最大公约数重要性质及推广形式的应用

◎张　葳　（同济大学电子与信息工程学院　201804）

【摘要】初等数论中，关于最大公约数的问题是竞赛中的热点之一. 本文以一条重要性质及推广形式为基础，讨论了此性质及推广形式的应用.

【关键词】最大公约数；重要性质；推广形式；互素

1. 重要性质简介

初等数论中，有一条重要的性质：$ax+by=(a,b)$. 它表示对任意非零整数 a,b 存在一对整数 x,y 使得 $ax+by$ 一定是 a,b 的最大公约数.

证明如下：设非零整数 a,b 的最大公约数为 n，则一定有 $n|a$ 且 $n|b$. $a=k_1n$，$b=k_2n$.

$ax+by=(k_1x+k_2y)\times n$. 当 $k_1x+k_2y=1$ 时，上述等式就取得 a,b 的最大公约数. 当 $k_1x+k_2y\neq1$ 时，那 $ax+by=kn$ 是最大公约数的整数倍.

性质的第一种推广形式是裴蜀等式，该等式实际上是该性质的一种特殊形式，我们令 $(a,b)=1$，即 a,b 互为素数（以下简称互素），就可以得到著名的裴蜀等式 $ax+by=1$. 这也找到了判断两个整数互素的重要方法，即如果对于任意非零的两个整数 a,b，存在一组整数 x,y 使得 $ax+by=1$ 成立，那么一定可以得出 a,b 互素.

证明如下：采用反证法，假设 $ax+by=1$，a,b 不互素. 利用刚得出的第一条性质可以得出 $ax+by=(k_1x+k_2y)\times n=1$. 根据最大公约数的定义 n 一定为整数，所以得出 (k_1x+k_2y) 一定不是整数，显然不成立. 我们可以得出结论，只有一种情况是可能的：$(k_1x+k_2y)=1$，$n=1$ 这也说明了 a,b 一定互素.

重要性质的第二种推广形式：我们很容易从两个数的判别方法得到三个数的方法. 显然存在 $ax+by+cz=(a,b,c)$，与此同时也得到了三个数的裴蜀等式即 $ax+by+cz=1$ 可以说明非零整数 a,b,c 互素，但值得注意的是不能说明三个整数之间两两互素. 由此可以把性质推广到 n 个整数，即 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=1$ 也是 n 个整数的裴蜀等式.

重要性质的第三种推广形式：即已知 n 个整数如何判断它们两两互素. 有前面的推广形式，显然 $a_1x_1+a_2x_2=1$，$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=1$，$\cdots$，$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=1$ 一共有 $n-1$ 个方程可以判断出 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 任意两个整数都互素.

2. 重要性质及推广形式的应用

例 1　对任意整数 n，证明分数 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 是即约分数.

分析　本题的实质是证明 $21n+4$ 和 $14n+3$ 互质，采用裴蜀等式可以很快的出结果.

观察发现 $[21,14]=42$，可以想到证明思路.

证明　利用裴蜀等式 $3\times(14n+3)-2\times(21n+4)=1$，很快就可以说明题目中的分母与分子互素，所以是即约分数.

小结　如果不利用裴蜀等式，证明会变得比较困难. 事实上，$2\times(21n+4)-3\times(14n+3)=-1$，也可以说明分子和分母互素. 所以 $|ax+by|=1$ 可以作为判定的条件.

例 2　设 n 为正整数，证明：$(n!+1,(n+1)!+1)=1$.

分析　本题目和上面的例子类似，只是告诉我们在裴蜀等式的应用过程中，选取 x,y 不一定是现实的数字，也有可能是一些抽象的整数，比如 n. 还有很重要的一点，在寻找裴蜀等式中的 x,y 得到 $ax+by=1$ 有时候会很困难，所以需要借助一些辅助方法.

证明　根据第一条重要性质，有 $(n+1)\times(n!+1)-1\times(n+1)!-1=n$. 显然，$n=(a,b)$.

一定有 $n|n!+1$ 且 $n|(n+1)!+1$，又因为 $n|n!$ 和 $n|(n+1)!$，所以可以得到 $n|1$，即 $n=1$.

利用裴蜀等式很容易说明 $(n!+1,(n+1)!+1)=1$.

总结　这里有一种数论中常用的方法，若 $n|a+b$，且有 $n|a$，一定可以得出 $n|b$. 利用此方法和其他方法结合可以解决很多棘手的问题.

例 3　可以表示成 $1457x+1705y$ 的最小正整数是多少?

分析　因为对于性质一而言，本题从相反的角度来考虑问题. 熟悉性质的话不难想到 $ax+by=(a,b)$. 问题迎刃而解，本质为求两个数的最小公约数.

解　$1705=5\times11\times31$，$1457=31\times47$，根据性质可以知道 $(a,b)=31$，答案为 31.

小结　对性质的灵活应用，还有关键的一点看出 $11|341$，先分解 1705 比较简单.

例 4　有一种盒子能装 3 斤糖，另外一种盒子能装 6 斤糖，假定每一个盒子必须装满，问：用这两种盒子能装完 100 斤糖吗?

分析　应用问题，利用最大公约数的性质可以快速求解.

解　利用性质 $3x+6y=k\times(3,6)$，$(3,6)=3$，$3k\neq100$，所以这两种盒子不可能装完一百斤糖.

小结　生活中的数论应用问题.

例 5　设 $(a,b)=1$，证明：$(a+b,ab)=1$.

分析　采用反证法证明，要充分利用 a,b 互素的已知条件.

证明　采用反证法. 设 $(a+b,ab)=t$，t 为整数且不为 1. 因为整数 a,b 互素，且 $t|ab$，$t|a+b$.

所以 $t=a$ 或 b 或 ab，否则与题意矛盾.

分三种情况分别讨论：

(1) $t=a$ 时，由 $t|a+b$ 可以得知 $t|b$，$(a,b)=t$，$t\neq1$，所以 a 与 b 不互素. 与原题意矛盾.

(2) $t=b$ 时，同上可证.

(3) $t=ab$ 时，不妨设 $\frac{a+b}{ab}=k$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=k$，可以设 $b=a+r$，$\frac{1}{a+r}+\frac{1}{a}=k$，整理得关于 a 的方程 $ka^2+(kr-2)\times a-r=0$，解为 $a=\frac{2-kr+\sqrt{S}}{2k}$，$S=k^2r^2+4$，所以 S 一定是完全平方数.

$k^2r^2+4=u^2$,可以变形为 $k^2r^2-u^2=4$,$(kr+u)\times(kr-u)=4$ 列出所有可能性:

$kr+u=2$ 和 $kr-u=2$; $kr+u=1$ 和 $kr-u=4$; $kr+u=4$ 和 $kr-u=1$; 三种情况下,第一组解得到 $kr=1$,显然排除,后两组中 u 不是整数,排除. 这就说明了 $(a+b,ab)=1$.

总结　通过反证法不借助最大公约数的性质也可以作出此题.

例6　设 $(a,b)=1$,证明: $(a^2+b^2,ab)=1$.

分析　此题和上面的题目类似,采用性质证明会比采用上面题目类似的证明简单.

证明　和例题五类似,采用反证法,设 $(a^2+b^2,ab)=t\neq1$,利用 a 与 b 互素,可以同理证出前两种情况,即 $t\neq a$,$t\neq b$.

对于第三种情况,首先利用裴蜀等式,存在 x,y 使得 $ax+by=1$. 利用性质可以得到如下等式: $(a^2+b^2)\times x^2+2abxy=1$,将 $ax+by=1$ 代入,整理得 $1+b(x^2-y^2)=n$,n 是 (a,b) 的倍数.

所以 $t|1+b(x^2-y^2)$,由此,因为 $t|b$,所以 $t|1$,得出矛盾. 所以 $(a^2+b^2,ab)=1$.

小结　可以发现,利用性质可以很快的得出结论,比讨论要方便得多. 本题第三问也可用类似例题五的方法处理,也比较繁琐.

例7　证明: $(12n+5,9n+4,6n+3)=1$.

分析　采用裴蜀等式的推广形式.

证明　因为 $2\times(9n+4)+1\times(6n+3)-2\times(12n+5)=1$. 所以原命题成立.

例8　证明: $12n+5$,$9n+4$,$6n+3$ 两两互质.

分析　利用性质的推广形式.

证明　显然 $4\times(9n+4)-3\times(12n+5)=1$,有例8的结论,可知原命题成立.

小结　裴蜀等式证明两两互质,采用推广形式比较方便.

性质总结　最大公约数是初等数论中的一个重要概念,对 $ax+by$ 这一性质以及推广形式的灵活应用,解决问题可以起到事半功倍的效果. 对于具体问题仍然要具体分析,多种方法、思想和性质的联合应用也是解决难题的利器.

【参考文献】

[1] 余红兵. 数学竞赛中的数论问题(第二版). 上海: 华东师范大学出版社,2005(6):5-10.

[2] 华罗庚学校. 华罗庚学校数学试题解析高一年级(第三版). 北京: 中国大百科全书出版社,1996(3):62-63.

[3] 潘承洞,潘承彪. 初等数论(第二版). 北京: 北京大学出版社,2009(12):12.

(上接88页)

例5　已知函数 $f(x)=x^5+ax^3+bx-8$,$f(-2)=10$,那么 $f(2)=$________.

分析　此题若想通过 $f(-2)=10$ 确定 a,b 的值,然后再 $f(2)$ 是行不通的,而如果注意到 $f(x)+8=x^5+ax^3+bx$ 是一个奇函数,$f(-2)$ 与 $f(2)$ 中自变量的值相反. 若用整体合并代换法,把其中一部分 x^5+ax^3+bx 看作整体进行代换就可在新的结构式 $F(x)=f(x)+8$ 中确定 $f(2)$ 的值. 答案是 -26

4. 整体补形

将问题中的非规则或非特殊图形,通过适当地"补线",补形为熟知的整体图形,使问题中的隐含条件显露出来.

为寻求问题的解,有时需要添加辅助线或辅助面,把问题中的原图形(不完整图形)转化为一个完整图形,此时就用了整体补形法,以便从整体上宏观地把握与处理局部问题. 如推导三棱锥体积公式时,是把三棱锥增补成三棱柱,就是这种思维方法的例证. 再如,

例6　设球 O 的半径为 R,过球上的任意一点 P,作三棱锥 $P-ABC$,使 PA,PB,PC 两两垂直,且 A,B,C 三点也在球面上,则球的表面积为________.

分析　本题的思考若局限于三棱锥的几何图形中,思维无法展开,其实只须利用球体的对称性,将这个较已规范的三棱锥补充为长方体,便不难知道,这个长方体的对角线就是球的直径,即 $a^2+b^2+c^2=4R^2$,所以 $S=4\pi R^2=(a^2+b^2+c^2)\pi$.

5. 整体变形

把一个问题看作一个整体的同时,并对这个整体进行适当的变形,使问题顺利获解的方法,称为整体变形法.

有些数学问题,其数量关系特殊,若用常规方法直接入手往往繁、难. 此时,不妨根据整体结构的特殊性,利用整体变形法,对其进行整体变形,常常能出奇制胜地解决问题.

例7　设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列,S_n 是其前 n 项的和,证明: $\frac{\lg S_n+\lg S_{n+2}}{2}<\lg S_{n+1}$.

分析　本题参考答案采用一般解法,对公比进行讨论,过程比较复杂,许多学生由于遗漏了对公比 q 的讨论而失分. 若将 S_n,S_{n+1},S_{n+2} 视作整体,并作变形处理,则可避免分类讨论,即设 $\{a_n\}$ 的公比为 q,则

$S_{n+1}=a_1+qa_1+q^2a_1+\cdots+q^na_1=a_1+qS_n$.

同理,$S_{n+2}=a_1+qS_{n+1}$.

所以 $S_n\cdot S_{n+2}-S_{n+1}{}^2=S_n(a_1+qS_{n+1})-S_{n+1}(a_1+qS_n)=a_1(S_n-S_{n+1})=-a_1a_{n+1}<0$,即 $S_n\cdot S_{n+2}<S_{n+1}{}^2$.

又　$S_n>0$,所以 $\lg(S_n\cdot S_{n+2})<\lg S_{n+1}{}^2$,

即 $\frac{\lg S_n+\lg S_{n+2}}{2}<\lg S_{n+1}$.

总而言之,分类讨论思想对于启迪我们的思维是其他数学思想方法无法替代的,本文不是去逃避分类讨论,而是培养一种处理问题的意识,即求简的意识,避免解决问题的盲目性.

6. 整体代入

把题中的一些组合式子视为一个整体,并把这个整体直接代入另一个式子进行运算,这种方法称为整体代入法.

在某些条件求值问题中,若涉及若干个量的求值,不是先把每个量都具体求出来,而是用整体代入法把某几个量当成一个来求,可以避免由局部运算带来的麻烦.

由此可见,应用整体思维策略解题时,不是从问题条件的局部元素着手考虑,而是从全面考查问题的条件或结论出发,挖掘问题潜在的特殊性和简单性,通过适当变形,对问题的原结构进行改造,实现对问题的整体处理,这样,可巧妙地绕过许多计算环节,减少运算量,提高学生高效解题的能力.