

Tema 4

Exercițiul 1

- a) Fie X o v.a. a cărei densitate este

$$f(x) = \begin{cases} c \ln\left(\frac{7}{x}\right), & 0 < x < 7, \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Să se determine constanta c astfel încât f să fie densitate de probabilitate. Determinați funcția de repartiție și calculați $\mathbb{P}(X > 3)$.

- b) Să se determine constanta c din intervalul $(0, 1)$ astfel încât funcția

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [1 - c, 1 + c] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

să fie densitate de probabilitate. Calculați funcția de repartiție $F(x)$ și trasați graficul acesteia.

Exercițiul 2

- a) Nivelul de zgomot al unei mașini de spălat este o v.a. de medie 44 dB și de abatere standard 5 dB. Admițând aproximarea normală care este probabilitatea să găsim o medie a zgomotului superioară la 48 dB într-un eșantion de talie 10 mașini de spălat ?
- b) O telecabină are o capacitate de 100 de persoane. Știind că greutatea populației (țării) este o v.a. de medie 66.3 Kg și o abatere standard de 15.6 Kg și presupunând că persoanele care au urcat în telecabină au fost alese în mod aleator din populație, care este probabilitatea ca greutatea totală acestora să depășească 7000 Kg ?

Exercițiul 3

De câte ori trebuie aruncată o monedă pentru ca să putem spune cu o probabilitate de 0.6 că abaterea frecvenței de apariție a stemei de la probabilitatea $p = 0.5$ este mai mică decât 0.01 ?

Exercițiul 4

Fie X_1, \dots, X_n un eșantion de talie n cu funcția de repartiție $F(x)$ și densitatea $f(x)$ și (Y_1, \dots, Y_n) versiunea ordonată crescător a acestuia. Notăm cu $H_k(x)$ și $h_k(x)$ funcția de repartiție și densitatea v.a. Y_k . Fie $Y_1 = \inf X_i$ și $Y_n = \sup X_i$.

- a) Care este funcția de repartiție și densitatea lui Y_1 și Y_n ?
- b) Care este probabilitatea ca o observație dintr-o v.a. de lege $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ să depășească $\mu + 3\sigma$?
- c) Dar într-un eșantion de talie 100 cat este această probabilitate (i.e. probabilitatea ca o observație să depășească $\mu + 3\sigma$)?
- d) Dintr-un eșantion de talie 100 dintr-o populație repartizată $\mathcal{N}(0, 1)$ ce valoare nu poate fi depășită cu o probabilitate de 99% ?

- e) O societate de analiză a calității apei și a mediului efectuează un sondaj în laboratoarele sale (50 la număr, repartizate pe tot teritoriul României) pentru a testa dacă efectuează măsurători corecte. Pentru aceasta, serviciul de calitate trimite la fiecare laborator un eșantion de apă care conține o anumită concentrație de crom și le cere să determine această concentrație de crom. Ținând cont de fluctuațiile care apar în prepararea soluției, precum și de imprecizia aparatelor de măsură, societatea presupune că repartiția concentrației de crom (mg/l) este $\mathcal{N}(10, 1)$.

Printre rezultatele obținute de la laboratoare, două dintre acestea au înregistrat măsurători mai diferite decât celelalte: laboratorul L_1 a înregistrat o concentrație de 6 mg/l (cea mai mică valoare înregistrată) iar laboratorul L_2 a măsurat o concentrație de 13 mg/l (cea mai mare dintre măsurători).

Puteți spune, cu o probabilitate de 99%, că aceste valori sunt coerente sau că valorile obținute sunt aberante (datorită erorilor de măsurare, de calibrare a aparatelor, etc.) ?

Exercițiul 5

Fie cuplul de v.a. (X, Y) cu densitatea de repartiție $f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, unde

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} k(x + y + 1), & x \in [0, 1], y \in [0, 2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}.$$

- Să se determine constanta k .
- Să se determine densitățile marginale.
- Să se verifice dacă X și Y sunt independente.
- Să se afle funcțiile de repartiție marginale și funcția de repartiție a vectorului (X, Y) .
- Să se determine densitățile v.a. $X|Y = y$ și $Y|X = x$.

Exercițiul 6

Fie X numărul de zile de naștere distincte dintr-un grup de 110 persoane (cu alte cuvinte numărul de zile dintr-un an pentru care cel puțin o persoană din grup este născută). Presupunem că anul are 365 de zile (nicio persoană nu este născută pe 29 Februarie), o persoană are aceeași șansă să se nască în oricare din cele 365 de zile și ziua în care s-a născut o persoană este independentă de zilele în care s-au născut alte persoane. Determinați media și varianța lui X .

Exercițiul 7

Un tehnician dintr-un laborator de biologie face două măsurători considerate independente și repartizate normal de medie 0 și de varianță 1. Calculați corelația dintre valoarea cea mai mică și cea mai mare a celor două măsurători.