从零开始学数学建模

非线性规划

主讲人：北海

b站/公众号：数学建模BOOM

非线性规划

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

非线性规划

❑模型简介

❑ 先修课程：线性规划

❑ 先分析问题，再判断是否线性，进而建立模型

- 线性规划：模型中所有变量都是一次方（线性）
- 非线性规划：模型中至少一个变量是非线性
- 是否线性，是由模型（表达式）中的变量判断的
- 包含了x^2，e^x，$\frac{1}{x}$，$\frac{y}{x}$，$\sin x$，$\log_2 x$等等之类都属于非线性

❑ 简单示例

$$\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 8$$
$$\begin{cases} x_1^2 - x_2 + x_3^2 \geqslant 0 \\ x_1 + x_2^2 + x_3^3 \leqslant 20 \\ -x_1 - x_2^2 + 2 = 0 \\ x_2 + 2x_3^2 = 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

- 形式与线性规划非常类似，也是在确定决策变量后写出目标函数和约束条件

非线性规划

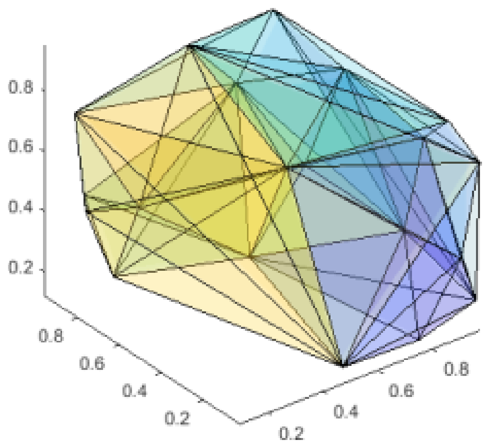
❑模型简介

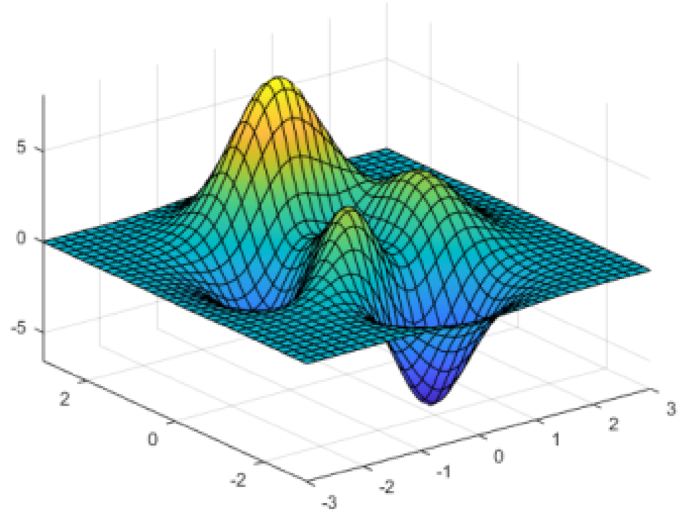
❑ 形式上与线性规划非常类似，但在数学上求解却困难很多

- 线性规划有通用的求解准确解的方法（单纯形法），一定能求得最优解
- 非线性规划在数学上没有适合各种问题的通用解法求解严格的数值解
- 但对数学建模来说，入门时掌握matlab的fmincon函数求近似解即可

❑ 原因（无需深究）

- 线性规划的最优解只存在于可行域的边界（尤其是顶点）上
- 非线性规划的最优解则可能在可行域内的任意一点





非线性规划

❑模型简介

❑ 求解方法

- **matlab函数**：[x, fval] = fmincon(fun, x0, A, b, Aeq, beq, lb, ub, nonlcon)
- 初始值影响求解结果，可多次设不同初始值分别求多个解并比较，或用蒙特卡罗法配合求解
- 先掌握matlab的fmincon函数，再去学其他二次规划、罚函数法、梯度法等等

$$\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 8$$

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2 + x_3^2 \geqslant 0 \\ x_1 + x_2^2 + x_3^3 \leqslant 20 \\ -x_1 - x_2^2 + 2 = 0 \\ x_2 + 2x_3^2 = 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

fun	单独脚本文件里定义的目标函数
x0	决策变量的初始值（影响最终结果）
A，b	线性约束的不等式变量系数矩阵和常数项矩阵（⩽或<）
Aeq，beq	线性约束的等式变量系数矩阵和常数项矩阵
lb，ub	决策变量的最小取值和最大取值
nonlcon	非线性约束，包括不等式和等式

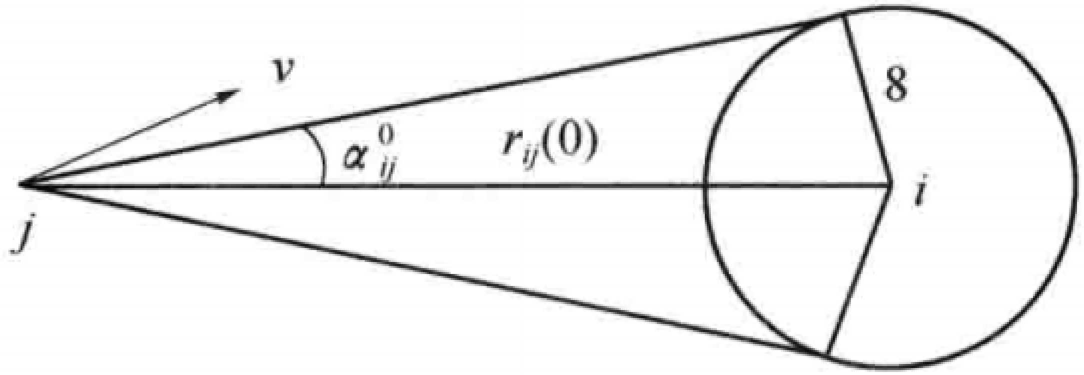
非线性规划

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

非线性规划

❑适用赛题

- ❑ 本质上和线性规划一样，适用于最优化，求“怎样安排” “最大/小” “最优”等等
- ❑ 常见收益率、病毒传播率、经济增长率等等涉及变量比值的规划问题
- ❑ 空间运动：空间约束、避免碰撞，求如何使调整角度尽量小等等
  - 例如飞行管理、卫星轨道调整等，已知速度...，距离最小...，调整角度不超过...，所占空间...，最小碰撞距离...；
  - **问题：**如何调整能使角度调整的幅度尽量小/消耗尽量少
  - 空间运动往往是曲线、变换角度等，常用到三角函数、指数函数和变量比值等，属于非线性
  - 类似还有电影院座位最佳视角问题，涉及角度



非线性规划

❑适用赛题

❑ 本质上和线性规划一样，适用于最优化，求“怎样安排” “最大/小” “最优”等等

❑ 选址问题：已知坐标、运送物品，求如何设置新位置使运量最多/最省等等

- 例如新建工地、搬迁等，已知各个工地的位置坐标，当前各工厂货物需求量...，各种路径的单位距离运输量...；
- 问题：新工厂建在何地能使单位距离运输量最大
- 选址问题涉及坐标点距离，用到点与点的直线距离$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，属于非线性

❑ 注意模型假设

- 现实中不会任意两点都有直达
- 但题目处理工地施工等情况，施工工地上一般没有严格路径限制，所以可以假设以$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$作为两点间距离
- 合理的模型假设用来简化模型是必要的，抓住主要

非线性规划

- 模型简介
- 适用赛题
- **典型例题与原理讲解**
- 代码求解

非线性规划

❑典型例题

❑ 工地选址

- 某公司有6个建筑工地要开工，每个工地的位置（用平面坐标系a，b表示，距离单位：km）及水泥日用量d（单位：t）由下表给出。目前有两个临时料场位于A（5，1），B（2，7）。日储量各有20t。假设从料场到工地之间均有直线道路相连。

工地	1	2	3	4	5	6
a（横坐标）	1.25	8.75	0.5	5.75	3	7.25
b（纵坐标）	1.25	0.75	4.75	5	6.5	7.75
d（日用量）	3	5	4	7	6	11

- **问题一**：试制定每天的供应计划，即从A，B两料场分别向各工地运送多少吨水泥，使总的吨千米数最小？
- **问题二**：为了进一步减少吨千米数，打算舍弃这两个临时料场，改建两个新的，日储量各为20t。问应建在何处，节省的吨千米数为多大？

非线性规划

❑典型例题

❑ 1、确定决策变量

- 设第i个工地的坐标为(a_i, b_i)，水泥日用量$d_i, i = 1,2,\dots,6$; 料场位置(x_j, y_j), 日储量为$e_j, j = 1,2$; 从料场j向工地i的运送量为X_{ij}。
- 解第一问因为已确定使用A和B料场，其坐标x_j和y_j是已知的常数，所以决策变量只有X_{ij};
- 解第二问要确定新的料场坐标，需要求解的x_j和y_j为变量，所以决策变量x_j, y_j, X_{ij}。

❑ 2、确定约束条件

- 料场水泥运输总量不超过其日储量：

$$\boxed{\sum_{i=1}^{6} X_{ij} \le e_j, j = 1,2}$$

- 两个料场向某工地运输量之和等于该工地水泥日用量：

$$\boxed{\sum_{j=1}^{2} X_{ij} = d_i, i = 1,2,\dots,6}$$

非线性规划

❑典型例题

❑ 3、确定目标函数

- 求总吨千米数最小，即运送量乘以运送距离求和

$$minf=\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6}X_{ij}\sqrt{(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2}$$

❑ 根据1、2、3，建立模型

- 综上，可建立规划模型（注意，这里有8个约束条件）：

$$minf=\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6}X_{ij}\sqrt{(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{6}X_{ij}\le e_j, j=1,2\\ \sum_{j=1}^{2}X_{ij}=d_i, i=1,2,\dots,6\end{cases}$$

非线性规划

❑典型例题

❑ 模型的建立

- 当前规划模型：

$$minf=\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6}X_{ij}\sqrt{(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{6}X_{ij}\le e_j, j=1,2\\ \sum_{j=1}^{2}X_{ij}=d_i, i=1,2,\dots,6\end{cases}$$

- 对于第一问：由于只有一个决策变量X_{ij}，目标函数中根号下的项中x_j和y_j为常数，所以目标函数为线性的，且约束条件也都是线性表示的，所以第一问是求解**线性规划**模型；
- 对于第二问：目标函数是非线性的，因为存在$\sqrt{(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2}$这一项中$x_j$和$y_j$为变量，所以第二问是**非线性规划**模型。

非线性规划

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

非线性规划

❑代码求解

❑ 求解方法

- **matlab函数**： [x, fval] = fmincon(fun, x0, A, b, Aeq, beq, lb, ub, nonlcon)
- 初始值影响求解结果，可多次设不同初始值分别求多个解并比较，或用蒙特卡罗法配合求解

- 接下来在文件nolinear.mlx继续讲解代码

fun	单独脚本文件里定义的目标函数
x0	决策变量的初始值（影响最终结果）
A，*b*	线性约束的不等式变量系数矩阵和常数项矩阵(⩽或<)
Aeq，beq	线性约束的等式变量系数矩阵和常数项矩阵
lb，ub	决策变量的最小取值和最大取值
nonlcon	非线性约束，包括不等式和等式

非线性规划

❑代码

❑ 由模型写出代码中的数据

$$minf = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6} X_{ij}\sqrt{(x_j - a_i)^2 + (y_j - b_i)^2}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{6} X_{ij} \le e_j, j = 1,2\\ \sum_{j=1}^{2} X_{ij} = d_i, i = 1,2,\dots,6\end{cases}$$

❑ 模型中X_{ij}共12个值，为方便写代码，设:

$$X_{11} = X_1, X_{21} = X_2, X_{31} = X_3,$$
$$X_{41} = X_4, X_{51} = X_5, X_{61} = X_6,$$
$$X_{12} = X_7, X_{22} = X_8, X_{32} = X_9,$$
$$X_{42} = X_{10}, X_{52} = X_{11}, X_{62} = X_{12}$$

```
% 不等式约束条件的变量系数和常数项
A = [1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0
     0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1];
% 两个临时料场日储量
b = [20;20];

Aeq = [eye(6),eye(6)]; % 两个单位矩阵横向拼成
beq=[d(1);d(2);d(3);d(4);d(5);d(6)];
```

非线性规划

❑写出你的笔记

❑ 费曼学习法

- 费曼学习法：以教代学
- 只有当你能够教会别人，才代表你真正学会了！

❑ 有奖征集：每学完一期课程，整理笔记，发布在各平台

- 将你每节课所学到的，整理出一套笔记
- 尽量不要照搬或截图课程的内容
- 可自行发布在知乎/CSDN等等各类平台

- 符合以下要求的文章，且文章点赞超过100或浏览量超1万的，可获取半价退款奖励（联系北海的QQ：1980654305 ）
- 1、标题设为：XXXX（模型或算法）——北海数学建模课程笔记
- 2、文章首行写：本文为北海的数模课程学习笔记，课程出自微信公众号：数学建模BOOM。

非线性规划

- “从零开始学数学建模”系列课程
  - 本期课程视频出自b站up：数学建模BOOM
  - 全套课程请关注微信公众号：数学建模BOOM，回复“课程”

END

