从零开始学数学建模

马尔科夫预测

主讲人：北海

b站/公众号：数学建模BOOM

马尔科夫预测

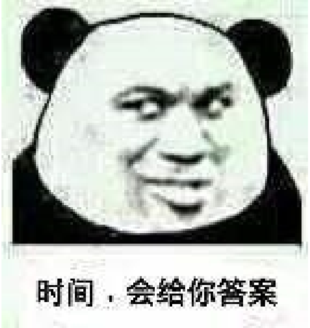
- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

马尔科夫预测

❑凡是过往，皆为序章

❑ 张三的日常

- 法外狂徒张三日常处于以下4种状态之一：行窃、吃喝嫖赌、逃亡和蹲大牢
- 若已知张三当前处于某种状态，则他**未来的状态只与现在有关，而与过去无关**
- 例如已知昨天张三在吃喝嫖赌、现在张三在逃亡，能影响明天的只有今天“逃亡”的状态
- 那么**明天的状态**只与今天的“逃亡”有关，而与昨天的“吃喝嫖赌”无关



- 注意，张三的状态是**随机的**，只能求明天处于每一种状态的概率
- 而这概率又只与今天的状态有关，不需要管昨天或更早的状态是什么
- 描述这种随机现象的模型，称为**马尔科夫模型**

马尔科夫预测

❑凡是过往，皆为序章

❑ 从张三到马尔科夫链

- 离散时间：张三的昨天为初始时间$n=1$，则今天为2，明天为3，以及以后的4，5，…
- 状态空间：张三处于行窃状态记为$j=1$，则处于吃喝嫖赌、逃亡和蹲大牢依次记为2，3，4
- 状态：$X_n=j$表示第n天张三处于状态j，例如$X_3=2$，表示第3天张三处于吃喝嫖赌的状态

- 马尔科夫链：设$\{X_n,n=1,2,\ldots\}$是一个随机序列（张三在第n天的状态是随机的）
- 假设已知张三第1天为状态3(逃亡)即$X_1=3$；第2天为状态1（行窃）即$X_2=1$，第3天为状态4（蹲大牢）即$X_3=4$，……，第n天为状态2（吃喝嫖赌）即$X_n=2$

- 那么第$n+m$天张三处于状态1（行窃）的概率（注意等号两边式子差异在哪）：

$$\boxed{P\{X_{n+m}=1\,|X_n=2,\ldots,X_3=4,X_2=1,X_1=3\}=P\{X_{n+m}=1\,|X_n=2\}}$$

- ★即条件概率表达式里，一大堆的条件都是无用的，**只有第n天的条件才是有用的！**
- 同样的形式可写出第$n+1$天张三处于状态2、状态3和状态4的概率计算式

马尔科夫预测

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

马尔科夫预测

❑适用赛题

- ❑ 健康与疾病
  - 人的健康状态是会随着时间变化的，而变化又是随机的
  - 预测一个人下一年的健康状态，只需要看当前的状态，无需关系过去
  - 可能与优化模型结合，例如保险公司追求收益最大化，需要预测投保人的健康状态
- ❑ 销售与贮存
  - 一些奢侈品例如钢琴，一般销量很小，商店不会贮存太多
  - 钢琴每周的销售量也是随机的，进货贮存过多会积压资金，贮存过少又有可能失去销售机会
  - 商家需要根据一周的销量决定是否进货
- ❑ 等级结构
  - 工程师按照级别分为技术员、助理工程师、中级工程师、副高级工程师和高级工程师
  - 一个人明年的级别也是随机的，无论升级还是降级都只与其当前的级别有关
  - 预测下一年的级别变动，也可用马尔科夫预测

❑ 此类问题最基本的特点：状态随机，下一阶段的状态只与当前有关

马尔科夫预测

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

马尔科夫预测

❑时齐性

❑ 时齐的马尔科夫链

- 若第n天张三处于状态i，则经过了m天后，张三处于状态j的概率满足：

$$\boxed{P\{X_{n+m} = j \,|X_n = i\} = P_{ij}(m)}$$

- 则称$\{X_n, n = 1,2,\dots\}$为时齐的马尔科夫链

- 例如已知第3天为状态1（行窃），求7天后(第10天)处于状态4（蹲大牢）的概率：
- $P\{X_{10} = 4 \,|X_3 = 1\} = P_{14}(7)$
- 或者已知第100天为状态1（行窃），求7天后(第107天)处于状态4（蹲大牢）的概率：
- $P\{X_{107} = 4 \,|X_{100} = 1\} = P_{14}(7)$

- 同理……

马尔科夫预测

❑时齐性

❑ 时齐的马尔科夫链

- 若第n天张三处于状态i，则经过了m天后，张三处于状态j的概率满足：

$$\boxed{P\{X_{n+m}=j\mid X_n=i\}=P_{ij}(m)}$$

- 则称$\{X_n, n=1,2,\dots\}$为时齐的马尔科夫链

★• 两种状态转换的概率，只与时间间隔有关，与更早的过去无关，也与起始时刻无关
- 满足这种的条件的马尔科夫链，称为时齐的马尔科夫链，本期课程所讲的都是满足时齐的

- 是否满足时齐，是问题本身决定的（查文献）！一般带有周期性的问题才会满足时齐
- 例如销售类问题，可以在论文的模型假设里写“假设销售规律满足时齐性”
- $m=1$时，称$P_{ij}(1)$为一步转移概率，所有$P_{ij}(1)$所组成的矩阵为马尔科夫链的一步转移矩阵

- 一步转移概率怎么求？问题内在规律推导，根据统计数据计算估计值，查文献

马尔科夫预测

❑典型例题

❑ 计算机运行状态的预测（题目源于《数学建模算法与应用（第三版）》例15.7）

- 设一随机系统状态空间，总共有4种状态，记录观测系统所处状态如下：

4	3	2	1	4	3	1	1	2	3
2	1	2	3	4	4	3	3	1	1
1	3	3	2	1	2	2	2	4	4
2	3	2	3	1	1	2	4	3	1

- 若该系统可用马尔科夫模型描述，且当前系统处于状态4，则下一步最可能是状态几？

❑ 求解方法

- 求解一步转移概率：从状态i到状态j的概率的估计值为

$$\boxed{\hat{p}_{ij}=\frac{n_{ij}}{\sum_{j=1}^{4} n_{ij}}}$$

- 例如，从状态1可以转移到状态1、2、3、4，那么状态1转移到其他状态的总次数，就是观测到的数据中，出现“11”“12”“13”“14”的总次数，也就是公式中的分母

马尔科夫预测

❑典型例题

❑ 对已知数据的统计

- 从状态i到状态j的次数统计（不需要手算，代码部分会讲）

	1	2	3	4	$\sum_{j=1}^{4} n_{ij}$
1	4	4	1	1	10
2	3	2	4	2	11
3	4	4	2	1	11
4	0	1	4	2	7

- 进而求出一步转移矩阵：

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} 2/5 & 2/5 & 1/10 & 1/10 \\ 3/11 & 2/11 & 4/11 & 2/11 \\ 4/11 & 4/11 & 2/11 & 1/11 \\ 0 & 1/7 & 4/7 & 2/7 \end{bmatrix}$$

- 其中第i行第j列的数，代表着从状态i一步转移到状态j的概率的估计值
- 题目说当前状态为4，则下一步的状态最有可能是3

马尔科夫预测

❑进一步分析

❑ n步后的概率分布

- 假设该系统初始时4种状态出现的概率为：$P^{(0)}=[0.2,0.3,0.3,0.2]$
- 则系统初始化后，运行到第2步最有可能出现状态几？第5步呢？
- 初始概率分布行向量（即初始时每种状态出现的概率）记做$P^{(0)}$，一步转移概率矩阵记做P
- 则第n步的状态的概率分布为：

$$\boxed{P^{(n)}=P^{(0)}P^{n}}$$

- 系统初始化后运行到第2步的概率分布：$P^{(2)}=P^{(0)}P^{2}=[0.291,0.289,\ 0.271,\ 0.149]$
- 系统初始化后运行到第5步的概率分布：$P^{(5)}=P^{(0)}P^{5}=[0.294,0.289,\ 0.268,\ 0.149]$

- **注意**：求“第n步”状态的概率分布，需要根据题目确定究竟是否把“初始化”算作第1步！

- 系统初始时的概率分布行向量怎么求？与一步转移概率一样：问题内在规律推导，根据统计数据计算估计值，查文献

马尔科夫预测

❑注意事项

❑ 马尔科夫预测和其他预测有什么不同?

- 其他预测模型：计算的是**“数值”**，理论上是无数种可能（常见实数集合）
- 马尔科夫预测：计算的是**“概率”**，需要有限种已知的可能结果

- 例如根据城市近几年的噪声值，预测下一年的噪声值之类的问题
- 因为“噪声值”是数值，理论上可以是任何实数
- 所以有无数种可能的结果，此时就不能用马尔科夫预测

- 例如根据某销量很小的奢侈品过去几个月的销量，预测下个月销量
- 某奢侈品的“销量”只能是正整数
- 又因为“销量很少”可以根据已知数据假定小于某个正整数（例如月销量不超过10）
- 此时“销量”有0到10总共11个可能的结果
- 可以用马尔科夫预测下个月的销量最有可能是几

马尔科夫预测

❑注意事项

❑ 马尔科夫预测的重难点

- 本节课的计算过程都非常简单，没有复杂原理、公式或推导
- 理解马尔科夫链的核心：未来只与当前有关、与过去无关，以及时齐性
- 后续要讲的模拟退火，就是一个马尔科夫过程
- 更多的性质，例如非时齐的情况，以及极限概率分布，以后遇到再讲
- 能否用马尔科夫预测，是看问题本身决定的！即是否有“有限种已知的可能结果”

马尔科夫预测

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

马尔科夫预测

❑代码求解

❑ 求一步转移矩阵

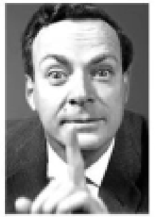
- 一般需要根据已知数据，求出一步转移矩阵的估计值
- 需要遍历已知数据，统计每一组相邻两个状态的数量（找出有多少个“1 1”,“1 2”,……）
- 如果题目所定的系统状态是文字（例如张三的四种状态），那么在写代码时，可以自行定义不同状态对应的数字，写出矩阵
- 代码讲解见文件markov.mlx

马尔科夫预测

❑写出你的笔记

❑ 费曼学习法

- 费曼学习法：以教代学
- 只有当你能够教会别人，才代表你真正学会了！



费曼学习法

1. 确定主题开始学习
2. 理解所学内容
3. 把所学内容讲给别人
4. 把讲不清楚的地方去学明白

❑ 有奖征集：每学完一期课程，整理笔记，发布在各平台

- 将你每节课所学到的，整理出一套笔记
- 尽量不要照搬或截图课程的内容
- 可自行发布在知乎/CSDN等等各类平台

- 符合以下要求的文章，且文章点赞超过100或浏览量超1万的，可获取半价退款奖励（联系北海的QQ：1980654305 ）
- 1、标题设为：XXXX（模型或算法）——北海数学建模课程笔记
- 2、文章首行写：本文为北海的数模课程学习笔记，课程出自微信公众号：数学建模BOOM。

马尔科夫预测

- "从零开始学数学建模"系列课程
  - 本期课程视频出自b站up：数学建模BOOM
  - 全套课程请关注微信公众号：数学建模BOOM，回复"课程"

END