

从零开始学数学建模

层次分析法

主讲人：北海

b站/公众号：数学建模BOOM

课前声明:

本期课程主要内容在b站“数学建模 | 快速入门（下）”系列课程中已讲过，因此有内容重复。

已经掌握原理和方法的同学，可直接去看第四部分“代码求解”。

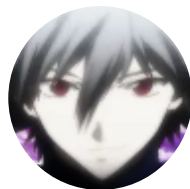
微信公众号：数学建模BOOM

层次分析法

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

□ 基本概念

- 对以下几位b站up主进行**综合评价**，评选出综合得分**第一名**：老番茄、老师好我叫何同学、木鱼水心、凉风Kaze、罗翔说刑法



- 本题的**目标**是：根据**评价结果**进行排名，确定第一名是谁

□ **评价**一个up主的**准则**是什么？

- 粉丝数，最高播放数，获赞数，稿件数（指视频稿件数）
- 使用这4条可量化的指标作为评价准则

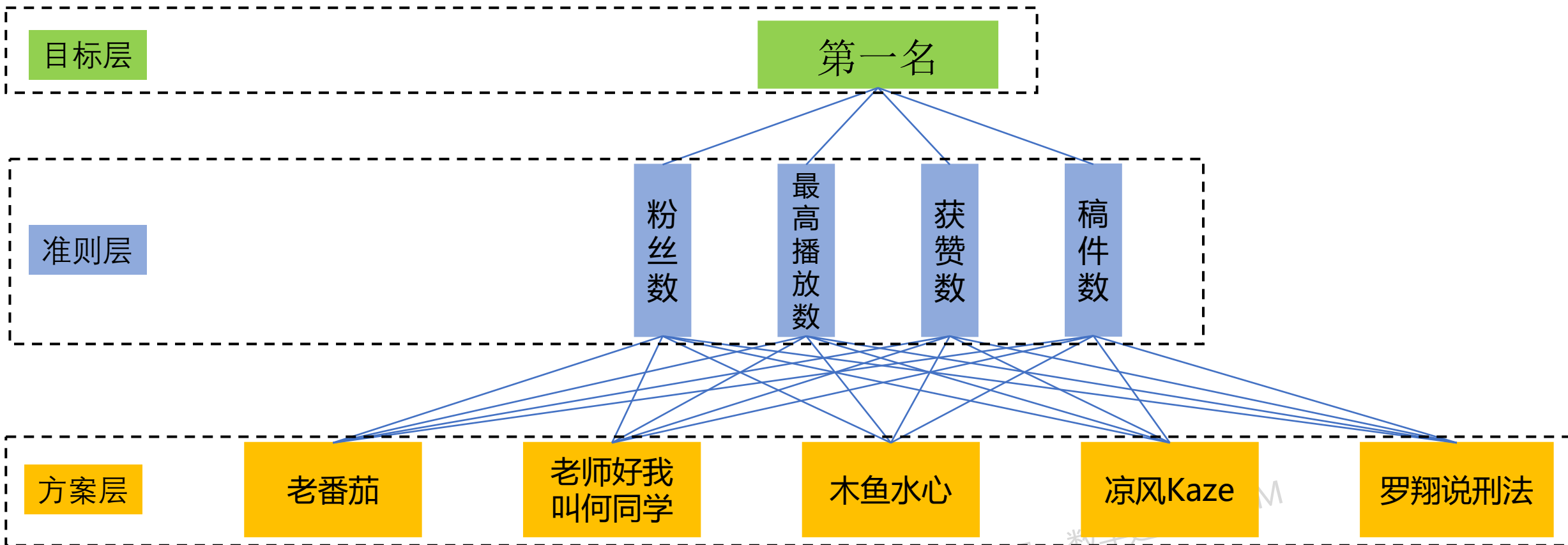
□ 可能的结果/**方案**？

- 老番茄是第一；或何同学第一，或……；
- 5位up主均有可能，即5种**方案**

微信公众号：数学建模BOOM

□ 基本概念

□ 模型框架



微信公众号：数学建模BOOM

□ 基本思想

□ 以高考为例

- 在高考时是如何进行排名的？
- 理科考语+数+英+理综，对不同科目的成绩求和，谁的总分最高，谁就是第一

□ 1、数量级的问题

- 高考每一门科目的满分都是在一个数量级的
- 但现实中，罗翔老师的粉丝数2110.2万，视频稿件数228，两者相加毫无意义
- 因此需要归一化处理，在不改变“单科排名”的条件下，将二者设置成相同数量级



□ 2、重要性的区别

- 高考不同科目满分是不同的，因为重要性不同；现实中获赞数比稿件数更能体现up主的能力
- 因此需要给不同指标分别赋予权重，以区分指标的重要性
- 类似高考每门单科卷面满分都是100，考完后语文成绩乘以1.5，物理成绩乘以1.1再相加

层次分析法

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

□适用赛题

□ 评选/排名

- 目标层很明确：谁是第一、第二.....
- 一般题目会提供准则层和相应数据，往往有经验（文献）可循

□ 决策分析

- 面临多种方案时，需要依据一定的标准选择某一种方案
- 可能需要自行查找数据、查文献确定方案层，方案层和准则层较为复杂
- 不同的评价模型（评价指标和权重等不同），会得出不同的结果

□ 特点

- 方案层必须明确：必须从题目中确定所有方案
- 缺点是具有主观性：评价指标的权重往往是主观设定的
- 优点是可处理复杂系统：为多准则或无结构特性的复杂决策问题提供简便的决策方法

微信公众号：数学建模BOOM

层次分析法

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

□模型建立与求解

□ 如何根据4项指标对5位up主进行综合评价？

□ 简单粗暴法：粉丝数+最高播放数+获赞数+稿件数，数值最大的就是第一

- 指标的数量级不同：播放数几千万，稿件数一般几百，简单相加，加了个寂寞

up主	粉丝数	最高播放数	获赞数	稿件数
老番茄	1686.4万	3183万	1.2亿	397
何同学	903.6万	1916.4万	3439.6万	43
木鱼水心	837.6万	817.6万	4748万	1159
凉风Kaze	824.9万	1296.4万	1.2亿	442
罗翔说刑法	2110.2万	1465.7万	6199.5万	228

□ 如何在**不改变数据本身意义**的情况下，使不同指标具有同等数量级？

- 每一个指标的数值，在本模型中的意义，代表着“单项排名”
- 罗翔老师在“粉丝数”这一指标里**单项排名第一**
- 那么要保证**对数据处理之后**，罗翔老师在“粉丝数”这一指标里**单项排名依旧是第一**

微信公众号：数学建模BOOM

□模型建立与求解

□ 归一化处理

- 对**每一个指标**的数组[a b c d]**归一化**处理得到 $[a/(a+b+c+d), b/(a+b+c+d), c/(a+b+c+d), d/(a+b+c+d)]$
- 归一化之后，**不同指标数量级一致**，每一个评价对象在每一个指标里**排名不变**

up主	粉丝数	最高播放数	获赞数	稿件数
老番茄	1686.4万	3183万	1.2亿	397
何同学	903.6万	1916.4万	3439.6万	43
木鱼水心	837.6万	817.6万	4748万	1159
凉风Kaze	824.9万	1296.4万	1.2亿	442
罗翔说刑法	2110.2万	1465.7万	6199.5万	228



up主	粉丝数	最高播放数	获赞数	稿件数	总评分
老番茄	0.27	0.37	0.31	0.17	1.12
何同学	0.14	0.22	0.09	0.02	0.47
木鱼水心	0.13	0.09	0.12	0.51	0.85
凉风Kaze	0.13	0.15	0.31	0.19	0.78
罗翔说刑法	0.33	0.17	0.16	0.1	0.76

□模型建立与求解

□ **简单粗暴法**：粉丝数+播放数+获赞数+稿件数，数值最大的就是第一

- 但现实中指标对于评价的**重要性**不同
- 一般来说，粉丝数比稿件数更能体现up主的优秀

□ 指标数值乘以**权重**再相加，以区分重要性

- 假设 综合评分 = 0.4粉丝数+0.2播放数+0.3获赞数+0.1稿件数
- **权重**是**人为主观设定**的，这也是层次分析法的**缺点**
- 极端情况：主观认为稿件数权重是1，其他指标设为0，会带来荒谬的结论

□ **当前问题转化为：如何较为科学地设定权重？**



陈睿

LV6

+关注

稿件：7 粉丝：243.8万

bilibili董事长兼CEO



蒙古上单lex号

LV6

稿件：67 粉丝：197

你要是觉得泛式和瓶子他们出道了

微信公众号：数学建模BOOM

□模型建立与求解

□ 如何较为科学地设定权重?

- 对指标的重要性进行**两两比较**，构造**判断矩阵**，从而求出权重

□ 构造判断矩阵，矩阵中元素 a_{ij} 的意义是，第 i 个指标相对第 j 个指标的重要程度

- 粉丝数和稿件数相比，**根据文献或个人主观认为**，粉丝数比稿件数明显重要，则设置 a_{14} 为5
- 反过来，稿件数相比粉丝数的重要性那就是1/5， a_{41} 为1/5

标度	含义
1	表示两个因素相比，具有同样重要性
3	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素稍微重要
5	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素明显重要
7	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素强烈重要
9	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素极端重要
2,4,6,8	上述两相邻判断的中值

评出第一	粉丝数	最高播放数	获赞数	稿件数
粉丝数	1			5
最高播放数		1		
获赞数			1	
稿件数	1/5			1

微信公众号：数学建模BOOM

□模型建立与求解

□ 依次对变量进行两两比较，主观设定所有的元素，得到完整的判断矩阵，如下表所示

评出第一	粉丝数	最高播放数	获赞数	稿件数
粉丝数	1	2	3	5
最高播放数	1/2	1	1/2	2
获赞数	1/3	2	1	1/3
稿件数	1/5	1/2	3	1

□ 不一致现象

- 设粉丝数为A，最高播放数为B，获赞数为C，稿件数为D
- $a_{23} = 1/2$ 意味着在**重要性上**， $B < C$ ； $a_{24} = 2$ 意味着 $B > D$ ；因此 $D < B < C$
- 而 $a_{34} = 1/3$ 意味着 $C < D$ ，与上一条**矛盾**！

微信公众号：数学建模BOOM

□模型建立与求解

□ **不一致的原因**：每一次两两比较的过程中暂时忽略了其他因素，导致最后的结果可能出现矛盾

- **理想情况**：满足 $a_{ij} = a_{ik} * a_{kj}$ 且矩阵各行（列）成倍数关系
- 满足这两条的矩阵称为**一致矩阵**，不会出现矛盾的情况（证明略）

□ 一致性检验

- 因为权重的设定带有**主观性**，难以得到严格的一致矩阵
- 只需和一致矩阵的“差异”不大即可，求出并检验“差异”的过程称为**一致性检验**。

评出第一	A	B	C	D
A	1	2	3	5
B	1/2	1	1/2	2
C	1/3	2	1	1/3
D	1/5	1/2	3	1

微信公众号：数学建模BOOM

□模型建立与求解

□ 计算一致性比例CR

- $CR = \frac{CI}{RI}$ ，其中 $CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$ ， λ_{max} 为判断矩阵的最大特征值， n 为指标数(即判断矩阵行数)
- 其中 RI 为平均随机一致性指标，通过查表可得到不同的 n 对应的 RI

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0	0	0.52	0.89	1.12	1.26	1.36	1.41	1.46	1.49

- 如果一致性比例 $CR = 0$ ，说明判断矩阵是一致矩阵，不会出现任何矛盾的情况（证明略）
- 如果一致性比例 $CR < 0.1$ ，可以认为判断矩阵一致矩阵的“差异”不大，通过一致性检验
- 如果一致性比例 $CR \geq 0.1$ ，需要修改判断矩阵，直到 $CR < 0.1$

微信公众号：数学建模BOOM

□模型建立与求解

□ 计算一致性比例CR

- 当前判断矩阵的 $\lambda_{max} = 4.68$, $n = 4$, 求得 $CI = 0.227$, 查表 $RI = 0.89$, 得 $CR = 0.255$
- 此时 $CR \geq 0.1$, 需要修改判断矩阵

□ 修改后的判断矩阵见右表

评出第一	A	B	C	D
A	1	2	3	5
B	1/2	1	1/2	2
C	1/3	2	1	1/3
D	1/5	1/2	3	1

评出第一	A	B	C	D
A	1	2	3	5
B	1/2	1	1/2	2
C	1/3	2	1	2
D	1/5	1/2	1/2	1

- 该判断矩阵的 $\lambda_{max} = 4.1128$, $n = 4$, 求得 $CI = 0.0376$, 查表 $RI = 0.89$, 得 $CR = 0.0418$
- 此时 $CR < 0.1$, 通过了一致性检验

微信公众号：数学建模BOOM

□模型建立与求解

□ 算术平均法求权重

- 将通过了一致性检验的判断矩阵按列归一化
- 每一行分别求和，求和的结果除以 n ，得到的列向量就是权重向量

评出第一	A	B	C	D	按列归一化 →	评出第一	A	B	C	D	按行求和后除以 n →	评出第一	权重向量
A	1	2	3	5		A	0.492	0.364	0.600	0.500		A	0.489
B	1/2	1	1/2	2		B	0.246	0.182	0.100	0.200		B	0.182
C	1/3	2	1	2		C	0.164	0.364	0.200	0.200		C	0.232
D	1/5	1/2	1/2	1		D	0.098	0.091	0.100	0.100		D	0.097

□ 求得4项指标的权重依次为0.489, 0.182, 0.232, 0.097

微信公众号：数学建模BOOM

□模型建立与求解

□ 问题求解

- 对所有准则进行加权求和，**综合评分 = 0.49粉丝数+0.18播放数+0.23获赞数+0.1稿件数**
- 注意，该式中的数据是归一化处理后的数据

up主	粉丝数	最高播放数	获赞数	稿件数	总评分
老番茄	0.27	0.37	0.31	0.17	0.29
何同学	0.14	0.22	0.09	0.02	0.13
木鱼水心	0.13	0.09	0.12	0.51	0.16
凉风Kaze	0.13	0.15	0.31	0.19	0.18
罗翔说刑法	0.33	0.17	0.16	0.1	0.24

评出第一	权重向量
A	0.489
B	0.182
C	0.232
D	0.097

□ **结论：**根据层次分析法模型，求得**综合得分第一名的up主是老番茄**



微信: 数学建模BOOM

层次分析法

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

□ 代码求解

□ 判断矩阵

- 判断矩阵是我们自行输入的
- 初始数据要确保同一指标下单位一致，且进行归一化处理
- 归一化处理的代码实现就是双重for循环，分别对行和列进行操作
- 接下来到文件AHP.mlx中讲解代码

微信公众号：数学建模BOOM

□ 写出你的笔记

□ 费曼学习法

- 费曼学习法：以教代学
- 只有当你能够教会别人，才代表你真正学会了！

□ 有奖征集：每学完一期课程，整理笔记，发布在各平台

- 将你每节课所学到的，整理出一套笔记
- 尽量不要照搬或截图课程的内容
- 可自行发布在知乎/CSDN等等各类平台



费曼学习法

- ① 确定主题开始学习
- ② 理解所学内容
- ③ 把所学内容讲给别人
- ④ 把讲不清楚的地方去学明白

- 符合以下要求的文章，且文章点赞超过100或浏览量超1万的，可获取半价退款奖励（联系北海的QQ：1980654305）
- 1、标题设为：XXXX（模型或算法）——北海数学建模课程笔记
- 2、文章首行写：本文为北海的数模课程学习笔记，课程出自微信公众号：数学建模BOOM。

微信公众号：数学建模BOOM

□ “从零开始学数学建模” 系列课程

- 本期课程视频出自**b站up**：数学建模BOOM
- 全套课程请关注**微信公众号**：数学建模BOOM，回复“课程”

END

微信公众号：数学建模BOOM