MAT2500 - Prosjektoppgave

Jonas Folvik

20. november 2018

I 2 dimensjoner roterer vi om et 0 dimensjonalt objekt, et punkt. I 3 dimensjoner roterer vi om et 1 dimensjonalt objekt, en linje. I 4 dimensjoner roterer vi om et 2 dimensjonalt objekt, et plan. Det er også mulig å rotere rundt 2 plan, bedre kjent som en dobbel rotasjon.

En av matrisene for en enkel rotasjon, hvor man roterer om 1 plan og holder 1 plan fast, kan se slik ut:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

En av matrisene for en dobbel rotasjon, hvor man roterer rundt 2 plan, kan se slik ut:

$$R_{\phi,\theta} = \begin{pmatrix} cos(\phi) & -sin(\phi) & 0 & 0 \\ sin(\phi) & cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Hvis $\phi = \theta \neq 0$ i en dobbel rotasjon så kalles det for en isoklinisk rotasjon. Hvis vi setter $\phi = 0$ i dobbel rotasjonen så får vi matrisen for R_θ

For at en ortogonal operator T skal være en rotasjon, så må den være orienteringsbevarende. Det vil si at: $det(T) = 1$

Sjekker om det stemmer for både en enkel rotasjon og en dobbel rotasjon.

Enkel rotasjon:

$$det(R_\theta) = cos(\theta)^2 + sin(\theta)^2 = 1$$

Dobbel rotasjon:

$$det(R_{\phi,\theta}) = cos(\phi)^2(cos(\theta)^2 + sin(\theta)^2) + sin(\phi)^2(cos(\theta)^2 + sin(\theta)^2) = cos(\phi)^2 + sin(\phi)^2 = 1$$

Egenverdiene til en dobbel rotasjon er:

$$cos(\phi) + isin(\phi) = e^{i\phi}$$
$$cos(\phi) - isin(\phi) = e^{-i\phi}$$
$$cos(\theta) + isin(\theta) = e^{i\theta}$$
$$cos(\theta) - isin(\theta) = e^{-i\theta}$$

En operator T er i $SO(4)$ hvis og bare hvis T er en rotasjon.

Viser det for enkel rotasjoner.

I en bestemt basis er matrisen til en enkel rotasjon gitt ved R_θ som er ortogonalk med determinant 1. Dvs at alle enkel rotasjoner er i $SO(4)$. For å vise den andre implikasjonen la A være standarmatrisen til T. Da er $A^tA = I$ og $detA = detA^t = 1$. Vi vil først vise at A har 1 som egenverdi, som er det samme som å vise at $det(A - I) = 0$. Merk at $A^t(A - I) = (I - A^t) = (I - A)^t$. Vi har

$$det(A - I) = det(A^t)det(A - I) = detA^t(A - I) = det(I - A^t) = det(-(A^t - I))$$

Men hvis B er en 4×4 matrise så er $det(-B) = -detB$. Derfor må $det(A - I) = 0$.

Velg en egenvekor v_1 for egenverdien 1 med $||v_1|| = 1$. Velg en ortonormal basis $\{v_2, v_3, v_4\}$ for rommet gjennom origo som er ortogonal til v_1. Da blir $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ en ortonormal basis for $\mathbb{R}^4$ og hvis P er matrisen med søyler v_1, v_2, v_3, v_4 så er P ortogonal. Da må $A' = P^{-1}AP$ også være ortogonal med $detA' = detA = 1$. Nå er

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & d & e & f \\ 0 & g & h & i \end{pmatrix}$$

Der $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ må være en ortogonal 3×3 matrise med determinant 1. Men da sier Setning 3.4 [1] at

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

for en θ og vi har vist at T er en enkel rotasjon.

Viser det for en dobbel rotasjon.

Referanser

[1] Kristian Ranestad Jan Arthur Christophersen. *Geometri - MAT2500*. 2017.