MAT2500 - Prosjektoppgave

Jonas Folvik

27. november 2018

Når vi tenker på rotasjoner så kan man forestille seg et ark eller en mynt som snurrer flatt på et bord. Dette er eksempler på rotasjoner i to dimensjoner. Vi kan også forestille seg hjulene på en bil i bevegelse eller jorden som går rundt sola, dette er da eksempler på rotasjoner i tre dimensjoner. Hvis arket eller mynten som snurrer står stille på samme sted så blir et punkt, et 0 dimensjonalt objekt, holdt fast. Mens i tre dimensjonale rotasjoner så blir en linje, et 1 dimensjonalt objekt, holdt fast. På grunn av dette kan man finne ut at ved en rotasjon i et n dimensjonalt system, så vil man rotere rundt $n-2$ dimensjonale objekter. Ut ifra denne informasjon så kan vi vise at i fire dimensjonale rotasjoner så roterer man rommet rundt to dimensjonale objekter.

I denne oppgaven vil jeg bevise hvordan oppbyggingen til en rotasjons matrise er og beskrive enkelt rotasjoner i to og tre dimensjoner, før jeg beskriver litt mer detaljert om rotasjoner i fire dimensjoner.

Teorem 1 *Gitt et Euklidisk rom E av dimensjon n, for hver ortogonal lineær transformasjon $f\colon E \to E$ fins det en ortonormal basis $(e_1, \ldots, e_n)$ slik at matrisen for f med hensyn på denne basisen er en blokk diagonal matrise på formen:*

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \cdots & \\ & A_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \cdots & A_p \end{pmatrix}$$

slik at hver blokk A_i er enten 1, -1 eller en to-dimensjonal matrise på formen:

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$$

hvor $0 < \theta_i < \pi$. Spesielt, så er egenverdiene av $f_{\mathbb{C}}$ på formen: $\cos\theta_i \pm i\sin\theta_i$, 1, eller -1. [2]

Bevis. Tilfellet når $n = 1$ er trivielt. Som i beviset for teorem 11.2.9 [2], har $f_{\mathbb{C}}$ en egenverdi $z = \lambda + i\mu$, hvor λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Siden $f \circ f^* = f^* \circ f = id$, så er transformasjonen f invertibel. Faktisk så har egenverdiene til f en absolutt verdi lik 1. Hvis $z \in \mathbb{C}$ er en egenverdi for f, og u er en egenvektor for z, har vi:

$$\langle f(u), f(u)\rangle = \langle zu, zu\rangle = z\bar{z}\langle u, u\rangle$$

og

$$\langle f(u), f(u)\rangle = \langle u, (f^* \circ f)(u)\rangle = \langle u, u\rangle$$

fra dette så får vi at:

$$z\bar{z}\langle u, u\rangle = \langle u, u\rangle$$

Siden $u \neq 0$, har vi $z\bar{z} = 1$, som vil si at $|z| = 1$. Som en konsekvens av dette så er egenverdiene av $f_{\mathbb{C}}$ på formen: $\cos\theta_i \pm i \sin\theta_i$, 1, eller -1. Teoremet følger da umiddelbart fra teorem 11.2.9 [2], hvor betingelsen $\mu > 0$ impliserer at $\sin\theta_i > 0$, og dermed, $0 < \theta_i < \pi$. □

Ut ifra dette teoremet så kan vi vise at en rotasjons matrise for to dimensjoner kan skrives som dette:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Denne rotasjons matrisen vil fiksere punktet $(0, 0)$, Origo, og rotere alle andre punkter om origo med vinkel θ. Vi kan vise dette ved å multiplisere matrisen med et punkt $p = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$. Vi får da at:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta) \\ x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Her ser vi at det eneste punktet som ikke blir rotert er origo, $(0, 0)$.

Vi kan også vise at en rotasjons matrise i tre dimensjoner kan se ut som denne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Denne vil da fiksere linjen som ligger på x_1-aksen og alle andre punkter vil rotere rundt den linjen med vinkel θ. Vi kan sjekke om dette stemmer ved å multiplisere med et vilkårlig punkt $p = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$. Vi får da at:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \cos(\theta) - x_3 \sin(\theta) \\ x_2 \sin(\theta) + x_3 \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Her ser vi at uansett hva punktet p er så vil ikke x_1-koordinaten endre seg, dermed vil alle punktene langs x_1-aksen være fiksert.

Rotasjoner i fire dimensjoner er litt mer spesielle, da man roterer rundt forskjellige plan. Det finnes to forskjellige typer rotasjoner. Det er mulig å rotere rundt to plan og rundt et plan. Roterer man rundt et plan så kalles det for en enkel rotasjon og roterer man rundt to plan kalles det for en dobbel rotasjon. En av rotasjons matrisene til en dobbelrotasjon kan se slik ut:

$$R_{\phi,\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{pmatrix}$$

I dette eksempelet roterer vi om x_1x_2-planet med vinkel ϕ og vi roterer om x_3x_4-planet med vinkel θ La oss sjekke hva som vil bli fiksert under en dobbel rotasjon. Vi velger et vilkårlig punkt $p = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right)$. Vi får da at:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos(\theta_1) - x_2\sin(\theta_1) \\ x_1\sin(\theta_1) + x_2\cos(\theta_1) \\ x_3\cos(\theta_2) - x_4\sin(\theta_2) \\ x_3\sin(\theta_2) + x_4\cos(\theta_2) \end{pmatrix}$$

Her ser vi at det eneste punktet som blir fiksert er punktet $(0, 0, 0, 0)$, også kjent som origo.

Hvis $\theta_1 = \theta_2 \neq 0$ i en dobbel rotasjon så kalles det for en isoklinisk rotasjon. Det finnes to typer isokliniske rotasjoner, hvor disse typene er venstre-isoklinisk, det vil si at $\theta_1 = \theta_2$. Man kan også ha høyre-isoklinisk rotasjon hvor $\theta_1 = -\theta_2$. [3]. Isokliniske rotasjoner har noen spesielle egenskaper som er [3]:

1. Sammensetningen av to høyre- (venstre-) isokliniske er en høyre- (venstre-) isoklinisk rotasjon.
2. Sammensetningen av en høyre- og en venstre-isoklinisk rotasjon er kommunativ.
3. Hvilken som helst fire dimensjonal rotasjon kan dekomponeres til sammensetningen av en høyre- og en venstre-isoklinisk rotasjon.

Matrisen til en venstre-isoklinisk rotasjon hvor $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, vil se ut som dette:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Matrisen til en høyre-isoklinisk rotasjon, hvor $\theta_1 = -\theta_2$, vil se ut som dette:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{pmatrix}$$

Hvis vi setter $\phi = 0$ i en dobbel rotasjonen, for eksempel i $R_{\phi,\theta}$, så får vi matrisen for R_θ.

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Denne rotasjonen fikserer x_1x_2-planet og roterer x_3x_4-planet med vinkel θ. Dette er et eksempel på en enkel rotasjon. Vi kan se at x_1x_2-planet blir fiksert, da de to koordinatene ikke vil endres ved en rotasjon.

Fram til nå har vi bevist oppbyggingen til en rotasjons matrise og vist hva som blir fiksert under en rotasjon i to, tre og fire dimensjoner. VI har fram til nå antatt at matrisene vi har oppgitt er rotasjons matriser. For å bevise at det faktisk er en rotasjons matrise, kan vi sjekke at de har determinant lik 1.[1]

Sjekker om det stemmer for en dobbel rotasjon og en enkel rotasjon. Bruker $R_{\phi,\theta}$ og R_θ:

$$\det(R_{\phi,\theta}) = \cos^2(\phi)(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + \sin^2(\phi)(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1$$

$$\det(R_\theta) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Her ser vi at determinanten til begge matrisene er lik 1 og oppbyggingen av matrisene stemmer overens med Teorem 1. Det vil da si at begge matrisene er rotasjoner.

Referanser

[1] Jan Arthur Christophersen og Kristian Ranestad. *Geometri - MAT2500*. 2017.

[2] Jean Gallier. *Geometric methods and applications : for computer science and engineering*. 2011.

[3] Alba Perez-Gracia og Frederico Thomas. "On Cayley's Factorization of 4D Rotations and Applications". 2010.