从零开始学数学建模

微分方程传染病预测模型

主讲人：北海

b站/公众号：数学建模BOOM

微分方程传染病预测模型

- 指数传播模型与SI模型
- SIS模型与SIR模型
- 代码求解微分方程数值解

微分方程传染病预测模型

❑从最简单的指数传播模型说起

❑ 传染病预测问题

- 不同类型传染病的发病机理和传播途径各有特点
- 有的传染病，在得过一次后可获得**免疫力**，但有的则不会
- 有的传染病具有**潜伏期**，有的则没有
- 需要对不同类型的传染病建立相应合适的预测模型

❑ 从最简单的看起：**指数传播模型**

1. 假设所研究的区域是封闭区域，在一定时期内人口总量不变，不考虑迁入和迁出
2. 在t时刻患病人数$N(t)$是随时间连续变化的、可微的函数
3. 每个病人在单位时间内会传染到的人数为大于0的常数λ

❑ 本期课程重点：模型假设与模型改进的思想

微分方程传染病预测模型

❑指数传播模型

❑ 模型的建立

- 设$N(t)$为t时刻患病人数，则$t+\Delta t$时刻的患病人数为$N(t+\Delta t)$
- 则从$t \to t+\Delta t$时间内，净增的患病人数为$N(t+\Delta t)-N(t)$
- 根据假设3（每个病人在单位时间内会传染到的人数为大于0的常数λ），有：

$$\boxed{N(t+\Delta t)-N(t)=\lambda N(t)\Delta t}$$

- 注意，λ在模型中始终是常数（每个病人在单位时间内会传染到的人数）

❑ 微分方程

- 基于上一页的第2条模型假设，在上面公式等号两边同时除以Δt，并令$\Delta t \to 0$
- 可得微分方程：

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dN(t)}{dt}=\lambda N(t), \quad t>0 \\ N(0)=N_0 \end{cases}}$$

- 可求得该模型的解析解：$N(t)=N_0\, e^{\lambda t}$

微分方程传染病预测模型

❑指数传播模型

❑ 结果分析

- 模型结果显示，患病人数是**指数型增长**的
- 该模型一般适用于**传染病暴发初期**

$$\boxed{N(t) = N_0\, e^{\lambda t}}$$

- 因为在初期，传染源和传染途径往往未知，难以防范
- 但是按照该模型，$t \to \infty$时$N(t) \to \infty$，这显然是不符合实际的

❑ 模型改进

- 封闭区域内人数有限，当患病人数越来越多时，健康人群的数量也就越来越少
- 那么单位时间内新增的人数（$N(t)$ 的导数）也会减少，毕竟没多少人可以被感染了

- 基于以上分析，对模型进行改进，建立**SI模型**

微分方程传染病预测模型

❑SI模型

❑ 模型假设

1. **人口总数**：所研究的区域内人口总数为**常数N**，既不考虑生死，也不考虑迁移
2. **两类人群**：人群分为易感染者（susceptible）和已感染者（infective），设t时刻两类人群在总人口中所占的**比例**分别为$s(t)$和$i(t)$，显然$s(t)+i(t)=1$
3. **日感染率**：每个病人在单位时间（每天）内**接触**的平均人数为**常数λ**，称为**日感染率**；当病人所接触的是健康者时，会将其感染成病人
4. **不考虑治愈**：每个病人得病后在传染期内无法治愈，且不会死亡

❑ 注意事项

- 现实中，地区人数并不会真的为常数，总有出生率、死亡率、迁入和迁出等
- 但如果把这些因素考虑进模型，模型会非常复杂；而本题重心是传染病
- 再次强调**模型假设的目的：简化问题**

微分方程传染病预测模型

❑SI模型

❑ 模型建立

- 细节：第3条假设中λ是1个病人单位时间接触的平均人数，接触的人中既有病人也有健康者
- 则1个病人单位时间内可使$\lambda s(t)$个健康者变为病人
- 在t时刻病人总数$Ni(t)$，Δt时间内会新增$\lambda s(t)Ni(t)\Delta t$个病人，则单位时间内新增病人数：

$$\frac{Ni(t+\Delta t)-Ni(t)}{\Delta t}=\lambda Ns(t)i(t)$$

- 令$\Delta t\rightarrow 0$，得微分方程

$$\frac{di(t)}{dt}=\lambda s(t)i(t)$$

- 根据第2条假设，由于$s(t)+i(t)=1$，所以可写作

$$\boxed{\frac{di(t)}{dt}=\lambda i(t)(1-i(t))}$$

微分方程传染病预测模型

❑SI模型

❑ 模型建立

- 设$t=0$时，患病人数占总人口的比例为$i(0)=i_0$，则SI模型：

$$\begin{cases} \dfrac{di(t)}{dt} = \lambda i(t)(1-i(t)), & t>0 \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

- 求解该微分方程，得

$$i(t)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{i_0}-1\right)e^{-\lambda t}}$$

- 该模型其实就是Logistic模型，$i(t)$是病人占总人口的比例，最大值为1，即当t→∞时，区域内所有人都被传染

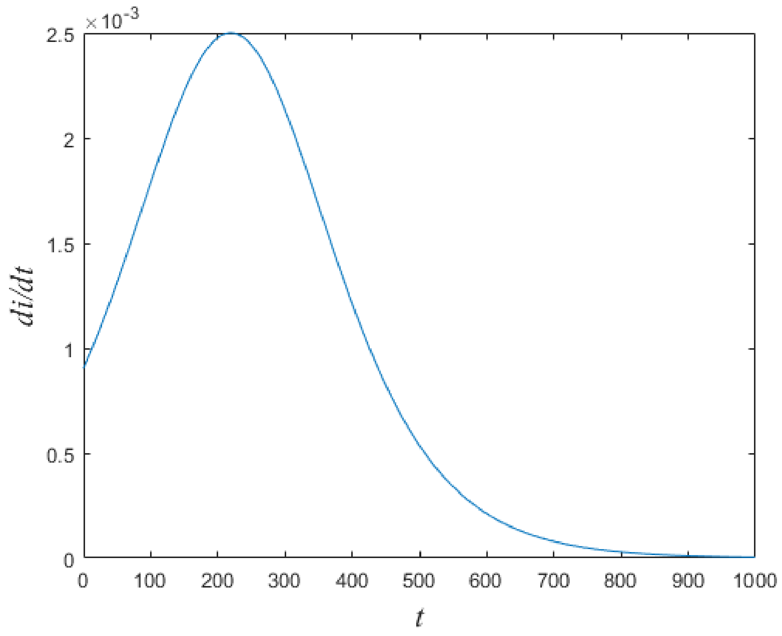
微分方程传染病预测模型

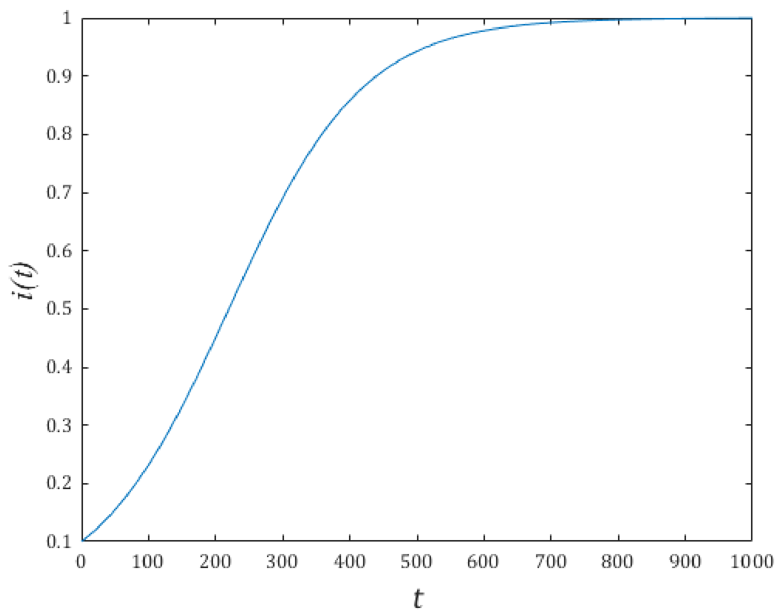
数学建模BOOM

❑SI模型

❑ 模型结果

- 医学上称$di(t)/dt$为传染病曲线，表示传染病人增加率与时间的关系，如左图所示
- 预测结果如右图所示，随着时间的推移，病人比例接近100%
- 当病人总量占总人口比值达到50%，即$i=0.5$时，$\frac{di}{dt}$达到最大值，此时为传染高峰期
- 根据$i(t)$的表达式，可得高峰期对应时刻：$t_m=\frac{1}{\lambda}ln\left(\frac{1}{i_0}-1\right)$





微分方程传染病预测模型

❑SI模型

❑ 结果意义

- 高峰期对应时刻：$t_m = \frac{1}{\lambda} ln\left(\frac{1}{i_0} - 1\right)$，医学上该结果具有重要意义
- 提前预防：若已知日接触率λ（统计调查等），可预测高峰期到来的时间t_m，做好应对准备
- 由于t_m与λ成反比，若能减小λ（隔离、戴口罩等），则t_m将变大
- 也就意味着传染病高峰期来得越晚，现实中可能在高峰期到来之前就彻底解决了该传染病

- 注意：比赛时需要根据数学结果，分析求解结果的现实意义，写进论文

- 但SI模型中未考虑病人得病后可以治愈，$t \to \infty$时$i(t) \to 1$，即最后所有人都被传染
- 问题源自模型假设中只有健康者变为病人，但病人不会变为健康者，显然不合理
- 进一步分析问题，可建立SIS模型

微分方程传染病预测模型

- 指数传播模型与SI模型
- SIS模型与SIR模型
- 代码求解微分方程数值解

微分方程传染病预测模型

❑SIS模型

❑ 模型改进

- SI模型中未考虑病人得病后可以治愈，$t \to \infty$时$i(t) \to 1$，即最后所有人都被传染
- 问题源自模型假设中只有健康者变为病人，但病人不会变为健康者，显然不合理
- 因此，**需要同时考虑传染和治愈**
- 基于以上分析，对模型进行改进，建立SIS模型

❑ SIS模型

- SIS模型在SI模型假设的基础上，进一步假设：

1、治愈比例：每天被治愈的病人人数占病人总数的比例为μ

2、无免疫性：病人被治愈后成为仍可被感染的健康者

- 得到SIS模型：

$$\begin{cases} \dfrac{di(t)}{dt} = \lambda i(t)\big(1 - i(t)\big) - \mu i(t), \quad t > 0, \\ i(0) = i_0. \end{cases}$$

- 可见，SIS模型是比原SI模型多了一项“$-\mu i(t)$”

微分方程传染病预测模型

❑SIS模型

❑ SIS模型解析解

- 该模型的解析解为：

$$i(t)=\begin{cases}\left[\dfrac{\lambda}{\lambda-\mu}+\left(\dfrac{1}{i_0}-\dfrac{\lambda}{\lambda-\mu}\right)e^{-(\lambda-\mu)t}\right]^{-1}, & \lambda\neq\mu\\ \left(\lambda t+\dfrac{1}{i_0}\right)^{-1}, & \lambda=\mu\end{cases}$$

- 令$\sigma=\frac{\lambda}{\mu}$为**传染强度**（病人日接触率/病人每日被治愈比例）
- 带入上一页模型的公式，得微分方程和解析解：

$$\begin{cases}\dfrac{di}{dt}=-\lambda i\left[i-\left(1-\dfrac{1}{\sigma}\right)\right], & t>0\\ i(0)=i_0\end{cases}$$

$$i(t)=\begin{cases}\left[\dfrac{1}{1-\frac{1}{\sigma}}+\left(\dfrac{1}{i_0}-\dfrac{1}{1-\frac{1}{\sigma}}\right)e^{-\lambda\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)t}\right]^{-1}, & \sigma\neq1\\ \left(\lambda t+\dfrac{1}{i_0}\right)^{-1}, & \sigma=1\end{cases}$$

微分方程传染病预测模型

❑SIS模型

❑ 结果分析

- 根据解析解：

$$i(t)=\begin{cases}\left[\dfrac{1}{1-\frac{1}{\sigma}}+\left(\dfrac{1}{i_0}-\dfrac{1}{1-\frac{1}{\sigma}}\right)e^{-\lambda\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)t}\right]^{-1}, & \sigma\neq 1\\ \left(\lambda t+\dfrac{1}{i_0}\right)^{-1}, \sigma=1\end{cases}$$

- 当$t\to\infty$时，可得：

$$i(\infty)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{\sigma}, & \sigma>1,\\ 0, & \sigma\leq 1.\end{cases}$$

❑ 显然，**传染强度**$\sigma=\frac{\lambda}{\mu}$为一个阈值

- 若$\sigma\leq 1$，现实意义“病人日接触率≤病人每日被治愈比例”
- 即新增病人少于被治愈病人，那么随着$t\to\infty$，终所有病人都会被治愈

- 若$\sigma>1$，现实意义“病人日接触率>病人每日被治愈比例”
- 即新增病人多于被治愈病人，那么随着$t\to\infty$，总有一定比例的人口会被传染成病人

微分方程传染病预测模型

❑SIR模型

❑ 模型改进

- 上页分析是建立在假设“无免疫性：病人被治愈后成为仍可被感染的健康者”的基础上
- 进一步考虑现实中天花、麻疹、流感、肝炎等疾病经治愈后均有很强的免疫力
- 病愈后的人因已具有免疫力，既非易感染者也非病人（已感染者），即这部分人已退出感染系统，再也不会被感染成患者

- 因此，考虑免疫性，**改进为SIR模型**

❑ 模型假设

1、人群分**易染者**(Susceptible)、**病人**(Infective)和病愈后有免疫力而退出系统的**移出者**(Removal)
2、设任意时刻t，这三类人群占总人口的比例分别为$s(t)$，$i(t)$和$r(t)$。
3、病人的日接触率为λ，日治愈率为μ
4、人口总数N为固定常数，既不考虑生死，也不考虑迁移

微分方程传染病预测模型

❑SIR模型

❑ 模型的建立

- 对于全体人群： $s(t)+i(t)+r(t)=1$
- 对于移出者： $\boxed{N\frac{dr}{dt}=\mu N i(t)}$ ，即移出者人数的变化率是单位时间被治愈的患者数
- 对于患者： $\boxed{N\frac{di}{dt}=\lambda N s(t)i(t)-\mu N i(t)}$
- 对于健康者： $\boxed{N\frac{ds}{dt}=-\lambda N s(t)i(t)}$

微分方程传染病预测模型

❑SIR模型

❑ 模型的建立

- 根据以上分析，建立微分方程传染病预测SIR模型：

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda s(t)i(t) - \mu i(t) \\ \dfrac{ds}{dt} = -\lambda s(t)i(t) \\ \dfrac{dr}{dt} = \mu i(t) \\ i(0) = i_0,\ s(0) = s_0,\ r(0) = 0 \end{cases}$$

❑ 模型分析

- SIR模型形式是多个相互关联的系统变量之间的常微分方程组，属于典型的**系统动力学模型**
- 更复杂的情况，考虑有些传染病具有潜伏期，考虑一类人为潜伏者，建立SEIR模型
- 类似的问题：河流各类污染物质的耗氧、复氧、吸附、沉降等
- 该类问题往往难以求得精确的解析解，可以使用MATLAB求数值解

微分方程传染病预测模型

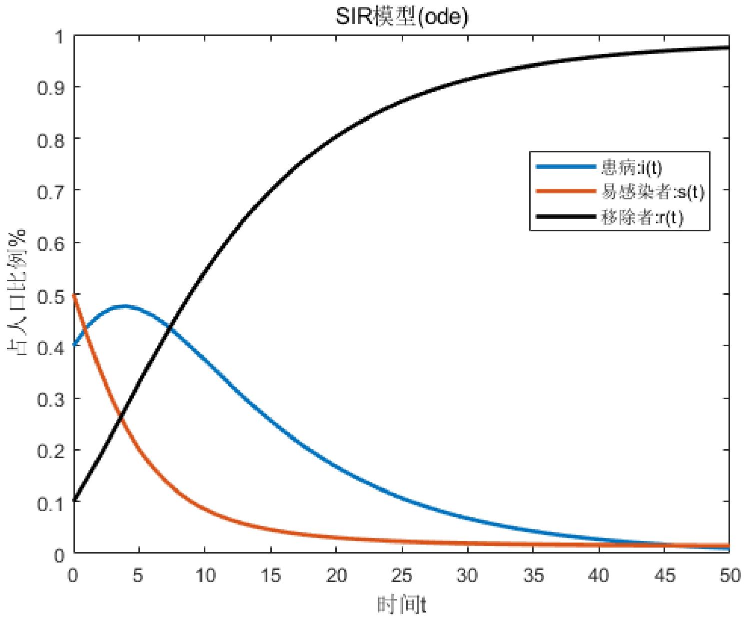
- 指数传播模型与SI模型
- SIS模型与SIR模型
- 代码求解微分方程数值解

微分方程传染病预测模型

❑代码求解

❑ 求解微分方程

- MATLAB提供了通用的求常微分方程数值解的函数ode45
- 基本语法：
- https://ww2.mathworks.cn/help/matlab/ref/ode45.html?s_tid=srchtitle_ode45_1#d123e934673
- 接下来到文件SIR.mlx中讲解课程
- 预测结果：



微分方程传染病预测模型

❑写出你的笔记

❑ 费曼学习法

- 费曼学习法：以教代学
- 只有当你能够教会别人，才代表你真正学会了！

❑ 有奖征集：每学完一期课程，整理笔记，发布在各平台

- 将你每节课所学到的，整理出一套笔记
- 尽量不要照搬或截图课程的内容
- 可自行发布在知乎/CSDN等等各类平台

- 符合以下要求的文章，且文章点赞超过100或浏览量超1万的，可获取半价退款奖励（联系北海的QQ：1980654305 ）
- 1、标题设为：XXXX（模型或算法）——北海数学建模课程笔记
- 2、文章首行写：本文为北海的数模课程学习笔记，课程出自微信公众号：数学建模BOOM。

- “从零开始学数学建模”系列课程
  - 本期课程视频出自b站up：数学建模BOOM
  - 全套课程请关注微信公众号：数学建模BOOM，回复“课程”

END

