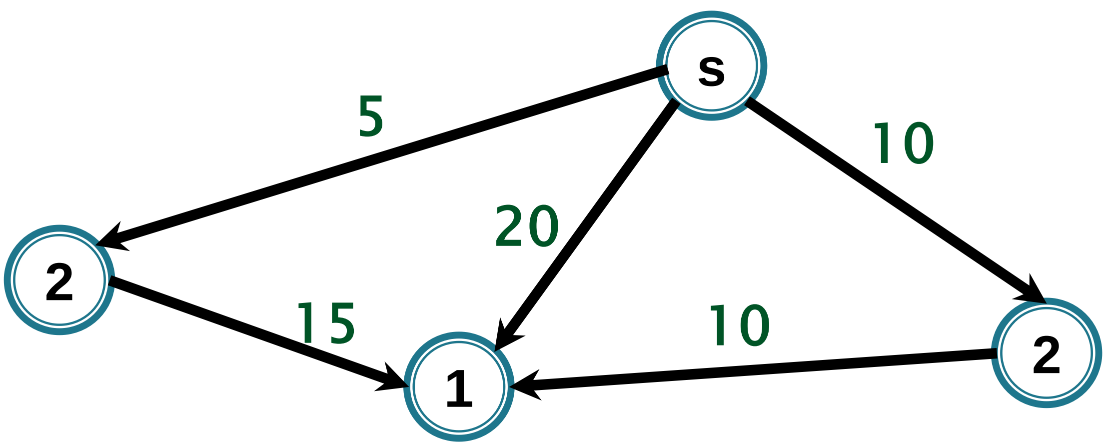
Distanțe și drumuri minime

Drumuri minime

Exercițiul 1

a) Care sunt arborii de distanțe față de vârful s=1 pentru graful următor? Care dintre ei va fi obținut folosind algoritmul lui Dijkstra?

b) Poate fi algoritmul lui Dijkstra modificat astfel încât să detecteze că există mai multe drumuri minime între două vârfuri date s și t (atunci când ponderile sunt pozitive)/ mai mulți arbori de distanțe față de s?



Drumuri minime

Exercițiul 2 (Cormen)

Dați exemplu de un graf orientat ponderat G cu proprietatea că există un vârf de start s astfel încât pentru orice arc uv există un arbore de distanțe față de s care conține uv și unul care nu conține uv (ponderile pot fi și negative, dar nu există circuite negative)

Drumuri minime

Problema 3 (Cormen) - Arbitraj valutar

Arbitraj = utilizarea discrepanțelor existente între ratele de schimb pentru transformarea unei unități dintr-un anumit tip de valută în una sau mai multe unități de același tip

Exemplu:

1 dolar american - cumpăr 0,7 lire englezești

1 liră englezească - cumpăr 9,5 franci francezi

1 franc francez - cumpăr 0,16 dolari americani

=> cu 1 dolar american cumpăr 0,7*9,5*0,16=1,064 dolari americani => profit

Drumuri minime

Problema 3 (Cormen) - Arbitraj valutar

Se dau n valute $v_1,..,v_n$ și o matrice e cu semnificația:

$e(i,j)$ = câte unități (număr real nenegativ) de v_j se pot cumpăra folosind o unitate de v_i

Propuneți un algoritm eficient care să determine dacă există o succesiune de valute $v_{i1},...,v_{ik}$ astfel încât

$$e(i_1,i_2)*...*e(i_{k-1},i_k)*e(i_k,i_1) > 1$$

(pornind cu o unitate de v_{i1} și schimbând valute una în alta în ordinea dată de această succesiune ajungem sa avem mai mult de o unitate din v_{i1})

În caz afirmativ să se afișeze o astfel de succesiune

Drumuri minime

Problema 4 (Cormen) – Cutii incluse

Se dau n cutii d-dimensionale. O cutie este caracterizată de vectorul de dimensiuni $(x_1,\ldots,x_d)$.

O cutie cu dimensiunile$(x_1,\ldots,x_d)$ poate fi inclusă într-o cutie cu dimensiunile $(y_1,\ldots,y_d)$ dacă există o permutare σ astfel încât: $x_{\sigma(i)} < y_i$ pentru orice $i=1,..,d$

a) Propuneți un algoritm eficient pentru a testa dacă două cutii se pot include una în alta

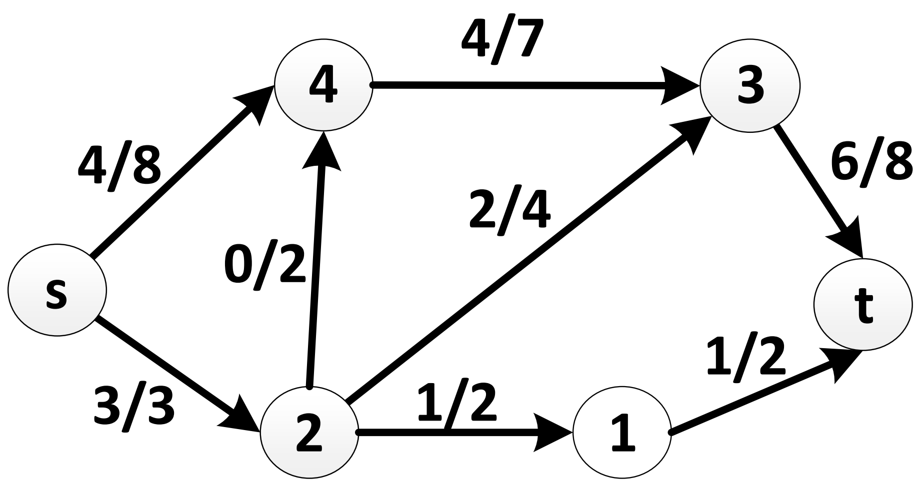
b) Dată o mulțime de n cutii, propuneți un algoritm eficient pentru a determina o secvență maximă de cutii $C_1,\ldots,C_k$ din mulțime care se pot include una în alta (= C_i se poate include în C_{i+1} pentru orice $i=1,..k-1$)

Fluxuri în rețele de transport

Algoritmul Ford-Fulkerson

Descrieți pas cu pas algoritm Ford-Fulkerson (Edmonds Karp) pentru rețeaua de mai jos, pornind de la fluxul indicat. Desenați la fiecare pas și graful rezidual

Care este tăietura minimă corespunzătoare fluxului determinat?

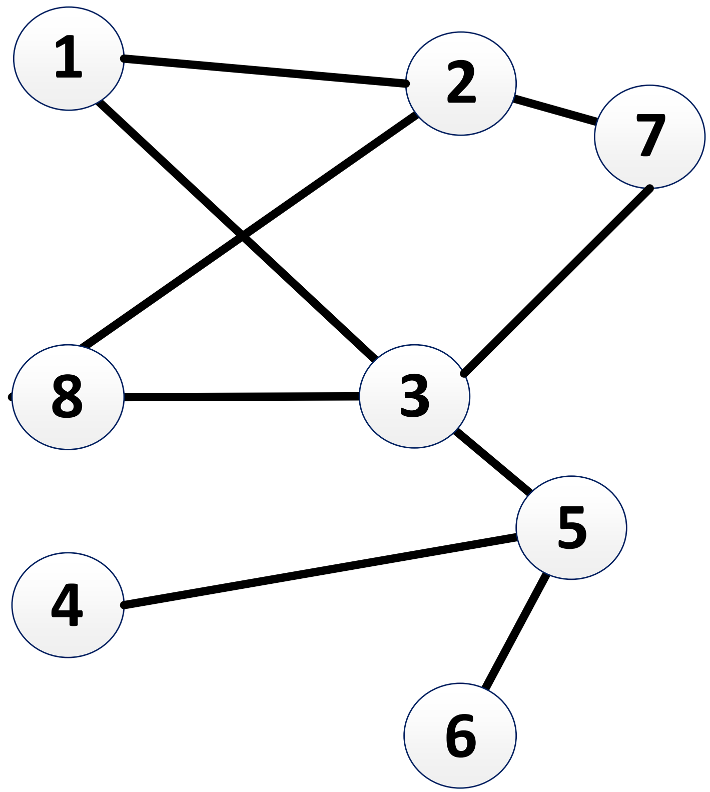


Algoritmul Ford-Fulkerson

Fie N o rețea de transport și P un s-t lanț f-nesaturat. Arătați că funcția f_P obținută prin revizuirea fluxului f de-a lungul lui P este flux în N și $val(f_P) = val(f) + i(P)$

Cuplaje în grafuri bipartite

Descrieți pas cu pas algoritmul care determină un cuplaj maxim în graful următor, folosind algoritmul Ford–Fulkerson (Edmonds Karp) pentru rețeaua asociată.



Construcția unui graf din secvența de grade

Dați exemplu de secvențe de grade de intrare și ieșire cu 4 elemente pentru care se poate construi un graf orientat. Arătați cum se poate determina un astfel de graf determinând fluxul maxim în rețeaua asociată.

Cuplaje în grafuri bipartite

Dați exemplu de secvențe de grade de intrare și ieșire pentru care nu se poate construi un graf orientat, deși au aceeași sumă. Arătați cum se poate demonstra faptul că graful nu există determinând fluxul maxim în rețeaua asociată.

- **Demonstrați următoarea proprietate**

Se dau secvențele $s_0^+ = \{d_1^+, \ldots, d_n^+\}$ și $s_0^- = \{d_1^-, \ldots, d_n^-\}$

cu $d_1^+ + \ldots + d_n^+ = d_1^- + \ldots + d_n^-$

Arătați că există un graf orientat G cu

$s^+(G) = s_0^+$ și $s^-(G) = s_0^-$

$\Leftrightarrow$ în rețeaua asociată **un flux f de valoare maximă** are

$$val(f) = d_1^+ + \ldots + d_n^+ = d_1^- + \ldots + d_n^-$$

(satureaza toate arcele care ies din s și toate arcele care intră în t)

- **Temă. Propuneți un algoritm de construcție a unui graf neorientat din secvența gradelor (dacă se poate) și justificați corectitudinea acestuia**