学习B-S模型前要理解几个随机过程的概念：

1. 马尔科夫过程 (Markov Process)

定义：如果一个过程是随机过程，并且变量的历史值以及历史演变过程与未来值预测无关，未来值预测只和当前值有关，则这个过程为马尔科夫过程。

说明：从定义可以看出，马尔科夫过程是一种特殊的随机过程。这种特殊性，体现在x和t的关系加了一个限定，那就是x在t时间后的预测值，和t时刻之前的x没任何关系，只和t时刻的x有关。马尔科夫过程的这种性质叫做马尔科夫性质。而对未来的预测，通常以概率分布的形式给出。所以马尔科夫性质就是将来的概率分布不依赖于过去的值和路径。

2. 维纳过程(Wiener Process)

定义：如果一个过程是马尔科夫过程，并且在单位时间变量变化的期望值服从期望为0，方差为1的正态分布，则这个过程为维纳过程。

说明：从定义可以看出，维纳过程是在马尔科夫过程上加了一个对变量的限定或者说变量变化量分布的限定。这种过程在物理中用于描述布朗运动，所以维纳过程又称为布朗运动。当然现实中的布朗运动是多维运动，但是这里说的维纳过程是一维运动。

公式：
δt时间内的变化量为δz

- The variable follows a Wiener process if
  1. $\delta z = \varepsilon\sqrt{\delta t}$ where ε is a random drawing from $\phi(0,1)$
  2. The values of δz for any 2 different (non-overlapping) periods of time are independent

维纳过程以及对数正态分布常用于股价描述：
在给定今天股价的前提下，股票在未来的价格服从集合维纳过程(股价对数单位时间独立增量是正态分布)，股票在未来特定时刻的价格服从对数正态分布

3. 广义维纳过程(Generalized Wiener Process)

定义：如果一个过程是维纳过程，另一个过程是漂移率恒定的过程，则将这两个过程进行附加，得到的过程就是维纳过程。

说明：从定义可以看出，广义维纳过程是维纳过程的扩充，为维纳过程增加了趋势项。

公式体现(其中a和b都为常量)：

$$\delta x = a\,\delta t + b\,\varepsilon\sqrt{\delta t}$$

- Mean change in x in time T is aT
- Variance of change in x in time T is b^2T
- Standard deviation of change in x in time T is

$$b\sqrt{T}$$

4. 伊藤过程(Ito Process)

定义：广义维纳过程的系数a和b都变为变量x和时间t的函数，则广义维纳过程变为伊藤过程。

说明：伊藤过程是更广义的维纳过程，是广义维纳过程的扩充。

在此我们也能推导出股价的伊藤过程：

dS = μSdt + σSdz

5. 伊藤引理(Ito Lemma)

在古典微积分中：

$$\delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\delta t$$

在随机积分中：

$$\delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\delta t + ½\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\delta x^2$$

假设：

$$\delta x = a\,\delta t + b\,\varepsilon\sqrt{\delta t}$$

可推导得：

$$\delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\delta t + ½\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\varepsilon^2\delta t$$

取极限，代换最后得到伊藤引理表达式：

Taking limits $$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial t}dt + ½\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2 dt$$

Substituting $$dx = a\,dt + b\,dz$$

We obtain $$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + ½\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}b\,dz$$

举例：在股价变化中，一个合同中止时间为T:

G = S*e^(r(T-t))

dG = (μ-r)G dt + σG dz

Summarize:

随机过程 + 未来与历史无关 ----> 马尔科夫过程

马尔科夫过程 + 单位时间变化的期望服从标准正态分布 ----> 维纳过程

维纳过程 + 趋势项 ----> 广义维纳过程

广义维纳过程 + 两个系数都是变量和时间的函数 ----> 伊藤过程