

从零开始学数学建模

单源最短路径

主讲人：北海

b站/公众号：数学建模BOOM

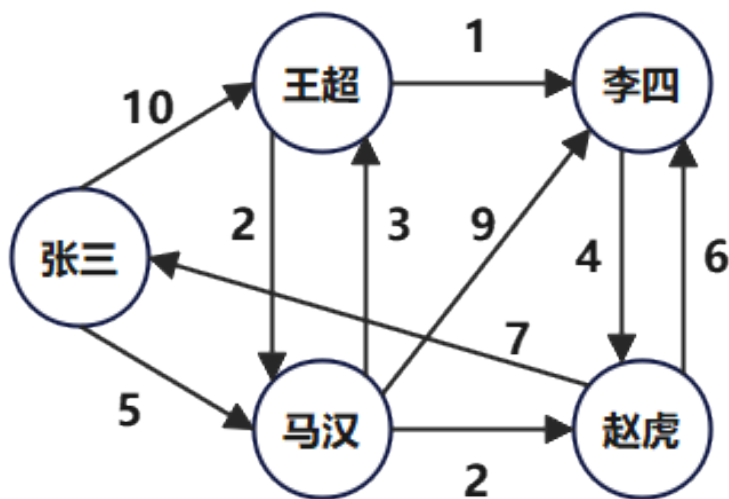
单源最短路径

- 基本概念
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

□什么是单源最短路径

□ 简单例子

- 法外狂徒张三和其他四个富豪分别住在5个城市
- 由于疫情，有些城市间只允许单向前往，或往返路径长度不同
- 5个城市之间不同路径的长度如图所示
- 张三打算到李四家行窃，如何以最短的路程到达李四家？



微信公众号: 数学建模BOOM

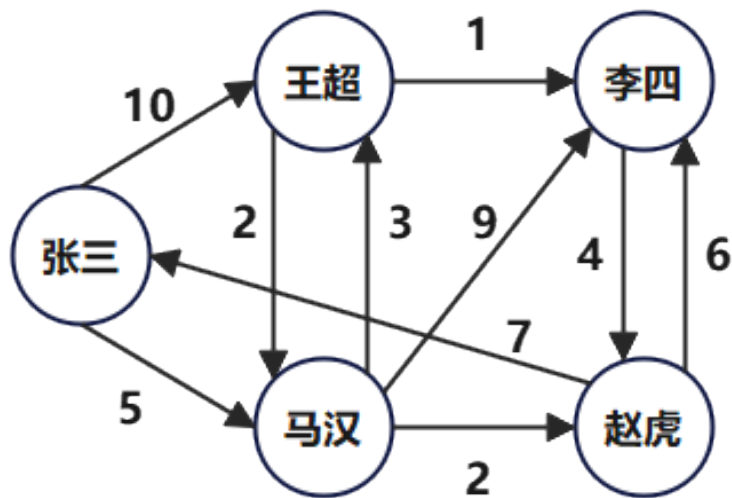
□什么是单源最短路径

□ 单源最短路径：从**图中某个顶点**出发，到达**另一个顶点**所经过的**边的权重之和最小**的一条路径

- 本例子中的“路径长度”就是指真实的路径距离
- 若题目改为：每条路径的成本（过路费+燃油费）不同，如何以最少的成本到达李四家？
- 那么最短路径中的“路径长度”概念即为经过的路径消耗的总费用

□ 边带有方向的图是**有向图**，否则为无向图

- 本题为有向图是因为题目要求“有些城市间只允许单向前往，或往返路径长度不同”
- 再次强调，权重表现的是“路径长度”，画出来是直线相连，并不代表现实中就是直线！



微信公众号：数学建模BOOM

□基本求解方法

□ 最短路径基本性质：**最短路径上的任一子路径也是最短路径（贪心算法和动态规划的基础）**

□ 常用算法

- Dijkstra算法（迪杰斯特拉算法），基于贪心思想
- Floyd算法，求出所有顶点对之间的最短路径，时间复杂度高

□ 基本方法：调用MATLAB的shortestpath函数

- 根据题目画出图、写出邻接矩阵，调用函数即可
- shortestpath函数求**两个单一节点之间**的最短路径

□ 对于做数模来说，掌握MATLAB函数求解即可

- **本节课程第三部分**会先讲解Dijkstra算法的原理和步骤，帮助大家理解“**贪心算法**”的思想

微信公众号：数学建模BOOM

单源最短路径

- 基本概念
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

□ 适用赛题

□ 货物运输类问题

- 公路运输/铁路运输的路线固定，距离已知，每条路径耗费的费用已知
- 设计从某点出发，到达终点的运输路径，使总费用/路径最小

□ 设备更新问题

- 购置新设备需要一笔费用，继续使用旧设备也需要支付维修费用且逐年增大
- 在一定年限内，如何安排购置新设备和使用旧设备，使总支付费用最小

□ 典型特征

- 从某个“起点”到某个“终点”，即始终围绕“起点到终点”的“总路径”求最优
- 这一点可以在看完最小生成树后思考两者的区别和联系

□ 注意事项

- 图论解决的问题大部分是求最优解，常常与规划类模型结合
- 一般涉及已知点到点之间的路径/费用等，能作出图，即可用图论的算法求解

微信公众号：数学建模BOOM

单源最短路径

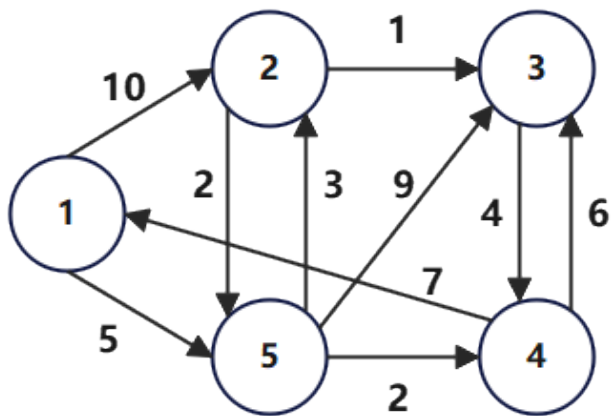
- 基本概念
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

单源最短路径

□先以简单例子讲解原理，后面讲解更复杂的例题的建模与求解

□ Dijkstra算法求解单源最短路径的原理：贪心算法

- 集合S为已确定最短路径的点，集合Q为剩余顶点。初始时，集合S只有源点（起点）
- Q中每一个顶点，若源点可经过S中的点到达该点则为可行路径，更新该点的最短可行路径
- 从上一步所有最短可行路径中选取最短的路径，把对应顶点加入S
- 不断重复前两步，直到所有顶点都在S内或剩余顶点不存在可行路径为止
- （只看文字描述难以理解，课程视频中有每一步的详细画图分析）



顶点	第一轮	第二轮	第三轮	第四轮
2	10 $v_1 \rightarrow v_2$	8 $v_1 \rightarrow v_5 \rightarrow v_2$	8 $v_1 \rightarrow v_5 \rightarrow v_2$	
3	∞	14 $v_1 \rightarrow v_5 \rightarrow v_3$	13 $v_1 \rightarrow v_5 \rightarrow v_4 \rightarrow v_3$	9 $v_1 \rightarrow v_5 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3$
4	∞	7 $v_1 \rightarrow v_5 \rightarrow v_4$		
5	5 $v_1 \rightarrow v_2$			
集合S	{1,5}	{1,5,4}	{1,5,2}	{1,5,2,3}

□ 典型例题

□ 设备更新问题

- 某企业使用一台设备，每年年初需要决定是购置新的，还是继续使用旧的
- 购置新的就需要一定的购置费用，使用旧的需要支付逐年增加的维修费用
- 五年内**该设备在每年年初的价格，和使用不同时间（年）的设备需要维修费如下表所示
- 如何制定设备更新计划，使得总支付费用最少？

表1 设备价格表（万元）

第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
11	11	12	12	13

维修费用表（万元）

使用年限	0~1	1~2	2~3	3~4	4~5
维修费用	4	5	7	10	17

□ 题目分析

- 关键在于制定计划使“**五年内**总支付费用最少”
- 翻译翻译：从第1年初起，到第5年末，中间有很多选择（每一年是买新的还是用旧的）
- 第1年初=**源点**，第5年末=**终点**，每年的选择=**路径**，总支付费用=**总路径**

微信公众号：数学建模BOOM

□ 典型例题

□ 模型建立 (重点)

- 构造有向图D, 包含顶点 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$, 分别代表第1年年初, 第2年年初,, 第5年年初, 和最后 v_6 代表第5年年末
- 顶点之间的有向边 $v_i \rightarrow v_j$ 代表“ i 时刻购买新设备, 使用到 j 时刻”, 该边的权重代表所两个时刻之间购买新设备的费用与维修费用之和
- 画出该图, 并写出该图的邻接矩阵 W (视频有讲解画图思路和矩阵元素值怎么求的):

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 15 & 20 & 27 & 37 & 54 \\ \infty & 0 & 15 & 20 & 27 & 37 \\ \infty & \infty & 0 & 16 & 21 & 28 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 16 & 21 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 17 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

- 整体思路就是从题目中画出图, 再从图得到邻接矩阵, 然后调用MATLAB函数即可求解

表1 设备价格表 (万元)

第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
11	11	12	12	13

维修费用表 (万元)

使用年限	0~1	1~2	2~3	3~4	4~5
维修费用	4	5	7	10	17

单源最短路径

- 基本概念
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

□ 典型例题

□ 问题求解

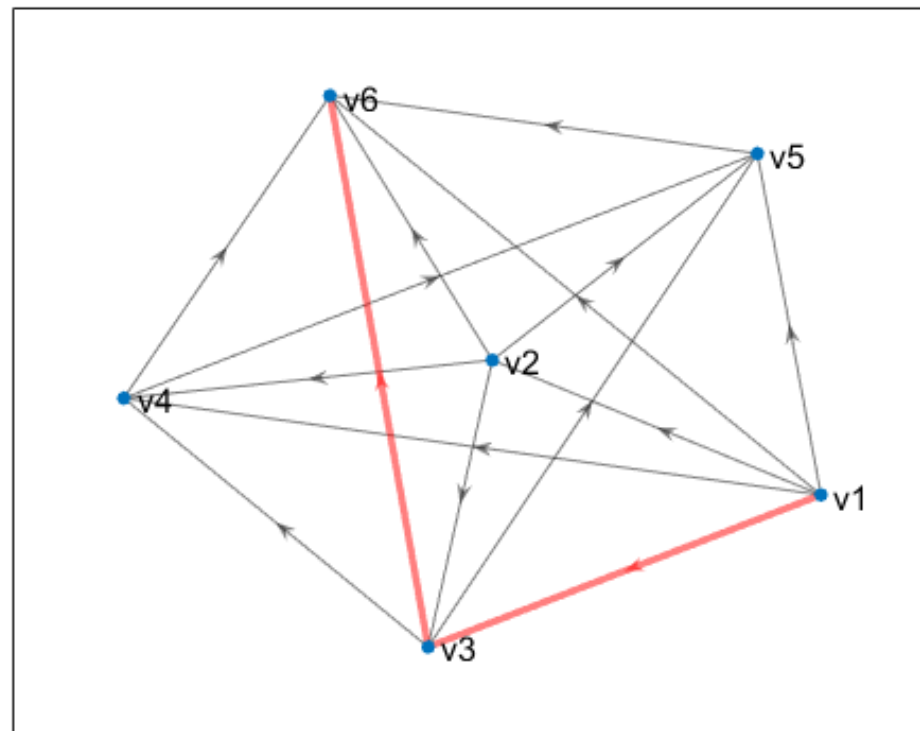
- 题目要求制定计划，使总支付费用最小，就是在有向图D中求从 v_1 到 v_6 的最短路径
- 有了邻接矩阵，调用matlab函数即可求解。接下来到文件shortestpath.mlx中继续讲解代码

□ 结果分析

- 求解得到的path=[1,3,6]
- 意味着顶点1到顶点6的最短路径为1到3再到6;
- $d = 48$ 意味着总路径长度为48;

□ 制定计划:

- 第1年年初购买新设备
- 使用到第3年年初，再购买新设备
- 使用到第5年年末
- 能使5年内总支付费用最少，最少为48万。



□ 写出你的笔记

□ 费曼学习法

- 费曼学习法：以教代学
- 只有当你能够教会别人，才代表你真正学会了！

□ 有奖征集：每学完一期课程，整理笔记，发布在各平台

- 将你每节课所学到的，整理出一套笔记
- 尽量不要照搬或截图课程的内容
- 可自行发布在知乎/CSDN等等各类平台



费曼学习法

- ① 确定主题开始学习
- ② 理解所学内容
- ③ 把所学内容讲给别人
- ④ 把讲不清楚的地方去学明白

- 符合以下要求的文章，且文章点赞超过100或浏览量超1万的，可获取半价退款奖励（联系北海的QQ：1980654305）
- 1、标题设为：XXXX（模型或算法）——北海数学建模课程笔记
- 2、文章首行写：本文为北海的数模课程学习笔记，课程出自微信公众号：数学建模BOOM。

微信公众号：数学建模BOOM

□ “从零开始学数学建模” 系列课程

- 本期课程视频出自**b站up**：数学建模BOOM
- 全套课程请关注**微信公众号**：数学建模BOOM，回复“课程”

END

微信公众号：数学建模BOOM