Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Partea a VI-a

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Str. Academiei Nr. 14, Sector 1, Cod poştal 010014, Bucureşti, România
Adrese de email: c.muresan@yahoo.com, cmuresan11@yahoo.com

Abstract

Textul de faţă conţine probleme date de autoare la examenul aferent cursului de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti.

În cele ce urmează vom folosi notaţia "ddacă" drept prescurtare pentru sintagma "dacă şi numai dacă".

1 Mnemonic de definiţii şi rezultate din curs

Fie A o mulţime oarecare. Amintim că o *relaţie binară pe* A este o submulţime a produsului cartezian $A \times A$, produs notat şi A^2. Deci relaţiile binare sunt mulţimi, aşadar li se pot aplica operaţiile de reuniune şi intersecţie, precum şi relaţia de incluziune, cu aceleaşi semnificaţii ca pentru orice mulţimi. Desigur, A^2 este o relaţie binară pe A, anume cea mai mare relaţie binară pe A, în sensul incluziunii. De acum încolo, prin notaţia $(a, b) \in A^2$ vom înţelege: $a \in A$ şi $b \in A$; de asemenea, pentru orice relaţie binară R pe A, prin scrierea $(a, b) \in R$ se va subînţelege că $a, b \in A$; faptul că $(a, b) \in R$ se mai notează aRb.

Dacă R este o relaţie binară pe mulţimea A, atunci, prin definiţie, *inversa lui* R este relaţia binară pe A notată R^{-1} şi definită prin: $R^{-1} = \{(b, a) \in A^2 | (a, b) \in R\}$.

Dacă R şi S sunt două relaţii binare pe A, atunci, prin definiţie, *compunerea* lor este următoarea relaţie binară pe A: $R \circ S = \{(a, c) \in A^2 \mid (\exists\, b \in A)\, (a, b) \in S \text{ şi } (b, c) \in R\}$. De asemenea, pentru orice n natural, R^n este o relaţie binară pe A, definită prin: $R^0 = \Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ (*diagonala lui* A) şi, pentru orice n natural, $R^{n+1} = R^n \circ R$. Este evident că Δ_A este element neutru la compunerea de relaţii binare pe A (atât la stânga, cât şi la dreapta), şi deci $R^1 = R$.

Evident, pentru orice relaţii binare R şi S pe A, $R \subseteq S$ ddacă $R^{-1} \subseteq S^{-1}$. Se demonstrează uşor că, pentru orice relaţie binară R pe A şi orice $n \in \mathbb{N}$, $(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n$ (de exemplu, demonstrând în prealabil faptul că, pentru orice relaţii binare R şi S pe A, $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$, şi apoi făcând inducţie după n). De asemenea, este imediat că, pentru orice familie nevidă $(R_i)_{i \in I}$ de relaţii binare pe A, $\displaystyle\bigcup_{i \in I} R_i^{-1} = \left(\bigcup_{i \in I} R_i\right)^{-1}$.

O relaţie binară R pe A se zice:

(i) *reflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, are loc $(a, a) \in R$, ceea ce este echivalent cu faptul că $\Delta_A \subseteq R$;

(ii) *simetrică* ddacă, pentru orice $(a, b) \in R$, are loc $(b, a) \in R$;

(iii) *tranzitivă* ddacă, pentru orice elemente $a, b, c \in A$, dacă $(a, b) \in R$ şi $(b, c) \in R$, atunci $(a, c) \in R$.

O relaţie binară R pe A se numeşte *(relaţie de) echivalenţă pe* A ddacă R este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.

Este imediat că intersecţia oricărei familii nevide de relaţii binare reflexive pe A este o relaţie binară reflexivă pe A şi că A^2 este o relaţie binară reflexivă pe A (care include orice altă relaţie binară pe A), iar de aici deducem că, pentru orice relaţie binară R pe A, există o cea mai mică relaţie binară reflexivă pe A care include pe R (cea mai mică în sensul incluziunii), şi anume intersecţia tuturor relaţiilor binare reflexive pe A care includ pe R. Această cea mai mică relaţie binară reflexivă pe A care include pe R se notează cu $\overline{R}$ şi se numeşte *închiderea reflexivă a relaţiei* R. Evident, $R \subseteq \overline{R}$.

Discuţia din paragraful anterior este valabilă şi pentru proprietăţile de simetrie şi tranzitivitate în locul celei de reflexivitate, şi deci şi pentru toate aceste trei proprietăţi cumulate, adică pentru proprietatea de a fi relaţie de echivalenţă pe A. Pentru orice relaţie binară R pe A, închiderea simetrică a lui R se notează cu R^*, iar închiderea tranzitivă a lui R se notează cu $T(R)$, iar cea mai mică relaţie de echivalenţă pe A care include pe R se numeşte *echivalenţa generată de* R şi se notează cu $E(R)$.

Se demonstrează că, pentru orice relaţie binară R pe A:

(i) $\overline{R} = \Delta_A \cup R$; R este reflexivă ddacă $R = \overline{R}$;

(ii) $R^* = R \cup R^{-1}$; R este simetrică ddacă $R = R^*$ ddacă $R = R^{-1}$;

(iii) $T(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$; R este tranzitivă ddacă $R = T(R)$ ddacă $R^2 \subseteq R$;

(iv) $E(R) = T(\overline{R^*}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Delta_A \cup R \cup R^{-1})^n$.

Închiderea reflexivă comută cu închiderea simetrică şi cu închiderea tranzitivă, adică, pentru orice relaţie binară R pe A, $\overline{R^*} = (\overline{R})^*$ şi $\overline{T(R)} = T(\overline{R})$. Închiderile simetrică şi tranzitivă nu comută între ele.

Dată o relaţie de echivalenţă $\sim$ pe A, se definesc clasele de echivalenţă ale lui $\sim$ ca fiind mulţimile $\hat{a}$, pentru fiecare $a \in A$, unde $\hat{a}$ se numeşte *clasa de echivalenţă a lui* a *raportat la* $\sim$ şi se defineşte prin: $\hat{a} = \{b \in A | a \sim b\} = \{b \in A | (a, b) \in \sim\}$. Se demonstrează că mulţimile $\hat{a}$, $a \in A$ formează o *partiţie a lui* A, adică sunt două câte două disjuncte şi reuniunea lor este A.

2 Lista de subiecte

Exerciţiul 2.1. *Fie A o mulţime nevidă şi R o relaţie binară nevidă pe A. Demonstraţi că:*

(i)
- *dacă R este reflexivă, atunci $T(R)$ este reflexivă;*
- *R este reflexivă ddacă R^* este reflexivă;*

(ii)
- *dacă R este simetrică, atunci $T(R)$ este simetrică;*
- *R este simetrică ddacă $\overline{R}$ este simetrică;*

(iii) dacă R este tranzitivă, atunci $\overline{R}$ este tranzitivă.

Rezolvare: Fiecare punct al acestui exerciţiu admite mai multe soluţii, în funcţie de rezultatele teoretice pe care rezolvitorul alege să le aplice. Acesta este motivul pentru care mnemonicul din secţiunea anterioară este atât de amplu, cuprinzând şi rezultate care nu sunt folosite în cele ce urmează, pentru a oferi cititorului posibilitatea de a obţine soluţii diferite prin combinarea acelor rezultate teoretice în diverse moduri. În cele ce urmează, vom prezenta câte o soluţie pentru primele două puncte ale exerciţiului, şi două dintre soluţiile alternative pentru ultimul punct.

(i) Dacă R este reflexivă, atunci $\Delta_A \subseteq R$, dar, cum $R \subseteq T(R)$, rezultă că $\Delta_A \subseteq T(R)$, deci $T(R)$ este reflexivă.

Dacă R este reflexivă, atunci $\Delta_A \subseteq R$, dar, cum $R \subseteq R^*$, rezultă că $\Delta_A \subseteq R^*$, deci R^* este reflexivă.

Dacă R^* este reflexivă, atunci au loc următoarele fapte. Fie $a \in A$, arbitrar, fixat. Cum $R^* = R \cup R^{-1}$ este reflexivă, rezultă că $(a,a) \in R \cup R^{-1}$, deci $(a,a) \in R$ sau $(a,a) \in R^{-1}$. Conform definiţiei inversei lui R, dacă $(a,a) \in R^{-1}$, rezultă că $(a,a) \in R$. Aşadar, pentru orice $a \in A$, rezultă $(a,a) \in R$, deci R este reflexivă.

(ii) Dacă R este simetrică, atunci $R = R^{-1}$, prin urmare $T(R) = T(R^{-1}) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(R^{-1})^n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(R^n)^{-1} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n\right)^{-1} = (T(R))^{-1}$, prin urmare $T(R)$ este simetrică.

Dacă R este simetrică, atunci $R = R^{-1}$, prin urmare $\overline{R} = \Delta_A \cup R = \Delta_A \cup R^{-1} = \Delta_A^{-1} \cup R^{-1} = (\Delta_A \cup R)^{-1} = (\overline{R})^{-1}$, aşadar $\overline{R}$ este simetrică.

Dacă $\overline{R}$ este simetrică, atunci au loc următoarele fapte. Fie $(a,b) \in R$, arbitrar, fixat. Cum $R \subseteq \overline{R}$, rezultă că $(a,b) \in \overline{R}$, care este simetrică, prin urmare $(b,a) \in \overline{R} = \Delta_A \cup R$, deci $(b,a) \in \Delta_A$ sau $(b,a) \in R$. Dacă $(b,a) \in \Delta_A$, atunci $b = a$, aşadar $(b,a) = (a,a) = (a,b) \in R$. Am demonstrat că, pentru orice $(a,b) \in R$, rezultă că $(b,a) \in R$, deci R este simetrică.

(iii) Să presupunem că R este tranzitivă.

Aici putem aplica faptul că închiderea reflexivă comută cu închiderea tranzitivă pentru orice relaţie binară şi să conchidem că, întrucât $R = T(R)$ datorită tranzitivităţii lui R, rezultă $\overline{R} = \overline{T(R)} = T(\overline{R})$, deci $\overline{R}$ este tranzitivă.

Sau putem aplica direct definiţia tranzitivităţii. Să considerăm $a, b, c \in A$ astfel încât $(a,b), (b,c) \in \overline{R} = \Delta_A \cup R$. Atunci avem de analizat patru cazuri:

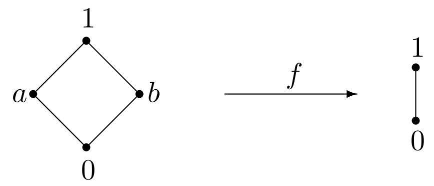
- dacă $(a,b), (b,c) \in R$, atunci, cum R este tranzitivă, rezultă că $(a,c) \in R$, dar $R \subseteq \overline{R}$, şi deci $(a,c) \in \overline{R}$;
- dacă $(a,b), (b,c) \in \Delta_A$, atunci $a = b = c$, deci $(a,c) = (a,a) \in \Delta_A \subseteq \overline{R}$, aşadar $(a,c) \in \overline{R}$;
- dacă $(a,b) \in R$ şi $(b,c) \in \Delta_A$, atunci $b = c$, deci $(a,c) = (a,b) \in \overline{R}$;

- dacă $(b,c) \in R$ şi $(a,b) \in \Delta_A$, atunci $a = b$, deci $(a,c) = (b,c) \in \overline{R}$.

Am demonstrat că, pentru orice $a,b,c \in A$ astfel încât $(a,b),(b,c) \in \overline{R}$, rezultă că are loc şi $(a,c) \in \overline{R}$, aşadar $\overline{R}$ este tranzitivă.

Exerciţiul 2.2. *Considerăm algebrele Boole: $\mathcal{L}_2 = \{0,1\}$ (*algebra Boole standard*, anume lanţul cu două elemente) şi $\mathcal{L}_2^2 = \{0,a,b,1\}$ (*rombul*). Determinaţi toate funcţiile izotone $f : \mathcal{L}_2^2 \to \mathcal{L}_2$ şi specificaţi, cu demonstraţie, care dintre ele sunt morfisme de algebre Boole.*

Rezolvare:



Conform definiţiei, o funcţie $f : \mathcal{L}_2^2 \to \mathcal{L}_2$ este izotonă ddacă, pentru orice $x,y \in \mathcal{L}_2^2$, $x \leq y$ implică $f(x) \leq f(y)$. În $\mathcal{L}_2^2$, $0 \leq a \leq 1$ şi $0 \leq b \leq 1$, iar a şi b sunt incomparabile. Prin urmare, o funcţie $f : \mathcal{L}_2^2 \to \mathcal{L}_2$ este izotonă ddacă $f(0) \leq f(a) \leq f(1)$ şi $f(0) \leq f(b) \leq f(1)$.

Fie $f : \mathcal{L}_2^2 \to \mathcal{L}_2$ o funcţie izotonă.

Cazul 1*:* $f(0) = 1$. Atunci, conform celor de mai sus, rezultă $f(a) = f(b) = f(1) = 1$.

Cazul 2*:* $f(0) = 0$.

Subcazul 2.1*:* $f(1) = 0$. Atunci rezultă $f(a) = f(b) = 1$.

Subcazul 2.2*:* $f(1) = 1$. Atunci $f(a)$ şi $f(b)$ pot lua orice valori din $\mathcal{L}_2 = \{0,1\}$.

Aşadar toate funcţiile izotone de la $\mathcal{L}_2^2$ la $\mathcal{L}_2$ sunt următoarele şase: $f_i : \mathcal{L}_2^2 \to \mathcal{L}_2$, $i \in \overline{1,6}$, date în tabelul următor:

x	0	a	b	1
$f_1(x)$	0	0	0	0
$f_2(x)$	0	0	0	1
$f_3(x)$	0	0	1	1
$f_4(x)$	0	1	0	1
$f_5(x)$	0	1	1	1
$f_6(x)$	1	1	1	1

Conform definiţiei, o funcţie $f : \mathcal{L}_2^2 \to \mathcal{L}_2$ este morfism boolean ddacă f comută cu $\vee$, $\wedge$, complementul, 0 şi 1, ceea ce este echivalent cu condiţia ca f să comute cu $\vee$, $\wedge$, 0 şi 1, întrucât comutarea cu complementul rezultă din acestea, fapt valabil pentru orice funcţie între orice algebre Boole. Se observă că, în cazul unei funcţii $f : \mathcal{L}_2^2 \to \mathcal{L}_2$, f este morfism boolean ddacă: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ şi $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$, pentru că aceste condiţii implică faptul că f comută cu $\vee$ şi $\wedge$, comutarea lui f cu 0 şi 1 implicând satisfacerea restului de condiţii din comutarea cu $\vee$ şi $\wedge$.

Prin urmare, morfismele booleene de la $\mathcal{L}_2^2$ la $\mathcal{L}_2$ sunt funcţiile $f : \mathcal{L}_2^2 \to \mathcal{L}_2$ care verifică: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b) = f(0) = 0$ şi $f(a) \vee f(b) = f(a \vee b) = f(1) = 1$, ceea ce este echivalent cu: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ şi $\begin{cases} f(a) = 0 \text{ şi } f(b) = 1 \\ \text{sau} \\ f(a) = 1 \text{ şi } f(b) = 0. \end{cases}$

Aşadar, funcţiile f_3 şi f_4 de mai sus sunt toate morfismele booleene de la $\mathcal{L}_2^2$ la $\mathcal{L}_2$:

x	0	a	b	1
$f_3(x)$	0	0	1	1
$f_4(x)$	0	1	0	1

Exerciţiul 2.3. *Fie R o relaţie binară pe mulţimea numerelor întregi, $R = \{(k, k+1) | k \in \mathbb{Z}\}$.*

(i) Demonstraţi că $E(R) = \mathbb{Z}^2$.

(ii) Pentru orice $m \in \mathbb{N}$ şi orice $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{Z}$ cu $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ (unde $<$ este ordinea strictă obişnuită de pe $\mathbb{Z}$), scrieţi câte clase de echivalenţă are $E(R \setminus \{(x_1, x_1+1), (x_2, x_2+1), \ldots, (x_m, x_m+1)\}) \stackrel{\text{notaţie}}{=} \sim$ şi enumeraţi elementele fiecărei clase de echivalenţă a lui $\sim$. Cerinţa de la acest punct al exerciţiului va fi efectuată fără demonstraţie.

Rezolvare: (i) $E(R) = T(\overline{R^*}) = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^n$.

$\Delta_{\mathbb{Z}} = \{(k,k) | k \in \mathbb{Z}\}$, $R = \{(k, k+1) | k \in \mathbb{Z}\}$ şi $R^{-1} = \{(k+1, k) | k \in \mathbb{Z}\}$, aşadar $\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 | x - y \in \{-1, 0, 1\}\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 |\ |x-y| \leq 1\}$.

Demonstrăm prin inducţie matematică după $n \in \mathbb{N}^*$ că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^n = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 |\ |x-y| \leq n\}$.

Pasul de verificare ($n = 1$): $(\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^1 = \Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 |\ |x-y| \leq 1\}$, conform celor de mai sus.

Pasul de inducţie ($n \rightsquigarrow n+1$): Presupunem că $(\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^n = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 |\ |x-y| \leq n\}$ pentru un $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, fixat.

Notăm $M = \{(x,z) \in \mathbb{Z}^2 |\ |x-z| \leq n+1\}$. Trebuie să arătăm că $(\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^{n+1} = M$.

Aplicând relaţia pentru $n = 1$ din pasul de verificare şi ipoteza de inducţie, obţinem: $(\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^{n+1} = (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^n \circ (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1}) = \{(x,z) \in \mathbb{Z}^2 | (\exists\, y \in \mathbb{Z})\, (x,y) \in \Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1}$ şi $(y,z) \in (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^n\} = \{(x,z) \in \mathbb{Z}^2 | (\exists\, y \in \mathbb{Z})\, |x-y| \leq 1$ şi $|y-z| \leq n\} \subseteq M$, deoarece am obţinut că, pentru orice $(x,z) \in (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^{n+1}$, există un $y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $|x-y| \leq 1$ şi $|y-z| \leq n$, prin urmare, conform inegalităţii triunghiului pentru modul, $|x-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y| + |y-z| = n+1$, deci $(x,z) \in M$.

Acum fie $(x,z) \in M$, arbitrar, fixat. Atunci $|z-x| = |x-z| \leq n+1$, deci $z - x \in \overline{-(n+1), n+1}$, prin urmare $(x,z) = (x, x+k)$, cu numărul $k \in \overline{-(n+1), n+1}$.

Cazul 1*:* $k \in \overline{1, n+1}$. Atunci $z = x+k = x+(k-1)+1$, cu $k-1 \in \overline{0,n}$. Notăm $y = x+1 \in \mathbb{Z}$. Rezultă că $|x-y| = 1 \leq 1$ şi $|y-z| = z-y = k-1 \leq n$, prin urmare $(x,z) \in (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^{n+1}$.

Cazul 2*:* $k \in \overline{-(n+1), -1}$. Atunci $z = x+k = x+(k+1)-1$, cu $k+1 \in \overline{-n, 0}$. Notăm $y = x-1 \in \mathbb{Z}$. Rezultă că $|x-y| = 1 \leq 1$ şi $|y-z| = |k+1| \leq n$, prin urmare $(x,z) \in (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^{n+1}$.

Cazul 3*:* $k = 0$. Atunci $z = x$. Luăm $y = x = z$. Rezultă că $|x-y| = 0 \leq 1$ şi $|y-z| = 0 \leq n$, prin urmare $(x,z) \in (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^{n+1}$.

Aşadar are loc şi incluziunea $M \subseteq (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^{n+1}$, deci $M \subseteq (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^{n+1}$ şi pasul de inducţie este încheiat.

Am obţinut că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^n = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 |\ |x-y| \leq n\}$. Rezultă că $E(R) = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup R \cup R^{-1})^n = \mathbb{Z}^2$.

(ii) Fie $m \in \mathbb{N}$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_m$ şi $\sim$ ca în enunţ. Atunci $\sim$ are $m+1$ clase de echivalenţă, anume:

- dacă $m = 0$, atunci $\sim = E(R) = \mathbb{Z}^2$ conform punctului (i), şi deci $\sim$ are o singură clasă de echivalenţă, egală cu $\mathbb{Z}$;
- dacă $m \neq 0$, atunci clasele de echivalenţă ale lui $\sim$ sunt $C_1, \ldots, C_{m+1}$, definite prin:

$$\begin{cases} C_1 = \{x \in \mathbb{Z} | x \leq x_1\}, \\ C_k = \overline{x_{k-1}+1, x_k}, \text{ pentru orice } k \in \overline{2, m}, \\ C_{m+1} = \{x \in \mathbb{Z} | x > x_m\}. \end{cases}$$

Acest fapt poate fi demonstrat în mai multe moduri. Ca sugestie pentru una dintre demonstraţiile care i se pot da, de exemplu, dacă notăm $Q = R \setminus \{(x_1, x_1+1), (x_2, x_2+1), \ldots, (x_m, x_m+1)\}$, atunci $\sim = E(Q) = T(\overline{Q^*}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Delta_{\mathbb{Z}} \cup Q \cup Q^{-1})^n$, şi se poate demonstra prin inducţie după n că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Delta_{\mathbb{Z}} \cup Q \cup Q^{-1})^n = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 | \; |x - y| \leq n$ şi $(\exists\, k \in \overline{1, m+1})\, x, y \in C_k\}$. Pasul de verificare rezultă imediat, iar pasul de inducţie este, de asemenea, uşor de obţinut. Demonstraţiile pentru fiecare dintre aceşti doi paşi decurg într-o manieră asemănătoare cu inducţia de la punctul (i) pentru R în locul lui Q, dar ţinând seama şi de faptul că $(x_1, x_1+1), (x_2, x_2+1), \ldots, (x_m, x_m+1) \notin Q$, ceea ce face ca aceste perechi să separe clasele de echivalenţă ale lui $\sim$. Se obţine aşadar $\sim = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 | \,(\exists\, k \in \overline{1, m+1})\, x, y \in C_k\}$, ceea ce încheie demonstraţia punctului (ii).