# 第四章 向量与矩阵的范数

本章数域$\mathbb{F}$指实数域$\mathbb{R}$或复数域$\mathbb{C}$.

## 4.1 向量范数

定义

定义（向量范数）

设$V$是$\mathbb{F}$上的线性空间. $V$上的实值函数

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^{+}$$

称为$V$上的一个范数，如果它满足

（1）正定性：对任意非零向量$x$，$\|x\| > 0$.

（2）正齐性：对任意向量$x$及任意数$k$，$\|xk\| = \|x\| \, |k|$.

（3）三角不等式：对任意两个向量$x$和$y$，$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

定理（向量范数的性质）

（1） $\|0\|=0$.

（2） $\|-x\|=\|x\|$.

（3） $\|x-y\|\geq|\|x\|-\|y\||$.

（4） $\|x+y\|\geq|\|x\|-\|y\||$.

例（内积空间中向量的长度是范数）

以下约定，凡是说到长度，都是专指内积空间中由内积定义的长度.

问题：范数何时是长度?

定理（范数何时是长度?）
范数是长度的充要条件是它满足平行四边形公式，即:

设$\|\cdot\|$是线性空间$V$上的一个范数．如果它满足平行四边形公式，即对任意两个向量$x$和$y$，

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right),$$

则存在唯一的$V$上的一个内积$\langle\cdot\rangle$，使得对任意向量$x$

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}.$$

例（$\mathbb{C}^n$ 上的 $p$ -范数）

对任意 $x \in \mathbb{C}^n$， $1 \le p \le \infty$， 定义

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}, & p = \infty. \end{cases}$$

可以证明， $\|\cdot\|_p$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的范数，称为 $p$ -范数.

以下事实

$$\lim_{p\to\infty}\left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

解释了记号 $\|\cdot\|_\infty$ 的合理性.

例（$p$-范数中只有 2-范数是长度）

只需证明，当 $p\neq 2$ 时，$p$-范数不满足平行四边形公式．例如，在 $\mathbb{C}^2$ 中，取

$$x=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad y=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

分别计算四个范数

$$\|x\|_p=\|y\|_p=1,\quad \|x+y\|_p=\|x-y\|_p=2^{\frac{1}{p}}.$$

$$\|x\|_\infty=\|y\|_\infty=\|x+y\|_\infty=\|x-y\|_\infty=1.$$

易见，

$$\left(\|x+y\|_p\right)^2+\left(\|x-y\|_p\right)^2\neq 2\left(\|x\|_p{}^2+\|y\|_p{}^2\right).$$

问题：既然已经有了长度，为什么还要考虑不是长度的范数？

引入范数使得我们可以考虑两个向量的距离．而距离好处有两个，分别是定性的和定量的．定性的方面是可以考虑极限，进而引入连续，导数与积分等数学分析的方法．定量的方面是可以为最优逼近问题提供逼近性能指标．定性的角度来说，各种范数的作用是等价的（范数的等价性）；但就提供符合实际需求的逼近性能指标来说，不同的范数起着不同的作用，给出的“最优解”也不同．

**定义（范数定义距离）**

设 $\|\cdot\|$ 是向量空间 $V$ 上的范数. 对任意 $x, y \in V$，记

$\mathrm{d}(x,y)=\|x-y\|$. 如此决定了 $V$ 上的二元函数

$$\mathrm{d}(\cdot,\cdot): V\times V\to\mathbb{R}^+,$$

称为由范数 $\|\cdot\|$ 定义的距离.

**例（中位数作为最小一乘估计）**

**范数的等价性**

# 4.2 矩阵范数

定义（矩阵范数）

设对任意的正整数 $m$ 和 $n$，及任意的 $m\times n$ 矩阵 $A$，都有一个对应的实数 $\|A\|$. 若该对应关系满足

（1）正定性：对任意 $m\times n$ 的任意非零矩阵 $A$，都有 $\|A\|>0$.

（2）正齐性：对任意矩阵 $A$ 及数 $k$，$\|kA\|=|k|\|A\|$.

（3）三角不等式（加法相容性）：若矩阵 $A$ 和 $B$ 可以相加，则 $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$.

（4）乘法相容性：若矩阵 $A$ 和 $B$ 可以相乘，则 $\|AB\|\le\|A\|\|B\|$

则称对应关系 $\|\cdot\|$ 是一个矩阵范数.

其实，严格地说，$\|\!|\cdot|\!\|$应理解为一个映射

$$\|\!|\cdot|\!\|: \bigcup_{m,n\geq 1} \mathbb{F}^{m\times n} \rightarrow \mathbb{R}.$$

例（Hilbert-Schmidt 范数）

## 向量范数导出矩阵范数

观察：由于具体向量 $x \in \mathbb{F}^n$ 其实也就是 $n \times 1$ 的矩阵，因此任一矩阵范数也就同时给出了标准向量空间 $\mathbb{F}^n$，也就是 $\mathbb{F}^{n\times 1}$，$n = 1, 2, \ldots$，上的向量范数.

反之，也可以从已知的标准向量空间 $\mathbb{F}^n$，$n = 1, 2, \ldots$，上的向量范数，决定出一个矩阵范数.

定理（向量范数诱导矩阵范数）

设对任意的正整数 $k=1,2,\ldots$，给定了标准向量空间 $\mathbb{F}^k$ 上的向量范数 $\|\cdot\|_{\alpha_k}$．对任意的正整数 $m$ 和 $n$，及任意的 $m\times n$ 矩阵 $A$，定义

$$\|A\| := \max\left\{\frac{\|Ax\|_{\alpha_m}}{\|x\|_{\alpha_n}} : x\in\mathbb{F}^n, x\neq 0\right\} = \max\left\{\|Ax\|_{\alpha_m} : x\in\mathbb{F}^n, \|x\|_{\alpha_n}=1\right\}$$

则 $\|\cdot\|$ 为一矩阵范数，称为由向量范数 $\|\cdot\|_{\alpha_k}$，$k=1,2,\ldots$，导出的矩阵范数.

注意，当 $\|\cdot\|_{\alpha_1}$ 是 $\mathbb{F}^1$（即实数域或复数域）上的绝对值时，如上导出的矩阵范数限制在 $\mathbb{F}^k=\mathbb{F}^{k\times 1}$ 上，才与 $\|\cdot\|_{\alpha_k}$ 重合.

注（向量范数诱导矩阵范数的几何意义）

最大增益(信号与系统的观点)；长度最大放大率(几何的观点).

因此矩阵范数是许多系统设计指标的要利用的工具.

例（向量的 $p$-范数导出的矩阵范数）

# 4.3 范数应用举例

矩阵值序列与函数

矩阵指数函数

范数控制特征值

可逆性的范数条件

矩阵的条件数