Examen Restanţă - Algoritmi Avansaţi

07.07.2021.

1. (10p) George a intrat în concediu, şi ca atare doreşte să consume cât mai mult din pachetul său de vouchere de vacanţă. El şi-a făcut o listă cu n locaţii unde poate cheltui din suma alocată. Ştiind că George nu are de gând să cheltuiască din banii proprii decât pe transportul între locaţii şi că el se poate deplasa între oricare două locaţii, ajutaţi-l pe George să găsească o listă de locaţii pe care să le viziteze astfel încât să îşi folosească voucherele cât mai eficient.

Cerinţe:
Se cere un algoritm 1/2-aproximativ care rezolvă problema lui George în **timp eficient**. (pseudocod + justificare) Algoritmul va avea ca output lista de locaţii şi suma totală ce va fi cheltuită.

Notaţii şi indicaţii:

- Notăm cu S suma de bani pe care o are George sub formă de vouchere.
- Locaţiile sunt etichetate cu numerele $1, 2, ..., n$. Costurile celor n locaţii sunt notate cu $C_1, C_2, ..., C_n$
- Suma de bani S este alocată pe un card, nu sub formă de tichete. Din cont se poate extrage orice sumă disponibilă.
- Se lucrează cu numere întregi.

2. (20p) Se consideră un graf $G = (V, E, w)$ unde V este mulțimea nodurilor, E este mulțimea muchiilor, iar $w : V \rightarrow \mathbb{N}$ este o funcție care asociază fiecăruia dintre noduri o pondere. Nodurile acestui graf pot fi colorate în două culori, A și B, cu restricția că nu pot exista două noduri adiacente colorate cu aceeași culoare. Dându-se un astfel de graf, se pune problema găsirii unei colorări astfel încât suma ponderilor nodurilor colorate să fie maximă.
Cerințe:

a) Fie algoritmul descris mai jos. Verificați dacă acesta este un algoritm 1/4-aproximativ pentru problema noastră. (Demonstrație în caz afirmativ / contra-exemplu în caz negativ) **(10p)**

   cât timp există noduri care mai pot fi colorate:
   - aleg dintre acestea nodul X cu ponderea maximă (dacă există mai multe noduri cu pondere maximă aleg aleator unul dintre ele)
   - dacă X poate fi colorat în culoarea A atunci îl colorez astfel, în caz contrar îl colorez cu B

   Algoritmul întoarce listele de noduri colorate cu fiecare dintre culori, precum și suma ponderilor lor.

b) Enunțați o Problemă de Programare Liniară cu Numere Întregi echivalentă cu cea descrisă mai sus. Puneți în evidență paralele dintre cele două probleme explicând în detaliu notațiile voastre, cum ați ajuns la ele, și ce reprezintă ceea ce vreți să maximizați/minimizați. **(10p)**

Subiectele continuă pe pagina 2!

3. (5p) Fie punctul $M = (2, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$. Alegeţi un punct $N \in \mathbb{R}^3, N \neq M$. Daţi exemplu de punct P pe dreapta MN astfel ca $r(M, N, P) > 0$. Justificaţi!

4. (10p) Daţi exemplu de poligon $\mathcal{P}$ din $\mathbb{R}^2$ care să îndeplinească următoarele condiţii: (i) $\mathcal{P}$ are nouă vârfuri, dintre care exact trei vârfuri determină frontiera inferioară $\mathcal{L}_i$ a acoperirii convexe; (ii) $(1, 2)$ este vârf al acoperirii convexe; (iii) în rularea Graham's scan varianta Andrew pentru determinarea lui $\mathcal{L}_i$ numărul maxim de puncte din listă, atins la unul dintre paşi, este cinci; (iv) în rularea Graham's scan varianta Andrew pentru determinarea lui $\mathcal{L}_i$ sunt testate, la un moment dat, trei puncte coliniare. Justificaţi!

5. (10p) Daţi exemplu de poligon cu nouă vârfuri din $\mathbb{R}^2$ care, în urma aplicării metodei din Teorema Galeriei de Artă, să poată fi supravegheat cu exact două camere. Justificaţi!

6. (10p) Fie punctele $A = (0, 4)$, $B = (x_B, 0)$, $C = (x_C, 0)$, $D = (x_D, y_D)$. Alegeţi valori $x_B < 0, x_C > 0$, $x_D > x_C, y_D > 0$. Fie $P_\lambda = (0, \lambda)$, unde $\lambda \in \mathbb{R}$ este un parametru. Discutaţi, în funcţie de parametrul λ, numărul de muchii de tip semidreaptă pentru diagrama Voronoi asociată mulţimii $\{A, B, C, D, P_\lambda\}$. Justificaţi!

7.

a) **(10p)** Daţi exemplu de problemă de programare liniară în $\mathbb{R}^2$ cu patru constrângeri astfel ca regiunea fezabilă să fie un triunghi şi problema să admită o unică soluţie. Justificaţi!

b) **(10p)** Pentru problema de la a), considerăm dreptele suport ale semiplanelor şi punctele de intersecţie ale acestora. Determinaţi configuraţia duală. Desenaţi şi configuraţia primală şi configuraţia duală. Folosind aceste configuraţii, exemplificaţi păstrarea relaţiei de incidenţă şi a ordinii (este suficient un exemplu pentru fiecare). Justificaţi!

8. (5p) Se consideră o mulţime $\mathcal{M}$ de n pătrate cu laturile paralele cu axele de coordonate (sunt indicate, pe rând, coordonatele vârfurilor pătratelor). Un segment orizontal (sunt indicate coordonatele extremităţilor acestuia) se numeşte convenabil dacă (i) intersectează toate pătratele; (ii) pentru un punct mobil x care parcurge segmentul de la stânga la dreapta există la orice moment de timp t un pătrat $P(t)$ din $\mathcal{M}$ astfel ca x să fie în interiorul sau pe laturile lui $P(t)$. Descrieţi succint un algoritm cât mai eficient care să determine dacă un segment orizontal este convenabil. Justificaţi şi exemplificaţi!