Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Partea a II-a

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Academiei 14, RO 010014, Bucureşti, România
Emailuri: c.muresan@yahoo.com, cmuresan11@gmail.com

Abstract

Textul de faţă conţine o colecţie de probleme de diferite tipuri date de autoare la examenul aferent cursului de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti.

Pentru orice mulţime A, vom nota cu Δ_A *diagonala lui* A, adică următoarea relaţie binară pe A: $\Delta_A = \{(a,a) | a \in A\}$. De exemplu, $\Delta_\emptyset = \emptyset$, $\Delta_{\{1,2,3\}} = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$. În mod evident, Δ_A este cea mai mică relaţie de echivalenţă pe A (cea mai mică în sensul incluziunii), adică este relaţia de echivalenţă generată de $\emptyset$. În fapt, Δ_A este chiar relaţia de egalitate pe mulţimea A. Este uşor de văzut că Δ_A este singura relaţie pe A care este şi relaţie de echivalenţă şi relaţie de ordine. Mai mult, în demonstraţia imediată a afirmaţiei anterioare nu intervine proprietatea de tranzitivitate, prin urmare se observă că: Δ_A este singura relaţie pe A care este şi reflexivă, şi simetrică, şi antisimetrică. Mai mult, observăm că: o relaţie binară pe A este simetrică şi antisimetrică dacă şi numai dacă este inclusă în Δ_A.

În cele ce urmează vom folosi notaţia Δ_A pentru anumite mulţimi A.

De asemenea, vom folosi notaţia "ddacă" drept prescurtare pentru sintagma "dacă şi numai dacă".

1 Lista 1 de subiecte

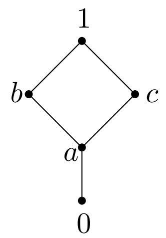
Exerciţiul 1.1. *Să se construiască două latici distributive distincte cu câte 5 elemente A şi B, astfel încât fiecare să aibă ca sublatici pe $\mathcal{L}_2^2$ (rombul)* *şi $\mathcal{L}_4$ (lanţul cu 4 elemente), şi să se determine toate morfismele de latici cu 0 şi 1 de la A la B.*

Rezolvare: Observaţi că enunţul ne dă libertatea de a alege domeniul şi codomeniul. Dar vom vedea îndată că există doar două latici de tipul enunţat, iar cele două posibilităţi de alegere a domeniului şi codomeniului (amintim că ele trebuie să fie distincte) au o simetrie/antisimetrie vizibilă, în sensul că, oricum am alege pe A şi B, determinarea morfismelor de la A la B şi determinarea morfismelor de la B la A se fac în aceeaşi manieră. Acest lucru se va observa uşor din diagramele Hasse ale celor două latici.

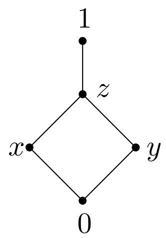
O primă remarcă ar fi aceea că orice latice finită are 0 şi 1, pentru că orice latice conţine infimumul şi supremumul oricăror două elemente ale sale, de unde rezultă (procedând din aproape în aproape) că orice latice conţine infimumul şi supremumul oricărei mulţimi finite de elemente ale sale, aşadar în particular orice latice finită conţine infimumul şi supremumul mulţimii tuturor elementelor sale, iar acest infimum şi acest supremum sunt, în mod evident (pentru că sunt elemente ale laticii), respectiv minimul şi maximul mulţimii tuturor elementelor sale, adică 0 şi 1. Conchidem că, orice latici ca în enunţ vom alege, ele vor avea câte 5 elemente, deci vor fi finite, aşadar vor avea 0 şi 1, prin urmare are sens căutarea unui morfism de latici cu 0 şi 1 între ele.

Două latici de tipul cerut sunt următoarele:

laticea A:

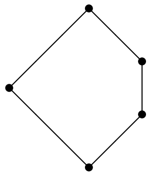


laticea B:

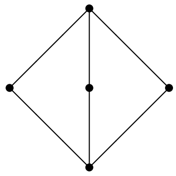


Într-adevăr, fiecare dintre aceste latici are ca sublatici rombul şi lanţul cu 4 elemente, şi, întrucât niciuna dintre laticile A şi B nu are ca sublatice nici pentagonul, nici diamantul (vezi figura de mai jos), un rezultat din curs ne permite să conchidem că laticile A şi B sunt distributive.

Observaţi că şi pentagonul este o latice cu 5 elemente care are ca sublatici rombul şi lanţul cu 4 elemente, dar, precum ştim din curs, pentagonul nu este o latice distributivă. Se observă că A, B şi pentagonul sunt singurele latici cu 5 elemente care au ca sublatici rombul şi lanţul cu 4 elemente (nu este necesară justificarea acestui lucru şi nici nu este necesară această precizare, pentru că enunţul ne dă libertatea alegerii).



pentagonul



diamantul

Să determinăm aşadar morfismele de latici cu 0 şi 1 de la A la B. Fie $f : A \to B$ un morfism de latici cu 0 şi 1, aşadar $f(0) = 0$ şi $f(1) = 1$. Fiind morfism de latici, f comută cu $\vee$ şi $\wedge$, prin urmare avem:

$$1 = f(1) = f(b \vee c) = f(b) \vee f(c),$$

$$f(a) = f(b \wedge c) = f(b) \wedge f(c).$$

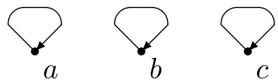
După cum observăm din diagrama Hasse a lui B, prima dintre cele două relaţii de mai sus implică faptul că $f(b) = 1$ sau $f(c) = 1$, pentru că, oricare ar fi două elemente din $B \setminus \{1\}$, disjuncţia lor este mai mică decât z şi deci diferită de 1. Alegem $f(b) = 1$, ceea ce, împreună cu a doua relaţie de mai sus, ne conduce la $f(a) = f(c)$. Luăm $f(a) = f(c) \in B$. Oricare dintre cele 5 funcţii astfel determinate, anume $f_1, \ldots, f_5 : A \to B$ de mai jos, este morfism de latici cu 0 şi 1, după cum se poate observa uşor. Nu este necesară justificarea prin calcul direct a acestui fapt, observaţia că această proprietate se vede din diagramele Hasse este suficientă.

Urmând acelaşi raţionament, alegerea $f(c) = 1$ ne conduce la $f(a) = f(b) \in B$, iar funcţiile $f_6, \ldots, f_{10} : A \to B$ care verifică aceste identităţi sunt toate morfisme de latici cu 0 şi 1. Ca mai sus, nu este nevoie să justificaţi prin calcul acest fapt.

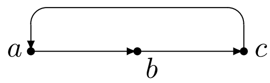
α	0	a	b	c	1
$f_1(\alpha)$	0	0	1	0	1
$f_2(\alpha)$	0	x	1	x	1
$f_3(\alpha)$	0	y	1	y	1
$f_4(\alpha)$	0	z	1	z	1
$f_5(\alpha)$	0	1	1	1	1
$f_6(\alpha)$	0	0	0	1	1
$f_7(\alpha)$	0	x	x	1	1
$f_8(\alpha)$	0	y	y	1	1
$f_9(\alpha)$	0	z	z	1	1
$f_{10}(\alpha)$	0	1	1	1	1

Exerciţiul 1.2. *Considerăm sistemul formal al calculului cu predicate. Fie signatura* $\tau = (\emptyset; 2, 2; \emptyset)$ *şi structura de ordinul I de această signatură* $\mathcal{A} = (A; R_1^{\mathcal{A}}, R_2^{\mathcal{A}}; \emptyset)$*, unde* $A = \{a, b, c\}$ *este o mulţime cu* 3 *elemente, iar relaţiile binarĕ* $R_1^{\mathcal{A}}$ *şi* $R_2^{\mathcal{A}}$ *vor fi notate respectiv cu* R_1 *şi* R_2*, şi sunt definite prin:* $R_1 = \Delta_A \subset A^2$*,* $R_2 = \{(a, b), (b, c), (c, a)\} \subset A^2$*. Să se calculeze valoarea de adevăr a enunţului:* $\forall x \exists y (R_1(x, y) \rightarrow \neg R_2(x, y))$*.*

R_1 :



R_2 :



Rezolvare:

Valoarea de adevăr a enunţului dat este:

$$||\forall x \exists y (R_1(x, y) \rightarrow \neg R_2(x, y))|| =$$

$$\bigwedge_{t \in A} \bigvee_{u \in A} (||R_1(t, u)|| \rightarrow \neg ||R_2(t, u)||) =$$

$$\left(\bigvee_{u \in A} (||R_1(a, u)|| \rightarrow \neg ||R_2(a, u)||) \right) \wedge$$

$$\left(\bigvee_{u \in A} (||R_1(b, u)|| \rightarrow \neg ||R_2(b, u)||) \right) \wedge$$

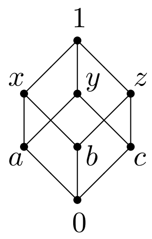
$$\left(\bigvee_{u \in A} (||R_1(c, u)|| \rightarrow \neg ||R_2(c, u)||) \right) =$$

$$1 \wedge 1 \wedge 1 = 1.$$

Într-adevăr, pentru orice $t \in A$, există $u \in A$ astfel încât $(t, u) \notin R_1$, adică $||R_1(t, u)|| = 0$, prin urmare $||R_1(t, u)|| \rightarrow \neg ||R_2(t, u)|| = 1$ şi deci disjuncţiile din parantezele expresiei de mai sus sunt egale cu 1, deci conjuncţia lor este egală cu 1. Amintim că evaluarea enunţurilor se face în algebra Boole standard $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$.

2 Lista 2 de subiecte

Exercițiul 2.1. *Să se determine filtrele cubului (cubul este algebra Boole $\mathcal{L}_2^3$) și, cu notațiile din reprezentarea cubului prin diagrama Hasse de mai jos, să se determine congruența $\sim_{<a>}$ asociată filtrului $< a >$:*



Amintim că la seminar s-a demonstrat că, pentru orice algebră Boole B și orice elemente $\alpha, \beta, \gamma \in B$, are loc echivalența: $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta \leq \gamma$.

Rezolvare: Orice algebră Boole finită are toate filtrele principale, adică generate de un singur element. Pentru orice algebră Boole B și orice element $\alpha \in B$, filtrul generat de α este $< \alpha >= \{\beta \in B | \alpha \leq \beta\}$, unde, desigur, $\leq$ este relația de ordine parțială a laticii B.

Cubul este o algebră Boole finită (cu 8 elemente), așadar filtrele sale sunt cele 8 enumerate mai jos:

$< 0 >= \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | 0 \leq \beta\} = \mathcal{L}_2^3$ (filtrul impropriu, adică acela care este egal cu întreaga algebră Boole);

$< a >= \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | a \leq \beta\} = \{a, x, y, 1\}$;

$< b >= \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | b \leq \beta\} = \{b, x, z, 1\}$;

$< c >= \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | c \leq \beta\} = \{c, y, z, 1\}$;

$< x >= \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | x \leq \beta\} = \{x, 1\}$;

$< y >= \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | y \leq \beta\} = \{y, 1\}$;

$< z >= \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | z \leq \beta\} = \{z, 1\}$;

$< 1 >= \{\beta \in \mathcal{L}_2^3 | 1 \leq \beta\} = \{1\}$ (filtrul trivial).

Filtrele $< a >$, $< b >$, $< c >$, $< x >$, $< y >$, $< z >$ sunt filtrele proprii și netriviale ale cubului.

În șirul de echivalențe de mai jos folosim relația demonstrată la seminar pe care am amintit-o în enunț. Dacă unele echivalențe nu vă sunt clare, demonstrați pe rând implicația directă și implicația reciprocă a fiecăreia dintre acele echivalențe. Conform definiției congruenței generate de un filtru, avem, pentru orice elemente $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_2^3$: $(\alpha, \beta) \in \sim_{<a>}$ ddacă $\alpha \sim_{<a>} \beta$ ddacă $\alpha \leftrightarrow \beta \in < a >$ ddacă $a \leq \alpha \leftrightarrow \beta$ ddacă $a \leq (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

ddacă $[a \leq \alpha \to \beta$ şi $a \leq \beta \to \alpha]$ ddacă $[a \wedge \alpha \leq \beta$ şi $a \wedge \beta \leq \alpha]$ ddacă $[a \wedge \alpha \leq a \wedge \beta$ şi $a \wedge \beta \leq a \wedge \alpha]$ ddacă $a \wedge \alpha = a \wedge \beta$.

Aşadar, $\sim_{<a>} = \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{L}_2^3 \times \mathcal{L}_2^3 | a \wedge \alpha = a \wedge \beta\}$. Care sunt perechile de elemente din $\mathcal{L}_2^3$ care în conjuncţie cu a dau acelaşi element? Diagrama Hasse ne sugerează răspunsul. Să nu uităm că orice congruenţă $\sim$ este în primul rând o relaţie de echivalenţă, deci are proprietăţile: reflexivitate (adică $\sim$ include diagonala mulţimii pe care este definită), simetrie (adică, pentru orice pereche (α, β) din $\sim$, avem că $\sim$ conţine şi perechea (β, α)) şi tranzitivitate (adică, pentru oricare două perechi de forma (α, β) şi (β, γ) din $\sim$, avem că $\sim$ conţine şi perechea (α, γ)). Aceste observaţii ne vor ajuta să determinăm congruenţa $\sim_{<a>}$. a este un atom, prin urmare este uşor de văzut ca, pentru orice $\alpha \in \mathcal{L}_2^3$, $a \wedge \alpha \in \{0, a\}$. De fapt, mulţimile $C_1 = \{\alpha \in \mathcal{L}_2^3 | a \wedge \alpha = 0\}$ şi $C_2 = \{\alpha \in \mathcal{L}_2^3 | a \wedge \alpha = a\}$ sunt chiar clasele de echivalenţă ale congruenţei $\sim_{<a>}$, după cum se poate vedea uşor din definiţia claselor unei relaţii de echivalenţă. Iar congruenţa $\sim_{<a>}$ nu este altceva decât: $\sim_{<a>} = \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in C_1\} \cup \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in C_2\}$. Cine sunt C_1 şi C_2? Cel mai uşor poate fi determinată C_2: întrucât relaţia $a \wedge \alpha = a$ din definiţia mulţimii C_2 este echivalentă cu: $a \leq \alpha$, după cum ştim din definiţia relaţiei $\leq$ pe baza operaţiei $\wedge$ (sau a operaţiei $\vee$) din corespondenţa latice Ore $-$ latice Dedekind, rezultă că: $C_2 = \{\alpha \in \mathcal{L}_2^3 | a \leq \alpha\} =< a >= \{a, x, y, 1\}$. Remarcăm că, pentru orice $\alpha \in \mathcal{L}_2^3 \setminus < a >= \mathcal{L}_2^3 \setminus C_2 = \{0, b, c, z\}$, $a \wedge \alpha = 0$, aşadar aceste elemente compun mulţimea C_1: $C_1 = \{0, b, c, z\} = \mathcal{L}_2^3 \setminus < a >= \mathcal{L}_2^3 \setminus C_2$, ceea ce era uşor de observat şi direct din faptul că relaţia de congruenţă $\sim_{<a>}$ are exact două clase de echivalenţă, care, după cum ştim din proprietăţile claselor unei relaţii de echivalenţă, sunt mulţimi complementare una alteia.

În lumina celor de mai sus, să enumerăm elementele congruenţei $\sim_{<a>}$: punem deoparte perechile de forma (α, α) din $\sim_{<a>}$, şi astfel obţinem: $\sim_{<a>} = \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in C_1\} \cup \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in C_2\} = \Delta_{\mathcal{L}_2^3} \cup \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in C_1, \alpha \neq \beta\} \cup \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in C_2, \alpha \neq \beta\} = \Delta_{\mathcal{L}_2^3} \cup \{(0, b), (b, 0), (0, c), (c, 0), (0, z), (z, 0), (b, c), (c, b), (b, z), (z, b), (c, z), (z, c)\} \cup \{(a, x), (x, a), (a, y), (y, a), (a, 1), (1, a), (x, y), (y, x), (x, 1), (1, x), (y, 1), (1, y)\} = \{(0, 0), (a, a), (b, b), (c, c), (x, x), (y, y), (z, z), (1, 1), (0, b), (b, 0), (0, c), (c, 0), (0, z), (z, 0), (b, c), (c, b), (b, z), (z, b), (c, z), (z, c), (a, x), (x, a), (a, y), (y, a), (a, 1), (1, a), (x, y), (y, x), (x, 1), (1, x), (y, 1), (1, y)\}$.

Sigur, enunţul nu ne cere să enumerăm elementele congruenţei $\sim_{<a>}$, aşa că obţinerea faptului că $\sim_{<a>} = \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in C_1\} \cup \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in C_2\} = \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in \{0, b, c, z\}\} \cup \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in \{a, x, y, 1\}\}$ ar fi suficientă la un examen. De asemenea, comentariile destinate numai facilitării înţelegerii de către cititor a acestei expuneri, care fac această rezolvare să pară atât de voluminoasă, nu trebuie scrise la examen. Menţionarea rezultatelor teoretice folosite în demonstraţie, cum ar fi cel privind forma filtrelor unei algebre Boole finite, forma unui filtru principal, definiţia congruenţei asociate unui filtru etc. sunt obligatorii la examen. Desigur, aceste precizări sunt valabile pentru rezolvarea oricărei probleme la examen.

Exerciţiul 2.2. *Considerăm sistemul formal al calculului propoziţional clasic, în care notăm cu E mulţimea enunţurilor. Să se demonstreze semantic că, pentru orice mulţime de enunţuri $\Sigma \subseteq E$ şi pentru orice enunţuri $\varphi, \psi \in E$, are loc:* $\Sigma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg\varphi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Rezolvare: Conform teoremei de completitudine tare, este suficient să demonstrăm că: $\Sigma \cup \{\neg\psi\} \vDash \neg\varphi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$.

Să notăm cu V mulţimea variabilelor propoziţionale.

"$\Rightarrow$": Presupunem că $\Sigma \cup \{\neg\psi\} \vDash \neg\varphi$. Demonstrăm că $\Sigma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$.

Fie o interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ astfel încât $h \vDash \Sigma \cup \{\varphi\}$ (adică h satisface $\Sigma \cup \{\varphi\}$). Ştim că, dată h, există o unică funcţie $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ care restricţionată la V este egală cu h şi care comută cu $\neg$ şi $\to$, unde $\neg$ şi $\to$ pe E sunt conectori logici, iar $\neg$ şi $\to$ pe $\mathcal{L}_2$ sunt operaţii de algebră Boole ($\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$ este *algebra Boole standard*, după cum ne amintim din curs).

$h \vDash \Sigma \cup \{\varphi\}$, aşadar $h \vDash \Sigma$ şi $\tilde{h}(\varphi) = 1$. Trebuie să demonstrăm că $\tilde{h}(\psi) = 1$. Presupunem prin absurd că $\tilde{h}(\psi) = 0$. Rezultă că $\tilde{h}(\neg\psi) = \neg\tilde{h}(\psi) = \neg 0 = 1$. Întrucât $h \vDash \Sigma$, obţinem că $h \vDash \Sigma \cup \{\neg\psi\}$, de unde, conform ipotezei, rezultă că $\tilde{h}(\neg\varphi) = 1$, adică $\neg\tilde{h}(\varphi) = 1$, prin urmare $\tilde{h}(\varphi) = 0$, ceea ce este o contradicţie cu alegerea lui h. Aşadar $\tilde{h}(\psi) = 1$ şi deci $\Sigma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$, pentru că h a fost aleasă arbitrar dintre interpretările care satisfac $\Sigma \cup \{\varphi\}$.

"$\Leftarrow$": Presupunem că $\Sigma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$. Demonstrăm că $\Sigma \cup \{\neg\psi\} \vDash \neg\varphi$.

Fie o interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ astfel încât $h \vDash \Sigma \cup \{\neg\psi\}$, adică $h \vDash \Sigma$ şi $\tilde{h}(\neg\psi) = 1$. Trebuie să demonstrăm că $\tilde{h}(\neg\varphi) = 1$. Presupunem prin absurd că $\tilde{h}(\neg\varphi) = 0$. Acest fapt este echivalent cu $\neg\tilde{h}(\varphi) = 0$, adică $\tilde{h}(\varphi) = 1$. Întrucât $h \vDash \Sigma$, obţinem că $h \vDash \Sigma \cup \{\varphi\}$. Conform ipotezei, rezultă că $\tilde{h}(\psi) = 1$, prin urmare $\neg\tilde{h}(\psi) = 0$, adică $\tilde{h}(\neg\psi) = 0$, ceea ce este o contradicţie cu alegerea lui h. Aşadar $\tilde{h}(\neg\varphi) = 1$ şi deci $\Sigma \cup \{\neg\psi\} \vDash \neg\varphi$, pentru că h a fost aleasă arbitrar dintre interpretările care satisfac $\Sigma \cup \{\neg\psi\}$.

Echivalenţa din enunţ este demonstrată.