

## 1. 二叉树计算欧式看涨期权

首先简单举例说明定价方法：

当前股票价格为20，且预期3个月后价格可能是22或18，对3个月后以21的价格买入股票的欧式看涨期权进行估值。则可得到3个月后股价为22，期权价值为1；股价为18，期权不被执行，价值为0。

我们将预设一个资产组合包括：

含  $\Delta$  的股票+期权

若股票价格涨到22： 股价22，期权价值为1， 总资产价值为  $22\Delta - 1$

若股票价格跌至18： 股价18，期权价值为0， 总资产价值为  $18\Delta$

当  $22\Delta - 1 = 18\Delta$ ，可求  $\Delta = 0.25$ ：

说明3个月后无论股价涨跌，这个资产价值都为 4.5，说明这个资产组合是无风险的

假设无风险利率为12%，则4.5的现值则为： $4.5e^{(-0.12*3/12)} = 4.367$

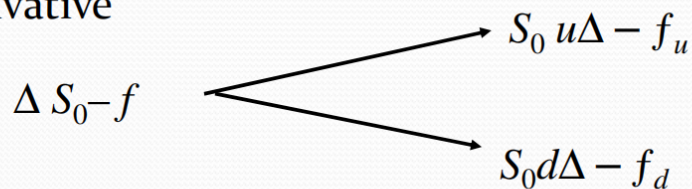
设期权的价格为f：

$20*0.25 - f = 4.367$  得  $f = 0.633$

现按照实例推导出二叉树欧式期权价值模型：

$S_0$ 为当前股价，会在T时刻价格运动到  $S_0u$  或  $S_0d$ ，则可得到：

- Consider the portfolio that is long  $\Delta$  shares and short 1 derivative



- The portfolio is riskless when  $S_0 u \Delta - f_u = S_0 d \Delta - f_d$  or

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}$$

无风险利率为r，则资产组合现值为： $(S_0 u \Delta - f_u) * e^{(-rT)}$

资产组合开始价格为： $S_0 \Delta - f$

两者相等可得： $f = S_0 \Delta (1 - u e^{-rT}) + f u e^{-rT}$

带入  $\Delta$ ，可推导出：

1. The value of a call option at its expiration date is  $MAX(0, S_{N,j} - K)$ ;
2. Suppose that the values of the option at time  $(i + 1)^{\delta t}$  is known for all  $j$ . There is a probability  $p$  of moving from the  $(i, j)$  node at time  $i^{\delta t}$  to the  $(i + 1, j + 1)$  node at time  $(i + 1)^{\delta t}$ , and a probability  $1 - p$  of moving from the  $(i, j)$  node at time  $i^{\delta t}$  to the  $(i + 1, j)$  node at time  $(i + 1)^{\delta t}$ . Risk-neutral valuation gives

$$f_{i,j} = e^{-r\delta t}(p f_{i+1,j+1} + (1 - p) f_{i+1,j})$$

其中

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$
$$1 - p = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d}$$

$p$  和  $1-p$  为风险中性概率。

这里解释一下风险中性：把所有人对于风险无差异的世界称为风险中性世界，投资者对风险不要求赔偿。

而在计算上式 $u$ 和 $d$ 时需要用到 波动率 (Volatility)  $\sigma$ ：期权的波动率是金融资产价格的波动程度

股票价格在  $\Delta t$  时间内的收益方差为  $\sigma^2 \Delta t$

可推导得（此过程省略）：

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

以上是数学基础，二叉树定价方法具体计算过程如下：

1. 计算叶子节点的期权价值
2. 向前加权平均并折现，得到前一层节点期权价值
3. 重复第二步至0时刻

而与欧式期权相近，我们也可以类比推导出美式期权的定价方式。

美式期权与欧式期权的最大不同在于 美式期权可以提前行权，而欧式期权无法提前行权

因此美式期权定价过程为：

1. 计算叶子节点的期权价值
2. 向前加权平均并折现，得到前一层节点期权价值
3. 判断在该节点是否提前行权，若提前行权，更新提前行权的期权价值为本节点的价值
4. 重复第二步第三步至0时刻