)'$.

$(f \cdot g)' = f'(g) \cdot g' = f\left(\sqrt{\frac{y}{7}}\right) \cdot \left(\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{7}}\right)' - f\left(-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{7}}\right) \cdot -\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{7}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{7}} y \cdot f\left(\sqrt{\frac{y}{7}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{7}} y \cdot f\left(\frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{7}}\right)$

(6) $X \sim f$ $Y \sim g$ $X \perp\!\!\!\perp Y$ continue
$X+Y$
$f_{(X,Y)}(x,y) = f(x) \cdot f(y)$
$P(X+Y \le z) = \iint_{\{x+y\}} f(x) \cdot g(y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{z} \dots dz$ $\int f(x) \cdot g(z-x)\, dx \to f_{X+Y}(z)$.

$E[X \cdot Y] =$
$E\{X^3 \cdot Y^4\} = E\{X^3\} E\{Y^4\}$ (dacă $X \perp\!\!\!\perp Y$)
$\quad = \iint x^3 y^4 f(x,y)\, dx\, dy$

Când nu sunt independente avem $f_{(X,Y)}(x,y)$
- densitățile marginale $f(x)$, $f(y)$ $\quad f(x) = \int f_{(X,Y)}(x,y)\, dy$
dens. condiționată $X | Y = y$
(*) examen: repartiția v.a. caz continuu
$E\{X|Y\} = g(Y) = 3Y+5$ - dens. fct.
$E\{X | Y=y\} = \int x\, f_{X|Y}(x,y)\, dx = g(y)$ depinde de y.
$f_{X|Y} = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ $\quad g(y) = 3y+5$.

$P(3X+7Y < 9)$
$Var(X | Y = y)$

## JOCUL DE POKER: Șansa să obținem full.

$5 \Rightarrow \boxed{A}\boxed{A}\boxed{A}\boxed{K}\boxed{K}$

52 cărți de joc

$\Omega = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} / x_i - \text{o carte de joc din cele } 52;\ x_i \neq x_j\} \Rightarrow C_{52}^{5}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$P$ – echirepartiția

$P(\underset{A}{\text{Full House}}) = \dfrac{\text{nr. fav}}{C_{52}^{5}}$

$52 \begin{cases} \to 13 \text{ figuri} \\ \to 4 \text{ culori} \end{cases}$

13, 12 $\Rightarrow C_4^2$

$A_s \Rightarrow C_4^3$

$P(\text{Full House}) = \dfrac{13 \cdot C_4^3 \cdot C_4^2}{C_{52}^{5}}$

## CHESTIE CU PUNCTE PUNCTE

Secretara coboară de la et. 3 cu $n$ plicuri și $n$ scrisori; se împrăștie. Probab. să avem scrisoarea corectă în plic corect.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ $\quad \Omega: S_n = \{\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \text{ bij.}\}$ $\quad n!$

$E_i$ – avem plicul $i$.

$A = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$

$P(A) = P(E_1 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i \cap E_j) + \dots + (-1)^{n} P(E_1 \cap \dots \cap E_n)$.

$P(E_i) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \dots i \dots n \\ \dots i \dots \end{pmatrix}$

$P(E_i \cap E_j) = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \dots i \dots j \dots n \\ \dots i \dots j \dots \end{pmatrix}$

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n} - \sum_{i<j} \dfrac{1}{n(n-1)} + \sum_{i<j<k} \dfrac{1}{n(n-1)(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{n!}$

$P(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \dfrac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k \cdot \dfrac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \dfrac{1}{k!}$

$e^{x} = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!}$

$e^{-x} = 1 + \dfrac{(-x)}{1!} + \dfrac{(-x)^2}{2!} + \dots + \dfrac{(-x)^n}{n!} = 1 + \dfrac{(-1)x}{1!} + \dfrac{(-1)^2 x^2}{2!} + \dots + (-1)\dfrac{x^n}{n!}$

$e^{-1} = 1 + \dfrac{(-1)}{1!} + \dfrac{(-1)^2}{2!} + \dots + \dfrac{(-1)^n}{n!}$

$P(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \dfrac{1}{k!} = 1 - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n!} \simeq 1 - \dfrac{1}{e} \simeq 0{,}63$.

$(E_1 \cap E_2 \cap E_3^c) \cup (E_1^c \cap E_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_2 \cap E_3)$.

$E_1, E_2, E_3$

## MERSUL LA ÎNTÂMPLARE – SIMETRIE

$A$ = ajunge la ruină

$k, N, p = \frac{1}{2}$. Prob. ca jucătorul să ajungă la ruină. $B$ = la aruncarea cu banul a rezultat H

$P_k(A)$ – prob. să ajungă la ruină atunci când capitalul inițial este $k$ u.m.

$P_k(A) = P_k(A|B) \cdot P(B) + P_k(A|B^c) \cdot P(B^c) = \frac{1}{2} P_{k+1}(A) + \frac{1}{2} P_{k-1}(A)$.

Fie $p_k = P_k(A)$, $p_k = \frac{1}{2} p_{k+1} + \frac{1}{2} p_{k-1}$, $p_0 = 1$, $p_N = 0$, $q = 1 - p$, $q b_k = p \cdot b_{k+1}$

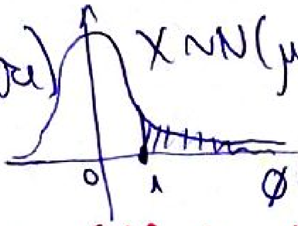
$2p_k = p_{k+1} + p_{k-1}$ $\quad p_k - p_{k-1} = p_{k+1} - p_k$ $\quad b_k = p_{k+1} - p_k$, $k \in \overline{0, N-1}$

$b_0 = \dots = b_{k-1} = b_k$ $\quad p_{k+1} = b_k + p_k = b_k + b_{k-1} + p_{k-1}$ $\quad p_{k+1} = 2b_0 + p_{k-1} = (k+2) b_0 + p_0$.

$b_0 + b_1 + \dots + b_{N-1} = p_N - p_0$ $\quad N b_1 = -1 \Rightarrow b_0 = -\dfrac{1}{N} \Rightarrow p_k = k \cdot b_0 + p_0 = 1 - \dfrac{k}{N}$

CANTITATEA DE ZĂPADĂ

$\mu = 60$ cm (medie) $\sigma = 20$ cm (aleatoare)



$X \sim N(\mu, \sigma^2)$. $P(X \geq 80)$

$P\left(\frac{X-60}{20} \geq \frac{80-60}{20}\right) = 1 - \Phi(1) \simeq 0{,}16$.

$\Phi(1) \simeq 0{,}84$.

EXAMEN 2017.

4) $Var(X) = E\{X^2\} - E\{X\}^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 2x\, dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$

$Var(Y) = E\{Y^2\} - E\{Y\}^2 = \int_0^1 y^2 \cdot f_Y(y)\, dy - \frac{49}{144} = \int_0^1 y^2\left(y + \frac{1}{2}\right) dy - \frac{49}{144} =$

$= \int_0^1 y^3\, dy + \int_0^1 y^2\, dy - \frac{49}{144} = \frac{y^4}{4}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{11}{144}$.

b) $E\{Y|X\} \sim \begin{pmatrix} E(Y|X=x_i) \\ f_X(x_i) \end{pmatrix}$ $E\{Y|X\} = \int_0^1 y \cdot \frac{f(x,y)}{f_X(x)}\, dy = \int_0^1 y \cdot \frac{\cancel{x}(2y+1)}{2\cancel{x}}\, dy =$

$E\{Y|X\} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ $= \int_0^1 \frac{(2y^2+y)}{2}\, dy = \int_0^1 y + \frac{y}{2}\, dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

$Var(Y|X) = E\{Y^2|X\} - (E\{Y|X\})^2 = \frac{5}{12} - \frac{7}{(12)^2} = \frac{11}{144}$

$E\{Y^2|X\} = \int_0^1 y^2 \cdot \frac{\cancel{x}(2y+1)}{2\cancel{x}}\, dy = \int_0^1 \frac{y^2(2y+1)}{2}\, dy = \int_0^1 y^3\, dy + \frac{1}{2}\int_0^1 y^2\, dy =$

$= \frac{y^4}{4}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$

c) $Var(Y) = E[Var(Y|X)] + Var(E\{Y|X\}) = E[E\{Y^2|X\} - E\{Y|X\}^2] +$

$+ E\{E\{Y|X\}^2\} - E\{E\{Y|X\}\}^2 = E\{Y^2\} + E\{E\{Y|X\}^2\} + E\{Y\}^2 =$

$= E\{Y^2\} - E\{E\{Y|X\}^2\} + E\{E\{Y|X\}^2\} - E\{Y\}^2 = Var(X)$

EXAMEN 2019

1) $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 11a^2 & \frac{4a+3}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$ $Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ $X+Y,\ X-Y,\ XY,\ X^2+Y^2,\ E\{X\}, E\{Y\}$, $Var(X), Var(Y), Var(2X-4Y), Var(XY)$

$11a^2 + \frac{4a+3}{16} + \frac{1}{16} = 1 \iff 176a^2 + 4a + 3 + 1 - 16 = 0 \iff 176a^2 + 4a - 12 = 0 \to -\frac{24}{88}$ ↘ $\frac{1}{4}$

$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \frac{11}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$ $X+Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{11}{16}\cdot 0{,}25 & \frac{11}{16}\cdot 0{,}5 & \frac{11}{16}\cdot 0{,}25 + \frac{4}{6}\cdot 0{,}25 & \frac{4}{16}\cdot 0{,}25 + \frac{1}{16}\cdot 0{,}25 \\ 4 & 5 & & \\ \frac{4}{16}\cdot 0{,}25 + \frac{1}{16}\cdot 0{,}5 & \frac{1}{16}\cdot 0{,}25 & & \end{pmatrix}$

$X-Y \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0{,}171875 & 0{,}34375 & 0{,}234375 & 0{,}140625 & 0{,}09375 & 0{,}015625 \end{pmatrix}$

$E\{X\} = -\frac{11}{16} + \frac{4}{16} + \frac{2}{16} = -\frac{5}{16}$

$E\{Y\} = 2$.

de viață $\mathcal{E}(\lambda_0), \mathcal{E}(\lambda_1)$, $\lambda_0 < \lambda_1$. Șansa produs A $\to p_0$, B $\to p_1 = 1 - p_0$.

3) Companiia A și B; smartph. cu durata a) Dens., fct. repartiție, media dur. viață b) rep. condiționată a var. care descrie compania a.î. dur. $= t$. What if $t \to \infty$

CONTINUARE 2019 ex 5. $E\{X\} = \int_0^1 x f_X(x)\, dx = \int_0^1 x\left(\frac{ax}{2} + \frac{b}{3}\right) dx =$

$= \int_0^1 \frac{ax^2}{2} + \frac{bx}{3}\, dx = \frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{6}\Big|_0^1 = \frac{a}{6} + \frac{b}{6}$ $E\{X^2\} = \int_0^1 x^2 f_X(x)\, dx = \int_0^1 \frac{ax^3}{2} + \frac{bx^2}{3}\, dx$

$= \frac{ax^4}{8} + \frac{bx^3}{9}\Big|_0^1 = \frac{a}{8} + \frac{b}{9}$. $Var(X) = \frac{a}{8} + \frac{b}{9} - \left(\frac{a}{6} + \frac{b}{6}\right)^2$

EXAMEN 2017

① 35b, 40f, 25c, 3 urne cu 10%, 40%, 80% bile negre. Se extrage o bilă dintr-o urnă și este neagră. Prob. pt. b, f, c. Eroare cât mai mică să precizăm genul.

$P(b)=0,35 \quad P(f)=0,4 \quad P(c)=0,25.$

$P(x)=P(x|b)\cdot P(b)+\dots=0,1\cdot 0,35+0,4\cdot 0,4+0,25\cdot 0,8.$

$P(b|x)=\dfrac{P(x|b)\cdot P(b)}{P(x)}=0,088\%$

$P(f|x)=\dfrac{40\cdot 40}{3550}=0,405\%$

$P(c|x)=\dfrac{25\cdot 80}{3950}=0,5063\%.$

② $X\sim\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 0,2 & 0,3 & 0,5\end{pmatrix} \quad Y\sim\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 0,6 & 0,2 & 0,2\end{pmatrix}.$

Rep. v.a. $X+Y$, $X-Y$, $XY$, $\frac{X}{Y}$ și aflați $E\{X\}$, $E\{Y\}$, $Var(X)$, $Var(Y)$, $Var(2X-4Y)$, $Var(8XY)$

$X+Y\sim\begin{pmatrix}3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11\\ 0,12 & 0,04 & 0,04 & 0,18 & 0,06 & 0,06 & 0,3 & 0,1 & 0,1\end{pmatrix}$

$X-Y\sim\begin{pmatrix}-3 & -2 & -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0,04 & 0,04 & 0,12 & 0,06 & 0,18 & 0,1 & 0,1 & 0,3\end{pmatrix}$

$XY\sim\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 8 & 12 & 14 & 16 & 21 & 28\\ 0,12 & 0,04 & 0,04 & 0,18 & 0,06 & 0,3 & 0,06 & 0,1 & 0,18\end{pmatrix}$

$\frac{X}{Y}\sim\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{4}{4} & \frac{4}{3} & \frac{7}{4} & \frac{4}{2} & \frac{7}{3} & \frac{7}{2}\\ 0,04 & 0,04 & 0,12 & 0,06 & 0,06 & 0,1 & 0,18 & 0,1 & 0,3\end{pmatrix}$

$E\{X\}=\sum x\cdot p_x=4,9$

$E\{Y\}=\sum y\cdot p_y=2,6$

$Var(X)=E\{X^2\}-E\{X\}^2=(0,2+4,8+24,5)-24,01=5,49.$

$Var(Y)=E\{Y^2\}-E\{Y\}^2=2,4+1,8\cdot 3,2-6,76=7,4-6,76=0,64.$

$Var(X-2Y)=Var(X)+4Var(Y)=5,49+4\cdot 0,64=8,05.$

$Var(8XY)=64\,Var(XY)=64\left(E\{X^2\}\cdot E\{Y^2\}-E\{X\}^2\cdot E\{Y\}^2\right)=64(29,5\cdot 7,4-24,01\cdot 6,76).$

③ $X, Y$ v.a. $X\sim\begin{pmatrix}-1,5 & -1\\ 0,7 & 0,3\end{pmatrix} \quad Y\sim\begin{pmatrix}2 & 4\\ p_1 & p_2\end{pmatrix}$, $p_1, p_2\in(0,1)$.

a) $p_1, p_2$ a.î. $P(X=-1,5,\ Y=2)=0,45$ și $E\{Y|X=-1\}=3$.

b) $p_1, p_2$ anterior, coef. de corelație $X, Y$.

$Y|X=-1\sim\begin{pmatrix}2 & 4\\ \frac{k}{0,3} & \frac{0,3-k}{0,3}\end{pmatrix}$

| | 2 | 4 | |
|---|---|---|---|
| −1,5 | 0,45 | 0,25 | 0,7 |
| −1 | 0,15 | 0,15 | 0,3 |
| | 0,6 | 0,4 | |

$p_1 \quad p_2$

$P(Y|X=-1)=2k\cdot\frac{10}{3}+4(0,3-k)\frac{10}{3}$

$\frac{10}{3}(2k+1,2-4k)=\frac{10}{3}(1,2-2k)=3.$

$10(1,2-2k)=9$

$k=0,15$

$X\sim\begin{pmatrix}-1,5 & -1\\ 0,7 & 0,3\end{pmatrix} \quad Y\sim\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0,6 & 0,2\end{pmatrix}$

$\rho(X,Y)=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}}=\dfrac{0,03}{\sqrt{0,0525}}=0,13.$

$Cov(X,Y)=E\{XY\}-E\{X\}\cdot E\{Y\}$

$Var\binom{X}{Y}=E\binom{X^2}{Y}-E\binom{X}{Y}^2$

④ Dens. comună a v.a. $X, Y$.
$f(x,y)=x(2y+1)\mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)$.

a) media și variația $X, Y$

b) repartițiile v.a. $E\{Y|X\}$ și $Var(Y|X)$

c) Verif. $Var(Y)=E\{Var(Y|X)\}+Var(E\{Y|X\})$

a) $E\{X\}=f_X(x)=\int_0^1 x(2y+1)\,dy=x\int_0^1(2y+1)\,dy=x\int_0^1 2y\,dy+x\int_0^1 dy=x\cdot 2\frac{y^2}{2}\Big|_0^1+x\cdot y\Big|_0^1=2x.$

$f_Y(y)=\int_0^1 x(2y+1)\,dx=(2y+1)\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{2y+1}{2}=y+\frac{1}{2}$

$E\{X\}=\int_0^1 x\cdot f_X(x)\,dx=\int_0^1 x\cdot 2x\,dx=2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$

$E\{Y\}=\int_0^1 y\cdot f_Y(y)\,dy=\int_0^1 y\cdot\left(y+\frac{1}{2}\right)dy=\int_0^1\left(y^2+\frac{y}{2}\right)dy=\left(\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$

EXAMEN 2019

③ $X \sim Exp(\lambda_0)$, $Y \sim Exp(\lambda_1)$.

$p$ = șansa de a fi produs de comp. $T$ = durata de viață.

$P(T=t) = P(T=t \mid P=p_0)\cdot P(P=p_0) + P(T=t \mid P=p_1)\cdot P(P=p_1) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t}\cdot p + \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}(1-p)$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} p + \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}(1-p)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \lambda_0 p\, e^{-\lambda_0 t}\,dt + \int_{-\infty}^{x} \lambda_1 (1-p) e^{-\lambda_1 t}\,dt = -\frac{\lambda_0 p}{\lambda_0} e^{-\lambda_0 t}\Big|_{-\infty}^{x} + \frac{\lambda_1}{-\lambda_1}(1-p) e^{-\lambda_1 t}\Big|_{-\infty}^{x} =$

$= -p\, e^{-\lambda_0 t}\Big|_0^x - (1-p) e^{-\lambda_1 t}\Big|_0^x = -p(e^{-\lambda_0 x} - 1) - (1-p)(e^{-\lambda_1 x} - 1) =$

$= p + 1 - p - p e^{-\lambda_0 x} - (1-p) e^{-\lambda_1 x} = 1 - p e^{-\lambda_0 x} - (1-p) e^{-\lambda_1 x}$.

$E[T] = \int_0^\infty t \cdot f(t)\,dt = \lambda_0 p \int_0^\infty t e^{-\lambda_0 t}\,dt + \lambda_1(1-p)\int_0^\infty t e^{-\lambda_1 t}\,dt$

$= \lambda_0 p\left(\frac{t}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_0^2}\right) +$

Notăm $\int_0^\infty t\cdot e^{-\lambda t}\,dt = t\,\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\Big|_0^\infty = \frac{t}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}$.

$+ \lambda_1(1-p)\left(\frac{t}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^2}\right) = pt + \frac{p}{\lambda_0} + (1-p)t + \frac{(1-p)}{\lambda_1}$

⑤ $X, Y$ v.a. cu dens. comună $f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} axy + by^2, & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

1) $a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $ab = 3$

2) f.d. rep., media, $Var(X)$, $Var(Y)$, coef. corelație.

3) Dens. condiționate $f_{X|Y}(x|y)$, resp. $f_{Y|X}(y|x)$

4) Funcție în R care face graficele dens. marginale, f.d. de rep. coresp. și resp. dens. cond.

5) $P((X,Y) \in [0;0,5]^2)$ și $P(X<Y)$

6) Rep. var. $E[X|Y]$ și $Var(X|Y)$ și verif. $Var(X) = E[Var(X|Y)] + Var(E[X|Y])$.

① $\iint_{\mathbb{R}} f_{XY}(x,y) 1_{[0,1]^2}\,dx\,dy = 1 \Leftrightarrow \int_0^1\int_0^1 axy + by^2\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\frac{ax^2y}{2} + by^2x\right)\Big|_0^1 dy =$

$= \int_0^1 \frac{ay}{2} + by^2\,dy = \frac{ay^2}{4} + \frac{by^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 2 \end{cases}$

② $f_X(x) = \int_0^1 axy + by^2\,dy = \left(a\frac{xy^2}{2} + b\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{ax}{2} + \frac{b}{3}$.

$f_Y(x) = \int_0^1 axy + by^2\,dx = \left(\frac{ax^2y}{2} + bxy^2\right)\Big|_0^1 = \frac{ay}{2} + by^2$

Ⓘ $x, y < 0 \Rightarrow F_{X,Y}(x,y) = 0$

Ⓘⓘ $x, y \in (0,1) \Rightarrow F_{X,Y}(x,y) = \int_0^x\int_0^y at z + bz^2\,dz\,dt = \int_0^x \frac{atz^2}{2} + \frac{bz^3}{3}\Big|_0^y dt =$

$= \int_0^x \frac{a\cdot t\cdot y^2}{2} + \frac{by^3}{3}\,dt = \frac{at^2y^2}{4} + b\frac{ty^3}{3}\Big|_0^x = \frac{ax^2y^2}{4} + b\frac{y^3}{3}$

ⅠⅠⅠ $x \in (0,1)$, $y \in [1,+\infty)$: $F_{X,Y}(x,y) = \int_0^x\int_0^1 axy + by^2\,dy\,dz = \int_0^x\left(\frac{azy^2}{2} + \frac{by^3}{3}\right)\Big|_0^1 dz =$

$= \int_0^x \left(\frac{az}{2} + \frac{b}{3}\right)dz = \frac{az^2}{2} + \frac{bz}{3}\Big|_0^x = \frac{ax^2}{2} + \frac{bx}{3} \to F_X(x)$.

Ⅳ $x \in [1,+\infty)$, $y \in (0,1)$: $\int_0^1\int_0^y axt + bt^2\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{axt^2}{2} + \frac{bt^3}{3}\Big|_0^y dx = \int_0^1 \frac{axy^2}{2} + \frac{by^3}{3}\,dx$

$= \frac{ay^2x^2}{4} + \frac{by^3x}{3}\Big|_0^1 = \frac{ay^2}{4} + \frac{by^3}{3} \to F_Y(y)$.

Ⅴ $x \in [1,+\infty)$, $y \in [1,+\infty) \to$

$F_{X,Y}(x,y) = 1$

$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{ax^2y^2}{4} + b\frac{y^3}{3}, & x, y \in (0,1) \\ \frac{ax^2}{2} + \frac{bx}{3}, & x \in (0,1),\ y \in [1,+\infty) \\ \frac{ay^2}{4} + \frac{by^3}{3}, & y \in \ldots,\ x \in \ldots \\ 1, & x, y > 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$