从零开始学数学建模

多目标规划

主讲人：北海

b站/公众号：数学建模BOOM

多目标规划

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

多目标规划

❑模型简介

- ❑ 本质：既要XXX，又要XXX
- ❑ 回顾：(非)线性规划都是一个目标函数，例如工业生产产品，追求最大化利润等等。
- ❑ 例如：某工厂生产产品I和产品II，有关数据如下，若只追求最大化利润，得到模型：

	I	II	拥有量
原材料/ kg	2	1	11
设备生产能力/ h	1	2	10
利润/(万元/件)	8	10	

$$\max z = 8x_1 + 10x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 11 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 10 \\ x_1, x_2 \geqslant 0。\end{cases}$$

- ❑ 多目标：现在设有**3个目标**：
  - 1.尽量使产品I的产量不超过产品II的产量；
  - 2.尽可能充分利用设备，但不希望加班
  - 3.尽可能使利润不少于56万

多目标规划

❑模型简介

- ❑ 多目标：现在设有**3个目标**：
  - 1.尽量使产品I的产量不超过产品II的产量；
  - 2.尽可能充分利用设备，但不希望加班
  - 3.尽可能使利润不少于56万

	I	II	拥有量
原材料/ kg	2	1	11
设备生产能力/ h	1	2	10
利润/(万元/件)	8	10	

- ❑ 翻译翻译
  - 目标1是“**不超过**”，也就是尽量“≤”
  - 目标2是“**充分利用又不加班**”，也就是尽量“=”
  - 目标3是“**不少于**”，也就是尽量“≥”
  - “尽可能”的意思是，能满足最好
  - 若满足不了，就要在多个目标中做出取舍
  - 隐藏条件：原材料有限，生产总消耗无法超出原材料

多目标规划

❑模型简介

❑ 解题思路

- 需要衡量每个目标的**完成情况**；
- 如果三个目标有一定**冲突**，要在主观上区分三个目标的**重要性；**
- 使得**整体的完成情况**尽量好。

❑ 多目标规划难在哪?

- 极端例题：尽量保证每天吃的肉不少5斤，且尽可能保持体重在100斤以下
- “既要”“又要”，但有时难以同时满足所有目标

❑模型简介

- 如何**衡量**每个目标的**完成情况**
  - 正偏差变量 $d_i^+ = \max\{f_i - d_i^0, 0\}$ 为实际值**超过**目标值的部分
  - 负偏差变量 $d_i^- = -\min\{f_i - d_i^0, 0\}$ 为实际值**未达到**目标值的部分
  - 第3个目标要求**不少于**目标值，意味着负偏差变量 d_3^- 越小越好
- 约束**必须满足么**?
  - 生产用的原材料用完了就没了，所以“原材料有限”为**绝对约束**，必须满足
  - 有些目标例如**尽可能**使利润不少于56万，对追求的目标值允许有偏差，称为**目标约束**
- 目标太多，难以都满足，应该**先满足谁**?
  - 多个目标**可能难以同时满足**，到底**哪个更重要**？需要**确定优先因子**P_k
- 模型建立的基本原理：将目标约束转化为偏差变量表示的目标函数和等式约束

$$8x_1 + 10x_2 \geqslant 56 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \min P_3 d_3^- \\ 8x_1 + 10x_2 + d_i^- - d_i^+ = 56 \end{cases}$$

- 课程第三部分会详细讲解每个概念的意义和模型原理的推导，并应用到例题

多目标规划

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

多目标规划

❑适用赛题

❑ 生产规划：使XXX最少/多/利润最大，且尽可能XXX，尽量XXX，在...基础上优化XXX;

问题 1：针对**附件**中给出的指导生产量制定出未来八圈的详细喷涂排序计划，要求为了降低生产成本尽量减少换色的次数，并尽可能满足指导生产量的需求（超过计划生产量的产出是允许的，但不会带来额外的直接收益）。请在论文中列出第一圈的喷涂计划结果如表 1 所示，并统计出平均每圈的换色次数以及未满足生产需求的零件个数。完整八圈的喷涂计划请在附录中给出。

问题 2：由于零件与支架为一一对应关系，若相同编号滑橇上摆放的零件种类在不同圈次计划中发生变化，需要人工更换对应支架，为减少人力负担，希望圈与圈之间更换的支架总数尽量少，在问题 1 既有优化目标的基础上该如何优化排产方案？请在论文中列出第一圈的喷涂计划结果，并统计出平均每圈的换色次数、未满足生产需求的零件个数、以及平均每圈更换支架的个数。完整八圈的喷涂计划请在附录中给出。

多目标规划

❑适用赛题

❑ 生产规划：使XXX最少/多/利润最大，且尽可能XXX，尽量XXX，在...基础上优化XXX;

问题 2： 针对给出的所有原料，请使用最少张数的原材料，满足对所有订单的要求（不考虑浮动比例），同时尽量提高总的成材率，给出切割方案。

问题 3： 圆盘剪每次排刀需要人工更换刀在排刀架上的位置，同时若有材料需要被移到小机器上再次切割也需要人为操作。为减少人力成本，希望尽量减少换刀数和在小机器上切割数。

针对给出的所有原料，请使用最少张数的原材料，满足对所有订单的要求（不考虑浮动比例）。同时尽量减少换刀数和在小机器上切割数，并尽量提高总的成材率。给出切割方案。

多目标规划

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

多目标规划

❑典型例题

❑ 某工厂生产产品I和产品II，有关数据如下，

- 1.尽量使产品I的产量不超过产品II的产量；
- 2.尽可能充分利用设备，但不希望加班
- 3.尽可能使利润不少于56万

	I	II	拥有量
原材料/ kg	2	1	11
设备生产能力/ h	1	2	10
利润/(万元/件)	8	10	

❑ 需要衡量每个目标的**完成情况**，并区分三个目标的**重要性**，使得**整体的完成情况**尽量好

- 引入三个概念：正负偏差变量，绝对约束和目标约束，优先因子

多目标规划

❑三个概念

❑ 概念一：正负偏差变量，衡量每个目标的**完成情况**

- 设 $f_i(i=1,\cdots,l)$ 为第 i 个目标函数实际值，d_i^0 表示 f_i 的目标值，本题d_3^0=56
- 正偏差变量 $d_i^+=\max\{f_i-d_i^0,0\}$ 为实际值超过目标值的部分
- 负偏差变量 $d_i^-=-\min\{f_i-d_i^0,0\}$ 为实际值未达到目标值的部分

目标函数实际值f_3	目标值d_3^0	正偏差变量d_3^+	负偏差变量d_3^-	意义
假设利润50万	不少于56万	0	6	离目标差6万
假设利润60万		4	0	超出目标4万

❑ 该目标是“尽可能使利润**不少于**56万”，超了好还是差了好？当然**超了好**！而且超再多也不怕

- 即正偏差变量是多少，都无所谓；
- 而该目标追求“尽量不少于”，意味着负偏差变量 $\boldsymbol{d_3^-}$ 越小越好

多目标规划

❑根据偏差变量写出目标函数

❑ 目标函数

- 第1个目标要求不超过目标值，意味着正偏差变量 d_1^+ 越小越好
- 利用优先因子，从题目要求的目标3中获得目标函数：

$$\boxed{x_1 - x_2 \leqslant 0} \rightarrow \boxed{min\ d_1^+}$$

- 第3个目标要求不少于目标值，意味着负偏差变量 d_3^- 越小越好
- 利用优先因子，从题目要求的目标3中获得目标函数：

$$\boxed{8x_1 + 10x_2 \geqslant 56} \rightarrow \boxed{min\ d_3^-}$$

- 此处应记得定义：正偏差变量 $d_i^+ = \max\{f_i - d_i^0, 0\}$ 和负偏差变量 $d_i^- = -\min\{f_i - d_i^0, 0\}$
- 其中的f_i就是目标函数的实际值，根据题目，$f_1 = x_1 - x_2$，$f_3 = 8x_1 + 10x_2$

多目标规划

❑目标下的子目标

❑ 第2个目标的子目标

- 第2个目标中其实包含两个子目标：“充分利用设备”和“不希望加班”
- 正偏差变量d_2^+代表加班时间，负偏差变量d_2^-代表没有充分利用设备的时间

- “充分利用设备”意味着总生产时间不少于10，即$x_1+2x_2\geqslant 10$
- “不希望加班”意味着总生产时间不大于10，即$x_1+2x_2\leqslant 10$
- 同时满足这两条，就是对这两个子目标**取交集**，所以**目标2写做**：$x_1+2x_2=10$

- 所以第2个目标要求**等于**目标值，意味着**正负**偏差**都尽量小**
- 利用优先因子，从题目要求的目标2中获得目标函数：

$$\boxed{x_1+2x_2=10} \Longrightarrow \boxed{min\ (d_2^- + d_2^+)}$$

❑子目标权重

❑ 第2个目标细化

- 上一页中，目标函数$min\ (d_2^- + d_2^+)$是基于目标2中的两个子目标重要性相同的前提
- 现实中，“充分利用设备”和“不希望加班”还是存在**重要性**的差别

- **假如**题目中提到“近期订单较多”之类的语句，那么“不希望加班”的重要性就较低
- 此时可给d_2^-和d_2^+再分别赋权重，称为权系数，以区分重要性，例如目标函数改为：

$$\boxed{min\ (2d_2^- + d_2^+)}$$

- 意味着“不加班”的重要性较低，让步于“充分利用设备”
- 本课程例题不考虑该类情况，依旧使用$min\ (d_2^- + d_2^+)$

- **补充**：类似的情况，比如在销售时有“尽量把所有产品都卖完”的目标，但不同产品利润不一样，现实中当然是先尽量把利润高的卖完，这种目标就可根据利润比来给同一个目标下的不同偏差变量设定权重。

多目标规划

❑根据目标约束，获得等式约束条件

❑ 概念二：绝对约束和目标约束

- **绝对约束**是模型中自带的约束条件，**必须满足**，否则是不可行解
- 例如$2x_1 + x_2 \leqslant 11$，使用材料的数量不能超过总量（总不能凭空变出来材料吧）

❑ **目标约束**是模型中对不等式右端追求的值允许有偏差

- 以目标3为例：**尽可能**使利润不少于56万，也就是$z = 8x_1 + 10x_2 \geqslant 56$
- “尽可能”三个字意味着允许有偏差，也就是多于56或少于56都行
- **“偏差”就是加入正负偏差变量**，变成：$8x_1 + 10x_2 + d_i^- - d_i^+ = 56$
- 利用正负偏差变量，从目标3中获得等式约束条件

$$\boxed{z = 8x_1 + 10x_2 \geqslant 56} \Rightarrow \boxed{8x_1 + 10x_2 + d_i^- - d_i^+ = 56}$$

❑ 利用实际值与目标值之间存在“偏差”，即正负偏差变量，**多退少补**

- 把目标函数中的**不等式**约束变成了**等式**约束
- **实际值加上未达到的部分、减去超过的部分，就等于目标值**

多目标规划

❑优先因子的概念

❑ 概念三：优先因子

- 三个目标：1.尽量使产品I的产量不超过产品II的产量；2.尽可能充分利用设备，但不希望加班； 3.尽可能使利润不少于56
- 这三者**可能难以同时满足**，到底**哪个更重要**?

- 例如，根据文献或题目要求等，目标1最重要，设最重要的目标的优先因子是P_1
- 目标2第二重要，设其优先因子是P_2
- 目标3第三重要，设其优先因子是P_3
- 那么三个目标重要性就是目标1>目标2>目标3

- **注意：** 不同的求解方法下，优先因子的作用是不同的
- 序贯算法中，优先因子只是用来区分目标的相对重要性，不需要其具体数值
- 而在线性加权法中，需要确定具体数值（该方法过于简单、适用性小，不建议使用）
- 序贯算法的具体操作会在第四部分代码求解时讲解

❑模型的建立

❑ 总结

- 题目：某工厂生产产品I和产品II，有关数据如下，有**3个目标：**
- 1.尽量使产品I的产量不超过产品II的产量；
- 2.尽可能充分利用设备且不加班；
- 3.尽可能使利润不少于56万

	I	II	拥有量
原材料/ kg	2	1	11
设备生产能力/ h	1	2	10
利润/(万元/件)	8	10	

❑ 解题基本步骤

- 根据目标约束写出等式约束条件；
- 根据正负偏差变量和优先因子，得到不同目标的目标函数；

目标	表达式	意义	目标函数	约束条件
1.尽量产品 I 产量不超过产品II	$x_1 - x_2 \leqslant 0$	正偏差变量 d_1^+ 越小越好	$min\ P_1 d_1^+$	$x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0$
2.尽可能充分利用设备且不加班	$x_1 + 2x_2 = 10$	正负偏差都尽量小	$min\ P_2(d_2^- + d_2^+)$	$x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10$
3.尽可能使利润不少于56万	$8x_1 + 10x_2 \geqslant 56$	负偏差变量 d_3^- 越小越好	$min\ P_3 d_3^-$	$8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56$

- 别忘了题目还有绝对约束：$2x_1 + x_2 \leqslant 11$，因为生产材料有限

多目标规划

❑模型的建立

目标	表达式	意义	目标函数	约束条件
1.尽量产品Ⅰ产量不超过产品Ⅱ	$x_1 - x_2 \leqslant 0$	正偏差变量 d_1^+ 越小越好	$min\ P_1 d_1^+$	$x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0$
2.尽可能充分利用设备且不加班	$x_1 + 2x_2 = 10$	正负偏差都尽量小	$min\ P_2(d_2^- + d_2^+)$	$x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10$
3.尽可能使利润不少于56万	$8x_1 + 10x_2 \geqslant 56$	负偏差变量 d_3^- 越小越好	$min\ P_3 d_3^-$	$8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56$

目标函数f_3	两种情况	目标值d_3^0	偏差变量定义	正偏差变量d_3^+	负偏差变量d_3^-	意义
$f_3 = 8x_1 + 10x_2$	假设利润50万	不少于56万	$d_i^+ = \max\{f_i - d_i^0, 0\}$	0	6	离目标差6万
	假设利润60万		$d_i^- = -\min\{f_i - d_i^0, 0\}$	4	0	超出目标4万

- 从而建立模型：

$$\min\ P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 11, \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0, \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10, \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56, \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geqslant 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

多目标规划

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

多目标规划

❑代码求解

❑ 求解多目标规划

- 通用解法：
- 根据优先因子的先后次序，将问题分解成单目标规划
- 三个目标，每个目标都可视为单目标的线性规划

$$\min\ P_1d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3d_3^-$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1 + x_2 \leqslant 11,\\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0,\\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10,\\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56,\\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geqslant 0, i = 1,2,3\end{cases}$$

❑ 常用解法：序贯算法

- 根据模型中各个目标的优先级（优先因子），确定各目标的求解次序
- 求第一级单目标规划的最优值记为f_1^*
- 以第一级单目标等于最优值f_1^*为新的约束，求第二级目标最优值，记为f_2^*
- 依次递推，直到所有目标都求完，或不存在可行解为止

❑ **接下来到matlab实时脚本文件multiple_target.mlx中详细讲解代码**

- 本节课程会讲解使用matlab的优化变量、优化问题来求解（本课程使用matlab 2020b）

❑ 多目标规划还涉及帕累托解等概念，以后会补充更新。小白先掌握本节课内容

❑代码分析

❑ **求第一级目标（i=1）时**

- 目标函数和约束条件，对于三个目标的偏差变量都没有约束
- 代码中用小于等于一个很大的数来表示。但既然说没有约束，那不写这三个约束不就行了么？
- 为的是后面有约束时**只要更新不等式右边的数值即可**，而不必增加新的约束，便于简化代码

$$
\begin{aligned}
&\min d_1^+\\
&d_1^+ \le 100000, d_2^- + d_2^+ \le 100000, d_3^- \le 100000,\\
&2x_1 + x_2 \le 11\\
&x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0\\
&x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10\\
&8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56\\
&x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3
\end{aligned}
$$

多目标规划

❑代码分析

❑ 求第二级目标（i=2）时

- 因为第一级求得最优值$d_1^+=0$，把该条作为新约束加入约束条件里
- 因为每一个目标都是最小化偏差变量，所以新加入的约束写作$d_1^+\leqslant 0$，等价于$d_1^+=0$
- 思考：为什么取“$\leqslant$”等价于“=”？既然等价，为什么不直接写$d_1^+=0$?
- 这样做是为了代码简洁统一，**只要更新不等式右边的数值即可**
- 此时的目标函数和约束条件：

$$
\begin{aligned}
&\min d_2^- + d_2^+\\
&d_1^+ \le 0, d_2^- + d_2^+ \le 100000, d_3^- \le 100000\\
&2x_1 + x_2 \le 11\\
&x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0\\
&x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10\\
&8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56\\
&x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3
\end{aligned}
$$

❑代码分析

❑ 求第三级目标（i=3）时

- 第二级求得最优解$d_2^- + d_2^+ = 0$，把该条加入约束条件里
- 与上一页所讲的一样，同样以小于等于代替等于
- 此时的目标函数和约束条件：

$$
\begin{aligned}
&\min d_3^- \\
&d_1^+ \le 0, d_2^- + d_2^+ \le 0, d_3^- \le 100000 \\
&2x_1 + x_2 \le 11 \\
&x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\
&x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\
&8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\
&x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1, 2, 3
\end{aligned}
$$

多目标规划

❑结果分析

❑ 求解结果

- 三级都求完了，迭代结束，求得满意解为$x_1 = 2, x_2 = 4$
- 在**优先考虑**尽量使产品I产量不超过产品II，**其次**尽可能充分利用设备且不加班，**最后**尽可能使利润不少于56万**的情况下**，应该安排每天生产2台设备I，4台设备II。

- 注意多目标规划求得的叫做“满意解”而不是“最优解”
- 多目标规划没有最优的概念
- 因为在求解过程中，三个目标的重要性的设定是具有主观性的
- 假如改变三个目标的重要性排序，那么求解结果也会变

多目标规划

❑写出你的笔记

❑ 费曼学习法

- 费曼学习法：以教代学
- 只有当你能够教会别人，才代表你真正学会了！

费曼学习法

1. 确定主题开始学习
2. 理解所学内容
3. 把所学内容讲给别人
4. 把讲不清楚的地方去学明白

❑ 有奖征集：每学完一期课程，整理笔记，发布在各平台

- 将你每节课所学到的，整理出一套笔记
- 尽量不要照搬或截图课程的内容
- 可自行发布在知乎/CSDN等等各类平台

- 符合以下要求的文章，且文章点赞超过100或浏览量超1万的，可获取半价退款奖励（联系北海的QQ：1980654305 ）
- 1、标题设为：XXXX（模型或算法）——北海数学建模课程笔记
- 2、文章首行写：本文为北海的数模课程学习笔记，课程出自微信公众号：数学建模BOOM。

- “从零开始学数学建模”系列课程
  - 本期课程视频出自b站up：数学建模BOOM
  - 全套课程请关注微信公众号：数学建模BOOM，回复“课程”

END