Algoritmi avansaţi

Seminar 7 (săpt. 13 şi 14)

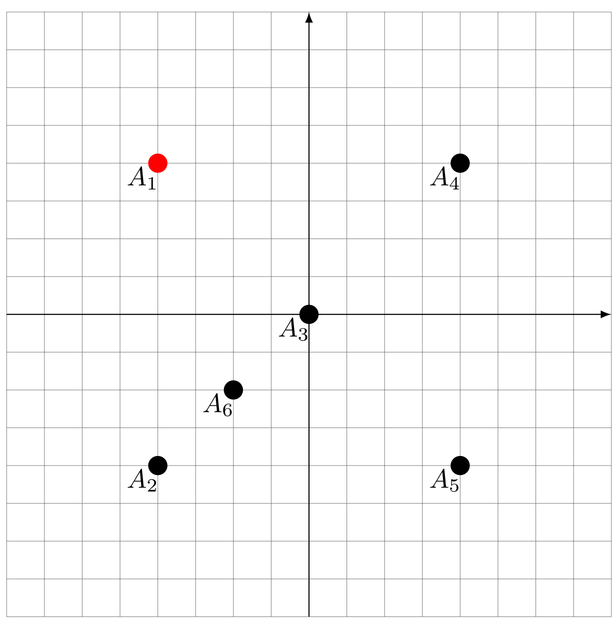
1. *Daţi exemplu de mulţime $\mathcal{M} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ din $\mathbb{R}^2$ astfel ca diagrama Voronoi asociată lui $\mathcal{M}$ să conţină exact patru semidrepte, iar diagrama Voronoi asociată lui $\mathcal{M} \setminus \{A_1\}$ să conţină exact cinci semidrepte. Justificaţi alegerea făcută.*

Soluţie. Numărul de semidrepte ale unei diagrame Voronoi este egal cu numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe.

Alegem mulţimea $\mathcal{M}$ astfel ca A_1, A_2, A_3, A_4 să determine frontiera acoperirii convexe, iar pentru $\mathcal{M} \setminus \{A_1\}$ toate punctele să fie situate pe frontiera acoperirii convexe.

În figură este indicată configuraţia punctelor, însă, întrucât în enunţ se cere ca punctele să fie din $\mathbb{R}^2$, le indicăm în coordonate. În exemplul ales $A_1 = (-4, 4)$. $A_2 = (-4, -4)$, $A_3 = (0, 0)$, $A_4 = (4, 4)$, $A_5 = (4, -4)$, $A_6 = (-2, -2)$.

O altă soluţie posibilă (în care punctele A_2, A_6, A_3, A_4 nu mai sunt coliniare, este $A_1 = (-4, 4)$. $A_2 = (-4, -4)$, $A_3 = (0, 3)$, $A_4 = (4, 4)$, $A_5 = (4, -4)$, $A_6 = (-3, 0)$ (verificaţi prin desen!).



2. *a) Fie o mulţime cu n situri necoliniare. Atunci, pentru diagrama Voronoi asociată au loc inegalităţile*

$$n_v \leq 2n - 5, \qquad n_m \leq 3n - 6,$$

unde n_v este numărul de vârfuri ale diagramei şi n_m este numărul de muchii al acesteia.

b) Câte vârfuri poate avea diagrama Voronoi $\mathcal{D}$ asociată unei mulţimi cu cinci puncte din $\mathbb{R}^2$ ştiind că $\mathcal{D}$ are exact cinci semidrepte? Analizaţi toate cazurile. Este atins numărul maxim de vârfuri posibile ($n_v = 2n - 5$)? Justificaţi!

Soluţie. a) Cum punctele nu sunt coliniare, diagrama Voronoi are muchii de tip segment şi de tip semidreaptă. Se consideră un vârf suplimentar, notat v_∞, prin care, prin convenţie, trece fiecare muchie de tip semidreaptă. Se construieşte un graf $\mathcal{G}$ care are

- *vârfuri*: vârfurile diagramei Voronoi şi vârful v_∞ (deci $n_v + 1$ vârfuri);
- *muchii*: muchiile diagramei Voronoi - fiecare uneşte exact două vârfuri ale lui $\mathcal{G}$ (deci n_m muchii);
- *feţe*: în corespondenţă biunivocă cu siturile iniţiale (deci n feţe).

Graful $\mathcal{G}$ este un graf planar conex.

(i) Conform relaţiei lui Euler avem

$$(n_v + 1) - n_m + n = 2.$$

(ii) Analizăm incidenţele dintre muchii şi vârfuri.

- fiecare muchie este incidentă cu <u>exact</u> două vârfuri;
- fiecare vârf (inclusiv v_∞) este incident cu <u>cel puţin</u> trei muchii;
- numărând incidenţele în două moduri avem

$$2n_m \geq 3(n_v + 1).$$

Din (i) şi din (ii) rezultă inegalităţile dorite.

Observaţie. Pentru ca relaţiile din enunţ să fie egalităţi este necesar şi suficient ca fiecare vârf al lui $\mathcal{G}$ să fie incident cu exact trei muchii. Aceasta înseamnă să nu existe grupuri de (cel puţin) patru puncte conciclice şi pe frontiera acoperirii convexe a mulţimii de situri să fie exact trei situri.

b) Fie $\mathcal{M}$ o mulţime ca în enunţ. Diagrama Voronoi a lui $\mathcal{M}$ are cinci semidrepte, deci toate cele cinci puncte ale lui $\mathcal{M}$ sunt situate pe frontiera acoperirii convexe. În particular, conform observaţiei anterioare, nu este posibil să fie atins numărul maxim de vârfuri posibile ($n_v = 2n - 5 = 5$). Mai mult, urmând paşii din raţionament, observăm că, de fapt, $n_v \leq 3$. Sunt posibile trei situaţii:

- toate punctele sunt conciclice, $n_v = 1$,

- patru dintre puncte sunt conciclice, dar al cincilea nu este situat pe acelaşi cerc cu acestea, $n_v = 2$,
- oricare patru puncte nu sunt conciclice, $n_v = 3$.

3. *Fie punctele $O = (0, 0)$, $A = (\alpha, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (2, 0)$, $D = (1, -1)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ este un parametru. Discutaţi, în funcţie de α, numărul de muchii de tip semidreaptă ale diagramei Voronoi asociate mulţimii $\{O, A, B, C, D\}$.*

Soluţie. Numărul de muchii de tip semidreaptă este egal cu numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe (le notăm cu m).

Punctul A este variabil pe axa Ox. Punctele O, B, C, D determină un pătrat şi trebuie doar să stabilim, în funcţie de α, poziţia lui A faţă de acest pătrat. Distingem următoarele cazuri:

- $\alpha < 0$: punctul A este situat în exteriorul pătratului $OBCD$ şi avem $m = 4$ (punctele de frontieră sunt A, B, C, D);
- $\alpha = 0$: avem $A = O$, deci $m = 4$;
- $0 < \alpha < 2$: punctul A este situat în interiorul pătratului $OBCD$ şi avem $m = 4$ (punctele de frontieră sunt O, B, C, D);
- $\alpha = 2$: avem $A = C$, deci $m = 4$;
- $\alpha > 2$: punctul A este situat în exteriorul pătratului $OBCD$ şi avem $m = 4$ (punctele de frontieră sunt O, B, D, A).

4. *(i) Fie punctul $A = (1, 2)$. Alegeţi două drepte distincte d, g care trec prin A, determinaţi dualele A^*, d^*, g^* şi verificaţi că A^* este dreapta determinată de punctele d^* şi g^*.*

(ii) Determinaţi duala următoarei configuraţii: Fie patru drepte care trec printr-un acelaşi punct M. Se aleg două dintre ele; pe fiecare din aceste două drepte se consideră câte un punct diferit de M şi se consideră dreapta determinată de cele două puncte. *Desenaţi ambele configuraţii. Completaţi configuraţia iniţială (adăugând puncte/drepte) astfel încât să obţineţi o configuraţie auto-duală (i.e. configuraţia duală să aibă aceleaşi elemente geometrice şi aceleaşi incidenţe ca cea iniţială).*

Soluţie. a) Conform teoriei, pentru un punct $p = (p_x, p_y)$ se defineşte dreapta $p^* : (y = p_x x - p_y)$ (duala lui p), iar pentru o dreaptă neverticală $d : (y = mx + n)$, se defineşte punctul $d^* = (m, -n)$ (dualul lui d).

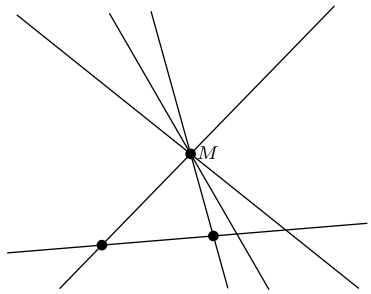
Alegem dreptele $d : (y = 2x)$ şi $g : (y = -x + 3)$. Avem:

$$A^* : (y = x - 2), \quad d^* = (2, 0), \quad g^* = (-1, -3).$$

Se verifică imediat că punctele d^* şi g^* determină dreapta A^*.

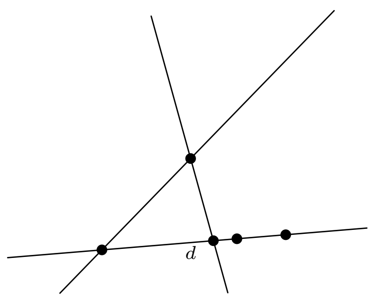
b) Configuraţia iniţială:

Fie patru drepte care trec printr-un acelaşi punct M. Se aleg două dintre ele; pe fiecare din aceste două drepte se consideră câte un punct diferit de M şi se consideră dreapta determinată de cele două puncte.



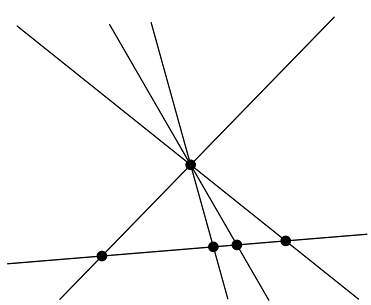
Configuraţia duală:

Fie patru puncte situate pe o aceeaşi dreaptă d. Se aleg două dintre ele; prin fiecare din aceste două puncte se consideră câte o dreaptă diferită de d şi se consideră punctul de intersecţie al acestor două drepte.



Configuraţia completată (astfel ca să fie autoduală):

Fie patru drepte care trec printr-un acelaşi punct. Pe fiecare dreaptă se alege câte un punct diferit de punctul comun, astfel ca aceste patru puncte să fie coloniare şi se consideră dreapta determinată de aceste patru puncte.



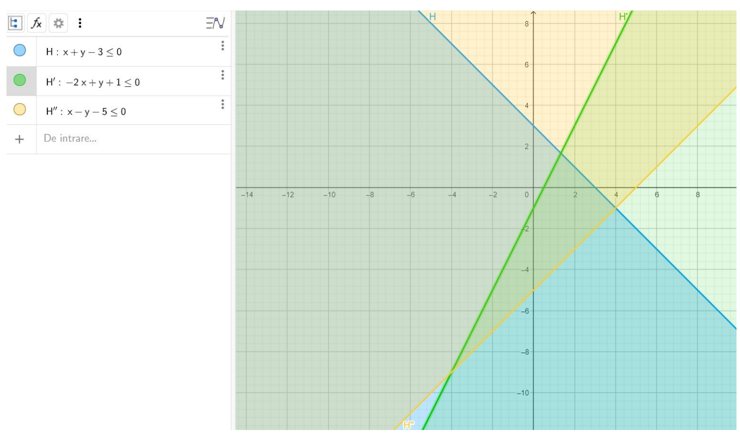
5. *a) Fie semiplanele $H : x + y - 3 \leq 0$ şi $H' : -2x + y + 1 \leq 0$. Daţi exemplu de semiplan H'' astfel ca intersecţia $H \cap H' \cap H''$ să fie un triunghi dreptunghic.*

b) Fie semiplanele H_1, H_2, H_3, H_4 date de inecuaţiile

$$H_1 : -y + 1 \leq 0; \qquad H_2 : y - 5 \leq 0; \qquad H_3 : -x \leq 0; \qquad H_4 : x - y + a \leq 0,$$

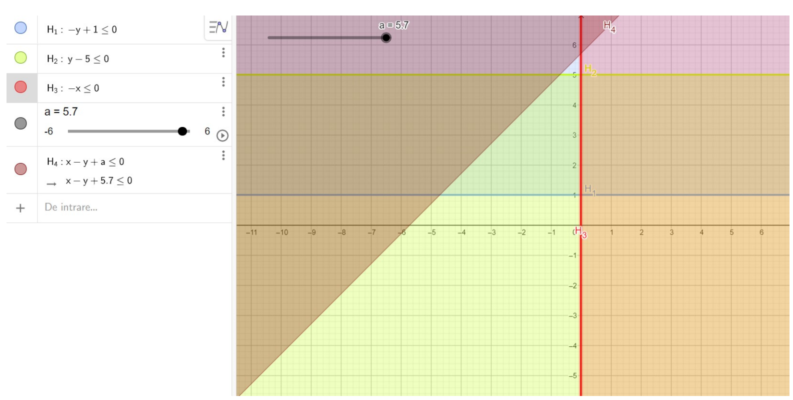
unde $a \in \mathbb{R}$ este un parametru. Discutaţi, în funcţie de parametrul a, natura intersecţiei $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$.

Soluţie. a) Alegem semimplanul $H'' : x - y - 5 \leq 0$. Dreapta suport $x - y - 5 = 0$ este perpendiculară pe dreapta suport a lui H, $x + y - 3 = 0$. Intersecţia semiplanelor este un triunghi (cf. figură, se pot determina vârfurile acestuia), deci H'' verifică cerinţele din enunţ.

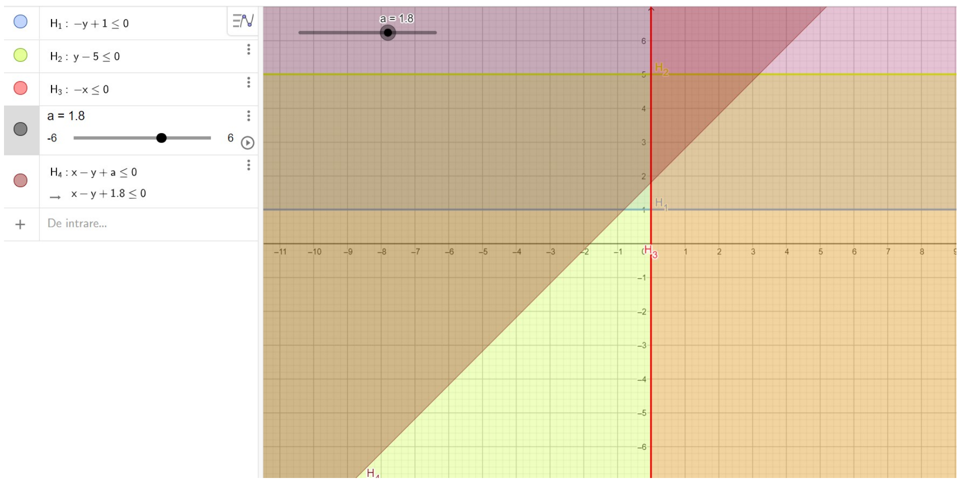


b) Intersecţia $H_1 \cap H_2 \cap H_3$ este o mulţime convexă nemărginită delimitată de dreptele $y = 1$, $y = 5$, respectiv $x = 0$. Vârfurile relevante sunt punctele $(0, 1)$ şi $(0, 5)$.

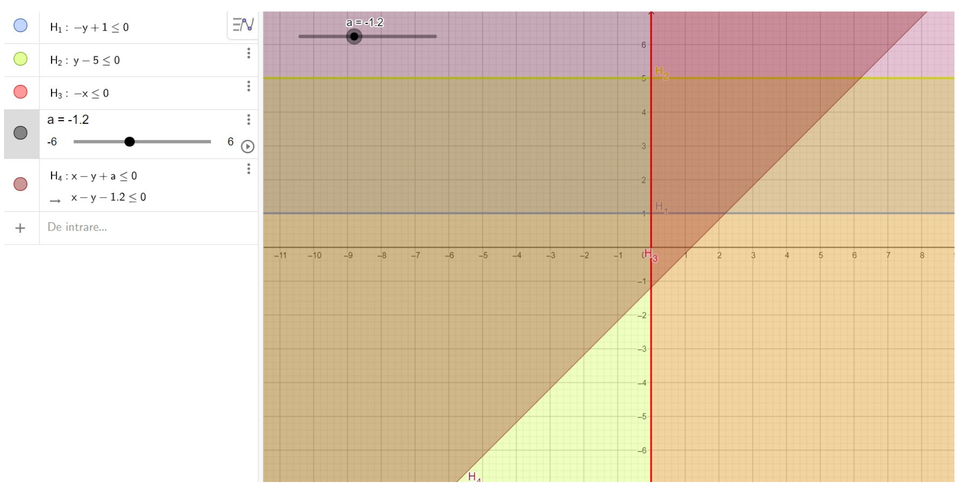
- Pentru $a > 5$ se obţine $0 \geq x - y + a > x - y + 5 \geq 0$ (deoarece $x \geq 0$ şi $-y + 5 \geq 0$), contradicţie. În acest caz intersecţia este mulţimea vidă.



- Pentru $a = 5$ se obţine punctul $(0, 5)$.
- Pentru $1 \leq a < 5$ se obţine un triunghi având unul dintre vârfuri $(0, 5)$, un vârf la intersecţia dintre dreptele $x = 0$ şi $x - y + a = 0$ şi un vârf la intersecţia dintre dreptele $y = 5$ şi $x - y + a = 0$. Pentru $a = 1$ punctul $(0, 1)$ este vârf al acestui triunghi.



- Pentru $a < 1$ se obţine un trapez. Laturile sale au ca drepte suport exact dreptele suport ale celor patru semiplane.



6. *Scrieţi inecuaţiile semiplanelor corespunzătoare şi studiaţi intersecţia acestora, dacă normalele exterioare ale feţelor standard sunt coliniare cu vectorii*

$$(0,1,-1),\ (0,1,0),\ (0,0,-1),\ (0,-1,0),\ (0,-1,-1).$$

Soluţie. Conform teoriei, dacă normala exterioară a unei feţe f este coliniară cu un vector $\vec{v}_f = (a,b,c)$, semiplanul corespunzător feţei f este

$$ax + by + c \leq 0.$$

Se ajunge la inegalităţile

$$\begin{aligned} y-1 &\leq 0 \\ y &\leq 0 \\ -1 &\leq 0 \\ -y &\leq 0 \\ -y-1 &\leq 0 \end{aligned}$$

Acest sistem este compatibil, admiţând soluţia $y = 0$.

Notă. Ca în exemplul de la curs, am făcut abstracţie de componenta x.

7. ***(Suplimentar)*** *Demonstraţi că arborele parţial de cost minim al lui $\mathcal{P}$ este un subgraf al triangulării Delaunay.*

Soluţie. D. Mount, *Computational Geometry*, pag. 75.