1. 二叉树计算欧式看涨期权

首先简单举例说明定价方法：

当前股票价格为20，且预期3个月后价格可能是22或18，对3个月后以21的价格买入股票的欧式看涨期权进行估值。则可得到3个月后股价为22，期权价值为1；股价为18，期权不被执行，价值为0。

我们将预设一个资产组合包括：

含Δ的股票+期权

若股票价格涨到22： 股价22，期权价值为1， 总资产价值为 22Δ-1

若股票价格跌至18： 股价18，期权价值为0， 总资产价值为 18Δ

当 22Δ-1 = 18Δ，可求Δ=0.25：

说明3个月后无论股价涨跌，这个资产价值都为 4.5，说明这个资产组合是无风险的

假设无风险利率为12%，则4.5的现值则为：4.5e^(-0.12*3/12)=4.367

设期权的价格为f:

20*0.25 - f = 4.367 得 f = 0.633

现按照实例推导出二叉树欧式期权价值得模型：

S0为当前股价，会在T时刻价格运动到 S0u 或 S0d，则可得到：

- Consider the portfolio that is long Δ shares and short 1 derivative

$$\Delta S_0 - f \quad \begin{cases} S_0 u\Delta - f_u \\ S_0 d\Delta - f_d \end{cases}$$

- The portfolio is riskless when $S_0 u\Delta - f_u = S_0 d\,\Delta - f_d$ or

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}$$

无风险利率为r，则资产组合现值为： (S0uΔ - fu)*e^(-rT)

资产组合开始价格为： S0Δ-f

两者相等可得： f = S0Δ(1-ue^(-rT))+fue^(-rT)

带入Δ，可推导出：

1. The value of a call option at its expiration date is $MAX(0, S_{N,j} - K)$;
2. Suppose that the values of the option at time $(i+1)^{\delta t}$ is known for all j. There is a probability p of moving from the (i,j) node at time $i^{\delta t}$ to the $(i+1, j+1)$ node at time $(i+1)^{\delta t}$, and a probability $1-p$ of moving from the (i,j) node at time $i^{\delta t}$ to the $(i+1, j)$ node at time $(i+1)^{\delta t}$. Risk-neutral valuation gives

$$f_{i,j} = e^{-r\delta t}(pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j})$$

其中

$$\begin{aligned} p &= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \\ 1 - p &= \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d} \end{aligned}$$

p 和 1-p 为风险中性概率。

这里解释一下风险中性：把所有人对于风险无差异的世界称为风险中性世界，投资者对风险不要求赔偿。

而在计算上式u和d时需要用到 波动率(Volatility)σ：期权的波动率是金融资产价格的波动程度

股票价格在 Δt 时间内的收益方差为 σΔt²

可推导得（此过程省略）：

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{aligned}$$

以上是数学基础，二叉树定价方法具体计算过程如下：

1. 计算叶子节点的期权价值
2. 向前加权平均并折现，得到前一层节点期权价值
3. 重复第二步至0时刻

而与欧式期权相近，我们也可以类比推导出美式期权的定价方式。

美式期权与欧式期权的最大不同在于 美式期权可以提前行权，而欧式期权无法提前行权

因此美式期权定价过程为：

1. 计算叶子节点的期权价值
2. 向前加权平均并折现，得到前一层节点期权价值
3. 判断在该节点是否提前行权，若提前行权，更新提前行权的期权价值为本节点的价值
4. 重复第二步第三步至0时刻