保密★启用前

2023-2024学年第二学期期末考试

《概率论与数理统计A》

考生注意事项

1．答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生**学号**和考生姓名；在答题卡指定位置上填写考试科目、考生姓名和考生**学号**，并涂写考生**学号**信息点.
2．选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内.超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效.
3．填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用2B铅笔填涂.
4．考试结束，将答题卡和试题册按规定交回.

(以下信息考生必须认真填写)

考生教学号								
考生姓名								

一、选择题：共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效．

1．设随机事件 A 与 B 互不相容,则(　　).

(A) $P(\overline{AB})=0$;　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$;

(C) $P(A)=1-P(B)$;　　(D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$.

2．设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$ 相互独立,则(　　).

(A) $a=0.2,b=0.3$;　　(B) $a=0.4,b=0.1$;

(C) $a=0.3,b=0.2$;　　(D) $a=0.1,b=0.4$.

3.已知雷达的圆形屏幕半径为 R，设目标出现点 (X,Y) 在屏幕上服从均匀分布,则 $P\{Y>0|Y>X\}$=(　　).

(A) $\frac{1}{2}$;　　(B) $\frac{3}{4}$;　　(C) $\frac{1}{8}$;　　(D) $\frac{3}{8}$.

4.设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 独立同分布,且其方差为 $\sigma^2>0$.令 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,则(　　).

(A) $D(X_1+Y)=\frac{n+2}{n}\sigma^2$;　　(B) $D(X_1-Y)=\frac{n+1}{n}\sigma^2$;

(C) $\operatorname{cov}(X_1,Y)=\frac{\sigma^2}{n}$;　　(D) $\operatorname{cov}(X_1,Y)=\sigma^2$.

5.将一枚硬币重复掷 n 次,以 X 和 Y 分别表示正面朝上和反面朝上的次数,则 X 与 Y 的相关系数为(　　).

(A) 1;　　(B) －1;　　(C) 0;　　(D) 0.5.

6. 设总体 $X\sim N(\mu,1), X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本,检验假设为 $H_0:\mu=0, H_1:\mu\neq 0$, 则应取检验统计量(　　).

(A) $\sum_{i=1}^{n}X_i^2$;　　(B) $(n-1)S^2$;　　(C) $\frac{\overline{X}}{S}\sqrt{n}$;　　(D) $\sqrt{n}\,\overline{X}$.

二、填空题：共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分．请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效．

1. 已知$P(A)=\dfrac{1}{4}, P(B|A)=\dfrac{1}{3}$, 则$P(A\overline{B})=$____________.

2. 设随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.3, & -1\le x<1,\\ 0.4, & 1\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$ 则$E(X)=$____________.

3.已知随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, 0\le x\le 4,\\ 0, \quad 其它.\end{cases}$，则随机变量$Y=2X+8$的概率密度为$f_Y(y)=$____________.

4.已知二维随机变量(X,Y)服从二维正态分布$N(2,2,1,5,0)$, 则根据切比雪夫不等式可知$P\{|X-Y|\ge 6\}\le$ ______________.

5.设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自总体$X\sim N(0,1)$的样本,则$E[(\overline{X}S^2)^2]=$ ____________.

6.设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本,若σ^2未知, $\overline{X}和S^2$分别为样本均值和样本方差,则μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间是____________.

三、计算题：满分 10 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

已知来自甲、乙、丙三个学校的学生进行体质达标测试,每个学校参与人数相同,测试不合格的学生分别占 7%, 12%, 11%. 现随机抽取一名学生,求(1)抽到的学生测试不合格的概率;(2)若抽到的学生测试不合格,则其来自乙校的概率.

四、计算题：满分 8 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设随机变量X的概率密度函数为

$$f(x)=Ce^{-|x|},\ -\infty<x<\infty .$$

(1)求常数C; (2)若$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的样本,其样本方差为S^2,求$E(S^2)$.

五、计算题：满分 8 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

已知一批零件长度为随机变量X,且$X\sim N(16,\ 25)$ (单位:厘米),现独立抽取三个零件观测,求至少有一个零件长度大于 16 厘米的概率.

六、证明题：满分 6 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x\ge\theta,\\ 0, & x<\theta,\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数, $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自总体 X 的样本,记 $\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，证明 $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计量.

七、计算题：满分 10 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设 X 与 Y 相互独立,且服从同一分布,已知 X 的分布律为

$$P\{X=i\}=\frac{1}{3},i=1,2,3.$$

设 $M=\max(X,\ Y),N=\min(X,\ Y)$.求(1)二维随机变量(X,Y)的概率分布;

(2) $\operatorname{cov}(X+Y,X-Y)$;(3)二维随机变量(M,N)的概率分布(概率分布只需列出表格).

八、计算题：满分 10 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(x+y), & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

(1) 判断 X 与 Y 是否相互独立; (2)求 ρ_{XY} .

九、计算题：满分 12 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, & x>\alpha,\\ 0, & x\le\alpha.\end{cases}$$

其中 $\alpha>0,\beta>1$ 为参数.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本.

(1)当 $\alpha=1$ 时,求未知参数 β 的矩估计量和最大似然估计量;

(2)当 $\beta=2$ 时,求未知参数 α 的最大似然估计量.