

MAT2500 - Prosjektoppgave

Jonas Folvik

12. november 2018

I 2 dimensjoner roterer vi om et 0 dimensjonalt objekt, et punkt. I 3 dimensjoner roterer vi om et 1 dimensjonalt objekt, en linje. I 4 dimensjoner roterer vi om et 2 dimensjonalt objekt, et plan. Det er også mulig å rotere rundt 2 plan, bedre kjent som en dobbel rotasjon.

En av matrisene for en enkel rotasjon, hvor man roterer om 1 plan og holder 1 plan fast, kan se slik ut:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

En av matrisene for en dobbel rotasjon, hvor man roterer rundt 2 plan, kan se slik ut:

$$R_{\phi,\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

For at en ortogonal operator T skal være en rotasjon, så må den være orienteringsbevarende, $\det(T) = 1$

Sjekker om det stemmer for både en enkel rotasjon og en dobbel rotasjon.

Enkel rotasjon:

$$\det(R_\theta) = \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$$

Dobbel rotasjon:

$$\det(R_{\phi,\theta}) = \cos(\phi)^2(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2) + \sin(\phi)^2(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2) = \cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2 = 1$$

En operator T er i $SO(4)$ hvis og bare hvis T er en rotasjon.

Viser det for enkel rotasjoner.

I en bestemt basis er matrisen til en enkel rotasjon gitt ved R_θ som er ortogonalk med determinant 1. Dvs at alle enkel rotasjoner er i $SO(4)$. For å vise den andre implikasjonen la A være standardmatrisen til T . Da er $A^t A = I$ og $\det A = \det A^t = 1$. Vi vil først vise at A har 1 som egenverdi, som er det samme som å vise at $\det(A - I) = 0$. Merk at $A^t(A - I) = (I - A^t) = (I - A)^t$. Vi har

$$\det(A - I) = \det(A^t) \det(A - I) = \det A^t (A - I) = \det(I - A^t) = \det(-(A^t - I))$$

Men hvis B er en 4×4 matrise så er $\det(-B) = -\det B$. Derfor må $\det(A - I) = 0$.

Velg en egenvektor v_1 for egenverdien 1 med $\|v_1\| = 1$. Velg en ortonormal basis $\{v_2, v_3, v_4\}$ for rommet gjennom origo som er ortogonal til v_1 . Da blir $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ en ortonormal basis for \mathbb{R}^4 og hvis P er matrisen med søyler v_1, v_2, v_3, v_4 så er P ortogonal. Da må $A' = P^{-1}AP$ også være ortogonal med $\det A' = \det A = 1$. Nå er

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & d & e & f \\ 0 & g & h & i \end{pmatrix}$$

Der $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ må være en ortogonal 3×3 matrise med determinant 1. Men da sier Setning 3.4 at

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

for en θ og vi har vist at T er en rotasjon.