2024-2025-2 微积分 II 试卷 A 参考答案

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分，每题选项中只有一个正确答案）.

1、以下 4 个命题，正确的个数为（ B ）

(1)若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，则函数 $f(x,y)$ 在该点偏导数存在；

(2)若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，则函数 $f(x,y)$ 在该点偏导数连续；

(3)若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，则函数 $f(x,y)$ 在该点连续；

(4)若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续且偏导数存在，则函数 $f(x,y)$ 在该点可微.

(A)1；　(B)2；　(C)3；　(D)4.

2、曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为（ B ）

(A) $x-y+z-2=0$；　(B) $x-y+z+2=0$；

(C) $x-y-z+2=0$；　(D) $x-y-z-2=0$.

3、二重积分 $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2}dx=$（ A ）

(A) $\frac{\pi}{4}(e-1)$；　(B) $\frac{\pi}{2}(e-1)$；　(C) $\frac{\pi}{4}e$；　(D) $\frac{\pi}{2}e$.

4、若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 $x=2$ 收敛，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在点 $x_1=-2$ 和 $x_2=-1$ 处分别（ B ）

(A)不确定，绝对收敛；　(B)不确定，不确定；

(C)发散，不确定；　(D)发散，绝对收敛.

5、函数 $f(x)=(x+1)^2(0<x\le 2)$ 以 4 为周期的正弦级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(7)=$（ D ）

(A) 64；　(B) -64；　(C) 4；　(D) -4.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2+y^2}=$ ___0___.

2、函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $A(1,2,0)$ 处沿点 A 指向点 $B(2,4,2)$ 方向的方向导数为 2__.

3、设 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，其周长为 a，则 $\oint_L (x^2+4xy+4y^2)ds=$____$\underline{4a}$_____.

4、设 $\vec{F}(x,y,z)=(2x+3y)\vec{i}-(xz+y^2)\vec{j}+(y^2+2z)\vec{k}$，则 $\operatorname{div}\vec{F}\big|_{(2,1,3)}=$____$\underline{2}$____.

5、级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n3^{n+1}}=$____$\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{3}{2}$______。

三、(10 分) 设 $z=f(2x-y,y\sin x)$，其中 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2f_1+y\cos xf_2$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-f_1+\sin xf_2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2(-f_{11}+\sin xf_{12})+\cos xf_2+y\cos x(-f_{21}+\sin xf_{22})$$
$$=-2f_{11}+(2\sin x-y\cos x)f_{12}+\cos xf_2+y\cos x\sin xf_{22}$$

四、(10 分) 设 S 为锥面 $z^2=3(x^2+y^2)$ 被平面 $z=0$ 和 $z=3$ 所截部分，密度 $\rho=(x-y)^2$ 的物质分布在 S 上，求分布在该锥面上的物质质量.

解：物质质量 $M=\iint\limits_S (x-y)^2 dS$.

由 $z^2=3(x^2+y^2)\Rightarrow z=\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow z_x=\dfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2+y^2}},z_y=\dfrac{\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\Rightarrow dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=2dxdy\Rightarrow M=2\iint\limits_D (x-y)^2dxdy$，其中 $D:x^2+y^2\le 3$.

由对称性，$M=2\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy-4\iint\limits_D xydxdy=2\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}r^3dr=4\pi\cdot\frac{9}{4}=9\pi.$$

五、(10 分) 设 V 由 $\dfrac{x^2+y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}\le 1$ 和 $0\le z\le 3$ 确定，求立体 V 的形心坐标.

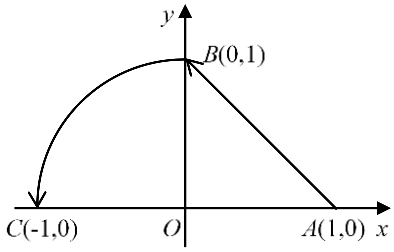
解：设形心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性得 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$\iiint\limits_V dV=\int_0^3 dz\iint\limits_{D_z}dxdy=\pi\int_0^3(4-\frac{4}{9}z^2)dz=8\pi$$

$$\iiint\limits_V zdV=\int_0^3 zdz\iint\limits_{D_z}dxdy=\pi\int_0^3 z(4-\frac{4}{9}z^2)dz=9\pi$$

因此 $\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_V zdV}{\iiint\limits_V dV}=\dfrac{9}{8}$，所以$V$ 的形心坐标为$(0,0,\dfrac{9}{8})$.

六、(10 分) 设L由位于第一象限的直线段$x+y=1$与位于第二象限的圆弧$x^2+y^2=1$构成的曲线，方向由$A(1,0)$到$B(0,1)$再到$C(-1,0)$（如右图所示），求曲线积分



$$I=\int_L (x+e^{\sin y})dy-\left(y-\frac{1}{2}\right)dx$$

解: 作辅助线$\overline{CA}$，记L与$\overline{CA}$所围区域为D，记$P=-\left(y-\dfrac{1}{2}\right),Q=x+e^{\sin y}$，由格林公式，

得$\displaystyle\int_{L+\overline{CA}}(x+e^{\sin y})dy-\left(y-\frac{1}{2}\right)dx=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_D 2dxdy$

$=2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}+1$

由$\overline{CA}$方程$y=0$，得$\displaystyle\int_{\overline{CA}}(x+e^{\sin y})dy-\left(y-\frac{1}{2}\right)dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dx=1$

所以$I=\left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)-1=\dfrac{\pi}{2}$.

七、(12 分) 计算$I=\displaystyle\iint\limits_S\frac{2x^3}{\sqrt{x^2+y^2+z}}dydz+\frac{2y^3}{\sqrt{x^2+y^2+z}}dzdx+\frac{3(z^2-1)}{\sqrt{x^2+y^2+z}}dxdy$，其中

S是曲面$z=1-x^2-y^2(z\geq 0)$的上侧.

法一：由曲面方程$x^2+y^2+z=1$，得$I=\displaystyle\iint\limits_S 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$.

设$S_1:z=0(x^2+y^2\leq 1)$，取下侧，记V为S和S_1所围立体，由高斯公式:

$$\iint\limits_{S+S_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=\iiint\limits_V 6(x^2+y^2+z)dxdydz$$

$$=6\iiint\limits_V(x^2+y^2)dxdydz+6\iiint\limits_V zdxdydz=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr\int_0^{1-r^2}dz+6\int_0^1 zdz\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1-z}dxdy$$

$$=12\pi\int_0^1 r^3(1-r^2)dr+6\pi\int_0^1 z(1-z)dz=\pi+\pi=2\pi$$

$$\iint\limits_{S_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}3\cdot(-1)dxdy=3\pi$$

所以$I=2\pi-3\pi=-\pi$.

法二：由曲面方程$x^2+y^2+z=1$，得$I=\displaystyle\iint\limits_S 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$.

由曲面方程$z=1-x^2-y^2$，得$z_x=-2x, z_y=-2 \Rightarrow \vec{n}=(-z_x,-z_y,1)=(2x,2y,1)$

向量值函数$\vec{F}=(2x^3,2y^3,3(z^2-1))=(2x^3,2y^3,3((1-x^2-y^2)^2-1))$

$$I=\iint_{x^2+y^2\le 1}(\vec{F}\bullet\vec{n})dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 1}(7x^4+7y^4+6x^2y^2-6x^2-6y^2)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(7r^5\cos^4\theta+7r^5\sin^4\theta+6r^5\cos^2\theta\sin^2\theta)dr-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 6r^3dr$$

$$=\int_0^{2\pi}(7\cos^4\theta+7\sin^4\theta+6\cos^2\theta\sin^2\theta)d\theta\int_0^1 r^5dr-3\pi$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}(7\cos^4\theta+7\sin^4\theta+6(1-\sin^2\theta)\sin^2\theta)d\theta-3\pi$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(7\cos^4\theta+7\sin^4\theta+6(1-\sin^2\theta)\sin^2\theta)d\theta-3\pi=\frac{2}{3}\cdot 3\pi-3\pi=-\pi$$

八、（10 分）把函数$f(x)=\ln(x^2+7x+6)$展开成x的幂级数，并求出$f^{(n)}(0)(n\ge 1)$.

解：$f(x)=\ln[(x+6)(x+1)]=\ln[6(1+\frac{x}{6})(1+x)]=\ln 6+\ln(1+\frac{x}{6})+\ln(1+x)$

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n, x\in(-1,1]$$

$$\ln(1+\frac{x}{6})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 6^n}x^n, x\in(-6,6]$$

所以$f(x)=\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 6^n}\right]x^n, x\in(-1,1]$

由$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 6^n}\Rightarrow f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!(6^n+1)}{6^n}(n\ge 1)$

九、（8 分）设数列$\{a_n\}$单调递减，而且$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$收敛.

证明：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=0\Rightarrow a_n\ge 0,(n=1,2,\cdots)$.

记$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1})$，则$S_n=(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+\cdots+n(a_n-a_{n+1})=\sum_{k=1}^{n}a_k-na_{n+1}$.

$$=\sum_{k=1}^{n}a_k-(n+1)a_{n+1}+a_{n+1}$$

记$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，则$\sum_{k=n+1}^{2n}a_k=\sigma_{2n}-\sigma_n\to 0$.

另一方面，$\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \geq na_{2n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} na_{2n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} 2na_{2n} = 0$，

而$0 \leq (2n+1)a_{2n+1} \leq (2n+1)a_{2n} = 2na_{2n} + a_{2n} \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} na_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1} = 0$，所以$\lim_{n\to\infty} S_n$存在，从而$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$收敛.