PROBABILITĂȚI

1. FORMULE DE CALCUL CU PROBABILITĂȚI

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$
- $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$
- $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$
- $A\cap B \subset A \Rightarrow P(A\cap B) \leq P(A)$
- A, B - v.a. indep. $\Rightarrow \begin{cases} \bar{A}, B - \text{indep.} \\ A, \bar{B} - \text{indep.} \\ \bar{A}, \bar{B} - \text{indep.} \end{cases}$
- $A\cap \bar{B} = A - B$
- $\overline{A\cup B} = \bar{A}\cup\bar{B}$; $\overline{A\cap B} = \bar{A}\cap\bar{B}$
- A, B - incompatibile dacă $A\cap B = \emptyset$ (evenimentul imposibil)
- A, B - independente dacă $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$
- POINCARÉ: $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n|A_1\cap\ldots\cap A_{n-1})$
- INEGALITATEA LUI BOOLE: $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} A_i - (n-1)$

2. SCHEME CLASICE DE PROBABILITATE

I Schema bilei cu REVENIRE

$$P(n: n_1, n_2, \ldots, n_m) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}$$

II Schema bilei FĂRĂ REVENIRE

$$P(n: n_1, n_2, \ldots, n_m) = \frac{C_{N_1}^{n_1}\cdot C_{N_2}^{n_2}\cdot\ldots\cdot C_{N_m}^{n_m}}{C_N^n}$$

$n_i \to$ nr bile extrase de culoarea i
$N_i \to$ nr total bile din urnă de cul i

3. VARIABILE ALEATOARE UNIDIMENSIONALE

DISCRETE

$X: \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}$ cu $\begin{cases} p_i \geq 0 \\ \sum p_i = 1 \end{cases}$

$F_X(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i$

$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

CONTINUE

$X: \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ cu $\begin{cases} 1)\ f(x) \geq 0 \\ 2)\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$

$F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$

$$\begin{cases} P(X \lesssim a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \\ P(X \gtrsim a) = 1 - F(a) = 1 - \int_{a}^{\infty} f(x)dx \\ P(a \lesssim X \lesssim b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx \end{cases}$$

X, Y - v. a. independente dacă $P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i) \cdot P(Y=y_j)$

Proprietățile MEDIEI

a) $M(a) = a$

b) $M(aX) = aM(X)$

c) $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$

d) X, Y - independente $\Rightarrow M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$

Proprietățile DISPERSIEI

$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$

a) $D(X) \geq 0$

b) $D(a) = 0$

c) $D(aX) = a^2 D(X)$

d) X, Y - indep. $\Rightarrow D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

- ABATERE MEDIE PĂTRATICĂ: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$
- MOMENT INIȚIAL DE ORDIN r: $m_r = M(X^r)$ $\begin{cases} \sum x_i^r p_i \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\,dx \end{cases}$
- MOMENT CENTRAT DE ORDIN r: $\mu_r = M[(X - M(X))^r]$ $\begin{cases} \sum (x_i - M(X))^r \cdot p_i \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^r \cdot f(x)\,dx \end{cases}$
- FUNCȚIA CARACTERISTICĂ: $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = M(e^{itX})$ $\begin{cases} \sum_k e^{itx_k} \cdot p_k \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx \end{cases}$

  $m_r(X) = \dfrac{\varphi_X^{(r)}(0)}{i^r}$
- FUNCȚIA GENERATOARE DE MOMENTE: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = M(e^{tX})$ $\begin{cases} \sum_k e^{tx_k} \cdot p_k \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx \end{cases}$

4. VARIABILE ALEATOARE BIDIMENSIONALE

DISCRETE

se dă cu tabel

$Z = (X, Y) : \begin{pmatrix} (x_i, y_j) \\ p_{ij} \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 1)\ p_{ij} \geq 0 \\ 2)\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \end{cases}$ $(\forall)\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$

CONTINUE

se dă cu densit. rep.

$Z = (X, Y) : \begin{pmatrix} (x, y) \\ f_Z(x, y) \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 1)\ f(x,y) \geq 0 \\ 2)\ \iint f(x,y)\,dx\,dy \end{cases}$

Densit. marginale:

- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x,y)\,dy$
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x,y)\,dx$

Repartiții Condiționate

$X|Y=y_j : \begin{pmatrix} x_i \\ P(X=x_i|Y=y_j) \end{pmatrix}$

$Y|X=x_i : \begin{pmatrix} y_j \\ P(Y=y_j|X=x_i) \end{pmatrix}$

Densități de repartiție condiționate

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_Z(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_Z(x,y)}{f_X(x)}$$

REGRESIA: $R_X : Y(\Omega)\to\mathbb{R}$, $R_X(y)=M(X|Y=y)$

- COVARIANȚA: $cov(X,Y)=M(X\cdot Y)-M(X)\cdot M(Y)$

  X,Y - necorelate dacă $cov(X,Y)=0$

- COEFICIENT DE CORELAȚIE: $\rho(X,Y)=\dfrac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}$

- MOMENT INIȚIAL DE ORDIN (r,s): $m_{r,s}=M(X^r,Y^s)$ $\to \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m} x_i^r y_j^s\cdot p_{ij}$; $\to \iint\limits_{-\infty}^{\infty} x^r y^s f(x,y)\,dx$

- MOMENT CENTRAT DE ORDIN (r,s): $\mu_{r,s}=M\left[(X-M(X))^r\cdot(Y-M(Y))^s\right]$

X,Y - independente dacă $P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j) \Rightarrow p_{ij}=p_i\cdot q_j$

SAU

X,Y - independente dacă $cov(X,Y)=0$ / $\rho=0$ (reciproca nu e adevărată)

Inegalitatea lui Cebîșev

Dacă X - v.a. pt. care există $M(X)$ și $D(X)$, atunci pt. orice $\varepsilon>0$:

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

---

5. STATISTICĂ

I Metoda momentelor

Considerăm selecția $X_1,X_2,\dots,X_n$ cu val. de selecție $x_1,x_2,\dots x_n$

Rezolvăm ecuația $m_1=m_1^* \Rightarrow M(X)=\overline{X}$

$\hat{\theta}$ - estimator absolut corect al θ $\to$ $\begin{cases} 1)\ M(\hat{\theta})=\theta \Rightarrow \text{cond. de estimator nedeplasat} \\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty} D(\hat{\theta})=0 \end{cases}$

* $M(\overline{X})=M(X)$

* $D(\overline{X})=\dfrac{D(X)}{n}$

* $X_1, X_2, \dots, X_n$ - selecție dintr-o populație caracterizată de v.a X
$\Rightarrow$ v.a. $X_1, \dots X_n$ sunt identic repartizate cu v.a $X \Rightarrow \begin{cases} M(X_i) = M(X) \\ D(X_i) = D(X) \end{cases}$

* $X_1, X_2, \dots, X_n$ - selecție repetată $\Rightarrow$ v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ - v.a. independente
$\Rightarrow \quad D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i)$

II Metoda verosimilității

1. Considerăm selecția $X_1, X_2, \dots, X_n$ cu val. de selecție $x_1, x_2, \dots, x_n$
2. $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n, \theta)$
3. $\ln L(\cdot)$
4. Rez. ecuația $\frac{\partial \ln L(\cdot)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \theta$ în fct. de $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$
5. Verificăm $\hat{\theta}$ - pct. de maxim al fct. de verosimilitate
$\left.\frac{\partial^2 \ln L(\cdot)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta = \hat{\theta}} < 0$

REPARTIȚIA EXPONENȚIALĂ
$X \sim Exp(\lambda) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}}, \lambda > 0$
$M(X) = \lambda$
$D(X) = \lambda^2$

6. Repartiții Esențiale

Repartiția Binomială

$X \sim Bi(n, p) \Leftrightarrow f(x) = C_n^x p^x q^{n-x}, \ x = \overline{0, n}, \ p \in (0,1), \ q = 1-p$
$\begin{cases} M(X) = np \\ D(X) = npq \end{cases}$

Repartiția Poisson

$X \sim Po(\lambda) \Leftrightarrow f(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, \ x \in \mathbb{N}, \lambda > 0$
$\begin{cases} M(X) = \lambda \\ D(X) = \lambda \end{cases}$

Repartiția Gamma

$X \sim \Gamma(a,b) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{b^a \cdot \Gamma(a)} \cdot x^{a-1} \cdot e^{-\frac{x}{b}}, \ x > 0, a, b > 0$

$M(X) = ab$
$D(X) = ab^2$

Repartiția Normală

$X \sim N(m, \sigma) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$
$M(X) = m$
$D(X) = \sigma^2$