

# MAT2500 - Prosjektoppgave

Jonas Folvik

22. november 2018

Når vi tenker på rotasjoner så kan man forestille seg et ark eller en mynt som snurrer flatt på et bord. Dette er eksempler på rotasjoner i to dimensjoner. Vi kan også forestille seg hjulene på en bil i bevegelse eller jorden som går rundt sola, dette er da eksempler på rotasjoner i tre dimensjoner. Hvis arket eller mynten som snurrer står stille på samme sted så blir et punkt, et 0 dimensjonalt objekt, holdt fast. Mens i tre dimensjonale rotasjoner så blir en linje, et 1 dimensjonalt objekt, holdt fast. På grunn av dette kan man finne ut at ved en rotasjon i et  $n$  dimensjonalt system, så vil man rotere rundt  $n - 2$  dimensjonale objekter. I den fjerde dimensjonen vil man da rotere rundt to dimensjonale objekter, bedre kjent som plan.

Rotasjons matrisen i to dimensjoner kan se slik ut:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Denne vil da holde fast, fikser, punktet  $(0, 0)$ , bedre kjent som Origo, mens alle andre punkter og vektorer, i planet, vil rotere med en vinkel  $\theta$ .

Et eksempel på en rotasjons matrise i tre dimensjoner er:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Denne vil fikser linjen som ligger på  $x_1$ -aksen, mens alle andre punkter og vektorer, i rommet, vil rotere med vinkel  $\theta$

**Teorem 1** Gitt et Euklidisk rom  $E$  av dimensjon  $n$ , for hver ortogonal lineær transformasjon  $f: E \rightarrow E$  fins det en ortonormal basis  $(e_1, \dots, e_n)$  slik at matrisen for  $f$  med hensyn på denne basis er en blokk diagonal matrise på formen:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \cdots & \\ & A_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \cdots & A_p \end{pmatrix}$$

slik at hver blokk  $A_i$  er enten 1,  $-1$  eller en to-dimensjonal matrise på formen:

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$$

hvor  $0 < \theta_i < \pi$

Et eksempel på en rotasjons matrise i 4 dimensjoner er:

$$R_{\phi, \theta} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Denne typen rotasjoner blir ofte kalt for en dobbel rotasjon, da man roterer rundt to plan. I dette eksempelet roterer vi om  $x_1x_2$ -planet med vinkel  $\phi$  og vi roterer om  $x_3x_4$ -planet med vinkel  $\theta$ . Hvis  $\phi = \theta \neq 0$  i en dobbel rotasjon så kalles det for en isoklinisk rotasjon. Hvis vi setter  $\phi = 0$  i dobbel rotasjonen så får vi matrisen for  $R_\theta$ . Når vi setter  $\phi = 0$  så får vi matrisen:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Denne rotasjonen fikserer  $x_1x_2$ -planet og roterer  $x_3x_4$ -planet med vinkel  $\theta$ . Dette er et eksempel på en rotasjon som kalles for en enkel rotasjon.

For at en ortogonal operator  $T$  skal være en rotasjon, så må den være orienteringsbevarende. Det vil si at:  $\det(T) = 1$

Sjekker om det stemmer for en dobbel rotasjon og en enkel rotasjon. Bruker  $R_{\phi, \theta}$  og  $R_\theta$ :

$$\det(R_{\phi, \theta}) = \cos(\phi)^2(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2) + \sin(\phi)^2(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2) = \cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2 = 1$$

$$\det(R_\theta) = \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$$