保密★启用前

2022-2023 学年第二学期期末考试

《概率论与数理统计 A》

考生注意事项

1．答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生**学号**和考生姓名；在答题卡指定位置上填写考试科目、考生姓名和考生**学号**，并涂写考生**学号**信息点。
2．选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
3．填(书)写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4．考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

(以下信息考生必须认真填写)

考生学号								
考生姓名								

一、选择题：共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效．

1. 设随机变量X的分布函数$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1, \\ 1-e^{-x}, & x\ge 1. \end{cases}$

则$P\{X=1\}=(\quad)$．

（A）0　（B）$\dfrac{1}{2}$　（C）$\dfrac{1}{2}-e^{-1}$　（D）$1-e^{-1}$

2. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，密度函数为 $f(x)$, 且 $f(1)=1$, $P\{X\ge 1\}=\dfrac{1}{2}$，则（　　）．

（A）$\mu=1,\sigma^2=1$　（B）$\mu=1,\sigma^2=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

（C）$\mu=1,\sigma^2=\dfrac{1}{2\pi}$　（D）$\mu=0,\sigma^2=1$

3. 若随机变量 X 与 Y 满足 $Y=1-\dfrac{X}{2}$，且 $D(X)=2$，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$（　　）．

（A）1　（B）2　（C）-1　（D）-2

4. 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，则（　　）．

（A）$P\{X+Y\le 1\}=\dfrac{1}{2}$　（B）$P\{X-Y\le 1\}=\dfrac{1}{2}$

（C）$P\{X+Y\le 0\}=\dfrac{1}{2}$　（D）$P\{X-Y\le 0\}=\dfrac{1}{2}$

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 $N(1,2^2)$ 的一个样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则下列结论中正确的是（　　）．

（A）$\dfrac{\bar{X}-1}{2/\sqrt{n}}\sim t(n)$　（B）$\dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2\sim F(n,1)$

（C）$\dfrac{\bar{X}-1}{\sqrt{2}/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$　（D）$\dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2\sim \chi^2(n)$

6. 设 X_1,X_2 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，若 $aX_1+\dfrac{1}{2023}X_2$ 为 μ 的一个无偏估计，则常数 $a=$（　　）．

（A）$\frac{1}{2023}$　　（B）$-\frac{1}{2023}$　　（C）$\frac{2022}{2023}$　　（D）$-\frac{2022}{2023}$

二、填空题：共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分．请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效．

1. 已知$P(A)=\frac{1}{2}$， $P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，概率$P(A\cup B)=$_____.

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，具有相同的分布律，

X	0	1
P	0.4	0.6

则 $\max\{X,Y\}$ 的分布律为_______________.

3. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

对 X 独立重复地观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，则 $E(Y^2)=$________.

4. 设在每次试验中，事件 A 发生的概率是 0.8，用 X 表示 1000 次独立试验中事件 A 发生的次数，根据切比雪夫不等式，有 $P\{760<X<840\}\ge$ ________.

5. 设总体 $X\sim N(\mu,3^2)$，要使未知参数 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间的长度 $L\le 2$，样本容量 n 至少为_______.

6. 设 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，若 σ^2 未知，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，检验假设为 $H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\ne\mu_0$，则应取检验统计量为_______.

三、解答题：满分 8 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

已知 9 支手枪中有 6 支已校准过，3 支未校准。一名射手如果用校准过的手枪射击，命中率为 0.9，如果用未校准过的手枪射击，命中率为 0.3。现从这 9 支手枪中任取一支射击。求：（1）他能命中目标的概率；（2）如果他命中目标，则所用的手枪是校准过的概率。

四、解答题：满分 8 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1,\\ k(2-x), & 1\le x<2,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

求(1) k 的值；(2)随机变量 X 落在 $(1,3)$ 内的概率．(3) X 的分布函数．

五、解答题：满分 6 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

据以往经验，某种电器元件的寿命服从均值为 100h 的指数分布，现随机地取 16 只，设它们的寿命是相互独立的，求这 16 只元件的寿命总和大于 1920h 的概率.
（$\Phi(0.8)=0.7881$）

六、解答题：满分 8 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设总体 X 具有概率分布

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 是未知参数，已知来自总体 X 的样本值为 1，2，1，3. 求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

七、解答题：满分 6 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2),X_1,X_2,\cdots,X_{2n}(n\geq 2)$ 为取自 X 的样本，其样本均值为

$$\bar{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$$

且

$$Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})^2$$

求 $E(Y)$.

八、解答题：满分 14 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设 A 和 B 为两个随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{4},P(B|A)=\frac{1}{3},P(A|B)=\frac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}，\\ 0, & A\text{不发生}，\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}，\\ 0, & B\text{不发生}，\end{cases}$$

求 X 与 Y 的联合概率分布和 $Z=X^2+Y^2$ 的概率分布.

九、解答题：满分 14 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

已知二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}ke^{-(2x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$（1）求系数 k；（2）求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$；（3）判断 X 和 Y 是否相互独立；（4）计算概率 $P\{X<2|Y<1\}$.