

从零开始学数学建模

TOPSIS法

主讲人：北海

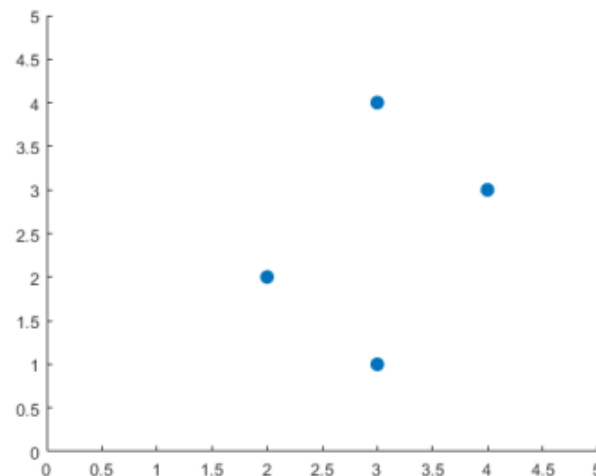
b站/公众号：数学建模BOOM

□TOPSIS法（理想解法）

□ 简单示例

- 法外狂徒张三所在的团伙要评选盗圣，每个人的“事迹”如表所示
- 试对这一伙人进行评估，评选出盗圣

姓名	盗窃成功次数	盗窃总价值（万）
张三	3	4
李四	4	3
王五	2	2
赵六	3	1



□ TOPSIS法基本概念

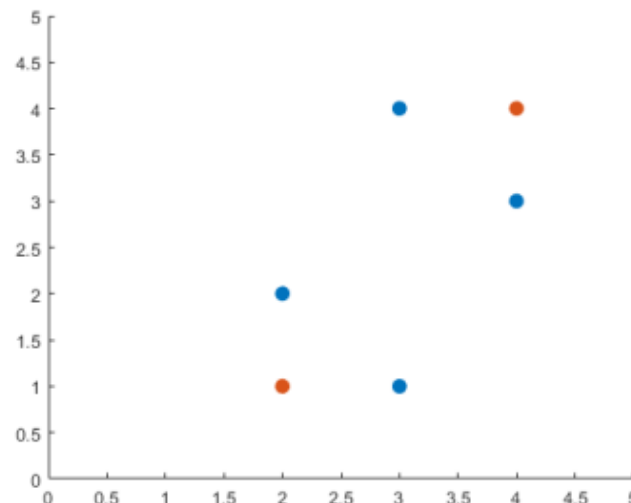
- 总共4人，有4种可能的结果/方案，方案集： $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\} = \{\text{张三}, \text{李四}, \text{王五}, \text{赵六}\}$
- 方案 d_i 的属性值（评价指标）构成向量 $[a_{i1}, a_{i2}]$ ，代表空间中的一个点
- 例如 $[a_{21}, a_{22}] = [4, 3]$ 代表二维空间中(4,3)这个点，现实意义是李四的盗窃成功次数和总价值

□基本概念

□ 正理想解和负理想解

- 理想中的盗圣：成功次数4，总价值4（集合了两条指标的最优值），称为**正理想解**
- 理想中的失败者：成功次数2，总价值1（集合了两条指标的最差值），称为**负理想解**
- 在一个二维坐标系中，以两个评价指标作为x和y，画出每个点
- 4人中距离理想中的盗圣**最近**、距离理想中的失败者**最远**的人，为盗圣

姓名	盗窃成功次数	盗窃总价值（万）
张三	3	4
李四	4	3
王五	2	2
赵六	3	1
正理想解	4	4
负理想解	2	1



- 思考：如果评价指标是3个呢？4个呢？n个呢？如果评价指标不在一个数量级呢？如果评价指标有负面的（例如被逮捕次数）呢？

TOPSIS法

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

□ 适用赛题

□ 客观评估类型题目

- 题目提供了**足够的评价指标和数据**
- 例如：为了客观评价我国研究生教育的实际状况和各研究生院的教学质量，已知各单位的人均专著数、师生比、科研经费和逾期毕业率，试进行一次研究生院评估
- **数据已知，评价指标的类型差异较大**（数值、比值、百分比，且有正面指标也有负面指标）

□ 模型特点

- **充分利用原始数据**，求解结果能反应各方案与理想方案差异程度
- 在**评价指标较多时**避免了主观性造成的复杂过程
- 数据计算简单易行，**无需数据检验**

微信公众号：数学建模BOOM

TOPSIS法

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

□典型例题

□ 评价研究生教育

- 现有5所研究生院的数据，如表所示
- 请建立模型，客观地评价研究生教育的实际状况和各研究生院的教学质量

院校编号	人均专著 (本/人)	生师比	科研经费 (万元/年)	逾期毕业率 (%)
1	0.1	5	5000	4.7
2	0.2	6	6000	5.6
3	0.4	7	7000	6.7
4	0.9	10	10000	2.3
5	1.2	2	400	1.8

□ 问题分析

- 1、当前指标数据中，并不都是越大越好
- 2、不同指标的单位不同、数量级不同，使得求点与点距离时对结果影响程度不同
- 所以使用TOPSIS法求不同方案与理想解的距离之前，先要进行数据预处理

□数据预处理

□ 指标数据并不都是越大越好

- 效益型属性：越大越好的属性，例如人均专著、科研经费
- 成本型属性：越小越好的属性，例如逾期毕业率
- 区间型属性：在某一区间内最好，过大或过小都不好，例如生师比

□ 处理方法

- 效益型属性无需处理
- 成本型属性，在代码求解时，求正理想解时对其取最小值，求负理想解时对其取最大值
- 区间型属性，根据数据与最优区间的差异进行处理

院校编号	人均专著（本/人）	生师比	科研经费（万元/年）	逾期毕业率（%）
1	0.1	5	5000	4.7
2	0.2	6	6000	5.6
3	0.4	7	7000	6.7
4	0.9	10	10000	2.3
5	1.2	2	400	1.8

□数据预处理

□ 数据预处理：区间型属性的变换

- 设第 j 个指标的最优属性区间为 $[a_j^0, a_j^*]$, a_j' 为无法容忍下限, a_j'' 为无法容忍上限, 则:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 - (a_j^0 - a_{ij}) / (a_j^0 - a_j'), & a_j' \leq a_{ij} < a_j^0 \\ 1, & a_j^0 \leq a_{ij} \leq a_j^* \\ 1 - (a_{ij} - a_j^*) / (a_j'' - a_j^*), & a_j^* < a_{ij} \leq a_j'' \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

院校编号	生师比
1	5
2	6
3	7
4	10
5	2

属性值
变换



院校编号	生师比
1	1
2	1
3	0.8333
4	0.3333
5	0

□ 翻译翻译

- 在最优属性区间内（最好的情况），值**设为1**；超出了可接受的范围，直接**设为0**
- 不在最优属性区间内、但是在还可接受的范围内，**按公式改为0到1的值**
- 设生师比最优区间为 $[5, 6]$, $a_2' = 2$, $a_2'' = 12$, 可求得变换后的数据

□数据预处理

□ 数据预处理：向量规范化

- 无论成本型属性还是效益型属性，都用相同公式进行变换：
- 规范化后的数值，同一属性值（评价指标）的平方和为1
- 确保不同评价指标在同一数量级（0到1之间）
- 变换前后，每个属性值（评价指标）中的数据的大小排序不变

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m a_{ij}^2}}$$

院校编号	人均专著	生师比	科研经费	逾期毕业率
1	0.1	5	5000	4.7
2	0.2	6	6000	5.6
3	0.4	7	7000	6.7
4	0.9	10	10000	2.3
5	1.2	2	400	1.8

院校编号	人均专著	生师比	科研经费	逾期毕业率
1	0.0638	0.597	0.3449	0.4546
2	0.1275	0.597	0.4139	0.5417
3	0.2550	0.4975	0.4829	0.6481
4	0.5738	0.199	0.6898	0.2225
5	0.7651	0	0.0276	0.1741

区间型属性
(生师比)变换
+ 向量规范化

□ 加权处理

□ 不同指标的重要性不同

- 与层次分析法的两两比较不同，TOPSIS法直接给每个指标加上权重（查文献、资料）
- 因为TOPSIS法充分利用了数据的差异，只要权重设置的不是太离谱，对结果影响不会太大

□ 加权处理

- 设权向量为 $w = [0.2, 0.3, 0.4, 0.1]$ ，加权处理后的数据：

院校编号	人均专著	生师比	科研经费	逾期毕业率
1	0.0128	0.1791	0.1380	0.0455
2	0.0255	0.1791	0.1656	0.0542
3	0.0510	0.1493	0.1931	0.0648
4	0.1148	0.0597	0.2759	0.0222
5	0.1530	0	0.0110	0.0174

微信公众号：数学建模BOOM

□最终求解

□ 求解思路

- 第 j 个属性（指标）的正理想解： $c_j^* = \begin{cases} \max_i c_{ij}, & j \text{ 为效益型属性} \\ \min_i c_{ij}, & j \text{ 为成本型属性} \end{cases}$
- 第 j 个属性（指标）的负理想解： $c_j^0 = \begin{cases} \min_i c_{ij}, & j \text{ 为效益型属性,} \\ \max_i c_{ij}, & j \text{ 为成本型属性,} \end{cases}$
- 第 i 个方案到正理想解的距离： $s_i^* = \sqrt{\sum_{j=1}^n (c_{ij} - c_j^*)^2}$
- 第 i 个方案到负理想解的距离： $s_i^0 = \sqrt{\sum_{j=1}^n (c_{ij} - c_j^0)^2}$

□ 最终求解

- 各方案的**综合评价指数**： $f_i^* = s_i^0 / (s_i^0 + s_i^*)$
- 显然，距离正理想解越近（ s_i^* 越小）、距离负理想解越远（ s_i^0 越大）越好
- 按 **f_i^* 从大到小排序**方案的优劣，即为所求

TOPSIS法

- 模型简介
- 适用赛题
- 典型例题与原理讲解
- 代码求解

□代码求解

□ 求解过程

- 输入原始数据
- 数据预处理：区间型属性的变换
- 数据预处理：向量规范化
- 加权处理
- 按照公式求正负理想解、各方案与正理想解的距离
- 求各方案的综合评价指数
- 接下来到文件TOPSIS.mlx讲解代码

□ 最终结果

排名	综合评价指数	对应院校
1	0.7003	4
2	0.6255	3
3	0.5787	2
4	0.5258	1
5	0.3165	5

微信公众号：数学建模BOOM

□ 写出你的笔记

□ 费曼学习法

- 费曼学习法：以教代学
- 只有当你能够教会别人，才代表你真正学会了！

□ 有奖征集：每学完一期课程，整理笔记，发布在各平台

- 将你每节课所学到的，整理出一套笔记
- 尽量不要照搬或截图课程的内容
- 可自行发布在知乎/CSDN等等各类平台



费曼学习法

- ① 确定主题开始学习
- ② 理解所学内容
- ③ 把所学内容讲给别人
- ④ 把讲不清楚的地方去学明白

- 符合以下要求的文章，且文章点赞超过100或浏览量超1万的，可获取半价退款奖励（联系北海的QQ：1980654305）
- 1、标题设为：XXXX（模型或算法）——北海数学建模课程笔记
- 2、文章首行写：本文为北海的数模课程学习笔记，课程出自微信公众号：数学建模BOOM。

□ “从零开始学数学建模” 系列课程

- 本期课程视频出自**b站up**：数学建模BOOM
- 全套课程请关注**微信公众号**：数学建模BOOM，回复“课程”

END

微信公众号：数学建模BOOM