Notaţii şi formule matematice

1. Repartiţii de probabilitate multidimensionale

Fie $E=\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ un vector aleator format din n variabile discrete. Repartiţia sa, $P_0\left(X_1,\ldots,X_n\right)^{-1}$, este complet specificată de valorile

$$p\left(x_1,\ldots,x_n\right)=P\left(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\right)\geq 0$$

$$\sum_{\left(x_1,\ldots,x_n\right)} p\left(x_1,\ldots,x_n\right)=1,$$

unde $\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ este o ”realizare” a lui E.

În general, pentru a desemna $P_0\left(X_1,\ldots,X_n\right)^{-1}$, se foloseşte notaţia simplificată $P\left(E\right)$.

În acest context, are loc următoarea formulă de înmulţire a probabilităţilor:

$$P\left(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\right)=P\left(X_1=x_1\right)\cdot P\left(X_2=x_2\mid X_1=x_1\right)\cdot\ldots$$
$$\cdot P\left(X_n=x_n\mid X_1=x_1,\ldots,X_{n-1}=x_{n-1}\right)$$

2. Repartiţii condiţionate

Fie Y o variabilă aleatoare discretă şi $E=\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ un vector aleator cu componente discrete. Corpul de evenimente generate de E este finit, având ca generatori pe $\left\{X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\right\}$.

Pentru fiecare realizare $\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ a lui E, notăm probabilitatea condiţionată a unui eveniment A cu

$$P\left(A\,|\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)=\frac{P\left(A\cap\left\{X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\right\}\right)}{P\left(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\right)}$$

Corespunzător variabilei Y putem lua în consideraţie:

- repartiţia lui $Y, P\left(Y\right)$, dată de valorile
$$p\left(y\right)=P\left(Y=y\right)\ ;$$
- repartiţia lui Y condiţionată de $E,\ P\left(Y\,|\,E\right)$, care este dată, pentru fiecare realizare $\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, de valorile
$$p\left(y\,|\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)=P\left(\left\{Y=y\right\}|\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right).$$

În acest context se verifică versiunea condiţionată a formulei de înmulţire a probabilităţilor:

$$P\left(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\,|\,C\right)=P\left(X_1=x_1\,|\,C\right)\cdot P\left(X_2=x_2\,|\,C,X_1=x_1\right)\cdot\ldots$$
$$\cdot P\left(X_n=x_n\,|\,C,X_1=x_1,\ldots,X_{n-1}=x_{n-1}\right).$$

3. Formula lui Bayes

Fie E şi Y cu aceeaşi semnificaţie din §1 şi §2.

- Formula lui Bayes în *versiune necondiţionată* este utilizată pentru a exprima o repartiţie a posteriori
$$P\left(E\,|\,Y=y\right)=\frac{P\left(E\right)\cdot P\left(\left\{Y=y\right\}|\,E\right)}{P\left(\left\{Y=y\right\}\right)}$$

unde:

$P(E)$ este repartiţia a priori a lui E ;

$\{Y = y\}$ este evenimentul observat ;

$P(E \mid Y = y)$ este repartiţia a posteriori a lui E ;

$P(\{Y = y\} \mid E)$ este complet determinată de valorile

$$P(\{Y = y\} \mid \{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\}).$$

- Formula lui Bayes în *versiune condiţionată* este utilizată pentru a exprima o repartiţie a posteriori condiţionată

$$P(Y \mid E, e) = \frac{P(Y \mid E) \cdot P(e \mid E, Y)}{P(e \mid E)}$$

unde:

$P(Y \mid E)$ este o probabilitate condiţionată, a priori ;

e reprezintă o nouă dovadă ;

$P(Y \mid E, e)$ este o probabilitate condiţionată, a posteriori.