

CURSUL 7: SUBGRUP NORMAL. GRUP FACTOR

G. MINCU

1. RELAȚII DE ECHIVALENȚĂ MODULO UN SUBGRUP

Fie G un grup și $H \leq G$. Considerăm următoarele relații pe G :

- a) $x \equiv_s y \pmod{H}$ dacă și numai dacă $x^{-1}y \in H$
- b) $x \equiv_d y \pmod{H}$ dacă și numai dacă $xy^{-1} \in H$.

Propoziția 1. Relațiile \equiv_s și \equiv_d sunt de echivalență.

Temă: Demonstrați propoziția 1!

Definiția 2. \equiv_s se numește **relația de echivalență la stânga modulo subgrupul H** , iar \equiv_d se numește **relația de echivalență la dreapta modulo subgrupul H** .

Notația folosită pentru mulțimea factor a lui G în raport cu \equiv_s este $(G/H)_s$, iar cea pentru mulțimea factor a lui G în raport cu \equiv_d este $(G/H)_d$.

Propoziția 3. Fie G un grup, $H \leq G$ și $x \in G$. Atunci:

- a) Clasa de echivalență a lui x în raport cu $\equiv_s \pmod{H}$ este xH .
- b) Clasa de echivalență a lui x în raport cu $\equiv_d \pmod{H}$ este Hx .

Demonstrație: a) $y \in \hat{x} \Leftrightarrow x^{-1}y \in H \Leftrightarrow y \in xH$.

b) Analog. \square

Corolarul 4. $(G/H)_s = \{xH : x \in G\}$, iar $(G/H)_d = \{Hx : x \in G\}$.

● **Propoziția 5.** Fie G un grup și $H \leq G$. Atunci $|(G/H)_s| = |(G/H)_d|$.

● *Demonstrație:* Definim $f : (G/H)_s \rightarrow (G/H)_d$, $f(xH) = Hx^{-1}$ și $g : (G/H)_d \rightarrow (G/H)_s$, $g(Hx) = x^{-1}H$.

Dacă $xH = yH$, atunci $x^{-1}y \in H$, deci $x^{-1}(y^{-1})^{-1} \in H$, de unde $Hx^{-1} = Hy^{-1}$. Prin urmare, f este corect definită. Faptul că g este corect definită se probează analog.

Este imediat că f și g sunt inverse una celeilalte, deci ele sunt bijective, de unde concluzia. \square

● **Definiția 6.** Cardinalul comun al mulțimilor $|(G/H)_s|$ și $|(G/H)_d|$ se numește **indicele lui H în G** .

Vom nota indicele lui H în G cu $[G : H]$.

Definiția 7. Prin **ordinul** grupului G înțelegem cardinalul lui G . Notăția folosită în mod uzual pentru ordinul lui G este $|G|$.

Lemma 8. Fie G un grup, $H \leq G$ și $x \in G$. Atunci $|xH| = |H|$.

Demonstrație: Definim $f : xH \rightarrow H$, $f(t) = x^{-1}t$ și $g : H \rightarrow xH$, $g(h) = xh$.

Este imediat că f și g sunt corect definite și inverse una celeilalte, deci ele sunt bijective, de unde concluzia. \square

- **Teorema lui Lagrange** Fie G un grup și $H \leq G$. Atunci $|G| = |H| \cdot [G : H]$.

- *Demonstrație:* Avem $G = \coprod_{xH \in (G/H)_s} xH$, deci $|G| = \sum_{xH \in (G/H)_s} |xH|$. Conform lemei 8, din această relație obținem $|G| = |H| \cdot |(G/H)_s|$. \square

- **Corolarul 9.** Ordinul oricărui subgrup al unui grup finit divide ordinul respectivului grup.

2. SUBGRUPURI NORMALE

- **Propoziția 10.** Fie G un grup și $H \leq G$. Următoarele afirmații sunt echivalente:
 - $(G/H)_s = (G/H)_d$.
 - Pentru orice $x \in G$ avem $xH = Hx$.
 - Pentru orice $x \in G$ avem $xHx^{-1} = H$.
 - Pentru orice $x \in G$ avem $xHx^{-1} \subset H$.

Temă: Demonstrați propoziția 10!

- **Definiția 11.** Fie G un grup și $H \leq G$. Spunem că H este **subgrup normal** al lui G dacă îndeplinește una dintre condițiile echivalente din propoziția 10.

Vom nota faptul că H este subgrup normal al lui G cu $H \trianglelefteq G$.

- **Exemplul 12.** $\{e\} \trianglelefteq G$, $G \trianglelefteq G$.
- **Exemplul 13.** Pentru orice familie $(H_i)_{i \in I}$ de subgrupuri normale ale lui G avem $\bigcap_{i \in I} H_i \trianglelefteq G$.
- **Exemplul 14.** Orice subgrup al unui grup abelian este normal.
- **Exemplul 15.** Orice subgrup de indice doi al unui grup este normal.

- **Exemplul 16.** Dacă $f : G \rightarrow G'$ este un morfism de grupuri, atunci $\ker f \trianglelefteq G$.

Exemplul 16 este un caz particular al următoarei propoziții, care ne oferă și o altă clasă de exemple de subgrupuri normale:

- **Propoziția 17.** Dacă $f : G \rightarrow G'$ este un morfism de grupuri, atunci:
 - a) Pentru orice $K \trianglelefteq G'$ avem $f^{-1}(K) \trianglelefteq G$.
 - b) Dacă f este surjectiv, atunci pentru orice $H \trianglelefteq G'$ avem $f(H) \trianglelefteq G'$.

Teorema de corespondență pentru subgrupuri se completează astfel:

Teorema 18. Fie $f : G \rightarrow G'$ un morfism surjectiv de grupuri. Notăm $\mathcal{H} = \{H \leq G : H \supset \ker f\}$ și $\mathcal{K} = \{K : K \leq G'\}$. Atunci funcțiile $\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, $\Phi(H) = f(H)$ și $\Psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$, $\Psi(K) = f^{-1}(K)$ sunt (bijective și) inverse una celeilalte și păstrează incluziunile. În plus, subgrupurile normale ale lui G care conțin $\ker f$ corespund via aceste funcții subgrupurilor normale ale lui G' .

3. GRUP FACTOR

- **Observația 19.** Fie G un grup și $H \trianglelefteq G$. Atunci pe mulțimea $(G/H)_s$ este corect definită legea de compoziție $(xH) \cdot (yH) = (xy)H$.

Temă: Demonstrați observația 19!

- **Definiția 20.** Fie G un grup și $H \trianglelefteq G$. Prin **grupul factor al lui G în raport cu H** înțelegem grupul care are mulțimea subiacentă $(G/H)_s$ și legea de compoziție $(xH) \cdot (yH) = (xy)H$.

Notația uzuală pentru grupul factor al lui G în raport cu H este $\frac{G}{H}$.

Pentru elementul $xH \in \frac{G}{H}$ vom prefera uneori notația \hat{x} . În notație aditivă, în loc de xH vom scrie, desigur, $x + H$.

Exemplul 21. $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_n$.

Observația 22. Fie G un grup și $H \trianglelefteq G$. Aplicația $\pi : G \rightarrow \frac{G}{H}$, $\pi(x) = \hat{x}$ este morfism surjectiv de grupuri.

Definiția 23. Fie G un grup și $H \trianglelefteq G$. Morfismul π din observația 22 se numește **surjecția canonică** (sau **proiecția canonică**) a grupului factor $\frac{G}{H}$.

Proprietatea de universalitate a grupului factor. Fie G un grup, $H \trianglelefteq G$, $\pi : G \rightarrow \frac{G}{H}$ surjecția canonică și $f : G \rightarrow G'$ un morfism de grupuri. Atunci:

- i) Dacă $H \subset \ker f$, atunci există un unic morfism $u : \frac{G}{H} \rightarrow G'$ astfel încât $u \circ \pi = f$. În plus:
- ii) u este injectivă dacă și numai dacă $H = \ker f$.
- iii) u este surjectivă dacă și numai dacă f este surjectivă.

Temă: Demonstrați proprietatea de universalitate a grupului factor!

Exemplul 24. Conform proprietății de universalitate a grupului factor, proiecția canonică a lui \mathbb{Z} pe \mathbb{Z}_4 induce morfismul de grupuri $u : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_4$, $u(\widehat{a}) = \overline{a}$. Pe de altă parte, deoarece $4\mathbb{Z} \not\subset 12\mathbb{Z}$, nu ne așteptăm ca $v : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$, $v(\overline{a}) = \widehat{a}$ să fie morfism de grupuri; verificarea arată că, într-adevăr, v nu este o funcție corect definită.

4. TEOREMA FUNDAMENTALĂ DE IZOMORFISM PENTRU GRUPURI

- **4.1. Teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri.** Fie $f : G \rightarrow \Gamma$ un morfism de grupuri. Atunci

$$\frac{G}{\ker f} \xrightarrow{\sim} \text{Im } f$$

în mod canonic, via $\overline{f}(\widehat{x}) = f(x)$.

- *Demonstrație*¹: Definim $\overline{f} : \frac{G}{\ker f} \rightarrow \text{Im } f$, $\overline{f}(\widehat{x}) = f(x)$.

Dacă $\widehat{x} = \widehat{y}$, atunci $x^{-1}y \in \ker f$, deci $f(x^{-1}y) = e_\Gamma$. f fiind morfism de grupuri, obținem de aici $f(x)^{-1}f(y) = e_\Gamma$, deci $f(x) = f(y)$. Prin urmare, valorile lui \overline{f} sunt independente de alegerea reprezentanților argumentelor. Cum valorile lui \overline{f} sunt valori ale lui f , ele se află în $\text{Im } f$. Prin urmare, \overline{f} este corect definită.

Dacă $x, y \in G$, atunci $\overline{f}(\widehat{xy}) = \overline{f}(\widehat{x}\widehat{y}) = f(xy) = f(x)f(y) = \overline{f}(\widehat{x})\overline{f}(\widehat{y})$.

Așadar, \overline{f} este morfism de grupuri.

Este evident că \overline{f} este surjectivă.

Dacă $\overline{f}(\widehat{x}) = e_\Gamma$, atunci $f(x) = e_\Gamma$, deci $x \in \ker f$, de unde $\widehat{x} = \widehat{e}$. În consecință, \overline{f} este injectivă.

Din toate faptele arătate mai sus rezultă că \overline{f} este morfism bijectiv de grupuri. Prin urmare, f este izomorfism. \square

¹ O demonstrație mai rapidă a acestei teoreme se obține utilizând proprietatea de universalitate a grupului factor. Lăsăm ca exercițiu cititorului această abordare.

BIBLIOGRAFIE

- [1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universității din București, 2006.
- [2] I. D. Ion, N. Radu, *Algebră*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [3] C. Năstăsescu, C. Niță, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, București, 1986.