Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Partea I

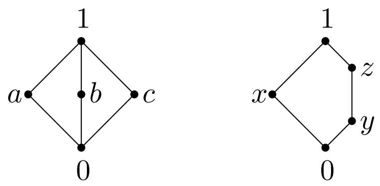
Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Academiei 14, RO 010014, Bucureşti, România
Emailuri: c.muresan@yahoo.com, cmuresan11@gmail.com

Abstract

Textul de faţă conţine o colecţie de probleme de diferite tipuri date de autoare la examenul aferent cursului de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti.

1 Lista 1 de subiecte

Exerciţiul 1.1. *Fie laticile: L = diamantul $= \{0, a, b, c, 1\}$ şi M = pentagonul $= \{0, x, y, z, 1\}$, cu diagramele Hasse de mai jos:*



Câte funcţii injective de la L la M există? Câte morfisme injective de latici de la L la M există? Demonstraţi.

Rezolvare: Observăm că L şi M au acelaşi cardinal, anume 5, prin urmare, pentru orice funcţie $f : L \to M$, are loc echivalenţa: f este injectivă dacă şi numai dacă f este bijectivă. Prin urmare, numărul funcţiilor injective de la L la M este egal cu numărul funcţiilor bijective de la L la M, anume $5\,! = 120$.

Conform celor de mai sus, orice morfism injectiv de latici de la L la M este izomorfism de latici. Fie $h : L \to M$ un izomorfism de latici. Rezultă că $h(0) = 0$ şi $h(1) = 1$, prin urmare, datorită injectivităţii lui h, obţinem că $h(\{a, b, c\}) = \{x, y, z\}$. Să presupunem, de exemplu, că $h(b) = y$ şi $h(c) = z$. În acest moment putem observa că z nu este atom, iar c este atom, deci putem obţine contradicţie cu faptul că orice izomorfism de latici duce atomii în atomi. Dar putem da şi un argument care nu necesită cunoaşterea acestui rezultat teoretic, printr-un simplu calcul: $h(b \wedge c) = h(0) = 0 \neq y = y \wedge z = h(b) \wedge h(c)$, ceea ce este o contradicţie cu faptul că h este morfism de latici. Celelalte cazuri se tratează analog; a nu se uita că h este injectiv, prin urmare numărul cazurilor este $3\,! = 6$. Contradicţia a apărut datorită presupunerii că există izomorfisme de latici de la L la M. Aşadar nu există izomorfisme de latici de la L la M, prin urmare numărul morfismelor injective de latici de la L la M este 0.

Exerciţiul 1.2. *Considerăm sistemul formal al calculului propoziţional clasic, în care notăm cu E mulţimea enunţurilor. Să se demonstreze semantic următoarea regulă de deducţie:*

$$\frac{\Sigma \cup \{\neg\,\chi\} \vdash \psi \to \neg\,\varphi}{\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \vdash \chi},$$

pentru orice mulţime de enunţuri $\Sigma \subseteq E$ şi pentru orice enunţuri $\varphi, \psi, \chi \in E$.

Rezolvare: Conform teoremei de completitudine tare, este suficient să demonstrăm că: dacă $\Sigma \cup \{\neg\,\chi\} \vDash \psi \to \neg\,\varphi$, atunci $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \vDash \chi$.

Presupunem aşadar că $\Sigma \cup \{\neg\,\chi\} \vDash \psi \to \neg\,\varphi$.

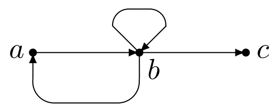
Să notăm cu V mulţimea variabilelor propoziţionale şi fie $h : V \to \mathcal{L}_2$ o interpretare care este un model pentru mulţimea de enunţuri $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\}$, adică o funcţie oarecare h de la V la $\mathcal{L}_2$ cu proprietatea că $h \vDash \Sigma \cup \{\varphi, \psi\}$. Ştim că, dată h, există o unică funcţie $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ care restricţionată la V este egală cu h şi care comută cu $\neg$ şi $\to$, unde $\neg$ şi $\to$ pe E sunt conectori logici, iar $\neg$ şi $\to$ pe $\mathcal{L}_2$ sunt operaţii de algebră Boole ($\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$ este *algebra Boole standard*, după cum ne amintim din curs).

$h \vDash \Sigma \cup \{\varphi, \psi\}$, aşadar $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi) = 1$. Rezultă că $\tilde{h}(\psi \to \neg\,\varphi) = \tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\neg\,\varphi) = \tilde{h}(\psi) \to \neg\,\tilde{h}(\varphi) = 1 \to \neg\,1 = 1 \to 0 = 0$. Presupunem prin absurd că $\tilde{h}(\chi) = 0$. Rezultă că $\tilde{h}(\neg\,\chi) = \neg\,\tilde{h}(\chi) = \neg\,0 = 1$. Dar $h \vDash \Sigma \cup \{\varphi, \psi\}$, aşadar în particular $h \vDash \Sigma$. Am obţinut că $\tilde{h}(\neg\,\chi) = 1$ şi $h \vDash \Sigma$, prin urmare $h \vDash \Sigma \cup \{\neg\,\chi\}$. Conform ipotezei, $\Sigma \cup \{\neg\,\chi\} \vDash \psi \to \neg\,\varphi$. Rezultă că $\tilde{h}(\psi \to \neg\,\varphi) = 1$, de unde, folosind rezultatul din primul calcul de mai sus, obţinem $0 = 1$ în $\mathcal{L}_2$, ceea ce este o contradicţie. Aşadar $\tilde{h}(\chi) = 1$.

Am demonstrat că, oricare ar fi o interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ cu proprietatea că $h \vDash \Sigma \cup \{\varphi, \psi\}$, rezultă că $\tilde{h}(\chi) = 1$. Aşadar $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \vDash \chi$.

2 Lista 2 de subiecte

Exerciţiul 2.1. *Considerăm sistemul formal al calculului cu predicate. Fie signatura* $\tau = ((1); (2); \emptyset)$ *şi structura de ordinul I de această signatură* $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}; R^{\mathcal{A}}; \emptyset)$*, unde* $A = \{a, b, c\}$ *este o mulţime cu 3 elemente, operaţia unară* $f^{\mathcal{A}}$ *va fi notată cu* f *şi este definită prin:* $f : A \to A$, $f(a) = b$, $f(b) = f(c) = a$*, iar relaţia binară* $R^{\mathcal{A}}$ *va fi notată cu* R *şi este definită prin:* $R = \{(a, b), (b, a), (b, b), (b, c)\} \subseteq A^2$*. Să se calculeze valoarea de adevăr a enunţului:* $\forall x(R(x, f(x)) \vee R(f(x), x))$*.*

$R :$ 

Rezolvare: $||\forall x(R(x, f(x)) \vee R(f(x), x))|| = \bigwedge_{t \in A} (||R(t, f(t))|| \vee ||R(f(t), t)||)$
$= (||R(a, f(a))|| \vee ||R(f(a), a)||) \wedge (||R(b, f(b))|| \vee ||R(f(b), b)||) \wedge (||R(c, f(c))|| \vee ||R(f(c), c)||) = (||R(a, b)|| \vee ||R(b, a)||) \wedge (||R(b, a)|| \vee ||R(a, b)||) \wedge (||R(c, a)|| \vee ||R(a, c)||) = (1 \vee 1) \wedge (1 \vee 1) \wedge (0 \vee 0) = 1 \wedge 1 \wedge 0 = 0$.

Exerciţiul 2.2. *Să se calculeze închiderea tranzitivă a relaţiei* R *de la Exerciţiul 2.1.*

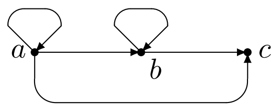
Rezolvare: Notăm cu $T(R)$ închiderea tranzitivă a relaţiei binare R. În general, $T(R) = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$. Dar ştim că, dacă R este o relaţie binară pe o mulţime finită, cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $T(R) = \bigcup_{k=1}^{n} R^k$. Întradevăr, se poate demonstra prin inducţie matematică după p că, pentru orice număr natural $p \geq n + 1$, are loc: $R^p \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} R^k$. Demonstraţia se poate face în cazul general al unor n şi R arbitrare şi nu trebuie redată în rezolvarea acestui exerciţiu la examen, dar un student care nu cunoaşte formula particulară a lui $T(R)$ din cazul finit poate observa uşor şi demonstra prin inducţie matematică faptul că, în cazul particular al acestui exerciţiu, în care $n = |A| = 3$, pentru orice număr natural $p \geq 4$, $R^p \subseteq R \cup R^2 \cup R^3$.

Aşadar, avem: $T(R) = \bigcup_{k=1}^{3} R^k = R \cup R^2 \cup R^3$.

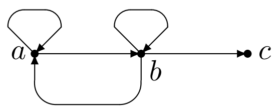
Amintim definiţia compunerii a două relaţii binare R si S pe o mulţime A: $R \circ S = \{(x,z) \in A^2 | (\exists y \in A)(x,y) \in S$ şi $(y,z) \in R\}$, care este tot o relaţie binară pe mulţimea A. Această operaţie de compunere este asociativă, ceea ce ne permite să definim, pentru orice relaţie binară R şi orice număr natural nenul k, relaţia binară $R^k = \underbrace{R \circ \ldots \circ R}_{k \text{ de } R}$. R^k poate fi definită recursiv astfel: $R^1 = R$ şi, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, $R^{k+1} = R \circ R^k$. Menţionăm că se mai definesc $R^0 = \Delta_A = \{(x,x) | x \in A\}$ =diagonala lui A şi $R^{-k} = (R^{-1})^k$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, unde $R^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in R\}$ =inversa lui R.

Revenind la problema de faţă, calculăm:

$R^2 = R \circ R = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c)\}$:



$R^3 = R \circ R^2 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(b,c)\}$:



Obţinem:

$T(R) = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c)\}$: