Colorări în grafuri

Colorări ale grafurilor

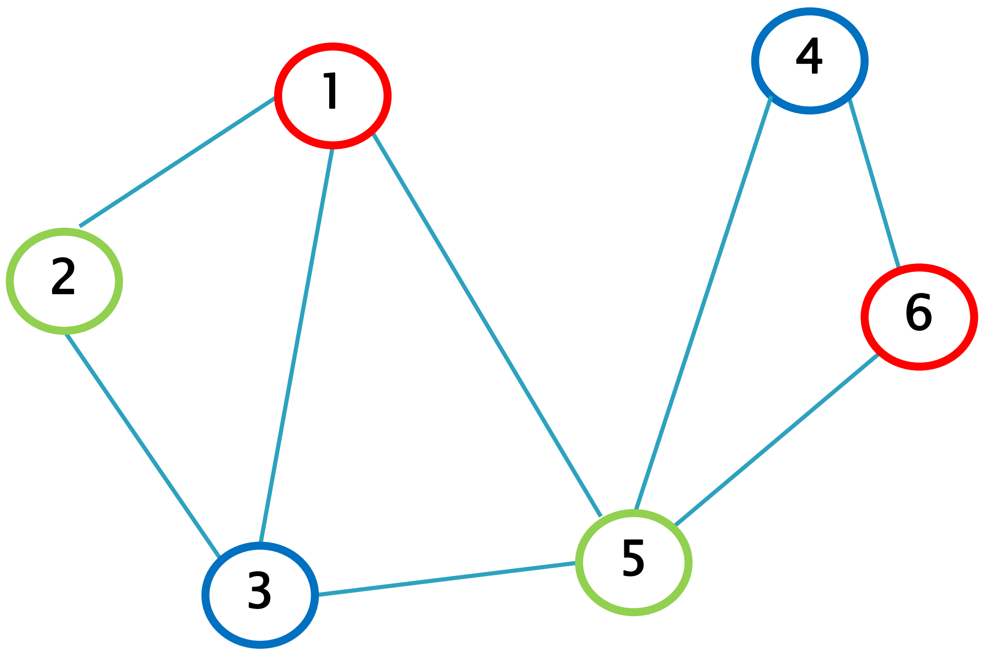
- $G = (V, E)$ graf neorientat
  - $c : V \rightarrow \{1, 2, \ldots, p\}$ s.n **p-colorare** a lui G
  - $c : V \rightarrow \{1, 2, \ldots, p\}$ cu $c(x) \neq c(y)$ $\forall xy \in E$ s.n **p-colorare proprie** a lui G
  - G s.n **p-colorabil** dacă admite o p-colorare proprie

Colorări ale grafurilor

- $G = (V, E)$ graf neorientat
  - Valoarea p minimă pentru care G este p-colorabil se numește **numărul cromatic** al lui G (notată $\chi(G)$)
  - Dacă G nu este conex

$$\chi(G) = \max\{\chi(H) \mid H \text{ componentă conexă în } G\}$$

Colorări ale grafurilor

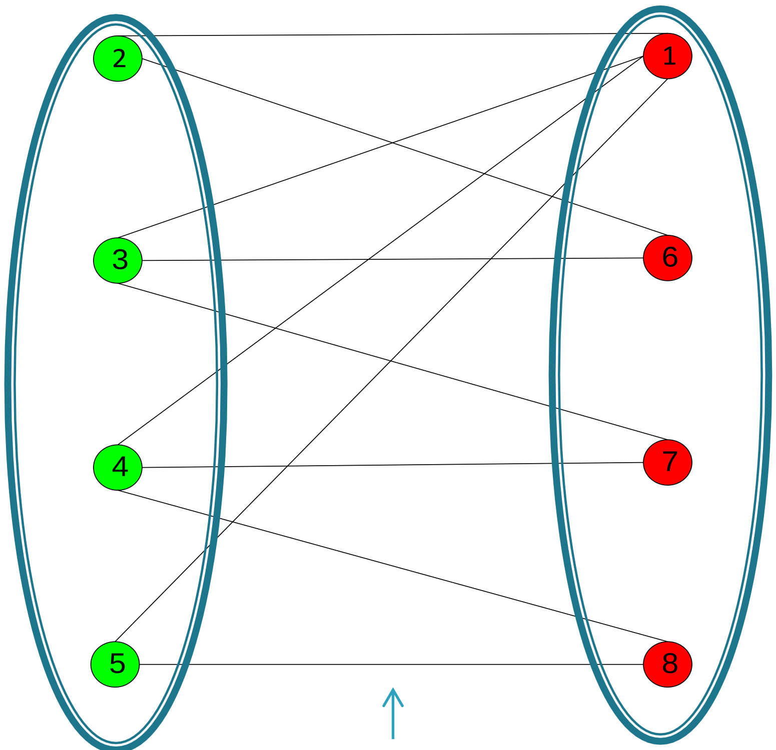


3-colorabil, dar nu și 2-colorabil (!)

=> are numărul cromatic 3

Aplicații p -colorări

Graf de conflicte (exemplu substanțe care interacționează, activități incompatibile, relații în rețele sociale)



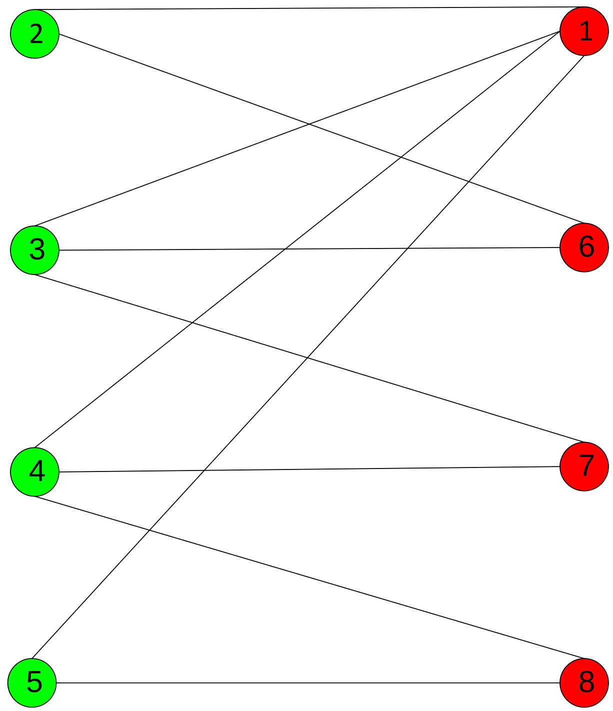
submulțime fără conflicte (de evenimente compatibile)

submulțime fără conflicte (de evenimente compatibile)

în conflict cu

- Cuplaje, rețele...

Aplicații p –colorări



Profesori *predau la* **Cursuri**

Candidați *depun CV la* **Joburi**

Aplicații p -colorări

De câte săli este nevoie minim pentru programarea într-o zi a n conferințe cu intervale de desfășurare date?

Conf. 1: interval (1,4)

Conf. 2: interval (2,3)

Conf. 3: interval (2,5)

Conf. 4: interval (6,8)

Conf. 5: interval (3,8)

Conf. 6: interval (6,7)

Aplicații p -colorări

De câte săli este nevoie minim pentru programarea într-o zi a n conferințe cu intervale de desfășurare date?

Conf. 1: interval (1,4)

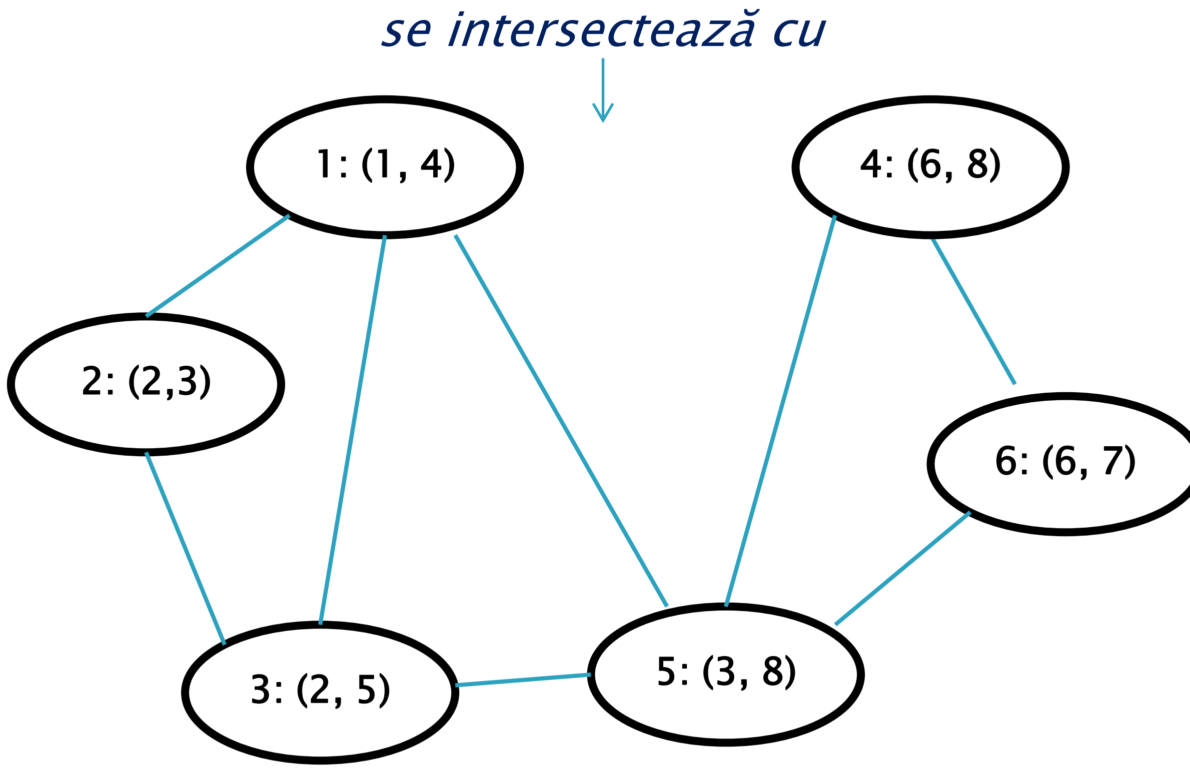
Conf. 2: interval (2,3)

Conf. 3: interval (2,5)

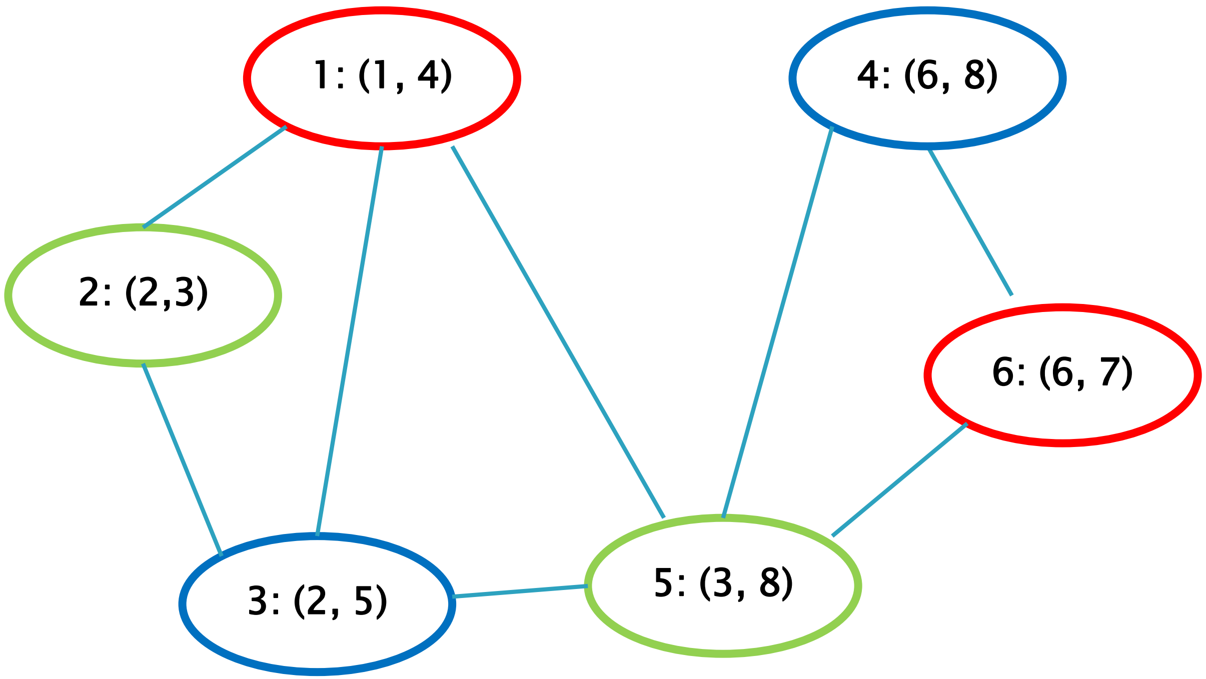
Conf. 4: interval (6,8)

Conf. 5: interval (3,8)

Conf. 6: interval (6,7)



Graful intersecției intervalelor este 3-colorabil:



Sunt necesare minim 3 săli (corespunzătoare celor 3 culori):

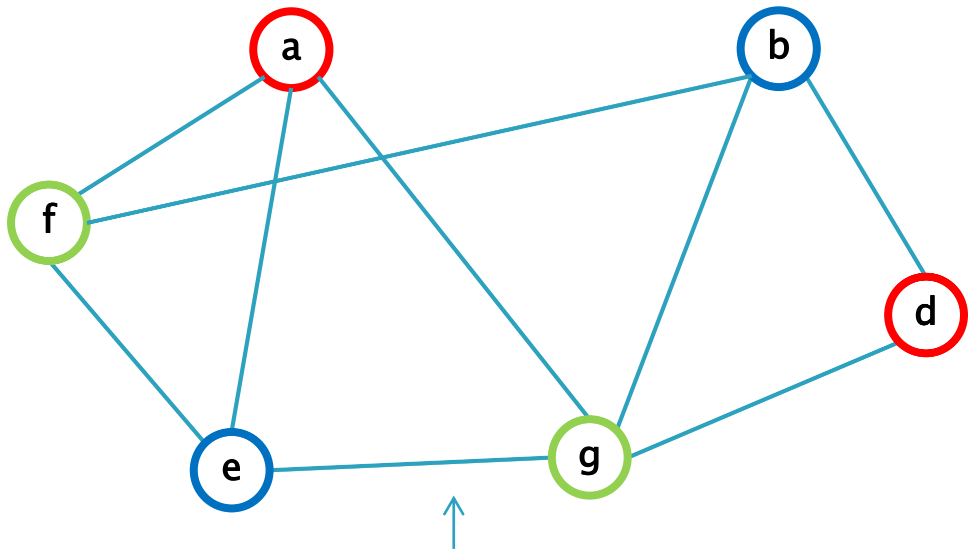
Sala 1: (1,4), (6,7)

Sala 2: (2,3), (3,8)

Sala 3: (2,5), (6,8)

Aplicații p -colorări

Alocare de regiștrii (Register allocation problem)



pot fi simultan active
(nu pot fi memorate în același registru)

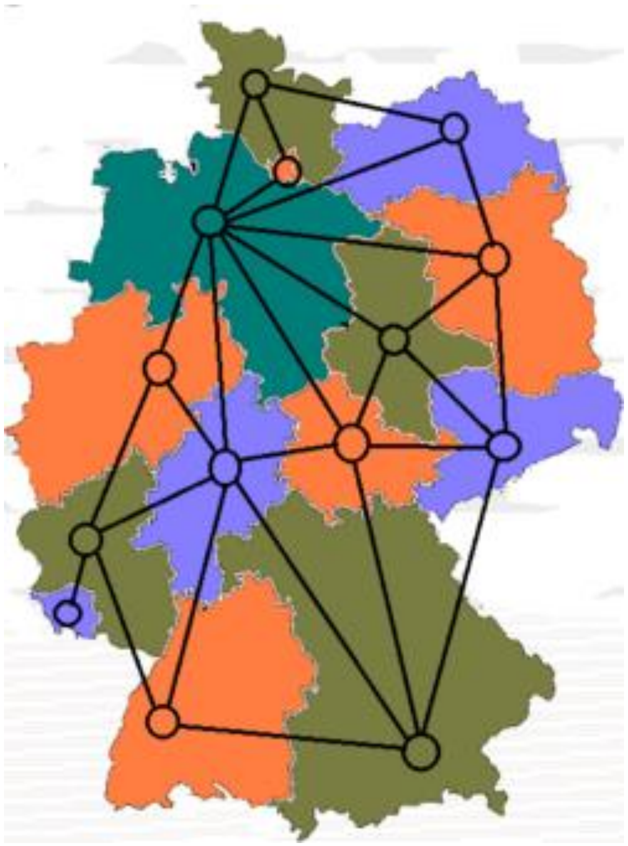
- Numărul de culori = numărul de regiștri
- Vârfuri de aceeași culoare = pot fi memorate în același registru

Aplicații p -colorări

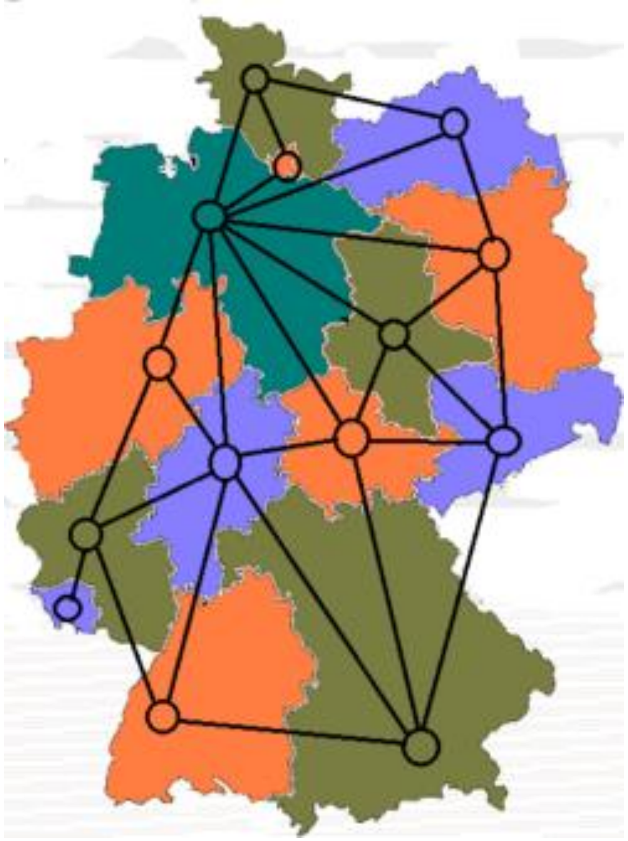
- **Problema colorării hărților**

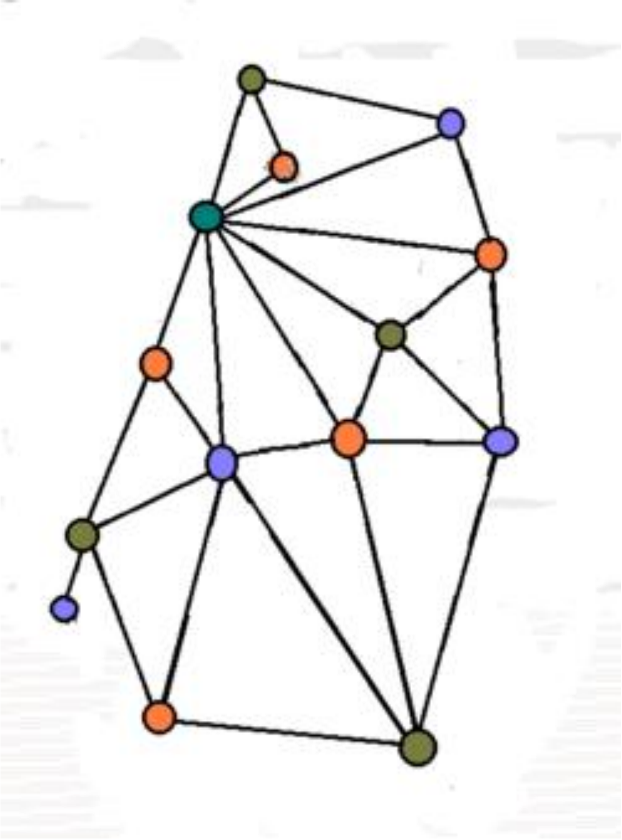
Se poate colora o hartă cu 4 culori astfel încât orice două țări, care au frontieră comună și care **nu se reduce la un punct**, să aibă culori diferite?

http://en.citizendium.org/wiki/Four_color_theorem



http://en.citizendium.org/wiki/Four_color_theorem





http://en.citizendium.org/wiki/Four_color_theorem

Colorări ale grafurilor

Computațional: Dat p, **este G p-colorabil**?

Care este p minim cu proprietatea că G este p-colorabil? = Care este numărul cromatic al lui G?

- Test graf 2-colorabil / graf bipartit – algoritm polinomial

- Test graf 3-colorabil – problemă NP-completă

Algoritmi polinomiali pentru colorarea cu 5 culori a unui graf planar

Colorări ale grafurilor

Subiecte tratate:

- Grafuri bipartite
- Colorări în grafuri planare
- Algoritmi de colorare de tip greedy (*neoptimali*)

Grafuri bipartite

Graf bipartit

Observații

- G = (V, E) **bipartit** $\Leftrightarrow$

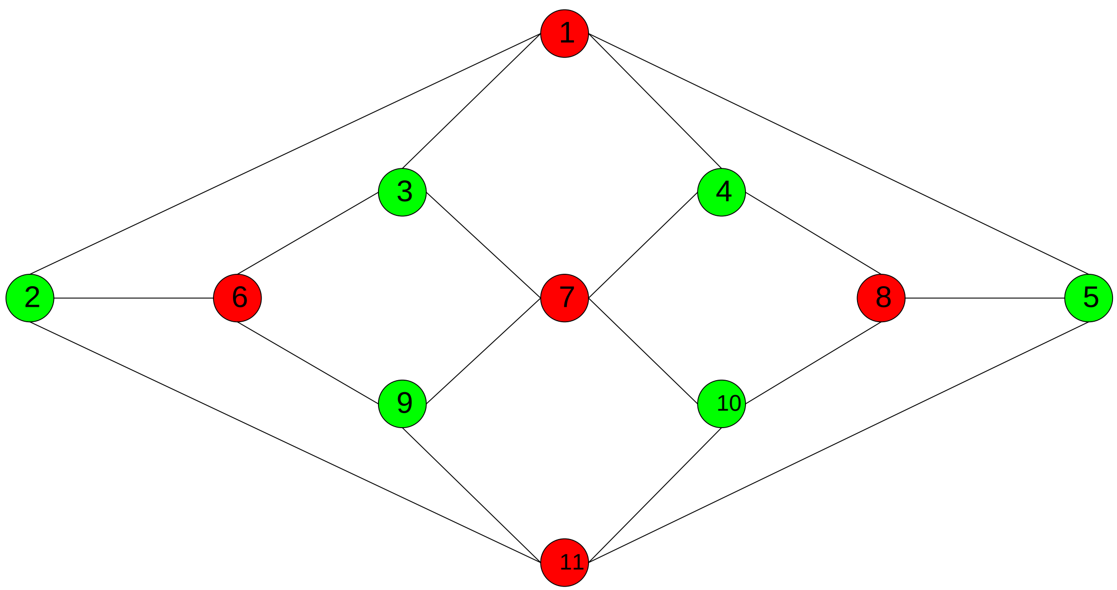
  există o 2-colorare proprie a vârfurilor (**bicolorare**):

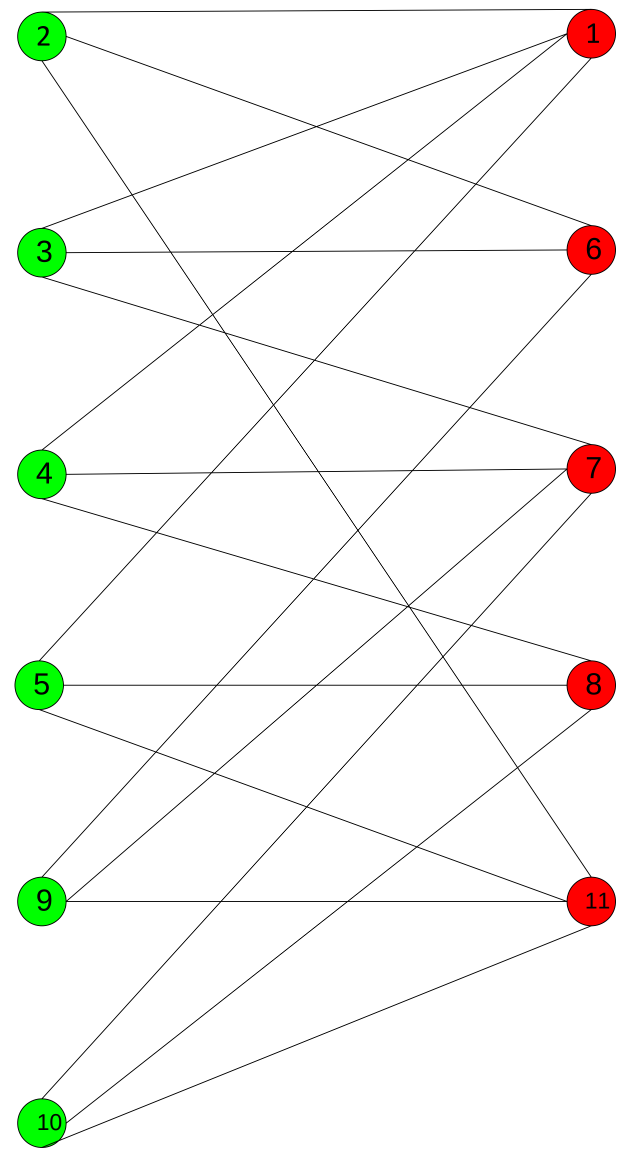
  $$c : V \rightarrow \{1, 2\}$$

  (i.e. astfel încât pentru orice muchie $e=xy\in E$ avem $c(x) \neq c(y)$)

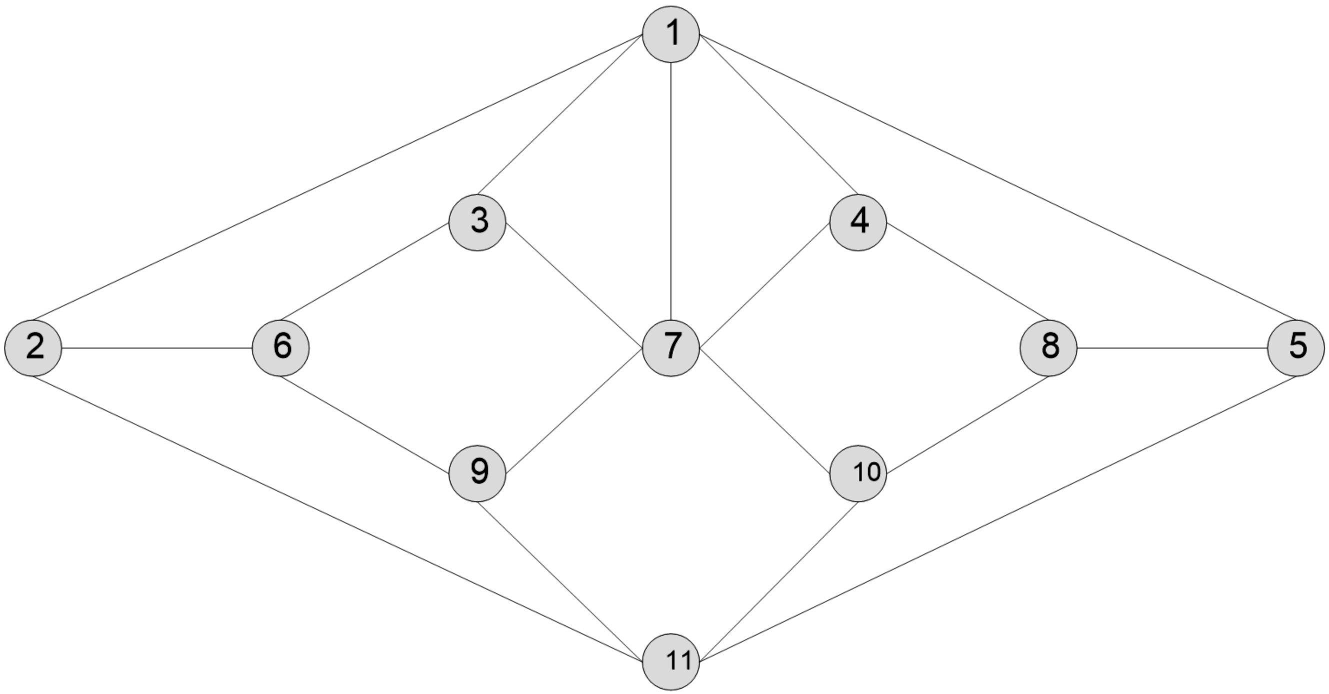
- G = (V, E) bipartit $\Rightarrow \chi(G) \leq 2$

Graf bipartit





Graf bipartit



nu este bipartit

Graf bipartit

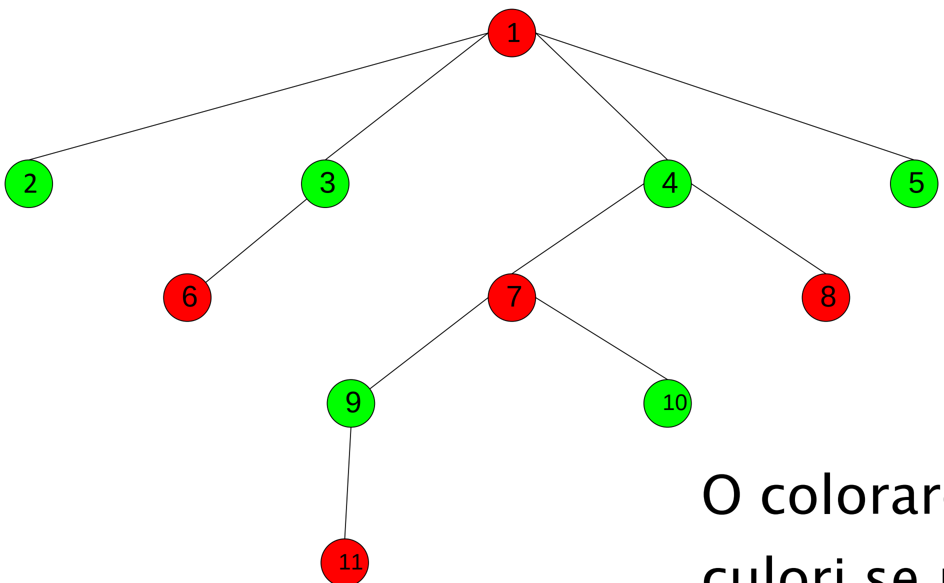
- **Propoziție**

  Un arbore este graf bipartit

Graf bipartit

Propoziție

Un arbore este graf bipartit



O colorare proprie a lui T cu cel mult 2 culori se poate obține astfel:

- fixăm o rădacină
- colorăm vârfurile de pe niveluri pare cu 1 și pe cele de pe niveluri impare cu 2.

Graf bipartit

- **Teorema König – Caracterizarea grafurilor bipartite**

Fie $G = (V, E)$ un graf cu $n \geq 2$ vârfuri.

Avem

$$G \text{ este bipartit} \Leftrightarrow \text{toate ciclurile elementare din } G \text{ sunt pare}$$

Graf bipartit

- **Teorema König – Caracterizarea grafurilor bipartite**

Demonstrație $\Rightarrow$ Evident, deoarece un ciclu impar nu poate fi colorat propriu cu două culori.

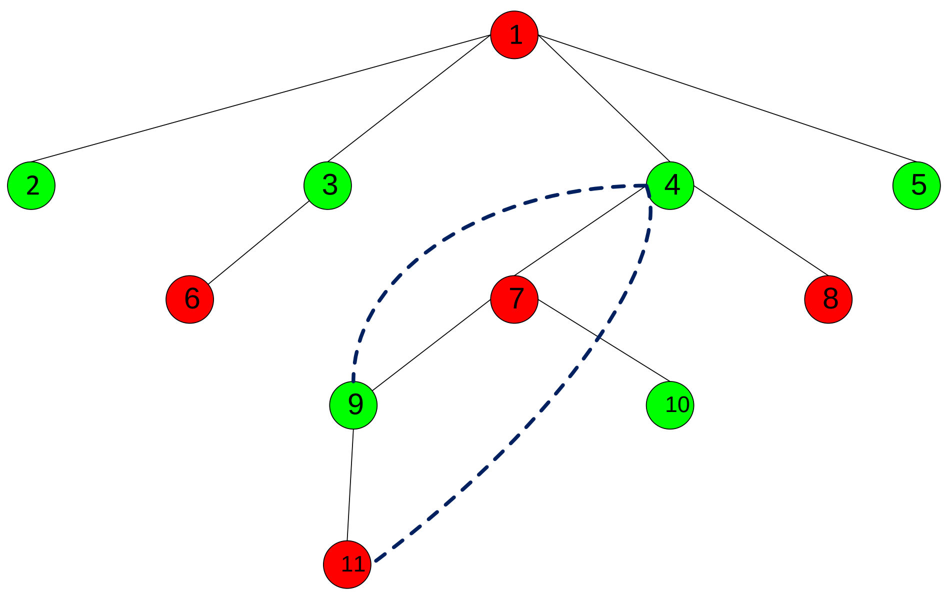
Graf bipartit

- **Teorema König – Caracterizarea grafurilor bipartite**

Demonstrație – $\Leftarrow$ Presupunem G conex.

Colorăm un arbore parțial T al său ca în propoziția precedentă (alternativ pe niveluri).

Orice altă muchie uv din graf are extremitățile colorate diferit deoarece



DR Popescu – Combinatorică și Teoria grafurilor (Teorema 4.18)

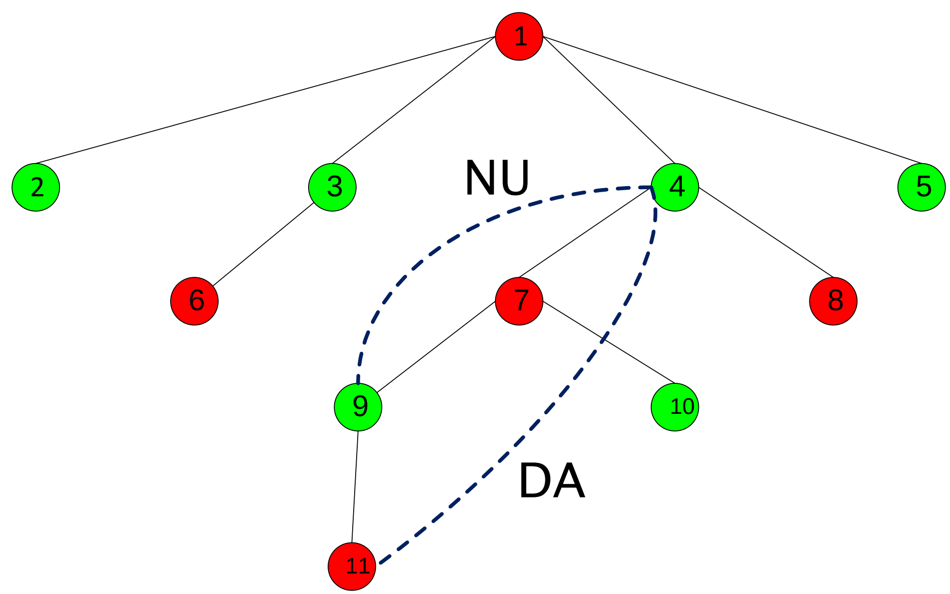
Graf bipartit

- **Teorema König – Caracterizarea grafurilor bipartite**

Demonstrație – $\Leftarrow$ Presupunem G conex.

Colorăm un arbore parțial T al său ca în propoziția precedentă (alternativ pe niveluri).

Orice altă muchie uv din graf are extremitățile colorate diferit deoarece formează un ciclu elementar cu lanțul de la u la v din arbore și acest ciclul are lungime pară, deci u și v se află pe niveluri de paritate diferită în T



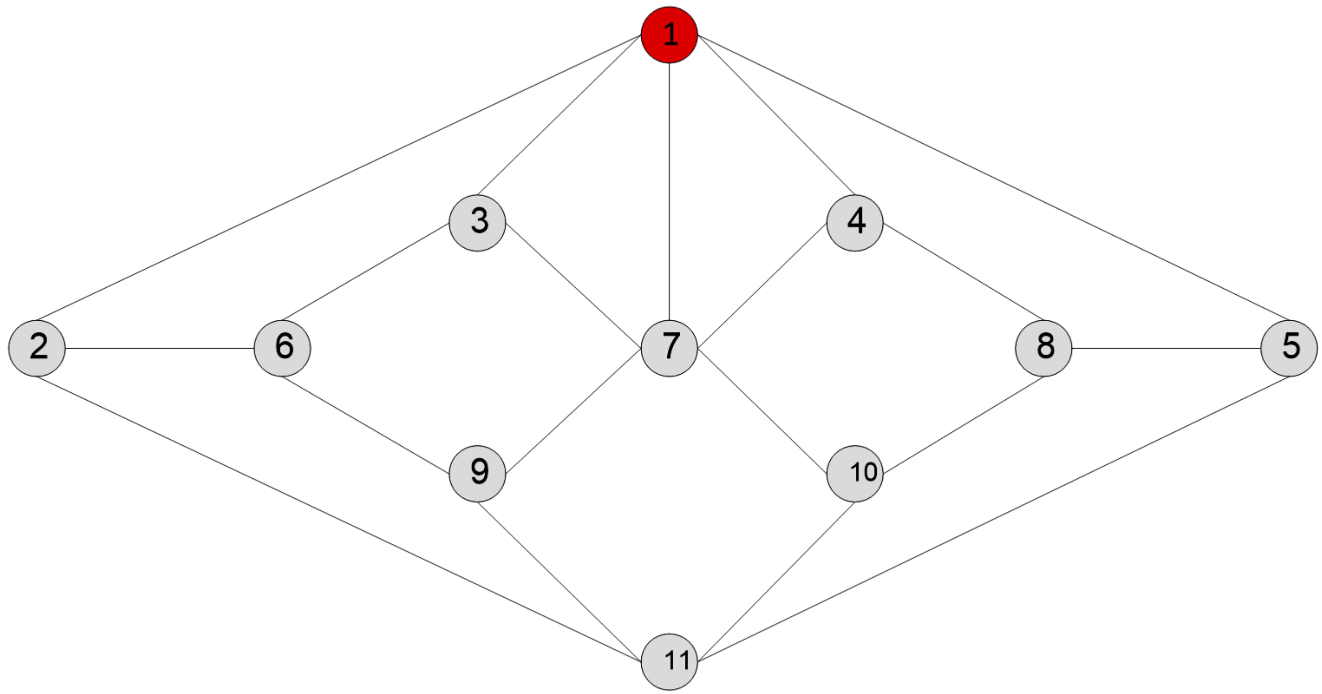
DR Popescu – Combinatorică și Teoria grafurilor (Teorema 4.18)

Graf bipartit

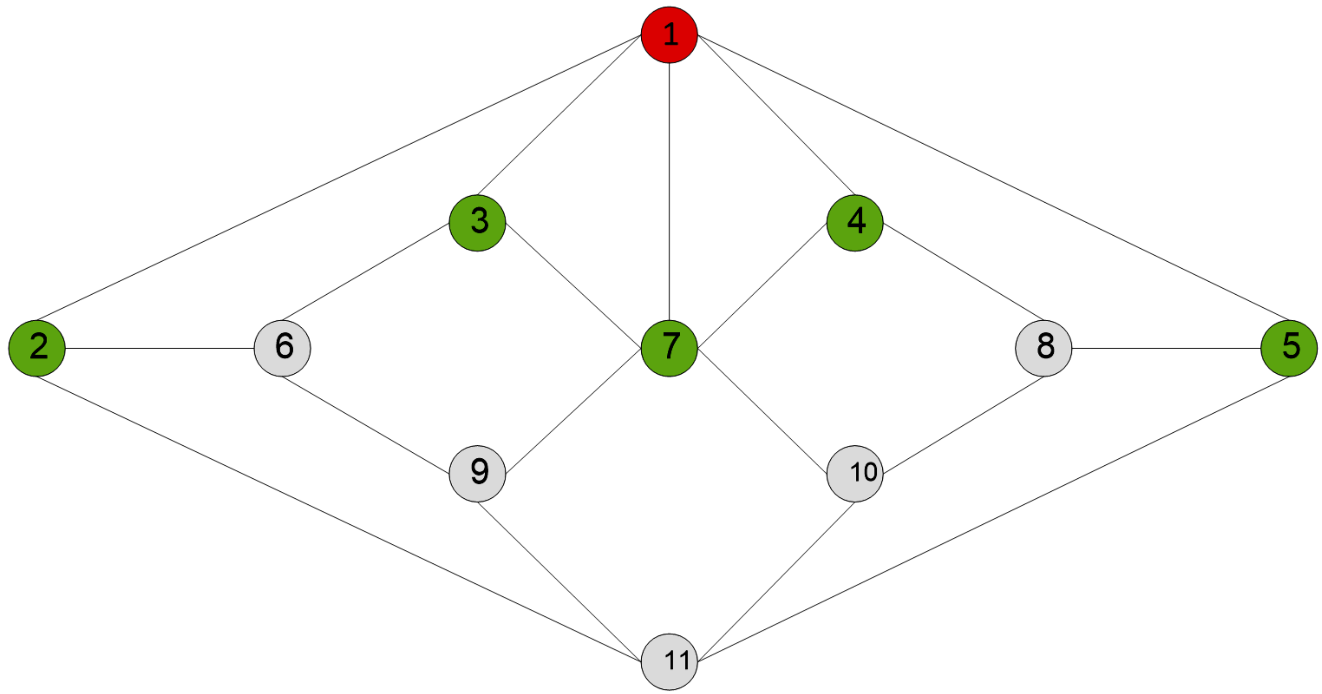
- **Teorema König ⇒ Agoritm pentru a testa dacă un graf conex este bipartit**
  - Colorăm cu (cel mult) 2 culori un arbore parțial al său printr-o **parcurgere** (colorăm orice vecin j nevizitat al vârfului curent i cu o culoare diferită de cea a lui i)
  - Testăm dacă celelalte muchii – de la i la **vecini j deja vizitați** (colorați) au extremitățile i și j colorate diferit

Dacă graful nu este conex, testăm fiecare componentă conexă

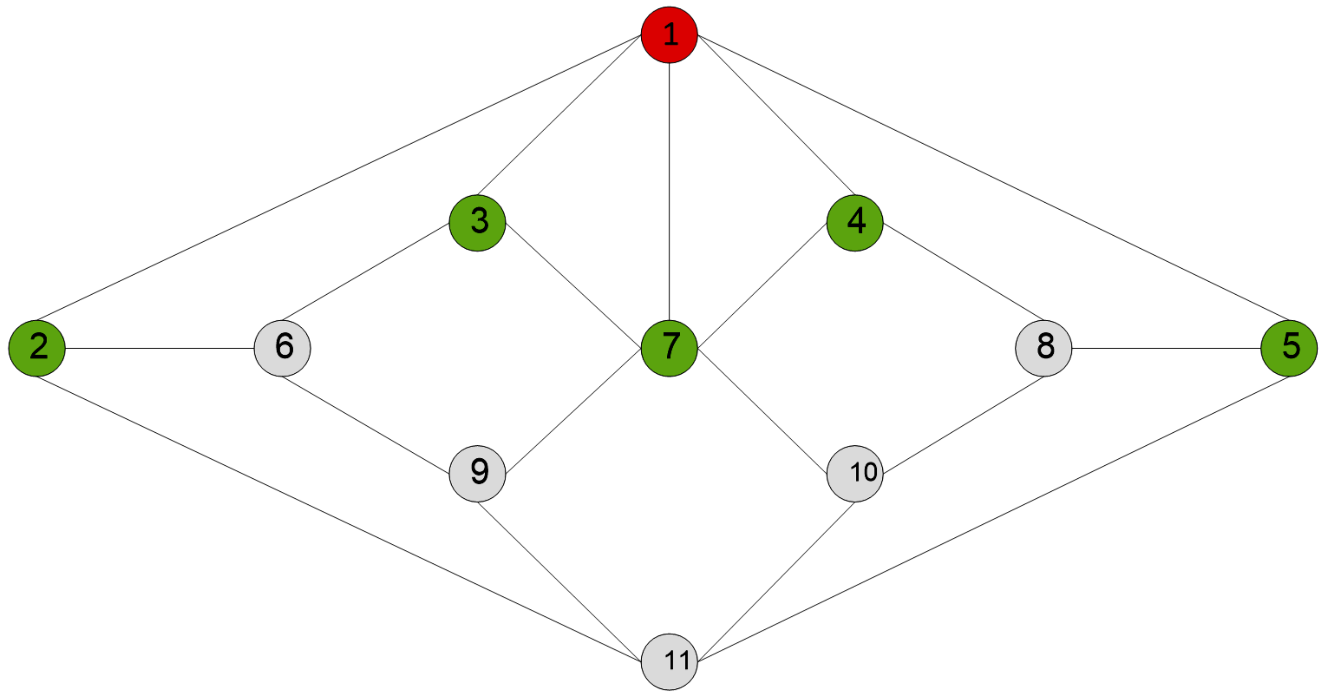
Exemplu test bipartit BF



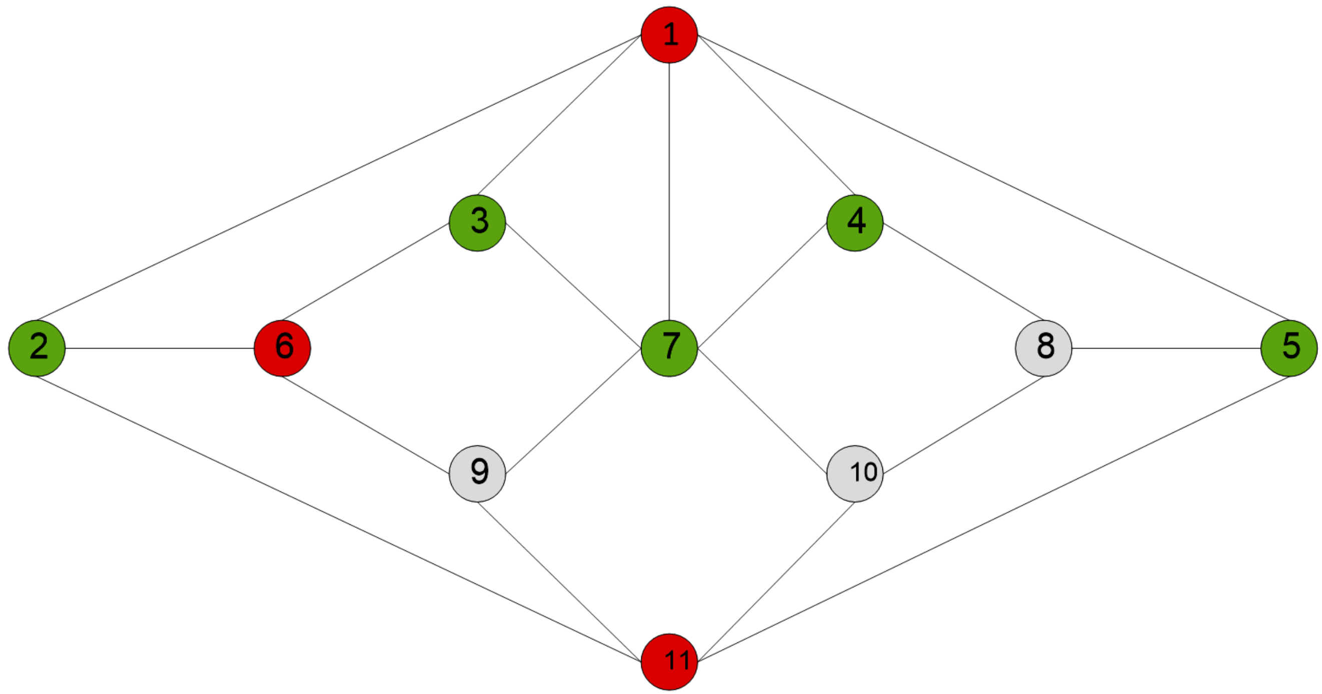
Exemplu test bipartit BF



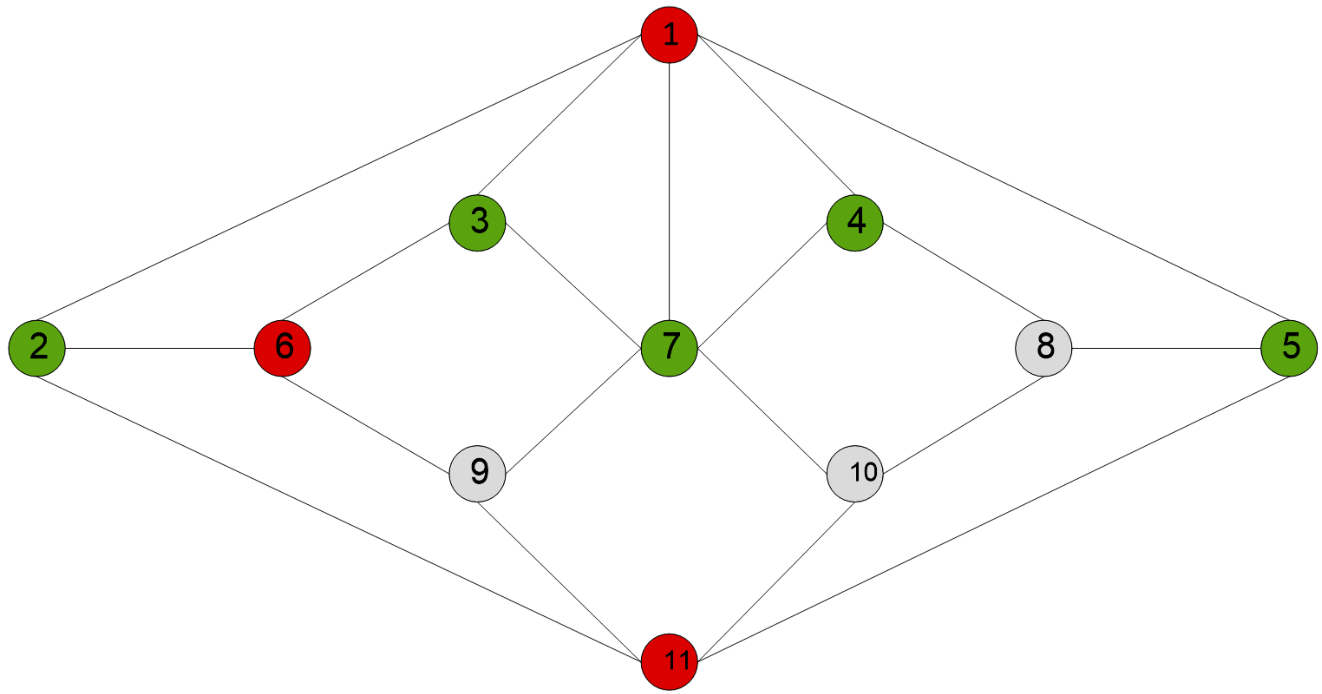
Exemplu test bipartit BF



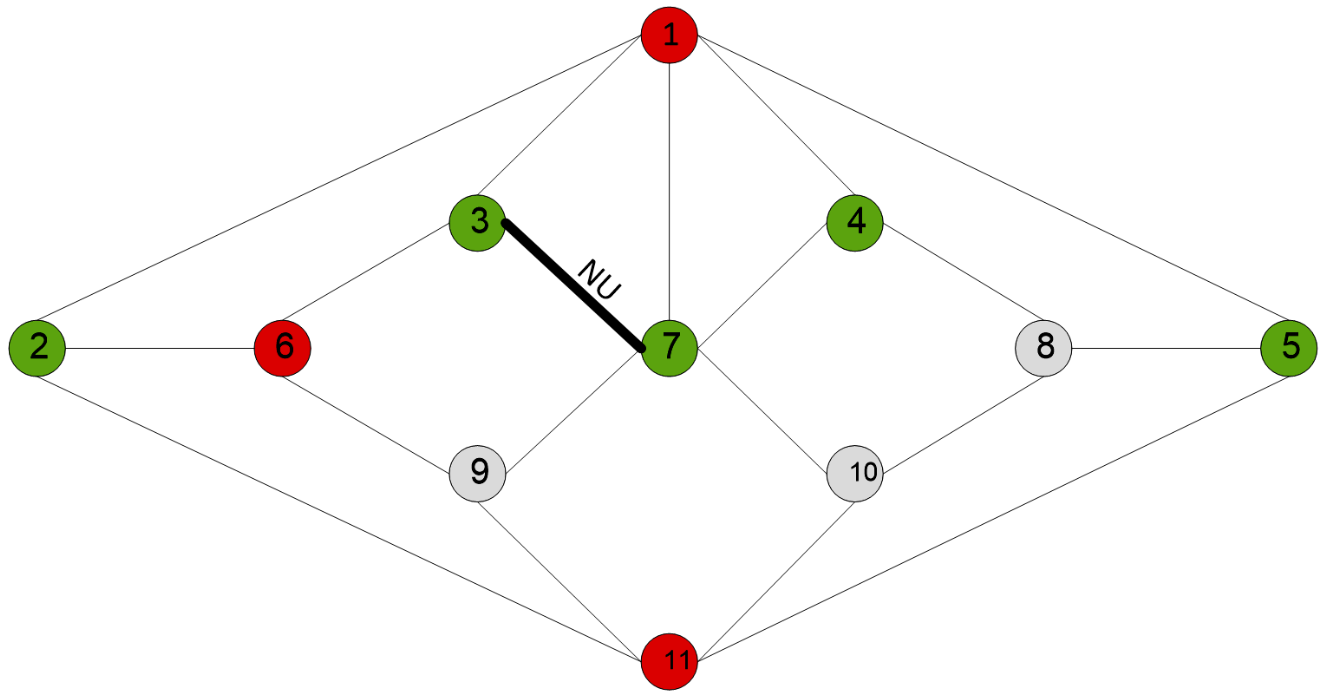
Exemplu test bipartit BF



Exemplu test bipartit BF

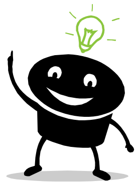


Exemplu test bipartit BF



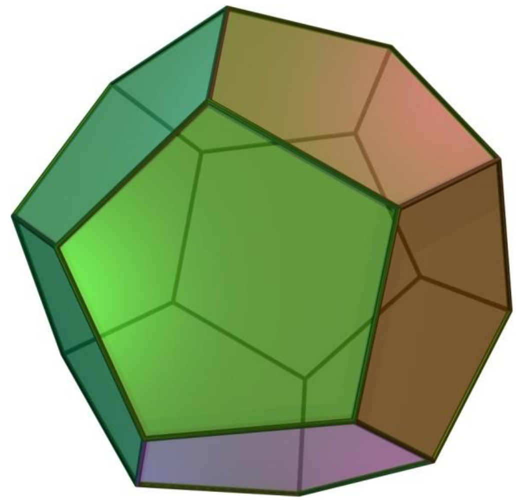
Grafuri planare

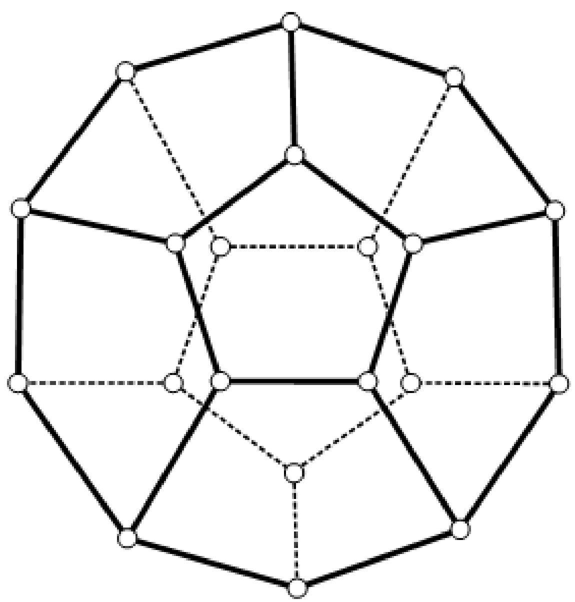
Graf planar

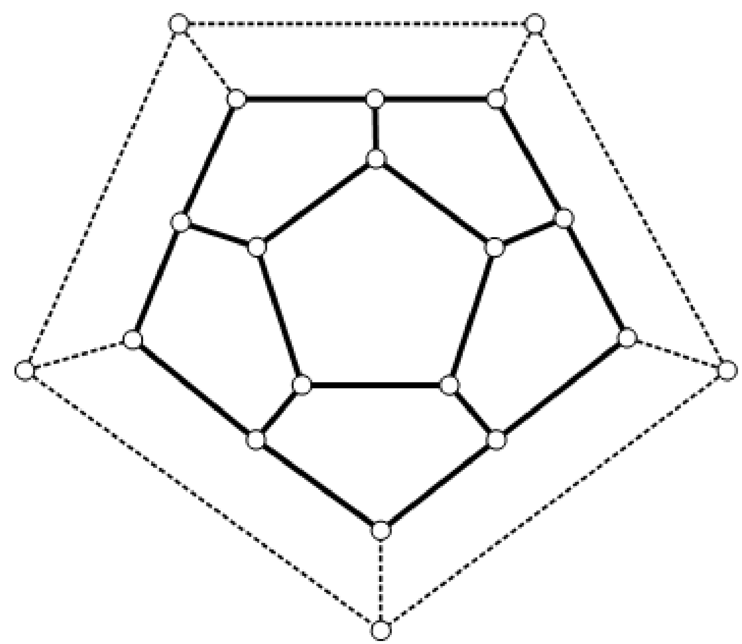


- Amintim din primul curs

Dodecaedrul







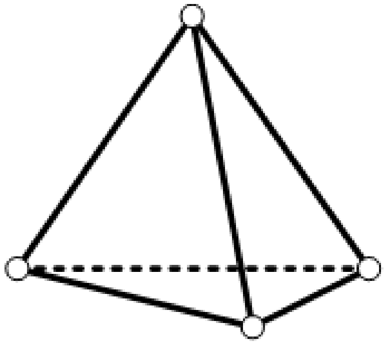
Corpuri platonice

- **Poliedru** – **corp** mărginit de suprafeţe plane
- **Poliedru convex** – segmentul care uneşte două puncte oarecare din el conţine numai puncte din interior
- **Poliedru regulat convex** – feţele sunt poligoane regulate **congruente**

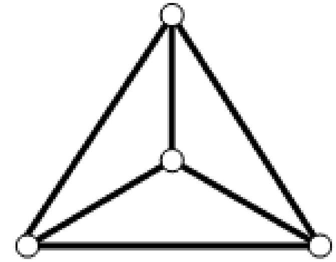
Corpuri platonice

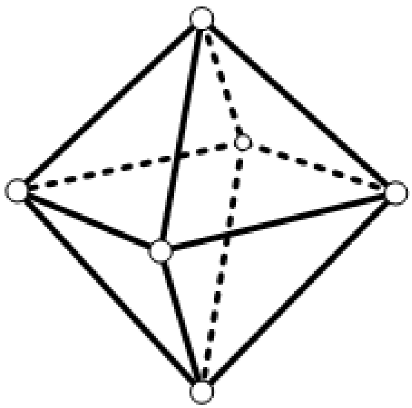
- **Poliedru** – **corp** mărginit de suprafeţe plane
- **Poliedru convex** – segmentul care uneşte două puncte oarecare din el conţine numai puncte din interior
- **Poliedru regulat convex** – feţele sunt poligoane regulate **congruente**

Corpuri platonice – grafuri planare

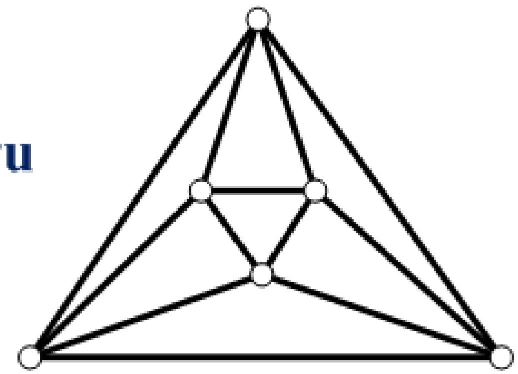


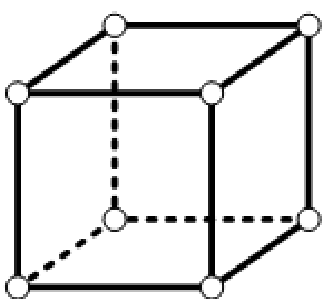
Tetraedru



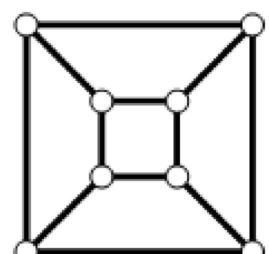


Octaedru

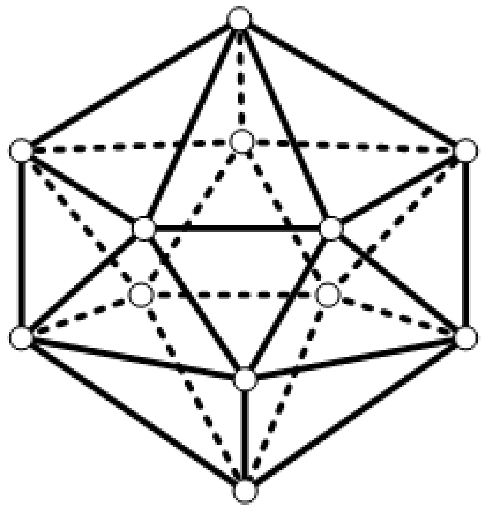




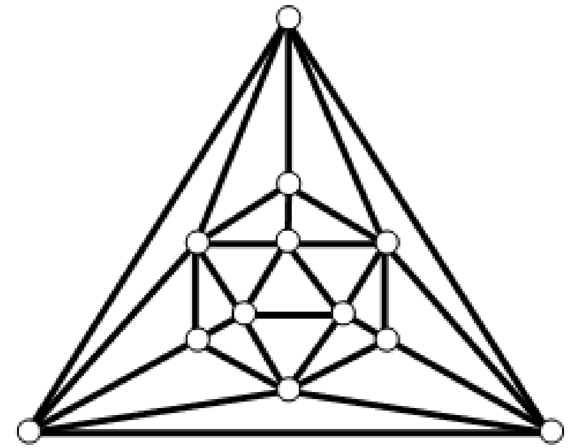
Cub

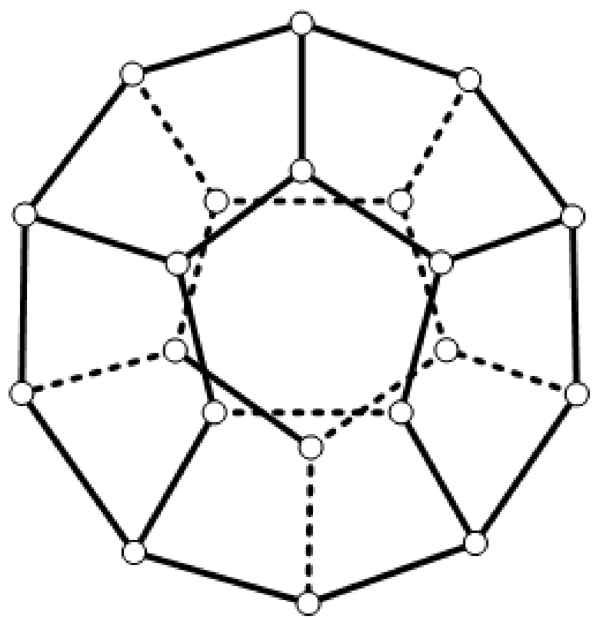


Corpuri platonice – grafuri planare

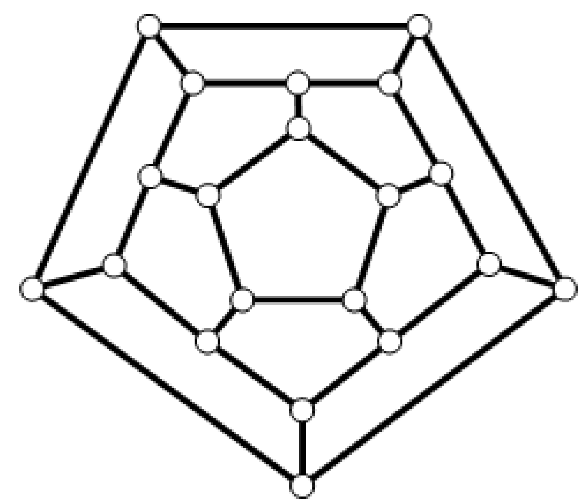


Icosaedru





Dodecaedru



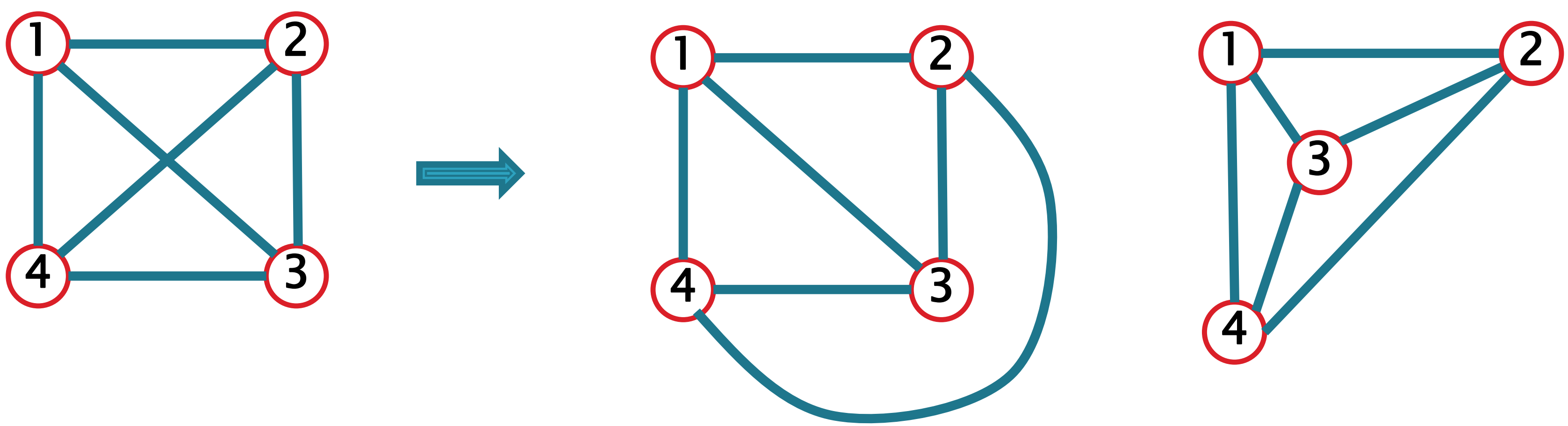
Corpuri platonice

Sunt hamiltoniene?

Graf planar

- G = (V, E) graf neorientat s.n. **planar** ⇔ admite o reprezentare în plan a.î. **muchiilor** le corespund segmente de curbe continue care **nu se intersectează în interior** unele pe altele

- O astfel de reprezentare s.n **hartă** a lui G



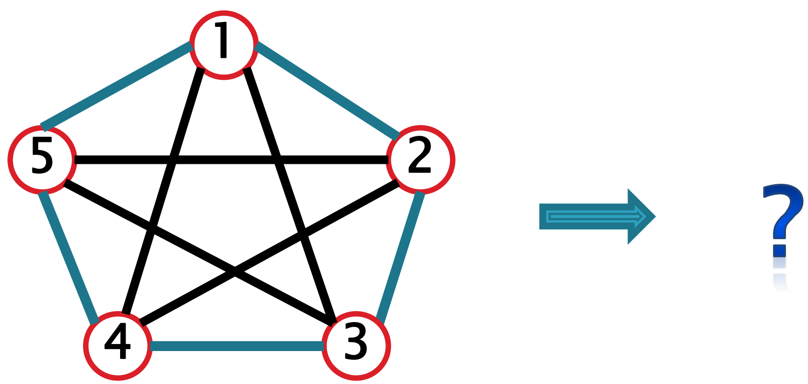
$G \sim K_4$

hărți

Graf planar

- G = (V, E) graf neorientat s.n. planar $\Leftrightarrow$ admite o reprezentare în plan a.î. **muchiilor** le corespund segmente de curbe continue care **nu se intersectează în interior** unele pe altele

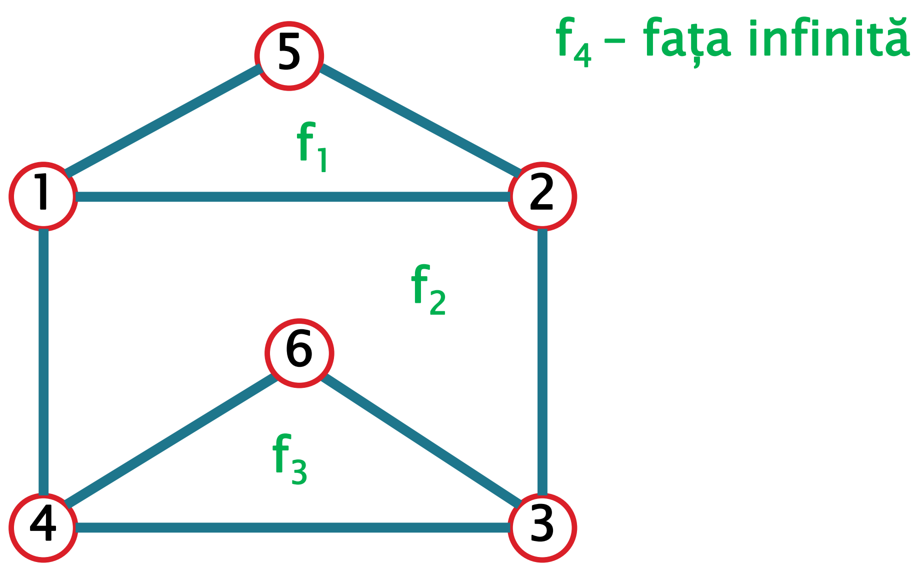
- O astfel de reprezentare s.n **hartă** a lui G



$G \sim K_5$

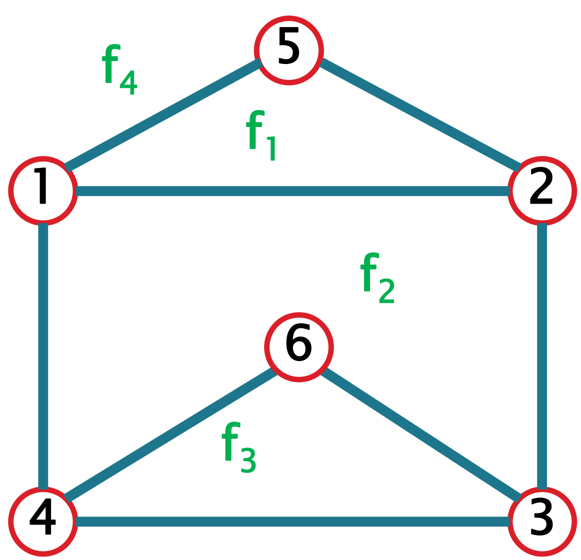
Graf planar

- Fie G = (V, E) graf planar, M o hartă a sa
- M induce o împărțire a planului într-o mulțime **F** de părți convexe numite **fețe**
- Una dintre acestea este **fața infinită (exterioară)**

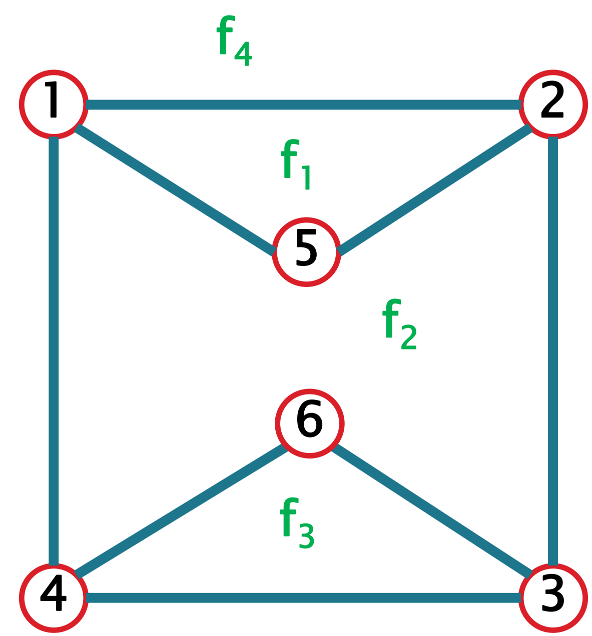


Graf planar

- M = **(V, E, F) hartă**
- Pentru o față f ∈ F definim
  - **d_M(f) = gradul feței f** = numărul muchiilor lanțului închis (**frontierei**) care delimitează f (*câte muchii sunt parcurse atunci când traversăm frontiera*)

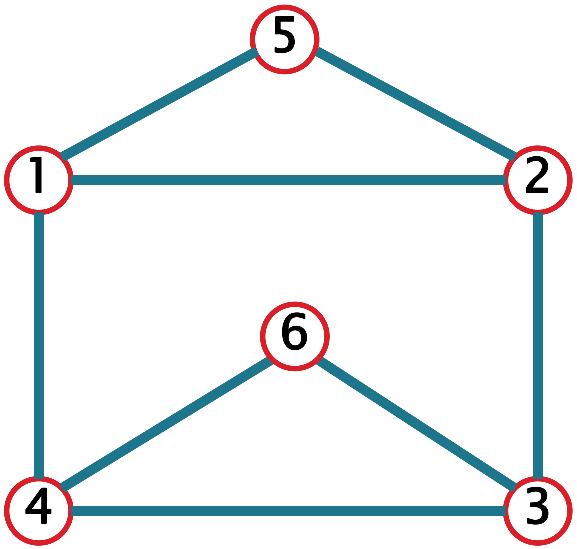


~

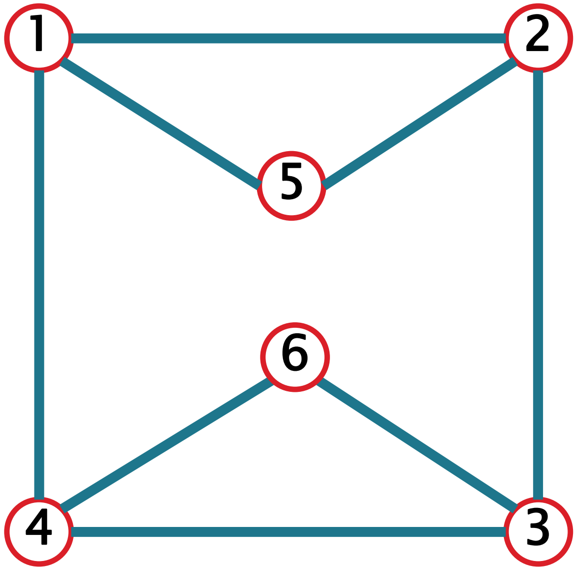


Graf planar

Observație: Hărți diferite ale aceluiași graf pot avea **secvența gradelor fețelor diferită**



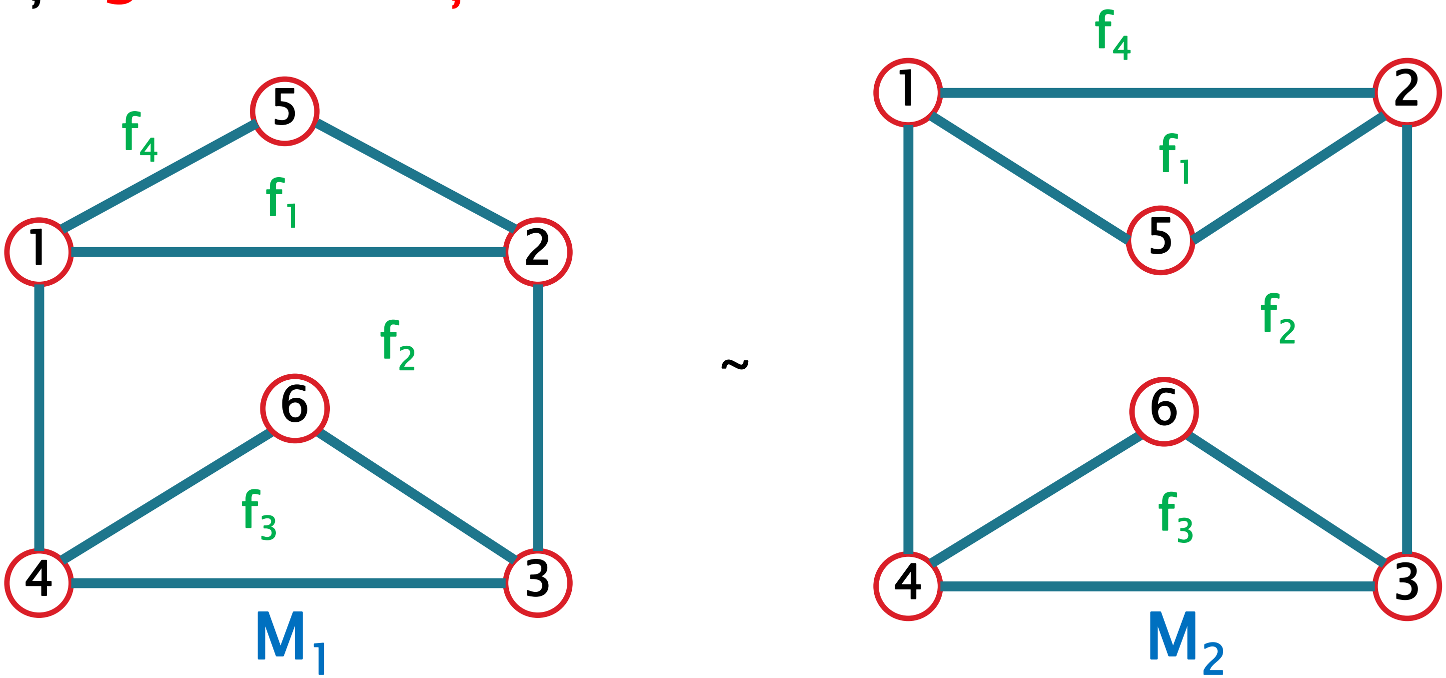
~



Poate să difere și numărul de fețe (între 2 hărți ale aceluiași graf)?

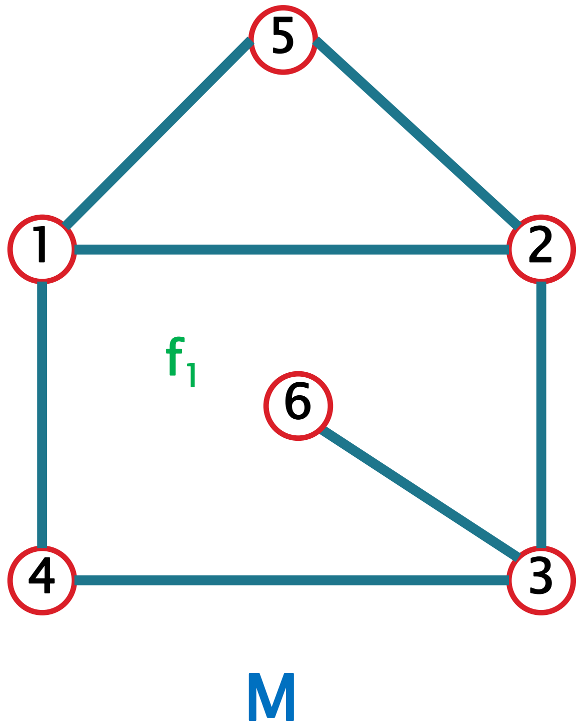
Graf planar

Observație: Hărți diferite ale aceluiași graf pot avea **secvența** **gradelor fețelor diferită**



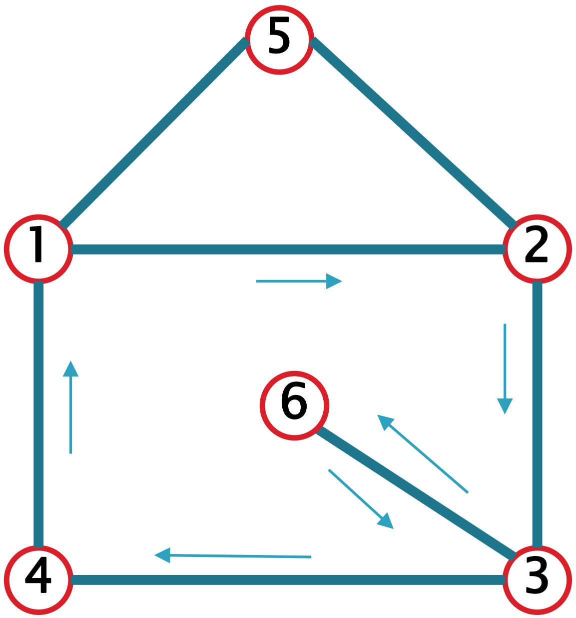
$d_{M1}(f_1) = 3$	$d_{M2}(f_1) = 3$
$d_{M1}(f_2) = 5$	$d_{M2}(f_2) = 6$
$d_{M1}(f_3) = 3$	$d_{M2}(f_3) = 3$
$d_{M1}(f_4) = 5$	$d_{M2}(f_4) = 4$

Graf planar



$d_M(f_1) = ?$

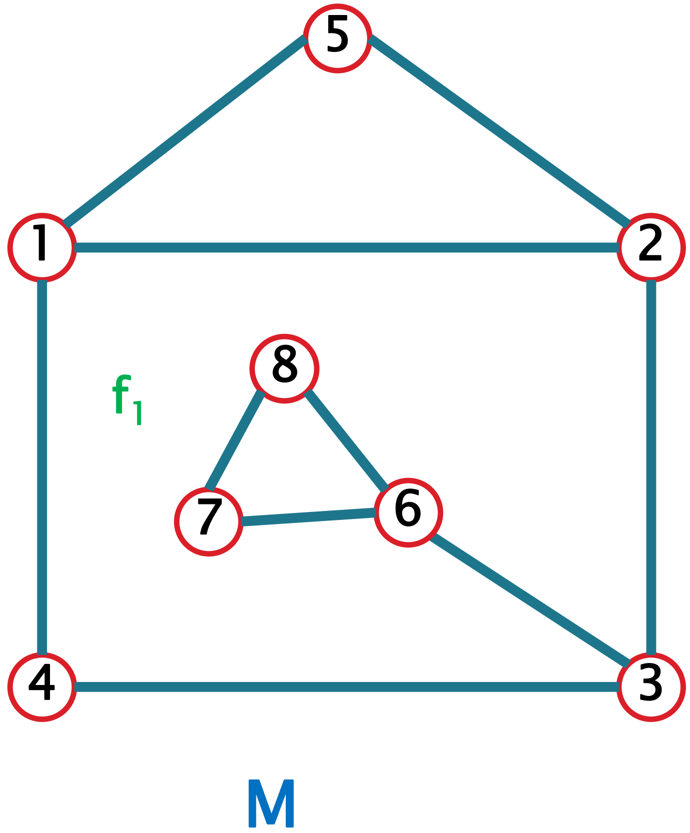
Graf planar



M

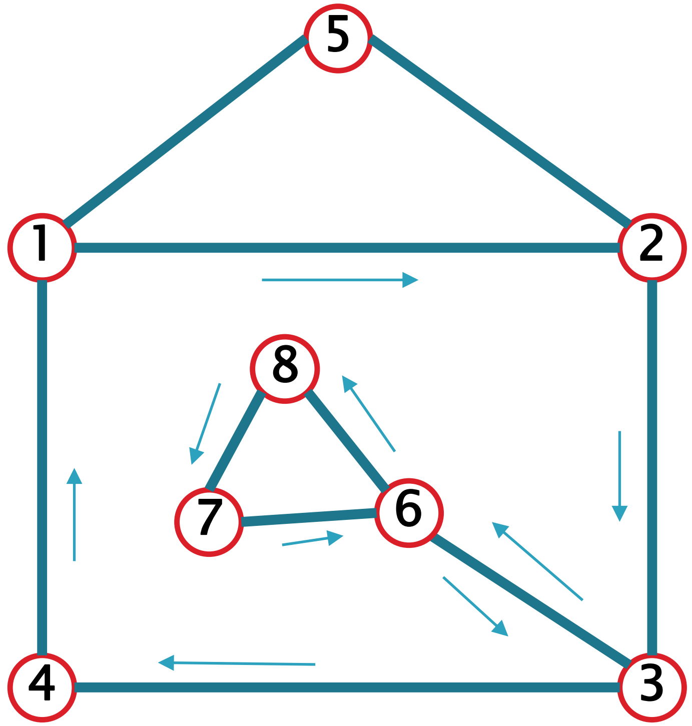
$d_M(f_1) = 6$

Graf planar



$d_M(f_1) = ?$

Graf planar



M

Graf planar

- M = (V, E, F) hartă
  - **Avem**

$$\sum_{f \in F} d_M(f) = 2|E|$$

(deoarece o muchie este incidentă cu două fețe)

Graf planar

- **Teorema poliedrală a lui EULER**

Fie G=(V, E) un graf planar **conex** și M = (V, E, F) o hartă a lui. Are loc relația

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

Graf planar

- **Teorema poliedrală a lui EULER**

  Fie G=(V, E) un graf planar **conex** și M = (V, E, F) o hartă a lui. Are loc relația

  $$|V| - |E| + |F| = 2$$

- **Consecință**

  Orice hartă M a lui G are 2 – |V| + |E| fețe

Graf planar

- **Proprietăți**

Fie $G=(V, E)$ un graf planar conex cu $n=|V|>2$ și $m=|E|$. Atunci:

a) $m \leq 3n - 6$

b) $\exists\, x \in V$ cu $d(x) \leq 5$.

Graf planar

- **Proprietăți**

Fie $G=(V, E)$ un graf planar conex cu $n=|V|>2$ și $m=|E|$.
Atunci:

a) $m \leq 3n - 6$

b) $\exists\, x \in V$ cu $d(x) \leq 5$.

- **Consecință**

K_5 nu este graf planar

Graf planar

- **Proprietăți (temă)**

Fie $G=(V, E)$ un graf planar conex **bipartit** cu $n=|V|>2$ și $m=|E|$. Atunci:

a) $m \leq 2n - 4$

b) $\exists\, x \in V$ cu $d(x) \leq 3$.

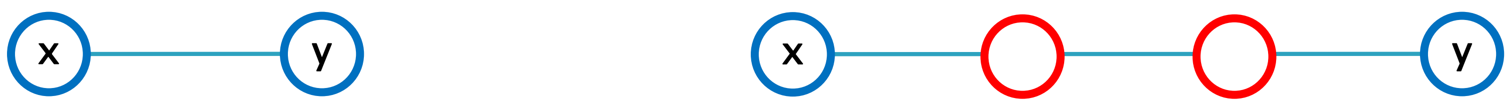
- **Consecință**

$K_{3,3}$ nu este graf planar

Graf planar

Teorema lui Kuratowski

subdiviziune a unei muchii = înlocuire a muchiei cu un lanț de la x la y cu vârfuri intermediare noi (se adaugă vârfuri noi “pe” muchia xy)



Graful H este o **subdiviziune a lui G** = se poate obține din G printr-o secvență finită de subdiviziuni de muchii

Graf planar

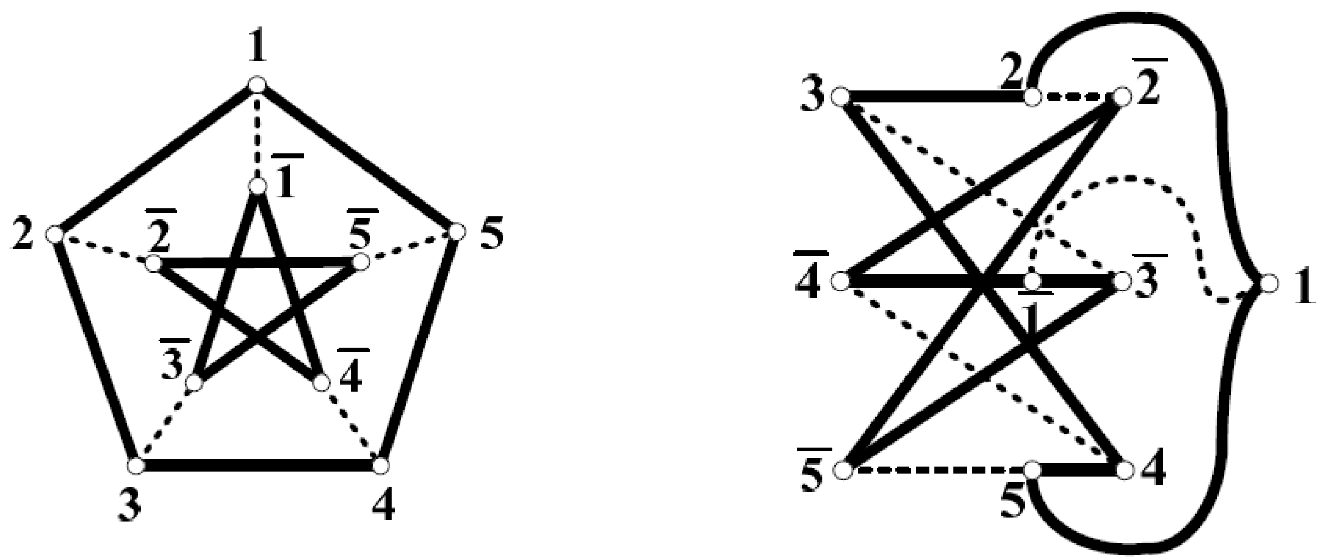
- **Teorema lui Kuratowski**

G este graf planar $\Leftrightarrow$ nu conține subdiviziuni ale lui $K_{3,3}$ și ale lui K_5.

Graf planar

- **Teorema lui Kuratowski**

G este graf planar ⇔ nu conține subdiviziuni ale lui $K_{3,3}$ și ale lui K_5.



Graful lui Petersen

Graf planar

- **Teorema celor 6 culori**

  Orice graf planar conex este 6 -colorabil.

- **Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori**

Graf planar

- **Teorema celor 6 culori**

  Orice graf planar conex este 6 -colorabil.

- **Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori**

```
colorare(G)
        daca |V(G)|≤ 6 atunci coloreaza varfurile cu
        culori distincte din {1,…,6}
```

Graf planar

- ## Teorema celor 6 culori

Orice graf planar conex este 6 -colorabil.

- ## Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori

```
colorare(G)
      daca |V(G)|≤ 6 atunci coloreaza varfurile cu
      culori distincte din {1,…,6}
      altfel
            alege x cu d(x) ≤ 5
```

Graf planar

- ## Teorema celor 6 culori

Orice graf planar conex este 6 -colorabil.

- ## Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori

```
colorare(G)
        daca |V(G)|≤ 6 atunci coloreaza varfurile cu
        culori distincte din {1,…,6}
        altfel
                alege x cu d(x) ≤ 5
                colorare(G-v)
```

Graf planar

- ## Teorema celor 6 culori

Orice graf planar conex este 6 -colorabil.

- ## Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori

```
colorare(G)
        daca |V(G)|≤ 6 atunci coloreaza varfurile cu
        culori distincte din {1,…,6}
        altfel
                alege x cu d(x) ≤ 5
                colorare(G-v)
                colorează x cu o culoare din {1,…,6}
                diferită de culorile vecinilor (!se
                poate, x are cel mult 5 vecini)
```

Graf planar

- ## Teorema celor 6 culori

Orice graf planar conex este 6 -colorabil.

- ## Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori

```
colorare(G)
      daca |V(G)|≤ 6 atunci coloreaza varfurile cu
      culori distincte din {1,…,6}
      altfel
            alege x cu d(x) ≤ 5
            colorare(G-v)
            colorează x cu o culoare din {1,…,6}
            diferită de culorile vecinilor
```

  - **Sugestie implementare** – determinarea iterativă a ordinii în care sunt colorate vârfurile (similar parcurgere BF, sortare topologică)

Graf planar

- **Teorema celor 5 culori**

  Orice graf planar conex este 5 -colorabil.