从零开始学数学建模

线性规划

主讲人：北海

b站/公众号：数学建模BOOM

线性规划

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

线性规划

❑ 优化类问题：有限的资源，最大的收益

❑ 简单例子

- 华强去水果摊找茬，水果摊上共3个瓜，华强总共有40点体力值
- 每劈一个瓜能带来40点挑衅值
- 每挑一个瓜问“你这瓜保熟吗”能带来30点挑衅值
- 劈瓜消耗20点体力值，问话消耗10点体力值
- 问如何利用这些瓜，使挑衅值最大？

❑ 注意事项：比赛时，读不懂题是很正常的

- 去百度搜，去查文献，尽快了解问题背景
- 遇到大量陌生专有名词就尽量别选，例如国赛A题

建模思想

❑ 简单例子

- 华强去水果摊找茬，水果摊上共3个瓜，华强总共有40点体力值
- 每劈一个瓜能带来40点挑衅值
- 每挑一个瓜问“这瓜保熟吗”能带来30点挑衅值
- 劈瓜消耗20点体力值，问话消耗10点体力值
- 问如何利用这些瓜，使挑衅值最大？

❑ 数学建模的过程，就是把题目“翻译”成数学语言

- 解：设挑x_1个瓜来劈，挑 x_2个瓜来问话，挑衅值为y
- 挑衅值最大：$max\ \ y = 40x_1 + 30x_2$
- 总共3个瓜：$x_1 + x_2 \le 3$
- 体力值有限：则$20x_1 + 10x_2 \le 40$
- 瓜数和问话数都是非负数：$x_1 \ge 0$，$x_2 \ge 0$

$$max\ \ y = 40x_1 + 30x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ 20x_1 + 10x_2 \le 40 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

模型分析

❑ 线性规划模型三要素

x_1个瓜用来劈
x_2个瓜用来问话
y 为挑衅值

→ 决策变量

$$\max\ y = 40x_1 + 30x_2$$ → 目标函数

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ 20x_1 + 10x_2 \le 40 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$ → 约束条件

❑ 线性规划模型

- 要解决的问题是优化类问题（有限的资源，最大的收益）
- 所有变量的关系式都是线性的，不存在x^2，e^x，$\frac{1}{x}$，$\frac{y}{x}$，$\sin x$，$\log_2 x$等等之类的
- 线性规划模型：在一组线性约束条件下，求线性目标函数的最大值或最小值

数学建模的过程，就是把题目“翻译”成数学语言的过程。
一组公式，加上对这组公式含义的解释，就是一个数学模型。

线性规划

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

适用赛题

- 题目中提到“XXX有多少多少” “怎样安排/分配” “最多(少)” “利润最大” 等词；
- 生产安排：原材料、设备有限制，总利润最大
  - 若生产两种机床，利润分别为XXX；A机器和B机器加工，有顺序要求，有不同损耗费用，不同的工作时间...；**问题**：怎样安排生产使得总利润最大？
- 投资收益：涉及资产配置、收益率、损失率、组合投资，总收益最大
  - 若总资金为M，有n种资产可以配置
  - 每种资产的平均收益率...，风险损失率...，手续费...；**问题**：设计组合投资方案，使得收益尽可能大，总体风险尽可能小（本质是多目标规划，可化简为一个目标的线性规划）
- 销售运输：产地、销地、产量、销量、运费，总运费最省
  - 商品有m个产地和n个销地，需要从产地运到销地
  - 各产地的产量...，各销地需求量...由a产地运到b销地的运价xxx；**问题**：如何调运才能使总运费最省？
- 车辆安排：路线、起点终点、承载量、时间点、车次安排最合理
  - 不同种类的车辆有各自的承载量，工地各点之间要安排车辆运输
  - 工地里有多条路线......满足用工需求的情况下...；**问题**：如何安排车辆能使产量尽可能大？

适用赛题

投资类问题的注意事项

- 收益率 = 收益/成本，设收益率为r，收益为g，成本为c
- 如果要求“**总收益最大**”，一般可以用线性规划
- 如果要求“**总收益率最大**”，一般是非线性规划（不绝对）

判断标准

- 判断的标准就是建立的模型中，约束条件和目标函数中的**变量**是否全是一次方
- 如果成本c为变量，追求r最大，目标函数是 max r = g/c，其中变量c的次幂是-1，为非线性
- 思考：如果成本c始终为常数呢？

线性规划

- 模型简介
- 适用赛题
- **典型例题与原理讲解**
- 代码求解

典型例题

投资收益问题

- 市场上有n种资产s_i ($i=1,2,\ldots,n$)，用数额为M（本题取M=1万）的资金作一个时期的投资
- 这n种资产在这一时期内购买s_i的平均收益率为r_i，风险损失率为q_i
- 投资越分散总的风险越少，总体风险用投资的s_i中最大的风险来度量
- 购买s_i时要付交易费，费率为p_i
- 当购买额不超过给定值u_i时,交易费按购买u_i计算
- 同期银行存款利率是r_0=5%且无交易费无风险，n =4时相关数据如下表：

s_i	r_i/%	q_i/%	p_i/%	u_i/ 元
s_1	28	2.5	1	103
s_2	21	1.5	2	198
s_3	23	5.5	4.5	52
s_4	25	2.6	6.5	40

典型例题

投资收益问题

- 问题：给该公司设计一种投资组合方案，用给定的资金M，有选择地购买若干种资产或存银行生息，使净收益尽可能大，总体风险尽可能小。

问题分析

- 有目标函数（净收益尽可能大、总风险尽可能小）
- 有约束条件（总资金有限，和隐含数学条件：每一笔投资都是非负数）

s_i	$r_i/\%$	$q_i/\%$	$p_i/\%$	$u_i/$ 元
s_1	28	2.5	1	103
s_2	21	1.5	2	198
s_3	23	5.5	4.5	52
s_4	25	2.6	6.5	40

典型例题

❑ 基本假设

- 由于投资数额M相当大，而题目设定的定额u_i相对M很小，$p_i\ u_i$更小，因此假设每一笔交易额x_i都大于对应的定额u_i

❑ 模型的建立

- 决策变量：投资项目s_i的资金为x_i $(i = 0,1,2,3,4)$，总收益Q
- 目标函数：净收益尽可能大(max)、总风险尽可能小(min)
- 约束条件：投资总额为M、每一笔投资非负数
- 这是一个多目标线性规划模型

目标函数 $$\begin{cases} Q = max \sum_{i=0}^{4} (r_i - p_i)x_i \\ min\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{q_i x_i\}\right\} \end{cases}$$

约束条件 $$\begin{cases} \sum_{i=0}^{4} (1 + p_i)x_i = M \\ x_i \geqslant 0, i = 0,1,\cdots,n。 \end{cases}$$

合理的简化，事半功倍

❑ 模型的简化

- 现实中，不同人所能承受的风险不同
- 设某一类投资者，能接受的最大投资风险率为定值a

★ • 只要风险率小于等于该定值a，可视为对该类投资者满足“总风险尽可能小”

- 即风险率（风险率=投资额*损失率/总资产）满足：

$$\boxed{\frac{q_i x_i}{M} \leqslant a}$$

- 分情况讨论：设低风险投资者能接受的a=5%，中风险投资者能接受的a=15%，等等
- 基于该简化，**将目标函数**：$min\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{q_i x_i\}\right\}$（总体风险尽可能小）

★ • **转化为了约束条件**：$\frac{q_i x_i}{M} \leqslant a$（总体风险小于某个常数即可）

完成模型的建立

线性规划模型

- 决策变量： $x_i(i=0,1,2,3,4)$，第i种资产的投资额
- 目标函数和约束条件：

$$max\sum_{i=0}^{n}(r_i-p_i)x_i,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\dfrac{q_i x_i}{M}\leqslant a, i=1,2,\cdots,n,\\ \sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i=M,\\ x_i\geqslant 0, i=0,1,\cdots,n。\end{cases}$$

目标函数：总收益最大

约束条件：

1. 风险率不超过某定值
2. 投资所有项目的总金额加起来等于总资金
3. 投资的金额都是非负数

- 注意，除了x_i（5个变量），其他都是常数
- 显然，所有变量都是线性的，因此这是一个（单目标）线性规划模型

模型的建立到求解

❑ 建立模型时留下的坑

- 题目要求“总风险尽可能小”
- 本模型简化为只要风险率小于等于该定值 a，可视为对某一类投资者满足“总风险尽可能小”
- 模型中的a是一个常数，而不是变量，所以才能在写代码时套用matlab的函数

❑ 求解问题时尽量把坑填上（在论文里写作“模型改进”）

- 现实中的a是一个变量，不同投资者对风险的接受程度肯定不一样
- 低风险投资者追求落袋为安，对应a=5%；高风险投资者追求富贵险中求，可能对应a=50%
- **那么在求解时，对不同a取值分别进行求解（该操作实现了把a作为了“变量”）**

$$
\max \sum_{i=0}^{n} (r_i - p_i) x_i,
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} \dfrac{q_i x_i}{M} \leqslant a, i = 1,2,\cdots,n, \\ \sum_{i=0}^{n} (1 + p_i) x_i = M, \\ x_i \geqslant 0, i = 0,1,\cdots,n。 \end{cases}
$$

线性规划

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

模型MATLAB求解：Linprog函数

❑ 调用matlab自带的linprog函数

- [*x*, fval]= linprog (*f* ,*A*,*b*,*Aeq*, beq ,*lb*,*ub*)

f	目标函数的系数向量(必须是求最小值形式下的)
A*，*b	不等式约束条件的变量系数矩阵和常数项矩阵(必须是<或≤形式下的)
Aeq，beq	等式约束条件的系数矩阵和常数项矩阵
lb，ub	决策变量的最小取值和最大取值

- 等号左边的x返回最优解的变量取值，fval返回目标函数的最优值

★
- **注意**：要调用linprog函数，**填入的变量必须取自matlab标准型的形式**
- matlab标准型：模型的目标函数是求最小值、约束条件都是小于等于号或等号

- 运筹学中求解优化类问题有很多方法，做数模则不需要掌握，模型建好后能求解就行

代码求解

❑ 线性规划MATLAB求解：linprog函数

- 函数代码：$[x, \text{fval}\,] = \text{linprog}\,(f, A, b, Aeq, beq, lb, ub)$
- **想调用该函数，则函数中的变量必须是取自标准型模型的：**目标函数是求最小值、约束条件小于等于号或等号（变量上下界不用处理，例如$\geqslant 0$，可在lb和ub设置）

- 如果目标函数要求的是最大值怎么办？约束条件有大于等于怎么办？**加负号！**
- 例如，求变量y的最大值**等价于**求-y的最小值；
- 同理，x>a**等价于**-x<-a

将目标函数化为标准型

$$max\sum_{i=0}^{n}(r_i - p_i)x_i \iff min\sum_{i=0}^{n}(p_i - r_i)x_i,$$

- 本题约束条件本身已满足标准型条件（小于等于或等于），无需处理
- $x_i \geqslant 0$属于变量上下界（对应函数中的lb，ub）也无需处理成小于等于（需要的话加负号）

代码求解

❑ 线性规划MATLAB求解：linprog函数

- 函数代码：$[x, \mathrm{fval}\ ] = \mathrm{linprog}\ (f, A, b, Aeq, beq, lb, ub)$
- 本题标准化后的模型形式，以及对应的所需填入linprog的矩阵：

$$\min \sum_{i=0}^{n}(p_i - r_i)x_i,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \dfrac{q_i x_i}{M} \leqslant a, i = 1,2,\cdots,4, \\ \sum_{i=0}^{4}(1+p_i)x_i = M, \\ x_i \geqslant 0, i = 0,1,\cdots,n。\end{cases}$$

$$\boldsymbol{f} = [-0.05, -0.27, -0.19, -0.185, -0.185]$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0, & 0.025, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0.015, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0.055, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0.026 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = [0.05; 0.05; 0.05; 0.05]$$

$$\boldsymbol{Aeq} = [1, 1.01, 1.02, 1.045, 1.065]$$

$$\boldsymbol{beq} = 1$$

$$lb = [0; 0; 0; 0; 0]$$

f	目标函数的系数向量(必须是求最小值形式下的)
A，***b***	不等式约束条件的变量系数矩阵和常数项矩阵(必须是<或⩽形式下的)
Aeq，beq	等式约束条件的系数矩阵和常数项矩阵
lb，ub	决策变量的最小取值和最大取值

- **数模论文中这些操作和标准化的形式不必写出来，** 知道用linprog函数会用到该形式就行

代码求解

❑ 代码

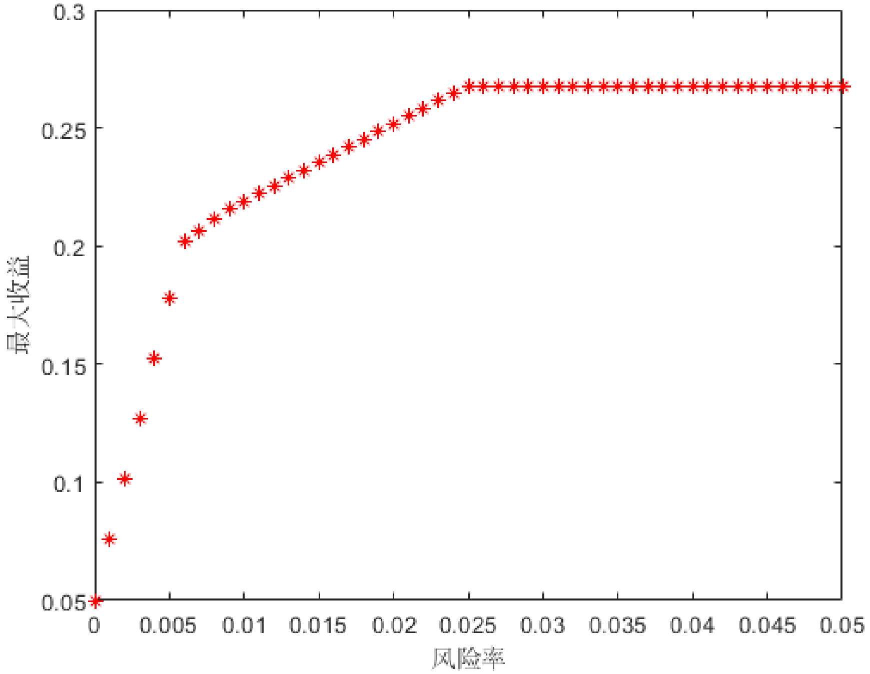
- 代码详解见文件LinearProgram.mlx
- 本节课程接下来会用该文件讲解

- 对于0基础小白，可以边看课件、边敲代码
- 看完课件仅凭记忆去敲代码不适合小白，效率太低

结果分析

❑ 求解结果

- 风险与收益并存，在风险率不超过2.5%时，风险率越大，收益越大
- 在风险率0.6%处有个转折点，在此之前收益随风险增长较快，在此之后较慢
- 所以对于风险和收益没有特别偏好的投资者来说，可选择该点作为最优投资组合。根据代码求解结果，投资方案为：$x_0 = 0$，$x_1 = 2400$，$x_2 = 4000$，$x_3 = 1091$，$x_4 = 2212$，相应投资风险率$a = 0.6\%$，收益$Q = 2019$元



模型假设的思想

❑ 关于模型假设

- 模型假设中有一条：因为投资数额M相当大，而题目设定的交易费定额u_i相对M很小，$p_i\ u_i$更小，所以把交易费的两种情况简化为一种情况
- 不做此假设也可求解，理论上来说考虑问题更全面、模型精度更高
- 但现实中，在总额度很大的情况下，基本没有人做极小额度的投资，所以模型的结果差别肯定很小，但模型复杂度会大大提升，得不偿失

- 好的模型假设，能在合理的范围内简化问题，提高模型泛用性和求解效率
- 数模竞赛时间很紧张，不要在不必要的细节上浪费时间！

数模没有标准答案

数学建模BOOM

❑ 其他思路

- 本题也可以不简化模型，直接建立多目标规划模型求解；
- 本题简化模型不仅仅有固定风险、极大化收益这一种方法，也可固定收益、极小化风险；
- 也可分别赋予风险和收益相应的权重、权衡二者做出取舍
- 总之，**数学建模题目没有标准答案**，各种模型只要**解释合理、自圆其说**即可

注意，大家都不是数学家，没有能力去“原创”模型或算法，竞赛时间有限，也不可能对模型精细化。做数学建模竞赛时遵循的原则：无论对错，管用即可。

从零开始学数学建模系列课程

- "从零开始学数学建模"系列课程
  - 本期课程视频出自b站up：数学建模BOOM
  - 全套课程请关注微信公众号：数学建模BOOM，回复"课程"

- 课程推广计划，**赚取10%佣金分成**
  - 将课程分享给其他人，可获取交易额10%的分成
  - 详情见：https://mp.weixin.qq.com/s/7kje5oxn_MVmldxZY8KvLw

END