博 士 学 位 论 文

代数组合学中的若干问题

Some Problems in Algebraic Combinatorics

作 者 姓 名: 牟 丽 丽

学 号: 11101009

指 导 教 师: 王 毅 教授

学科、专 业: 基础数学

完 成 日 期: 2016年9月5日

大连理工大学

Dalian University of Technology

大连理工大学学位论文独创性声明

作者郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用内容和致谢的地方外，本论文不包含其他个人或集体已经发表的研究成果，也不包含其他已申请学位或其他用途使用过的成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

若有不实之处，本人愿意承担相关法律责任。具有残缺不确定信息的群决策方法

学位论文题目：代数组合学中的若干问题

作 者 签 名：牟丽丽　　日期：2016 年 11 月 10 日

大连理工大学学位论文版权使用授权书

本人完全了解学校有关学位论文知识产权的规定，在校攻读学位期间论文工作的知识产权属于大连理工大学，允许论文被查阅和借阅。学校有权保留论文并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印、或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

学位论文题目：代数组合学中的若干问题

作 者 签 名：牟丽丽　　日期：2016 年 11 月 10 日

导 师 签 名：[illegible]　　日期：2016 年 11 月 10 日

答辩委员会主席：[illegible]　　日期：2016 年 11 月 10 日

摘　　要

代数组合学是组合数学中一个重要的研究内容, 它主要是运用代数学中的方法或结论来研究组合数学中的问题. 本文分别从凸集的 Sperner 性质、超平面配置的超级可解性以及 Riordan 矩阵行多项式矩阵的组合性质等方面着手研究了代数组合学中的若干问题. 具体内容如下:

第一部分研究了 Sperner 定理在凸集上的推广. Sperner 定理主要研究子集格上的 Sperner 性质, 是偏序集上的经典结论之一. Sperner 性质在其他偏序集上的推广研究是组合数学中一个极为活跃的课题. Akiyama 和 Frankl 猜想一般凸集上也有 Sperner 性质. 本部分证明 Akiyama-Frankl 猜想在一些经典凸集上成立, 例如降簇、Lih 簇以及压缩理想.

第二部分考虑超平面配置的超级可解性. 如果超平面配置对应的交偏序集存在极大的模链则该超平面配置称为超级可解的. Stanley 证明了图配置超级可解的充分必要条件是该图是一个弦图. 本文受图配置超级可解充分必要条件的启发, 研究了推广的图配置即 ψ 图配置超级可解的等价条件. 超平面配置的自由性可以推出超级可解性, 而对于图配置而言两者是等价的, 即图配置的超级可解性也可推出自由性. 本部分考虑了 ψ 图的自由性, 并给出 ψ 图配置自由性的必要条件.

第三部分研究了 Riordan 矩阵行多项式矩阵的组合性质. 首先给出了 Riordan 矩阵行多项式矩阵的两种等价刻画, 随后研究了其各种组合性质, 包括行多项式矩阵的 q-全正性、第 0 列的 q-对数凸性以及每行的 q-对数凹性. 本文着重研究了 Bell 型 Riordan 矩阵和 Aigner-Riordan 矩阵的行多项式矩阵, 并给出判断行多项式矩阵全正性的条件. 作为应用, 从行多项式矩阵的角度将一些已知的零散的结果以统一的形式给出. Barry 提出了三个关于幂级数系数的 Hankel 行列式的猜想, 通过计算移位 Aigner-Riordan 数的 Hankel 行列式统一地证明了 Barry 提出的三个猜想.

关键词： Sperner 定理; 交偏序集; 图配置; 超级可解; Riordan 矩阵; 发生函数

Some Problems in Algebraic Combinatorics

Abstract

Algebraic Combinatorics is an important branch of combinatorics. The aim of this thesis is to investigate some classical and important problems in algebraic combinatorics, including Sperner-type problems, the supersolvablity of hyperplane arrangements and combinatorics of Riordan matrices. The main frame of the thesis is as follows.

In the first part we investigate the generalized Sperner theorem in convex families. Sperner theorem is one of the central results in extremal set theory, and it has been generalized and extended a lot. Akiyama and Frankl conjectured that Sperner theorem holds in convex families. We provide further evidence for the conjecture by exhibiting a number of classical convex families.

The second part is devoted to the supersolvability of the hyperplane arrangements. An arrangement $\mathcal{A}$ is supersolvable if the intersection lattice $L(c(\mathcal{A}))$ of the cone $c(\mathcal{A})$ contains a maximal chain of modular elements. Stanley showed that a graphical arrangement is supersolvable if and only if the graph is a chordal graph. We consider a generalization of graphical arrangements which are called ψ-graphical arrangements. We give a characterization of the supersolvability and freeness (in the sense of Terao) of a ψ-graphical arrangement. It is well known that every supersolvable arrangement is free, and every free graphical arrangement is supersolvable. We also provide some conditions on free ψ-graphical arrangements.

In the third part we discuss the combinatorial properties of row polynomial matrices and the first column of Riordan arrays, including the characterizations, the q-total positivity of the row polynomial matrix, the q-log-convexity of the first column of row polynomial matrix and the q-log-concavity of each row of row polynomial matrix. The row polynomial matrices of Bell-type and Aigner-type Riordan arrays are the emphases of this part. A unified approach to deal with certain row sum problems is provided by means of row polynomial matrices in this part. Barry proposed three conjectures about Hankel determinant evaluations of some series reversions. We settle Barry's three conjectures in a unified approach.

Key Words: Sperner theorem; Intersection lattice; Graphical arrangement; Supersolvability; Riordan array; Generating function

目　录

TABLE OF CONTENTS

图 目 录

主要符号表

符号	**代表意义**
$\mathbb{N}$	全体非负整数
$\mathbb{R}$	全体实数
$\mathbb{R}^+$	全体正实数
$\mathbb{Z}^+$	全体正整数
$[a_{i,j}]_{i,j\geq 0}$	元素为 $a_{i,j}$ 的矩阵
$(a_n)_{n\geq 0}$	序列 (a_n)
$\det A$	矩阵 A 的行列式
$[x^n]f(x)$	幂级数 $f(x)$ 中 x^n 的系数
$\lfloor a \rfloor$	不超过 a 的最大整数
$\lvert\mathscr{A}\rvert$	$\mathscr{A}$ 中元素的个数
$\in$	属于
$\supset$	包含
$\subset$	含于
$\cap$	交
$\cup$	并

1 绪论

1.1 基本概念和例子

偏序集是现代数学重要的研究对象,是组合数学与其它数学分支(如代数和拓扑)之间联系的桥梁和纽带,在组合数学的研究中起着重要的统一作用[1,2].

设 P 是一个非空集合. 如果在 P 的元素中定义一个二元关系 $\le$, 满足:

(i) 自反性: 对所有 P 中元素 x 都有 $x \le x$.

(ii) 反对称性: 如果 $x \le y$ 且 $y \le x$ 则有 $x = y$.

(iii) 传递性: 如果 $x \le y$ 且 $y \le z$ 则有 $x \le z$.

那么二元关系 $\le$ 称为 P 上一个**偏序**, P 连同此偏序 $\le$ 称为一个**偏序集**, 记为 $(P,\le)$. 在不致引起混淆的情况下, 把 $(P,\le)$ 简记为 P.

若偏序集 P 中存在元素 x 满足对所有的 $y \in P$ 都有 $y \ge x$ $(y \le x)$, 则称 x 是 P 的**最小元** (**最大元**), 记为 $\hat{0}$ $(\hat{1})$. 若 $x < y$ 且 P 中不存在元素 z 满足 $x < z < y$, 则称 y **覆盖** x 并记为 $x \lessdot y$. 每个偏序集 P 都唯一地由 P 上的覆盖关系决定. 将偏序集中每个元素画成一个点, 任意两点之间有边相连当且仅当这两点之间有覆盖关系, 这样得到的图称为偏序集的 Hasse 图. 下面是一些常见的偏序集及其对应的 Hasse 图.

例 1.1 **长为 n 的链**: 非空集合 P 为正整数集合 $[n]$, 二元关系 $\le$ 定义为整数本身的大小关系.

图 1.1　长为 3 的链
Fig.1.1　Chain with length 3

例 1.2 **偏序集 $\mathscr{B}_n$**: 非空集合 P 定义为 $[n]$ 的所有子集合 $2^{[n]}$, 二元关系 $\le$ 定义为子集的包含关系.

例 1.3 **偏序集 D_n**: 非空集合 P 定义为正整数 n 的所有因子, 二元关系 $\le$ 定义为整数的整除关系.

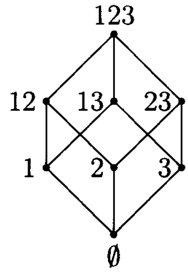

图 1.2　$\mathscr{B}_3$
Fig.1.2　$\mathscr{B}_3$

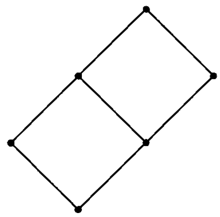

图 1.3　D_{12}
Fig.1.3　D_{12}

设 n 是正整数, n 的**分拆**是将 n 表示为正整数的和, 这里不考虑和中各项的次序, 并且称这些项为分拆的**块**. 例如, 5 的分拆为 (5), (41), (32), (311), (221), (2111), (11111).

例 1.4 **偏序集** Π_n: 非空集合 P 定义为 $[n]$ 上的所有分拆, 二元关系 $\leq$ 定义为分拆的加细: 在 Π_n 中定义 $\pi \leq \sigma$, 如果分拆 π 的每一块都包含在分拆 σ 的某一块中.

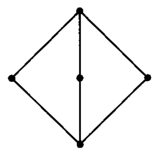

图 1.4　Π_3
Fig.1.4　Π_3

例 1.5 **偏序集** $L_n(q)$: 非空集合 P 定义为 q 元域 F_q 上 n 维向量空间 $V_n(q)$ 的所有子空间, 二元关系 $\leq$ 定义为子空间的包含关系.

如果偏序集 P 中两个元素 A, B 满足 $A \leq B$ 或者 $B \leq A$, 则称元素 A, B 是**可比较的**. 设 C 是 P 中 $k+1$ 格元素的集合, 如果 C 中的元是两两可比较的, 那么称 C 是 P 中

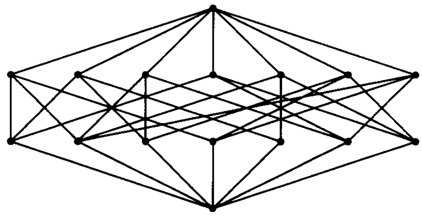

图 1.5　$L_3(2)$
Fig.1.5　$L_3(2)$

一条**长为 k 的链**. 进一步地, 如果这 $k+1$ 个元素满足 $x_0 \lessdot x_1 \lessdot \cdots \lessdot x_k$, 则称这条链为**饱和的**. 对于 P 中一条链 C, 若不存在 $x \in P \setminus C$ 使得 $C \cup \{x\}$ 仍为 P 的链, 则称 C 为 P 的一条**极大链**. 如果 P 中每条极大链都有相同的长度 n, 则称 P 是**秩为 n 且分次的偏序集**. 这种情况下定义 P 中的**秩函数** $\mathrm{rk}: P \to \mathbb{N}$ 满足

(i) $\mathrm{rk}(x) = 0$ 如果 x 是 P 中的最小元.

(ii) $\mathrm{rk}(y) = \mathrm{rk}(x) + 1$ 如果在 P 中 $x \lessdot y$.

若偏序集 P 是分次的且在 P 中有 $x < y$, 则 x 与 y 的**长度**定义为 $\mathrm{rk}(y) - \mathrm{rk}(x)$. 令 $P_m = \{x \in P : \mathrm{rk}(x) = m\}$, $W_m = W_m(P) = |P_m|$, 则称 P_m 为分次偏序集 P 的**第 m 个秩集**, W_m 为 P 的**第 m 个秩数** 或者**第 m 个 Whitney 数**.

如果 P 中两个元素 A, B 满足 $A \nleq B$ 且 $B \nleq A$, 则称元素 A, B 是**不可比较的**. 设 $\mathscr{A}$ 是 P 上的子集簇, 如果 $\mathscr{A}$ 中任意互不相同的两个元素 A, B 都是不可比较的, 则称 $\mathscr{A}$ 是 P 中一个 **Sperner 簇**或者称为**反链**.

例如在 $\mathscr{B}_3$ 中, $\{12\}$ 与 $\{123\}$ 可比较, $\{12\}$ 与 $\{23\}$ 是不可比较的, $\{12, 13, 23\}$ 是一个 Sperner 簇. $\emptyset \lessdot 1 \lessdot 12 \lessdot 123$ 是一条饱和极大链, 观察发现每条极大链都有相同的长度 3. 事实上, $\mathscr{B}_n$ 是一个秩数为 n 的分次偏序集, 其第 m 个 Whitney 数为 $\binom{n}{m}$.

设 $\mathscr{A}$ 是 P 上的子集簇. 如果由 $A \in \mathscr{A}$ 和 $B \leq A$ 可推出 $B \in \mathscr{A}$, 则称 $\mathscr{A}$ 是 P 上的一个**理想**. 如果由 $A \in \mathscr{A}$ 和 $B \geq A$ 能推出 $B \in \mathscr{A}$ 则称 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}_n$ 上的一个**滤子**.

例如在 $\mathscr{B}_3$ 中, $\{1, 2, 3, 12, 13\}$ 是一个理想, $\{1, 2, 12, 13, 123\}$ 是一个滤子.

设 A, B 是偏序集 P 中两个互不相同的元素, 如果 P 中的元素 C 满足 $C \geq A, C \geq B$ ($C \leq A, C \leq B$) 且对所有满足 $D \geq A, D \geq B$ ($D \leq A, D \leq B$) 的元素 D, 一定有 $D \geq C$ ($D \leq C$) 成立, 则称元素 C 是 A, B 的**上确界** (**下确界**), 记为 $C = A \vee B$ ($C = A \wedge B$). 若 P 中任意两个互不相同的元素都存在上确界和下确界, 则称偏序集 P 为格.

例如, 偏序集 $\mathscr{B}_n, D_n, \Pi_n$ 以及 $L_n(q)$ 都是格, 分别称为子集格 $\mathscr{B}_n$、因子格 D_n、分拆格 Π_n 以及子空间格 $L_n(q)$.

在格 P 中, 所有覆盖最小元 $\hat{0}$ 的元素称为*原子*, 所有被最大元 $\hat{1}$ 覆盖的元素称为*对偶原子*. 如果 P 中秩函数满足

$$\mathrm{rk}(A \wedge B) + \mathrm{rk}(A \vee B) = (\le)\ \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B),$$

则称该秩函数为*模的* (*半模的*). 如果格 P 中存在模的秩函数, 则称格 P 为*模格*. 如果格 P 中有半模的秩函数且每个元素都是原子的上确界, 则称格 P 为*几何格*.

例如, 子集格 $\mathscr{B}_n$、因子格 D_n 以及子空间格 $L_n(q)$ 都是模格, 而分拆格 Π_n 不是模格; 子集格 $\mathscr{B}_n$、分拆格 Π_n 以及子空间格 $L_n(q)$ 都是几何格, 但因子格 D_n 不是几何格. 有关偏序集上的其他定义可参照[2]中的第 3 章.

下面介绍与矩阵及组合序列相关的概念. 令 $\mathfrak{a} = (a_n)_{n\ge0}$ 是非负无限序列. 定义序列 $\mathfrak{a}$ 的第 n 个 Hankel 矩阵为 $H_n(\mathfrak{a}) = [a_{i+j}]_{0\le i,j\le n}$, $\mathfrak{a}$ 的第 n 个 Hankel 行列式记为 $h_n(\mathfrak{a}) = \det H_n(\mathfrak{a})$. 本文中行列下标均从 0 计起. 称序列 $h(\mathfrak{a}) = (h_n(\mathfrak{a}))_{n\ge0}$ 为序列 $\mathfrak{a}$ 的 Hankel 转换. 定义 $\mathfrak{a}$ 的第 n 个 Toeplitz 矩阵为 $T_n(\mathfrak{a}) = [a_{i-j}]_{0\le i,j\le n}$.

设 $M = [m_{n,k}]_{n,k\ge0}$ 是一个有限或者无限的实矩阵, 称行标和列标相同的子矩阵为 M 的*主子阵*, 即 $[m_{i,j}]_{i,j\in I}$, 其中 $I \subset \mathbb{N}$. 特别地, 当 $I = \{0,1,\ldots,r-1\}$ 时称 $[m_{i,j}]_{0\le i,j\le r-1}$ 为 M 的一个r *阶顺序主子阵*. 主子阵和顺序主子阵的行列式分别称为*主子式*和*顺序主子式*. 如果 M 的所有小于等于 r 阶的子式都是非负的, 则称 M 为 r *阶全正矩阵*, 简称 TP$_r$ *矩阵*. 如果 M 的所有阶子式都是非负的, 则称 M 为*全正矩阵*, 简称 TP *矩阵*.

令 $(a_n)_{n\ge0}$ 是非负序列, 如果对 $n \ge 1$ 有 $a_{n-1}a_{n+1} \le a_n^2$ ($a_{n-1}a_{n+1} \ge a_n^2$), 则称序列为*对数凹的* (*对数凸的*). 显然, 序列 $(a_n)_{n\ge0}$ 是对数凹的 (对数凸的) 当且仅当其对应的 Toeplitz 矩阵 $[a_{i-j}]_{i,j\ge0}$ (Hankel 矩阵 $[a_{i+j}]_{i,j\ge0}$) 是 TP$_2$ 的. 如果序列 $(a_n)_{n\ge0}$ 的 Toeplitz 矩阵 (Hankel 矩阵) 是 TP 的, 则称序列 $(a_n)_{n\ge0}$ 是 Pólya *序列*, 简称 PF *序列* (Stieltjes moment *序列*, 简称 SM *序列*). 无限序列 $1, a_1, a_2, \ldots$ 是 PF 序列当且仅当它的发生函数为:

$$\sum_{i\ge0} a_i x^i = e^{\gamma x}\frac{\Pi_{i\ge0}(1+\alpha_i x)}{\Pi_{i\ge0}(1-\beta_i x)},$$

其中 α_i, β_i, $\gamma \ge 0$ 且 $\sum_{i\ge0}(\alpha_i+\beta_i) < \infty$. 将有限序列 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 等价于无限序列 $a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots$, 则由 Aissen-Schoenberg-Whitney 基本定理知有限序列是 PF 序列的充分必要条件是其发生函数仅有实零点[3].

1.2 研究背景

代数组合学最早起源于 18 世纪 Euler 对分拆的研究, 直到 20 世纪 60 年代 Rota 开始系统地研究代数组合学的基础理论, 才使代数组合学成为一门主流学科被大家广泛关注. Rota 的工作是成功的, 代数组合学的发展正逐步趋向成熟和完整[4], 同时代数组合学也促使现代组合学在广度和深度上有了更大的发展[5].

代数组合学是一门运用代数方法研究组合对象的性质、刻画组合对象的结构以及解决组合问题的学科. 例如群理论、对称函数、表示论、矩阵论等在组合数学中都有着广泛的应用, 它们不仅丰富了代数组合学的内容, 也使得代数组合学的发展充满活力. 正因为如此, 代数组合学又被描述为 "组合对象的特征理论研究" 或者 "没有群的群理论"[6].

代数组合学的研究对象非常广泛, 包括拟阵、多面体、偏序集、有限几何等. 我们将研究对象限制在偏序集、配置和 Riordan 矩阵上. 首先, 偏序集是数学各分支中非常常见的一种结构, 是代数组合学研究的重要领域之一, 在代数组合学的研究中起着重要的统一作用. 其次, 配置渗透在数学的各个分支中, 比如组合数学、统计学、概率论、拓扑学等, 是代数组合学中的热点课题. 最后, Riordan 矩阵主要用来刻画组合问题以及证明组合不等式, 是代数组合学中重要的工具.

1.2.1 Sperner 理论

Sperner 理论, 又称为偏序集上的组合极值理论, 它的研究对象是偏序集. 偏序集是数学各分支中极为常见的一种结构, 因此 Sperner 理论的涉及面相当广泛, 而且其研究内容与数学中的其它分支相互渗透. 其它数学分支的理论和方法不仅丰富了 Sperner 理论的内容, 也使得该理论的发展更加充满活力. 例如, Stanley 利用代数几何学中的深刻结果证明了一类偏序集的 Sperner 型性质, 而这些结果至今尚未有组合证明. 另一方面, 对其它数学分支中的一些困难问题, Sperner 理论也能提供解决的手段. 例如 Erdős, Katona 以及 Kleitman 等对 Littlewood - Offord 问题的研究, Stanley 对 Erdős-Moser 的子集和猜想的证明, 均堪称极值组合学的经典应用. 这表明 Sperner 理论不是孤立和封闭的体系.

Sperner 理论的起源可追溯到 1928 年 Sperner 对子集格上最大反链长度的研究. 其早期的研究主要集中于子集格中, 对于一般偏序集只有一些零散但是重要的结果. 例如关于二部图的 Hall 匹配定理和一般偏序集的 Dilworth 链分解定理. 到 20 世纪 30 年代, Erdős, 柯召及 Rado[7,8] 开始考虑偏序集上增加某些限定条件后的反链的最大长度. 1945 年 Erdős[9] 考虑了子集格上 Sperner 性质的进一步深化, 建立了子集格的强 Sperner 性质. 1967 年, Rota[10] 问及有限集的分拆格是否也有 Sperner 性质, 引起了人们对一般偏序集 Sperner 型问题的广泛兴趣. Rota、Erdős 和 Stanley 等人的工作极大地推进了 Sperner 理论的发展. Aigner[11]、Anderson[12]、Bollobás[13] 和 Berge[14] 在各自的组合学专著中也分

别讨论了一般偏序集的 Sperner 型问题. 随后, Sperner 理论的持续发展又促使 Engel 在 1997 年撰写了新的专著 [15].

Sperner 型问题主要是研究偏序集是否具有 Sperner 性质、链分解性质、LYM 性质、匹配性质等. 对于 Sperner 型问题, 尽管目前已建立了许多研究方法和手段, 然而由于问题本身的难度, 还有许多研究成果只是孤立的结果, 许多经典问题仍然无从下手. 例如, Griggs 关于正规匹配蕴含套链分解的猜想、Chvátal 关于序理想最大交簇的猜想、Frankl 的并闭集猜想、Rota 关于有限几何格是秩单峰的猜想以及 Frankl-Akiyama 关于凸集上 Sperner 性质的猜想等经典子集族上的猜想. 这些问题的提出自然而简洁, 使得 Sperner 理论的研究特别富有趣味和挑战性.

Sperner 理论不仅有很高的学术价值, 也有着十分鲜明的应用前景. 例如, Sperner 理论的核心内容是研究偏序集中链与反链的极值性质, 在计算机科学中可以根据计算机程序的偏序结构, 将偏序集中链 (能够描述程序运行的步骤) 与反链 (决定存储和计算的复杂性) 的极值性质应用在计算机的程序设计理论和大规模科学计算的编程中; 在生物学中利用偏序集的链分解技巧, 通过分析、比较由两条链组合的 DNA 序列可以给出生物遗传规律的某些数学解释, 这是当前自然科学领域最热门的课题之一; 在企业管理、金融分析、工程技术中应用 Sperner 理论的成果来优化设计以避免人力物力的浪费更已经是众所周知, 这也是 Sperner 理论的现实应用之一.

1.2.2 超平面配置

超平面配置是有限维向量空间的有限个仿射子空间组成的集合. 超平面配置的研究起源于下面有趣的事实: n 个点可以将线分成 $1+n$ 块; n 条线可以将面分成 $1+n+\binom{n}{2}$ 块; n 个面可以将空间分成 $1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}$ 块, 这也等价于用 n 刀可以将三维空间的蛋糕切成 $1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}$ 块. 当用 n 刀切 m 维空间的蛋糕时最多切成 $1+n+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{m}$ 块. 超平面配置就是要极大化 "块" 的数目, 正如 Zaslavsky 的论文题目所示, 解决配置问题就是解决超平面分割空间区域数的问题[16].

Zaslavsky[16–20] 将组合数学与超平面配置完美地结合. 他对每个超平面配置定义了与其对应的交偏序集, 并且用偏序集上的 Möbius 函数定义了超平面配置的特征多项式, 从而超平面配置的许多问题可以转化到偏序上来解决. Stanley 关于超平面配置的专著[21] 具体介绍了超平面配置的各种组合问题. 另外, Björner, Edelman 和 Ziegler 等人不仅对超平面配置的各种组合性质作了深入研究[22–25], 同时也将超平面配置与拟阵论相结合[26,27]. 复配置补的同伦研究是拓扑学的热点课题之一, Kohno[28–31], Falk[32] 和 Randell[33,34] 在此方面做了大量工作, 1987 年 Falk 和 Randell[35] 的综述文章具体介绍了配置的同伦理论. 此外, Randell[36,37] 和 Salvetti[38] 还研究了实配置补的基本群表示. 超平面配置理论的持

续发展促使 Orlik 和 Terao 写了超平面配置的专著[39].

超平面配置研究涉及到的内容繁多. 比如在组合数学中我们考虑超平面配置的区域数、4 维面的个数、有界区域的个数等[40]; 在统计中用配置计算一维展开模型的排列方式[41]; 在概率中配置中的随机路与洗牌和文件管理有着奇妙的联系[42]; 在拓扑学中, 一个复配置的补是光滑的, 而且如果将它联系到开流形上可以计算其拓扑不变量[43]. 超平面配置的研究极大地促进和丰富了代数、几何、拓扑、概率统计和组合数学本身的理论研究, 正如 Grünbaum 曾预言的一样: 超平面配置的研究将会成为热点, 它的发展将与组合、代数、代数几何、拓扑以及群论等密切相关[44].

1.2.3 Riordan 矩阵

Riordan 矩阵主要用来刻画组合问题、证明组合不等式, 是代数组合学中重要的工具. Riordan 矩阵的研究起源于 1978 年 D. G. Rogers[45] 对 Pascal 三角、Catalan 三角及 Motzkin 三角的推广研究, 他当时称这样一种阵列为 “ renewal arrays ”. 随后 Kettle[46] 用 “renewal arrays” 研究其他组合三角, 而且特别研究了有格路背景的三角. 从 1991 年开始, L. W. Shapiro 等人开始系统地研究 Riordan 矩阵[47–49], 并正式给出了 Riordan 矩阵的定义, 同时提出了 Riordan 群的概念, 他们还利用 Riordan 矩阵来计数格路、证明组合恒等式以及研究反演关系等. 2005 年 Shapiro 在南开大学组合中心作的系列报告[50] 详细介绍了 Riordan 矩阵的基本结构和性质.

Riordan 矩阵是证明组合恒等式强有力地工具. Sprugnoli 和 Merlini 等人将 Riordan 矩阵与格路计数和模式避免相结合, 证明了 Riordan 的经典名著《组合恒等式》[51] 中的所有恒等式 (见 [52–58]).

近些年来, 许多数学工作者从不同角度研究了 Riordan 矩阵及其应用. Cheon 和 Kim[59] 证明 Riordan 矩阵的行多项式可以表示成 Stieltjes 转换矩阵的特征多项式并可以计算他们的零点. Chen 等人[60,61] 研究了 Riordan 矩阵的 TP 性质, 第 0 列的对数凸性及每行的对数凹性. Riordan 矩阵其他方面研究详见 [62–81]等.

1.3 本文主要研究思路与内容

本文从 Sperner 理论、超平面配置以及 Riordan 矩阵出发, 分别研究了凸集上 Sperner 定理的推广、超平面配置的超级可解性以及 Riordan 矩阵行多形式矩阵的组合性质. 具体内容如下:

首先研究 Sperner 定理在凸集上的推广. Sperner 定理是极值组合学的基石, 在整个极值理论中起到关键性作用, 因此关于 Sperner 定理的各种推广是组合学家非常感兴趣的问题. Akiyama 和 Frankl 早在 30 前猜想 Sperner 定理在凸集上成立, 我们希望对一些经典凸

集, 例如降簇、Lih 簇以及压缩理想进行考虑证明猜想对上述经典凸集成立.

其次研究 ψ 图配置超级可解的充要条件. Stanley 定义了超平面配置的超级可解性, 即超平面配置所对应的交偏序集存在极大的模链. 随后他给出图配置超级可解的充分必要条件是该图是一个弦图, 并对推广的图配置即 ψ 图配置超级可解的充分必要条件给出猜想. 本部分希望通过判断 ψ 图配置的交偏序集上是否存在极大的模链来给出 ψ 图配置超级可解的充要条件, 从而证明猜想. 另一方面, 超平面配置的自由性可以推出超级可解性, 而对于图配置而言两者是等价的, 所以我们还考虑 ψ 图的自由性的必要条件.

最后考虑 Riordan 矩阵行多项式矩阵的组合性质. 首先希望证明 Riordan 矩阵行多项式矩阵仍是 Riordan 矩阵并给出两种等价刻画, 然后研究行多项式矩阵的全正性、第 0 列的对数凸性以及每行的对数凹性. 通过着重研究 Bell 型 Riordan 矩阵和 Aigner-Riordan 矩阵的行多项式矩阵, 希望给出判断行多项式矩阵全正性的条件. Barry 提出三个关于幂级数反演逆 Hankel 转换的猜想, 希望通过计算移位 Aigner-Riordan 数的 Hankel 转换来统一地证明 Barry 提出的三个猜想. 最后借助行多项式矩阵这个平台, 统一地得到了许多已知的零散的结论.

2 Sperner 定理在凸集的推广

2.1 引 言

Sperner 定理是偏序集理论中的经典结论, 它是 Sperner[82] 在 1928 年给出来的. Sperner 定理阐述了下面事实: n 元集上的所有子集按照包含关系形成的偏序集 $\mathscr{B}_n$ 中最大反链的大小恰好为 $\binom{n}{\lceil n/2\rceil}$. 1967 年 Rota[10] 将此问题推广到分拆领域, 并提出下面问题: 令 $S(n,k)$ 为 n 元集上有 k 个块的分拆个数, $\mathscr{F}$ 为 n 元集上互相不可比较的分拆集合, 即 $\mathscr{F}$ 中不存在一个分拆是另一个分拆的加细, 那么是否有 $|\mathscr{F}| \leq \max_k S(n,k)$ 成立? 尽管在 1978 年 Canfield[83] 对此问题给出了否定答案, 但是 Rota 的问题引起大批组合学家对一般偏序集的 Sperner 型问题的广泛关注, 并开始对 Sperner 定理进行各种推广研究[2,11,13,84–89], 从而产生了一系列的技巧和方法并形成了一套完善的理论, 称之为 Sperner 理论[12,15].

2.2 Sperner 定理

定理 2.1 [82] 设 n 为正整数, $\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{B}_n$ 上的 Sperner 族. 如果 n 是偶数, 则 $|\mathscr{A}| \leq \binom{n}{\lceil n/2\rceil}$ 等号成立当且仅当 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}_n$ 中所有的 $n/2$ 子集构成的子集簇. 如果 n 是奇数, 则 $|\mathscr{A}| \leq \binom{n}{\lceil (n-1)/2\rceil}$ 等号成立当且仅当 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}_n$ 中所有的 $(n-1)/2$ 子集或者 $(n+1)/2$ 子集构成的子集簇.

关于 Sperner 定理的证明有几种经典的方法, 每种方法又不断地被推广和深化到一般偏序集 Sperner 性质的研究当中. 这里简单地介绍其中三种证明方法. 第一种证明方法是 Sperner 在其原始论文中用到的匹配性质, 后来 Canfield[83] 证明了具有单峰匹配性质的分次偏序集具有 Sperner 性质, 使得匹配性质成为研究 Sperner 性质的一种最基本的方法. 第二种证明方法是 1966 年由 Lubell[90] 给出的, 证明过程简短而优雅, 并产生了一个漂亮的不等式:

$$\sum_i \frac{|\mathscr{F} \cap P_i|}{|P_i|} \leq 1,$$

其中 $\mathscr{F}$ 为分次偏序集 P 中的 Sperner 簇. Meshalkin[91] 以及 Yamamoto[92] 分别独立得到过这一不等式, 故该不等式称为 LYM 不等式. Kleitman[93] 最先考虑了一般偏序集的 LYM 不等式并给出其等价刻画, 并证明 LYM 不等式能推出强 Sperner 性质. 第三种证明用到链分解的方法. 最著名的链分解结果当属 Dilworth[94] 给出的偏序集上最小的互不相交的链分解数等于最大的反链数. 由 Dilworth 定理, 如果偏序集 P 存在一个含有最大秩数条链的分解, 那么有 P 具有 Sperner 性质. 上述三种证明过程中引出的性质: 匹配性质、LYM

不等式以及链分解, 现如今也是偏序集理论中非常活跃的研究课题.

Sperner 给出了子集格 $\mathscr{B}_n$ 的 Sperner 性质, 即在 $\mathscr{B}_n$ 中 Sperner 簇的基数不超过 $\mathscr{B}_n$ 的最大秩数. 换句话说, $\mathscr{B}_n$ 的最大秩数的集合是一个基数最大的 Sperner 簇. 一个自然的问题就是: 对一个一般的偏序集 P, P 中最大的 Sperner 簇的基数是否都等于 P 的最大秩数? 如果是的话, 就称偏序集 P 具有 Sperner 性质.

Sperner 定理的一个自然推广是考虑加上某些限定条件后的 Sperner 簇的最大基数是多少, 最大 Sperner 簇的结构是什么样的? Erdős, 柯召及 Rado[7,8] 早在上世纪 30 年代就考虑了这样的问题 (但是他们的文章直到上世纪 60 年代才发表), 即若子集格 $\mathscr{B}_n$ 中 Sperner 簇 $\mathscr{F}$ 满足下面两个条件

(i) $\mathscr{F}$ 中任意两个不相等的元素 A, B 都满足 $A \cap B \neq \emptyset$,

(ii) 设 k 为正整数且 $k \leq n/2$, 则 $\mathscr{F}$ 中任意元素 A 满足 $|A| \leq k$,

则 $|\mathscr{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

Erdős[9] 在 1945 年给出了子集格的强 Sperner 性质: 如果子集簇 $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{B}_n$ 满足 $\mathscr{F}$ 中最长链的长度小于 k, 则 $|\mathscr{F}|$ 不超过 $\mathscr{B}_n$ 的 k 个最大秩数的和, 即当 $\mathscr{F}$ 取到最大时, 它恰为 $\mathscr{B}_n$ 的 k 个最大秩集形成的子集簇. Erdős 的这一结论是 Sperner 定理的进一步深化.

本章将要给出 Sperner 定理在凸集上的一个推广. Sperner 定理表明 $\mathscr{B}_n$ 中最大 Sperner 簇的密度为 $\binom{n}{\lceil n/2\rceil}/2^n$. Akiyama 和 Frankl[95] 猜想如果将 $\mathscr{B}_n$ 替换成 $[n]$ 上的凸集 $\mathscr{P}$, 则结论同样成立. 对 $\mathscr{B}_n$ 中一子集簇 $\mathscr{P}$, 如果 $A, B \in \mathscr{P}$ 和 $A \subseteq C \subseteq B$ 能推出 $C \in \mathscr{P}$, 则称 $\mathscr{P}$ 为凸集.

猜想 2.1 对 $[n]$ 上的每个凸集 $\mathscr{P}$, 都存在一个 Sperner 簇 $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}$ 满足

$$|\mathscr{A}|/|\mathscr{P}| \geq \binom{n}{\lceil n/2\rceil}/2^n.$$

为了叙述方便, 当猜想成立时我们称凸集 $\mathscr{P}$ 为 AF 簇, 并称 Sperner 族 $\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{P}$ 上的 AF-Sperner 簇. 容易验证 $\mathscr{B}_n$ 是 AF 簇, 包含所有 $\lceil n/2\rceil$ 子集的子集簇或者包含所有 $\lfloor n/2\rfloor$ 子集的子集簇是 $\mathscr{B}_n$ 上的 AF-Sperner 簇.

因为对一般的凸集没有任何进展, 自然地我们会考虑一些特殊的情况. 本章的第 2 节将证明一些特殊的凸集是 AF 簇, 从而为猜想的成立提供更多证据. 第 3 节将考虑一类凸集 -压缩理想, 并证明该类凸集是 AF 簇. 为了简单起见, 记

$$T(n) = \binom{n}{\lceil n/2\rceil}/2^n.$$

容易验证 $T(2n-1)=T(2n)$ 且 $T(2n)/T(2n+1)=(2n+2)/(2n+1)$. 因此有

$$T(1)=T(2)>T(3)=T(4)>\cdots>T(2m-1)=T(2m)>\cdots.$$

2.3 Sperner 定理在降簇上的推广

给定 $0\leq k\leq n$, 记 $\mathscr{B}_n^{(k)}$ 为 $\mathscr{B}_n$ 的第 k 个秩集, 即 $\mathscr{B}_n^{(k)}=\{A\subseteq[n]:|A|=k\}$, 这里 $|A|$ 表示 A 中元素的个数. 设 $D(n,k)$ 是由 $\mathscr{B}_n$ 的前 k 个秩集组成的子集簇, 即 $D(n,k)=\cup_{i=0}^{k}\mathscr{B}_n^{(i)}$. 称 $D(n,k)$ 为 $\mathscr{B}_n$ 上的一个**降簇**. 容易验证 $D(n,k)$ 是一个凸集. 事实上, 若 $A,B\in D(n,k)$ 且存在 C 满足 $A\subseteq C\subseteq B$, 显然有 $C\in\cup_{i=0}^{k}\mathscr{B}_n^{(i)}=D(n,k)$. 下面列出本节将会用到的一些简单事实:

(i) 设 $\mathscr{P}$ 是 AF 簇, $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{P}$ 上的 AF-Sperner 簇. 假设 $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{F}\subseteq\mathscr{P}$. 则有 $\mathscr{F}$ 也是 AF 簇且 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{F}$ 上的 AF-Sperner 簇.

(ii) $\binom{n}{k}$ 是对称单峰的: $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}<\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}<\cdots<\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}=\binom{n}{\lceil n/2\rceil}$.

(iii) $\binom{n}{k}$ 是对数凹的: 对 $0\leq i<k<n$, 有 $\binom{n}{i}\binom{n}{k+1}\leq\binom{n}{i+1}\binom{n}{k}$.

(iv) $\sum_{i=0}^{m}\binom{2m+1}{i}=2^{2m}$ 且 $2\sum_{i=0}^{m-1}\binom{2m}{i}=2^{2m}-\binom{2m}{m}$.

(v) 范德蒙卷积公式: $\sum_{i\geq0}\binom{k}{i}\binom{n-k}{m-i}=\binom{n}{m}$.

(vi) $T(1)=T(2)>T(3)=T(4)>\cdots>T(2m-1)=T(2m)>\cdots$.

定理 2.2 对 $1\leq k\leq n$, 降簇 $D(n,k)$ 是 AF 簇.

证明 如果 $k\geq\lfloor n/2\rfloor$, 则 $\mathscr{B}_n^{(\lfloor n/2\rfloor)}\subseteq D(n,k)$. 容易得到 $D(n,k)$ 是 AF 簇且 $\mathscr{B}_n^{(\lfloor n/2\rfloor)}$ 是 $D(n,k)$ 上的 AF-Sperner 簇.

现在令 $k<\lfloor n/2\rfloor$, 则 $\mathscr{B}_n^{(k)}$ 是 $D(n,k)$ 上的最大的 Sperner 簇. 设

$$d_k=\frac{|\mathscr{B}_n^{(k)}|}{|D(n,k)|}=\frac{\binom{n}{k}}{\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}},$$

则需要证明 $d_k\geq T(n)$. 下面我们证明一个更强的事实:

$$\text{对 } k<\lceil n/2\rceil, \text{有 } d_k\geq 2T(n) \quad . \tag{2.1}$$

首先证明对 $k \geq 0$, d_k 是单调递减的. 事实上, $d_{k+1} < d_k$ 等价于

$$\binom{n}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i} < \binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k+1}\binom{n}{i},$$

而对所有 $0 \leq i < k$ 都有

$$\binom{n}{k+1}\binom{n}{i} \leq \binom{n}{k}\binom{n}{i+1},$$

所以上面事实成立.

为了证明 (2.1), 只需要证明 $d_{\lceil n/2\rceil-1} \geq 2T(n)$ 即可. 当 n 为奇数时显然成立, 这是因为 $d_{\lceil n/2\rceil-1}$ 恰好等于 $2T(n)$. 现在假设 n 为偶数且 $n = 2m$, 则

$$d_{m-1} = \frac{\binom{2m}{m-1}}{\sum_{i=0}^{m-1}\binom{2m}{i}} = \frac{2\binom{2m}{m-1}}{2^{2m} - \binom{2m}{m}}.$$

令 $f(m) = (m+1)\binom{2m}{m}$. 则 $f(1) = 4$ 且

$$\frac{f(m)}{f(m-1)} = \frac{2(m+1)(2m-1)}{m^2} = 4 + \frac{2(m-1)}{m^2} \geq 4.$$

对 m 进行归纳假设得到 $f(m) \geq 4^m$. 因此

$$\binom{2m}{m} \geq \frac{1}{m+1}2^{2m},$$

且

$$d_{m-1} \geq \frac{2\binom{2m}{m-1}}{2^{2m} - \frac{1}{m+1}2^{2m}} = \frac{2(m+1)\binom{2m}{m-1}}{m2^{2m}} = \frac{2\binom{2m}{m}}{2^{2m}} = 2T(n).$$

到此定理证明完成. □

接下来, 我们将定理推广到更一般的子集簇上.

定理 2.3 设 $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{B}_n^{(k+1)}$ 且 $\mathscr{P} = D(n,k) \cup \mathscr{F}$. 则 $\mathscr{P}$ 是 AF 簇.

证明 当 $k \geq \lfloor n/2\rfloor$ 时, 有 $\mathscr{B}_n^{(\lfloor n/2\rfloor)} \subseteq \mathscr{F}$. 显然 $\mathscr{F}$ 是 AF 簇且 $\mathscr{B}_n^{(\lfloor n/2\rfloor)}$ 是 $\mathscr{F}$ 上的 AF-Sperner 簇. 因此只需考虑 $k < \lfloor n/2\rfloor$ 的情况. 下面分两种情况进行讨论.

若 $|\mathscr{F}| \le \binom{n}{k}$, 则 $\mathscr{B}_n^{(k)}$ 是 $\mathscr{P}$ 上的最大 Sperner 簇. 由不等式 (2.1), 有

$$\frac{|\mathscr{B}_n^{(k)}|}{|\mathscr{P}|} = \frac{\binom{n}{k}}{|\mathscr{F}| + \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}} \ge \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k} + \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}} \ge \frac{\binom{n}{k}}{2\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}} = \frac{1}{2}d_k \ge T(n).$$

若 $|\mathscr{F}| > \binom{n}{k}$, 则 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{P}$ 上的最大 Sperner 簇.

$$\frac{|\mathscr{F}|}{|\mathscr{P}|} = \frac{|\mathscr{F}|}{|\mathscr{F}| + \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}} \ge \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k} + \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}} \ge T(n),$$

上面式子中第一个不等号是由当 $a > 0$ 时, $g(x) = \frac{x}{x+a}$ 为单调递减函数得到. 综上两种情况讨论知 $\mathscr{P}$ 是 AF 簇. □

2.4 Sperner 定理在 Lih 簇上的推广

设 $1 \le k \le n$ 且 $[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$. 定义

$$C(n,k) = \{A \subseteq [n] : A \cap [k] \ne \emptyset\}.$$

按照集合的包含关系 $C(n,k)$ 是偏序集 $\mathscr{B}_n$ 的子偏序集. 该偏序集是 1980 年 Lih[86] 首次提出来的, 并研究了 Sperner 定理在 $C(n,k)$ 上的推广, 即证明了 $C(n,k)$ 具有 Sperner 性质. 1982 年, Griggs[85] 进一步研究了 $C(n,k)$ 的各种极值性质, 证明 $C(n,k)$ 有套链分解和 LYM 性质, 从而证明 $C(n,k)$ 有强 Sperner 性质, 并且研究了 $C(n,k)$ 的各种推广.

不难验证 $C(n,k)$ 是凸集, 下面将证明 $C(n,k)$ 是 AF 簇.

定理 2.4 对 $1 \le k \le n$, Lih 定义的子集簇 $C(n,k)$ 是 AF 簇.

证明 如果 $k > \lfloor n/2 \rfloor$, 则 $\mathscr{B}_n^{(\lceil n/2 \rceil)} \subseteq C(n,k)$, $C(n,k)$ 显然是 AF 簇.

现在假设 $k \le \lfloor n/2 \rfloor$. 对 $1 \le i \le n$, 设

$$C_i(n,k) = C(n,k) \cap \mathscr{B}_n^{(i)},$$

则每个 $C_i(n,k)$ 是 Sperner 簇且

$$|C_i(n,k)| = \binom{n}{i} - \binom{n-k}{i}.$$

由 Lih[86] 中定理 2 知, 当 $i = \lceil n/2 \rceil$ 时 $|C_i(n,k)|$ 达到最大值. 下面证明 $C(n,k)$ 是 AF 簇

且 $C_{\lceil n/2\rceil}(n,k)$ 是 $C(n,k)$ 中的 AF-Sperner 簇. 注意到

$$|C(n,k)| = 2^n - 2^{n-k}.$$

因此只需证明

$$\frac{\binom{n}{\lceil n/2\rceil} - \binom{n-k}{\lceil n/2\rceil}}{2^n - 2^{n-k}} \geq \frac{\binom{n}{\lceil n/2\rceil}}{2^n},$$

即

$$\frac{\binom{n-k}{\lceil n/2\rceil}}{2^{n-k}} \leq \frac{\binom{n}{\lceil n/2\rceil}}{2^n}.$$

令

$$c_k = \binom{n-k}{\lceil n/2\rceil}/2^{n-k},$$

则只需要证明对 $1 \leq k \leq \lfloor n/2\rfloor$ 有 $c_k \leq c_0$ 成立. 因为对 $0 \leq k < \lfloor n/2\rfloor$, c_k 是单调递减:

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{2(n-\lceil n/2\rceil - k)}{n-k} = \frac{2(\lfloor n/2\rfloor - k)}{n-k} \leq \frac{n-2k}{n-k} \leq 1$$

因此, 上面结论成立, 定理得到证明. □

对 $0 \leq \ell \leq k \leq n$, 令 $C(n,k,\ell)$ 表示 $[n]$ 上与 $[k]$ 至少相交 ℓ 次的子集簇, 即

$$C(n,k,\ell) = \{A \subseteq [n] : |A \cap [k]| \geq \ell\}.$$

Griggs[85] 曾对 $C(n,k,\ell)$ 进行研究, 得到了一系列 LYM-型不等式. 容易发现 $C(n,k,\ell)$ 是 $C(n,k)$ 的推广簇, 且 $C(n,k,0) = \mathscr{B}_n$, $C(n,k,1) = C(n,k)$.

下面将要证明当 $\ell \leq \lceil k/2\rceil$ 时, $C(n,k,\ell)$ 是 AF 簇.

定理 2.5 如果 $0 \leq \ell \leq \lceil k/2\rceil$, 则 $C(n,k,\ell)$ 是 AF 簇.

证明 设 $m := \lceil n/2\rceil$ 且

$$C_m(n,k,\ell) := \{A \subseteq C(n,k,\ell) : |A| = m\}.$$

下面将证明 $C_m(n,k,\ell)$ 是 $C(n,k,\ell)$ 中的 AF-Sperner 簇. 注意到

$$|C_m(n,k,\ell)| = \sum_{i\geq\ell} \binom{k}{i}\binom{n-k}{m-i}$$

且

$$|C(n,k,\ell)| = 2^{n-k}\sum_{i\geq\ell}\binom{k}{i}.$$

令

$$a_\ell = \binom{n}{m}\sum_{i\geq\ell}\binom{k}{i} - 2^k\sum_{i\geq\ell}\binom{n-k}{m-i}\binom{k}{i}.$$

为了证明

$$|C_m(n,k,\ell)|/|C(n,k,\ell)| \geq \binom{n}{m}/2^n,$$

只需证明对 $0\leq\ell\leq\lceil k/2\rceil$ 有 $a_\ell\leq 0$ 即可.

我们分三步证明.

Step 1. $a_0 = \binom{n}{m}\sum_{i\geq 0}\binom{k}{i} - 2^k\sum_{i\geq 0}\binom{n-k}{m-i}\binom{k}{i} = 0.$

Step 2. $a_{\lceil k/2\rceil}\leq 0.$

假设 k 是奇数且 $k=2s-1$. 注意到 $\sum_{i=s}^{2s-1}\binom{2s-1}{i} = 2^{2s-2}$ 且

$$\begin{aligned}
\binom{n}{m} &= \sum_{i=0}^{s-1}\binom{2s-1}{i}\binom{n-2s+1}{m-i} + \sum_{i=s}^{2s-1}\binom{2s-1}{i}\binom{n-2s+1}{m-i}\\
&= \sum_{i=s}^{2s-1}\binom{2s-1}{i}\binom{n-2s+1}{n-m-i} + \sum_{i=s}^{2s-1}\binom{2s-1}{i}\binom{n-2s+1}{m-i}\\
&\leq 2\sum_{i=s}^{2s-1}\binom{2s-1}{i}\binom{n-2s+1}{m-i},
\end{aligned}$$

因为对 $i\geq s$,

$$n-m-i\leq m-i\leq (n+1)/2-s = (n-2s+1)/2.$$

因此

$$a_s = \binom{n}{m}\sum_{i=s}^{2s-1}\binom{2s-1}{i} - 2^{2s-1}\sum_{i=s}^{2s-1}\binom{n-2s+1}{m-i}\binom{2s-1}{i}\leq 0.$$

假设 k 是偶数且 $k=2s$. 情况类似于 k 是奇数, 则有

$$2\sum_{i=s}^{2s}\binom{2s}{i} = 2^{2s}+\binom{2s}{s}$$

且

$$2\sum_{i=s}^{2s}\binom{2s}{i}\binom{n-2s}{m-i} \geq \binom{n}{m}+\binom{2s}{s}\binom{n-2s}{m-s}.$$

则有

$$\begin{aligned} a_s &= \binom{n}{m}\sum_{i=s}^{2s}\binom{2s}{i} - 2^{2s}\sum_{i=s}^{2s}\binom{n-2s}{m-i}\binom{2s}{i} \leq \frac{1}{2}\binom{2s}{s}\left[\binom{n}{m}-2^{2s}\binom{n-2s}{m-s}\right] \\ &= 2^{n-1}\binom{2s}{s}[T(n)-T(n-2s)] \leq 0. \end{aligned}$$

Step 3. 当 $0 \leq \ell < \lceil k/2 \rceil$ 时,

$$a_{\ell+1}-a_\ell = \left[2^k\binom{n-k}{m-\ell}-\binom{n}{m}\right]\binom{k}{\ell}$$

是单调递增的. 这是因为对 $0 \leq \ell < \lceil k/2 \rceil$, $\binom{n-k}{m-\ell}$ 和 $\binom{k}{\ell}$ 是单调递增的.

现在证明对 $0 \leq \ell \leq \lceil k/2 \rceil$ 有 $a_\ell \leq 0$. 通过反证来证明, 假设结论不成立则会有指标 $0 \leq r \leq \lceil k/2 \rceil$ 满足 $a_{r-1} \leq 0$ 和 $a_r > 0$, 这会导致对 $i \geq r$ 有 $a_i - a_{i-1} > 0$, 因此

$$a_{\lceil k/2 \rceil} = \sum_{i=r+1}^{\lceil k/2 \rceil}(a_i - a_{i-1}) + a_r > 0,$$

这是一个矛盾. 因此, 结论得到证明. □

2.5 Sperner 定理在压缩理想上的推广

2.5.1 压缩理想

首先回顾一下理想和滤子的概念. 设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}_n$ 上的子集簇. 如果对 $\mathscr{A}$ 中每个元素 A, 若任意 B 满足 $B \subseteq A$ 都能推出 $B \in \mathscr{A}$, 那么称 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}_n$ 上的一个**理想**. 如果对 $\mathscr{A}$ 中每个元素 A, 若任意 B 满足 $B \supseteq A$ 能推出 $B \in \mathscr{A}$, 则称 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}_n$ 上的一个**滤子**. 例如, 上一节中提到的降簇 $D(n,k)$ 是一理想, $C(n,k)$ 是一滤子. 不难验证理想和滤子都是凸集.

设 $\mathscr{P}$ 是 $\mathscr{B}_n$ 上的子集簇. 令

$$\mathscr{P}^- = \{A \subseteq [n] : A \subseteq B \text{ 对} B \in \mathscr{P}\}$$

和

$$\mathscr{P}^+ = \{A \subseteq [n] : A \supseteq B \text{ 对} B \in \mathscr{P}\}.$$

则 $\mathscr{P}^-$ 是一个理想而 $\mathscr{P}^+$ 是一个滤子, 且显然有 $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{P}^- \cap \mathscr{P}^+$. 更进一步地, 如果 $\mathscr{P}$ 是一个凸集, 则 $\mathscr{P} = \mathscr{P}^- \cap \mathscr{P}^+$. 注意到两个凸集的交仍然是凸集, 因此 $\mathscr{B}_n$ 上的子集簇 $\mathscr{P}$ 是凸集的充分必要条件是存在一个理想 I 和一个滤子 F 使得 $\mathscr{P} = I \cap F$.

令 A^c 表示 $\mathscr{B}_n$ 上的子集 A 的补集, 令 $\mathscr{A}^c$ 表示子集簇 $\mathscr{A}$ 中每个元素的补集的子集簇. 则 $\mathscr{A}$ 是一个滤子的充要条件是其补集 $\mathscr{A}^c$ 是一理想. 如果 $\mathscr{A}$ 是一个 AF 簇, 则其补集 $\mathscr{A}^c$ 也是一个 AF 簇, 所以证明猜想成立的关键一步是证明每个理想是 AF 簇. 然而要证明理想是 AF 簇不是容易的, 所以考虑特殊的理想也是一件非常有趣的事情. 本节将证明每个压缩理都是 AF 簇.

在 $\mathscr{B}_n$ 上定义序 $\preceq$ 称为**反字典序**

$$A \preceq A' \text{ 如果 } \max (A \cup A') \backslash (A \cap A') \in A' \text{ 或者 } A = A' \text{ 对 } A, A' \in \mathscr{B}_n.$$

如图 2.1 所示, 有 $\{2,3\} \preceq \{1,2,4\}$ 和 $\{3,4\} \preceq \{1,3,4\}$. 设 $\mathcal{C}(m, \mathscr{B}_n)$ 为 $\mathscr{B}_n$ 中关于反字典序 $\preceq$ 的前 m 个元素. 子集簇 $\mathcal{C}(m, \mathscr{B}_n)$ 称为**压缩**, 并且将 $\mathscr{B}_n$ 中的 m 个元素变成 $\mathcal{C}(m, \mathscr{B}_n)$ 的过程称为**压缩运算**. 类似地, 对 $F \subseteq \mathscr{B}_n^{(k)}$ 定义 $\mathcal{C}(F)$ 为 $\mathscr{B}_n^{(k)}$ 中关于反字典序 $\preceq$ 的前 $|F|$ 个元素. 如果理想 I 满足 $\mathcal{C}(I \cap \mathscr{B}_n^{(k)}) = I \cap \mathscr{B}_n^{(k)}$, 则称该理想为**压缩理想**. 显然 $\mathscr{B}_n$ 是一个压缩理想.

设 I 是 $\mathscr{B}_n$ 上的一个理想. 定义下列序列 $f(I) = (f_0(I), f_1(I), \ldots, f_t(I))$, 其中 $f_k(I) = |I \bigcap \mathscr{B}_n^{(k)}|$ 称它之为理想 I 的**轮廓**. Pitteloud[96] 证明了 $\mathscr{B}_n$ 上压缩理想 I 的轮廓 $f(I)$ 是对数凹的.

2.5.2 压缩理想是 AF 簇

本节将证明下面定理:

定理 2.6 设 I 是 $\mathscr{B}_n$ 上一压缩理想, 且 $\mathscr{A}$ 是 I 中最大 Sperner 簇. 则

$$|\mathscr{A}|/|I| \geq \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}/2^n. \tag{2.2}$$

在证明定理之前, 需要作一些准备工作. 对 $k < n$, 设 $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}_n^{(k)}$. 称

$$\Delta \mathscr{A} = \{B \in \mathscr{B}_n^{(k-1)} : B \subset A \text{ 对 } A \in \mathscr{A}\}$$

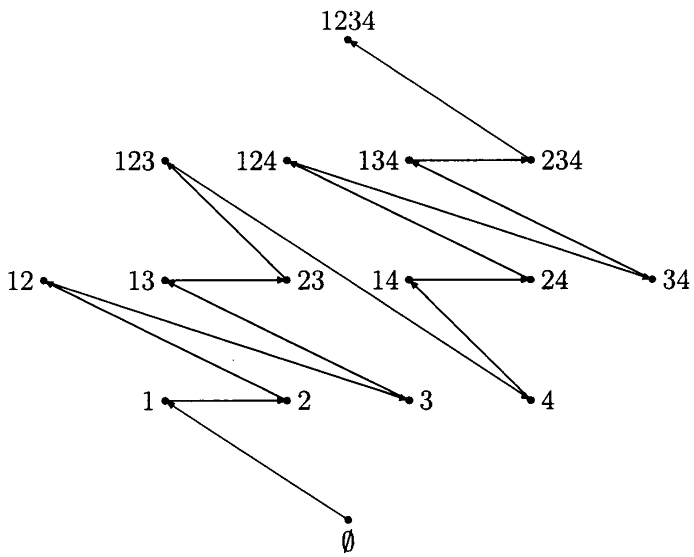

图 2.1　反字典序 $\preceq$
Fig.2.1　Reverse lexicographic order $\preceq$

为 $\mathscr{A}$ 的下阴. 称

$$\nabla\mathscr{A}=\{B\in\mathscr{B}_n^{(k+1)}: A\subset B \text{ 对 } A\in\mathscr{A}\}$$

为 $\mathscr{A}$ 的上阴.

对 $x\in\mathbb{R}^+$ 和 $k\in\mathbb{Z}^+$. 令

$$\binom{x}{k}=\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}.$$

引理 2.1 [12] 令 $\mathscr{F}\subseteq\mathscr{B}_n^{(k)}$. 如果 $k>\lceil n/2\rceil$ 则 $|\Delta\mathscr{F}|>|\mathscr{F}|$. 如果 $k<\lfloor n/2\rfloor$ 则 $|\nabla\mathscr{F}|>|\mathscr{F}|$.

引理 2.2 [87] 令 $\mathscr{F}\subseteq\mathscr{B}_n^{(k)}$. 则存在 $x\geq k$ 满足 $|\mathscr{F}|=\binom{x}{k}$ 且 $|\Delta\mathscr{F}|\geq\binom{x}{k-1}$.

证明 [定理证明2.6] 令

$$T(n)=\binom{n}{\lceil n/2\rceil}/2^n,$$

则

$$T(1)=T(2)>T(3)=T(4)>\cdots>T(2m-1)=T(2m)>\cdots.$$

对 n 进行数学归纳. $n=1$ 时结论是显然成立的. 下面进行归纳假设. 令 I 是 $\mathscr{B}_n$ 上的压缩理想. 则 $I=I_1\cup I_2$, 这里

$$I_1=\{A\in I:n\notin A\} \text{ 且 } I_2=\{A\in I:n\in I\}.$$

即 I_1 是 I 中不含 n 的元素的集合, 则显然有 $I_1\subseteq\mathscr{B}_{n-1}$. I_2 为 I 中所有含 n 的元素的集合. 令 $I_2(\bar{n})$ 为 I_2 中的每个元素 A 去掉 n 后的集合, 即

$$I_2(\bar{n})=\{A/\{n\}:A\in I_2\}.$$

则有 $I_2(\bar{n})\subseteq\mathscr{B}_{n-1}$ 且 I_1 和 $I_2(\bar{n})$ 都是 $\mathscr{B}_{n-1}$ 上的压缩理想. 首先容易验证 I_1 和 $I_2(\bar{n})$ 都是理想. 因为对任意 $A\in I_1$ 和 $B\subseteq A$ 能推出 $B\in I$ 且 $n\notin B$, 因此 $B\in I_1$, 同理可证 $I_2(\bar{n})$ 是理想. 其次容易证明 I_1 和 $I_2(\bar{n})$ 都是压缩的. I_1 显然是压缩的. 假设存在 $A\in I_2(\bar{n})$ 和 $B\preceq A$ 则 $B\cup\{n\}\preceq A\cup\{n\}$ 故 $B\cup\{n\}\in I$, 则可推出 $B\in I_2(\bar{n})$, 因此 $I_2(\bar{n})$ 也是压缩的.

对 $\mathscr{B}_{n-1}$ 归纳假设, 设在 I_1 和 $I_2(\bar{n})$ 中分别存在最大的 Sperner 簇 $\mathscr{A}_1\subseteq I_1$ 和 $\mathscr{A}_2(\bar{n})\subseteq I_2(\bar{n})$ 满足

$$\frac{|\mathscr{A}_1|}{|I_1|}\geq T(n-1) \text{ 且 } \frac{|\mathscr{A}_2(\bar{n})|}{|I_2(\bar{n})|}\geq T(n-1). \tag{2.3}$$

令 $\mathscr{A}_2=\{A\cup\{n\}:A\in\mathscr{A}_2(\bar{n})\}$. 则 $\mathscr{A}_2$ 是 I_2 中最大的 Sperner 簇.

$$\frac{|\mathscr{A}_2|}{|I_2|}=\frac{|\mathscr{A}_2(\bar{n})|}{|I_2(\bar{n})|}\geq T(n-1)\geq T(n). \tag{2.4}$$

对 $i=1,2$, 令 $I_i^{(k)}$ 为 I_i 与 $\mathscr{B}_n^{(k)}$ 的交集, $\mathscr{A}_i^{(k)}$ 为 $\mathscr{A}_i$ 与 $I_i^{(k)}$ 的交集. 即

$$I_i^{(k)}=I_i\cap\mathscr{B}_n^{(k)},\quad \mathscr{A}_i^{(k)}=\mathscr{A}_i\cap I_i^{(k)},\quad i=1,2.$$

令

$$s=\min\{k:\mathscr{A}_1^{(k)}\neq\emptyset\},\ r=\max\{k:\mathscr{A}_2^{(k)}\neq\emptyset\}.$$

下面证明 $r\leq\lceil n/2\rceil$. 注意到 $\mathscr{A}_2^{(r)}\subseteq\mathscr{B}_n^{(r)}$ 且 $\mathscr{A}_2^{(r)}(\bar{n})\subseteq\mathscr{B}_{n-1}^{(r-1)}$. 因此由引理2.1, 如果 $r-1>\lfloor(n-1)/2\rfloor$, 则

$$\left|\Delta(\mathscr{A}_2^{(r)}(\bar{n}))\right|\geq\left|\mathscr{A}_2^{(r)}(\bar{n})\right|.$$

在 $I_2(\bar{n})$ 中, 用 $\Delta(\mathscr{A}_2^{(r)}(\bar{n}))$ 替换 $\mathscr{A}_2^{(r)}(\bar{n})$, 会得到一个比 $\mathscr{A}_2(\bar{n})$ 更大的 Sperner 簇. 与 $\mathscr{A}_2(\bar{n})$ 是最大的 Sperner 簇矛盾. 因此 $r-1\leq\lfloor(n-1)/2\rfloor$, 即 $r\leq\lceil n/2\rceil$.

下面证明在 I 中存在一个 Sperner 簇 $\mathscr{A}$ 是 AF-Sperner 簇. 我们分两种情况讨论.

情况 1: 考虑 n 是偶数的情况. 令 $n=2m$, 则由上面证明知 $r\leq m$. 下面证明 $s\geq r$. 事实上, 由 $\mathscr{A}_2^{(r)}\subseteq I_2^{(r)}\neq\emptyset$ 和 I 是压缩的, 有 $I_1^{(r)}=\mathscr{B}_{2m-1}^{(r)}$. 即

$$I_1=\bigcup_{k=0}^{r}\mathscr{B}_{2m-1}^{(k)}+\bigcup_{k>r}I_1^{(k)}.$$

显然有 $s\geq r$, 这就意味着 $\mathscr{A}_1\cup\mathscr{A}_2$ 仍是 I 中的 Sperner 簇. 因此由 (2.3) 和 (2.4), 有

$$\frac{|\mathscr{A}_1\cup\mathscr{A}_2|}{|I|}=\frac{|\mathscr{A}_1|+|\mathscr{A}_2|}{|I_1|+|I_2|}\geq T(2m-1)=T(2m),$$

因此 $\mathscr{A}=\mathscr{A}_1\cup\mathscr{A}_2$ 是 AF-Sperner 簇.

情况 2: 考虑 n 是奇数的情况. 令 $n=2m+1$. 则 $r\leq m+1$. 如果 $r<m+1$, 类似地有

$$I_1=\bigcup_{k=0}^{r}\mathscr{B}_{2m}^{(k)}+\bigcup_{k>r}I_1^{(k)}.$$

因此 $s\geq r$, 则 $\mathscr{A}=\mathscr{A}_1\cup\mathscr{A}_2$ 是 AF-Sperner 簇. 如果 $r=m+1$, 则

$$I_1=\bigcup_{k=0}^{m+1}\mathscr{B}_{2m}^{(k)}+\bigcup_{k>m+1}I_1^{(k)},$$

$\mathscr{A}_1=\mathscr{B}_{2m}^{(m)}$. 然而 $\mathscr{B}_{2m}^{(m)}\cup\mathscr{A}_2$ 不再是 Sperner 簇. 令

$$\bar{\mathscr{A}_2}=\left(\mathscr{A}_2\backslash\{\mathscr{A}_2^{(m+1)}\}\right)\cup\left(\Delta_1(\mathscr{A}_2^{(m+1)})\right),$$

这里 $\Delta_1(\mathscr{A}_2^{(m+1)})$ 是 $\mathscr{A}_2^{(m+1)}$ 在 I_2 中的下阴, 即,

$$\Delta_1(\mathscr{A}_2^{(m+1)})\triangleq\Delta(\mathscr{A}_2^{(m+1)}(\overline{2m+1}))\cup\{2m+1\}.$$

则 $\bar{\mathscr{A}_2}$ 仍然是 I_2 中的 Sperner 簇, 并且

$$\mathscr{B}_{2m}^{(m)}\cup\bar{\mathscr{A}_2}\text{ 和 }\mathscr{B}_{2m}^{(m+1)}\cup\mathscr{A}_2$$

也是 I 中的 Sperner 簇.

如果 $\left|\bar{\mathscr{A}_2}\right| / |I_2| \geq T(2m)$, 则

$$\frac{\left|\mathscr{B}_{2m}^{(m)} \cup \bar{\mathscr{A}_2}\right|}{|I_1| + |I_2|} \geq T(2m) > T(2m+1).$$

这就意味着 $\mathscr{A} = \mathscr{B}_{2m}^{(m)} \cup \bar{\mathscr{A}_2}$ 是 AF-Sperner 簇.

类似的, 如果

$$\frac{\left|\mathscr{B}_{2m}^{(m+1)}\right|}{|I_1|} \geq T(2m),$$

则 $\mathscr{A} = \mathscr{B}_{2m}^{(m+1)} \cup \mathscr{A}_2$ 是 AF-Sperner 簇.

假设

$$\left|\bar{\mathscr{A}_2}\right| / |I_2| < T(2m) \text{ 且 } \left|\mathscr{B}_{2m}^{(m+1)}\right| / |I_1| < T(2m),$$

则证明下面式子成立:

$$\frac{\left|\mathscr{B}_{2m}^{(m)} \cup \bar{\mathscr{A}_2}\right|}{|I_1| + |I_2|} \geq T(2m+1). \tag{2.5}$$

首先证明

$$\binom{2m}{m} \geq (2m+1)|\mathscr{A}_2| - (2m+2)|\bar{\mathscr{A}_2}|. \tag{2.6}$$

注意到

$$|\mathscr{A}_2| = \left|\mathscr{A}_2^{(m+1)}\right| + \sum_{i<m+1} \left|\mathscr{A}_2^{(i)}\right|. \tag{2.7}$$

$$|\bar{\mathscr{A}_2}| = \left|\Delta_1(\mathscr{A}_2^{(m+1)})\right| + \sum_{i<m+1} \left|\mathscr{A}_2^{(i)}\right|. \tag{2.8}$$

用 (2.7) 和 (2.8) 分别替换 $|\mathscr{A}_2|$ 和 $|\bar{\mathscr{A}_2}|$ 并化简得到

$$\binom{2m}{m} \geq (2m+1)\left|\mathscr{A}_2^{(m+1)}\right| - (2m+2)\left|\Delta_1(\mathscr{A}_2^{(m+1)})\right|. \tag{2.9}$$

因此要证明 (2.6), 只需证明 (2.9) 即可.

事实上,

$$\mathscr{A}_2^{(m+1)}(\overline{2m+1}) \subseteq I_2^{(m+1)}(\overline{2m+1}) \subseteq \mathscr{B}_{2m}^{(m)}.$$

假设 $\left|\mathscr{A}_2^{(m+1)}(\overline{2m+1})\right| = \binom{x}{m}$, 这里 $m \le x \le 2m$. 则由引理 2.2, 有

$$\left|\Delta_1(\mathscr{A}_2^{(m+1)})\right| = \left|\Delta(\mathscr{A}_2^{(m+1)}(\overline{2m+1}))\right| \ge \binom{x}{m-1}.$$

计算 (2.9) 的右边

$$\begin{aligned} & (2m+1)\left|\mathscr{A}_2^{(m+1)}\right| - (2m+2)\left|\Delta_1(\mathscr{A}_2^{(m+1)})\right| \\ \le\ & (2m+1)\binom{x}{m} - (2m+2)\binom{x}{m-1}. \end{aligned}$$

将

$$\binom{x}{m} = \frac{x-m+1}{m}\binom{x}{m-1}$$

带入化简得到

$$\begin{aligned} & (2m+1)\left|\mathscr{A}_2^{(m+1)}\right| - (2m+2)\left|\Delta_1(\mathscr{A}_2^{(m+1)})\right| \\ \le\ & \left((2m+1)\frac{x-m+1}{m} - (2m+2)\right)\binom{x}{m-1}. \end{aligned}$$

由于 $m \le x \le 2m$, 所以得到

$$\begin{aligned} & (2m+1)\left|\mathscr{A}_2^{(m+1)}\right| - (2m+2)\left|\Delta_1(\mathscr{A}_2^{(m+1)})\right| \\ \le\ & \left((2m+1)\frac{2m-m+1}{m} - (2m+2)\right)\binom{2m}{m-1} \\ =\ & \frac{m+1}{m}\binom{2m}{m-1} \\ =\ & \binom{2m}{m}. \end{aligned}$$

这就证明了 (2.9).

下面证明 (2.5) 可由 (2.6) 推出. 事实上

$$|\bar{\mathscr{A}_2}| + \frac{1}{2m+2}\binom{2m}{m} \ge \frac{2m+1}{2m+2}|\mathscr{A}_2| = \frac{T(2m+1)}{T(2m)}|\mathscr{A}_2| \ge T(2m+1)\,|I_2|. \qquad (2.10)$$

用 $\binom{2m+1}{m}/2^{(2m+1)}$ 替换 $T(2m+1)$ 并化简 (2.10) 得

$$2^{2m+1}|\bar{\mathscr{A}_2}| + \frac{2^{2m+1}}{2m+2}\binom{2m}{m} \geq \binom{2m+1}{m}|I_2|.$$

由

$$\frac{2^{2m+1}}{2m+2}\binom{2m}{m} = 2^{2m+1}\binom{2m}{m} - 2^{2m}\binom{2m+1}{m},$$

得到

$$\frac{\binom{2m}{m} + |\bar{\mathscr{A}_2}|}{2^{2m} + |I_2|} \geq \frac{\binom{2m+1}{m}}{2^{2m+1}} = T(2m+1).$$

最后

$$\frac{\left|\mathscr{B}_{2m}^{(m)} \cup \bar{\mathscr{A}_2}\right|}{|I_1| + |I_2|} \geq \frac{\binom{2m}{m} + |\bar{\mathscr{A}_2}|}{2^{2m} + |I_2|} \geq T(2m+1)$$

成立. 至此完成定理证明. □

众所周知, 对 $\mathscr{B}_n$ 中每个理想 I 都唯一地存在一个压缩理想 I' 与其有相同的轮廓[12]. 由定理 2.6知, 在每个压缩理想 I' 中都存在一个极大的 Sperner 簇 $\mathscr{A}'$ 满足 $|\mathscr{A}'|/|I'| \geq \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}/2^n$. 因此要想证明猜想对每个理想 I 都成立, 关键是要找到 I 中最大的 Spernenr 簇 $\mathscr{A}$ 与压缩理想 I' 中最大 Sperner 簇 $\mathscr{A}'$ 的关系.

2.6 本章小结

Sperner 理论的研究对象是偏序集, 偏序集是数学各分支中极为常见的一种结构. 因此 Sperner 理论的涉及面相当广泛, 其研究内容与数学的其它分支相互渗透, 其它数学分支的理论和方法不仅丰富了 Sperner 理论的内容, 也使得 Sperner 理论的发展更加充满活力.

Akiyama 和 Frankl 将 Sperner 定理推广到凸集上并给出猜想, 本章我们首先考虑一些经典凸集, 例如降簇、Lih 定义的子集 Lih 簇, 证明猜想对上述子集簇成立. 随后我们考虑一类凸集 -压缩理想, 证明猜想对压缩理想成立.

3 ψ 图配置的超级可解性

3.1 引 言

每个超平面配置都唯一地对应一个交偏序集,从而超平面配置的很多性质可以由其对应的交偏序集反映出来. 本节通过考虑 ψ 图配置对应交偏序集存在极大的模链来证明 ψ 图配置的超级可解性. 图配置超级可解性的概念是由 Stanley 提出来的, 并且 Stanley 给出图配置超级可解的等价条件是该图是一个弦图[21]. 随后 Stanley 将图配置的概念推广, 定义了 ψ 图配置[97,98], 并对 ψ 图配置超级可解性的等价条件给出猜想. 本章主要目的是证明 Stanley 的猜想, 给出 ψ 图配置超级可解的等价条件.

3.2 超平面配置

设 K 为一个域. 本章主要考虑 $K=\mathbb{R}$ 的情况, 欧式空间 $V\cong K^n$. 定义欧式空间 V 上的**线性超平面**H 为 V 上的 $(n-1)$ 维子空间, 即

$$H=\{v\in V:\alpha\cdot v=0\},$$

其中 α 为 V 上固定的非零向量且 $\alpha\cdot v$ 为向量的内积, 即

$$\alpha\cdot v=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\cdot(v_1,\ldots,v_n)=\sum\alpha_iv_i.$$

定义 V 上的**仿射超平面**J 为

$$J=\{v\in V:\alpha\cdot v=a\},$$

其中 α 为 V 上固定的非零向量且 $a\in K$. 定义一个**有限的超平面配置**$\mathcal{A}$ 为欧式空间 $V\cong K^n$ 上的有限个仿射超平面的集合. 设 $\mathcal{A}$ 是欧式空间 V 上的超平面配置, 则 $\mathcal{A}$ 的**维数** $\dim(\mathcal{A})$ 定义为 V 的维数, 即 $\dim(\mathcal{A})=\dim(V)$. 超平面配置 $\mathcal{A}$ 的**秩** $\mathrm{rank}(\mathcal{A})$ 定义为 $\mathcal{A}$ 中所有超平面的法线张成的子空间的维数. 如果超平面配置 $\mathcal{A}$ 满足 $\dim(\mathcal{A})=\mathrm{rank}(\mathcal{A})$, 则称 $\mathcal{A}$ 为**本质的**.

本文不考虑无限的超平面配置, 我们将有限的超平面配置简称为超平面配置. 如图 3.1, 当 $n=2$ 时给出两个超平面配置 $\mathcal{A}_1=\{H_1,H_2,H_3\}$ 和 $\mathcal{A}_2=\{H_4,H_5,H_6\}$ 的例子.

下面定义超平面配置 $\mathcal{A}$ 所对应的交偏序集 $L(\mathcal{A})$. **交偏序集** $L(\mathcal{A})$ 中的元素包含 $\mathcal{A}$ 中所有超平面的非空交和 V 本身 (作为最小元), $L(\mathcal{A})$ 中定义的二元关系为超平面的反包

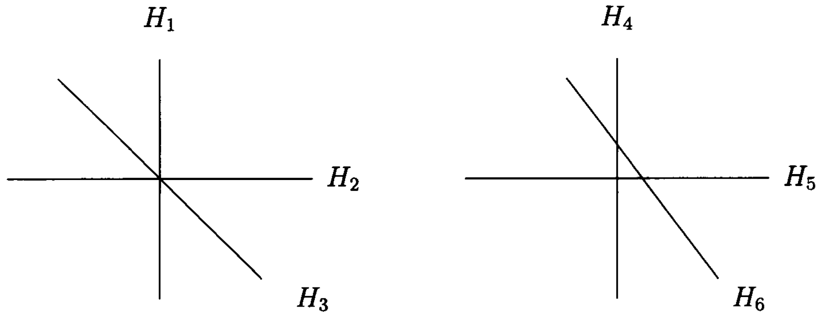

图 3.1　超平面配置 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$
Fig.3.1　Hyperplane arrangements $\mathcal{A}_1$ and $\mathcal{A}_2$

含关系, 即如果 $x, y \in L(\mathcal{A})$ 满足在 V 中有 $x \supseteq y$ 成立, 则定义 $L(\mathcal{A})$ 中的序为 $x \leq y$. 例如图 3.1 中的 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 所有对应的交偏序集为图 3.2 的 $L(\mathcal{A}_1)$ 和图 3.3 的 $L(\mathcal{A}_2)$.

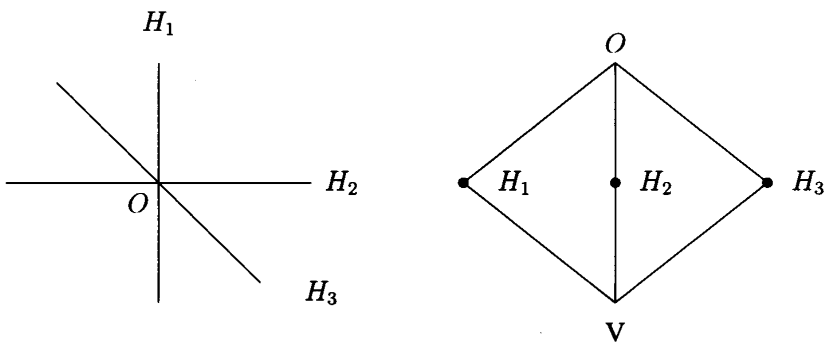

图 3.2　交偏序集 $L(\mathcal{A}_1)$
Fig.3.2　Intersection poset $L(\mathcal{A}_1)$

一个偏序集 P 称为**局部有限的**如果 P 上面的每个闭区间 $[x, y]$ 都是有限的. 记 $\mathrm{Int}(P)$ 为 P 上所有闭区间的集合. 设 P 是局部有限的偏序集. 定义 P 上的 **Möbius 函数** $\mu : \mathrm{Int}(P) \to \mathbb{Z}$ 为:

(i) $\mu(x, x) = 1$, 对所有 $x \in P$

(ii) $\mu(x, y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z)$, 对所有 P 中 $x < y$.

如果 P 中含有最小元 $\hat{0}$, 记 $\mu(x) = \mu(\hat{0}, x)$. 例如图 3.4 给出交偏序集 $L(\mathcal{A}_1)$ 中每个元素的 Möbius 函数值 $\mu(x)$.

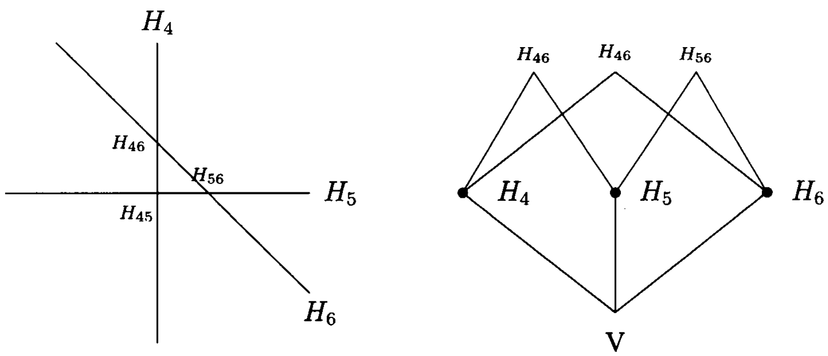

图 3.3　交偏序集 $L(\mathcal{A}_2)$
Fig.3.3　Intersection poset $L(\mathcal{A}_2)$

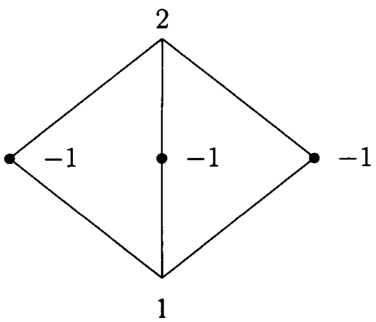

图 3.4　$L(\mathcal{A}_1)$ 的 Möbius 函数值
Fig.3.4　Möbius function of $L(\mathcal{A}_1)$

3.3　ψ 图配置

设 G 是顶点集为 $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ 边集为 E 的简单图. 称 G 的顶点个数 $n = |V|$ 为 G 的**阶数**. 定义顶点 $v \in V$ 的**领域**为 $N_G(v) = \{u : uv \in E\}$, **闭邻域**为 $N_G(v) \cup \{v\}$. 顶点 v 的**度** d_v 就是与点 v 相连的顶点个数, 即为 $|N_G(v)|$. 图 G 的任意一部分 (包括 G 本身) 都称为 G 的一个**子图**. 任意两个顶点之间都有边相连的图称为**完全图**. 图 G 的一个完全子图称为 G 的**团**. 设 V' 是 V 的非空子集, 以 V' 为顶点集, 以两个端点均在 V' 中的边的全体边集所组成的子图称为 G 的**点导出的子图**, 记为 $G[V']$. 设 E' 是边集 E 的非空子集, 则以 E' 为边集, 以 E' 中边的所有端点为顶点集组成的图称为 G 的**边导出子图**, 记为 $G[E']$. 如果图 G 的一个子图包含 G 的所有顶点称该子图为 G 的**生成子图**. 如果图 G 中任意两点都有路径相连则称 G 是**联通图**. 图 G 的一个极大联通子图称为 G 的一个**联通分支**.

在图 G 中, 若 $v_iv_j \in E$ 则定义图上的超平面 H 为 $x_i - x_j = 0$. K^n 上的**图配置** $\mathcal{A}_G$ 定义为图上超平面 H 的集合. 例如, 当 $G = K_n$ 为完全图时, G 对应的图配置为子集格 $\mathscr{B}_n$.

若配置 $\mathcal{A}$ 中所有超平面满足 $\bigcap_{H\in\mathcal{A}} H \neq \emptyset$, 则该配置称为**中心的**. 等价地, 中心配置也称为线性配置, 即配置 $\mathcal{A}$ 是线性超平面的集合或者配置 $\mathcal{A}$ 中所有超平面都经过原点. 例如图 3.2 中, 超平面配置 $\mathcal{A}_1$ 是中心配置而图 3.3 中 $\mathcal{A}_2$ 则不是中心配置. 图配置的交偏序集是几何的[21]. 更一般地, 所有中心配置的交偏序集都是几何的. 当一个配置不是中心时, 可以增加一个变量将维数增加一维, 使得配置变成中心配置, 而这个转变过程基本保障原配置的性质保持不变, 所以中心配置是本文的主要研究对象.

令 $2^{\mathbb{P}}$ 表示 $\mathbb{P}$ 的所有子集的集合. 设 $\psi : V \to 2^{\mathbb{P}}$ 是满足对所有的 $v \in V$ 都有 $|\psi(v)| < \infty$ 成立的函数. 定义 $\mathbb{R}^n$ 上的**ψ 图配置** $\mathcal{A}_{G,\psi}$ 为下面超平面的集合:

(i) $x_i - x_j = 0$ 如果在图 G 中有 $v_iv_j \in E$.

(ii) $x_i = \alpha_j$ 如果 $\alpha_j \in \psi(v_i)$.

一般情况下, $\mathcal{A}_{G,\psi}$ 不是中心配置, 从而其对应的交偏序集 $L(\mathcal{A}_{G,\psi})$ 也不是几何格. 因此定义**中心 ψ 图配置** $c(\mathcal{A}_{G,\psi})$ 为下面超平面的集合:

(i) $x_i - x_j = 0$ 如果在图 G 中有 $v_iv_j \in E$.

(ii) $x_i = \alpha_j y$ 如果 $\alpha_j \in \psi(v_i)$, 这里 y 表示一个新的分量.

(iii) $y = 0$

几何格 L 中的元素 x 若满足对 L 中所有元素 y 都有

$$\mathrm{rk}(x) + \mathrm{rk}(y) = \mathrm{rk}(x \wedge y) + \mathrm{rk}(x \vee y)$$

成立则称 x 为**模的**, 这里 rk 表示 L 中的秩函数. L 中的一条**模极大链**定义为极大链 $\hat{0} = x_0 \lessdot x_1 \lessdot \cdots \lessdot x_n = \hat{1}$, 满足每个元素 x_i 都是模元素, 其中 $\hat{0}$ 和 $\hat{1}$ 分别为 L 的最小元和最大元. 若几何格 L 中存在一条模极大链, 则该几何格称为**超级可解的**. 若超平面配置 $\mathcal{A}$ 所对应的交偏序集 $L(\mathcal{A})$ 是超级可解的, 则称该**超平面配置超级可解**. 超级可解的概念来源于群论, 一个有限群是超级可解的当且仅当他的子群格存在一条极大的链且链中每个元素都是正规子群. 正规子群在群论中的性质类似于模元素在格中的性质, 由此 Stanley 定义了格上超级可解的概念并且作了一系列的研究[99].

设 $E(G)$ 是图 G 的边集, F 是边集 $E(G)$ 的子集, 令 H_{ij} 表示超平面 $x_i = x_j$, 则图 G 的交偏序集 $L(\mathcal{A}_G)$ 的元素 $X = \cap_{ij\in F}H_{ij}$ 满足:

$$(x_1,\ldots,x_n) \in X \Leftrightarrow x_i = x_j, ij \in F.$$

设 $C_1,\ldots,C_k$ 是边集 F 的生成子图 G_F 的联通分支, 如果 i,j 在同一个联通分支 C_m 中, 则从 i 到 j 就会存在一条路, 满足路上每条边都在 C_m 上. 因此对所有的 $(x_1,\ldots,x_n) \in X$, 都有 $x_i = x_j$. 另一方面, 如果 i,j 不在同一个联通分支 C_m 中, 则 i 与 j 之间就没有路满足每条边都在 F 上.

有限集 S 上一个**分拆**定义为 S 的有限个子集的集合, 记为 $\{B_1,\ldots,B_k\}$, 其中每个 B_i 称为**块**, 满足每个 B_i 非空, 任意两个不同的块互不相交且所有块的并是 S. S 所有分拆的集合记为 Π_S, 当 $S=[n]$ 时, 用 Π_n 来简记 $\Pi_{[n]}$. 若图 G 的顶点集 $V(G)$ 的分拆满足对每个分拆 $\pi = \{B_1,\ldots,B_k\}$, 其中 $B_i \subseteq V(G)$, 都有每个块 B_i 在 G 上是联通的, 则称该分拆为**联通分拆**.

设 X_π 是图 G 的图配置所对应的交偏序集 $L(\mathcal{A}_G)$ 中的一个元素, $V(G)$ 是图 G 的顶点集, 则由上面的讨论知道 X_π 对应 $V(G)$ 的一个联通分拆, 即

$$X_\pi = \{(x_1,\ldots,x_n) \in K^n : i,j \in B_m \Rightarrow x_i = x_j\}.$$

由此得到 $L(\mathcal{A}_G)$ 中两个元素满足 $X_\pi \le X_\sigma$ 当且仅当 π 中每个块包含在 σ 的每个块中, 即 π 是 σ 的加细. 因此 $L(\mathcal{A}_G)$ 同构于 Π_n 的一个诱导子偏序集 L_G. 特别地, $\Pi_n \cong L(\mathcal{A}_{K_n})$. 由 $L(c(\mathcal{A}_{G,\psi}))$ 的定义容易知道 $L(\mathcal{A}_G)$ 是 $L(c(\mathcal{A}_{G,\psi}))$ 上的一个区间, 即从最小元 $\hat{0}$ 到 $c(\mathcal{A}_{G,\psi})$ 中所有超平 $x_i = x_j$ 交的区间. 如下图 3.5, 给出图 G 与其对应的偏序集 L_G.

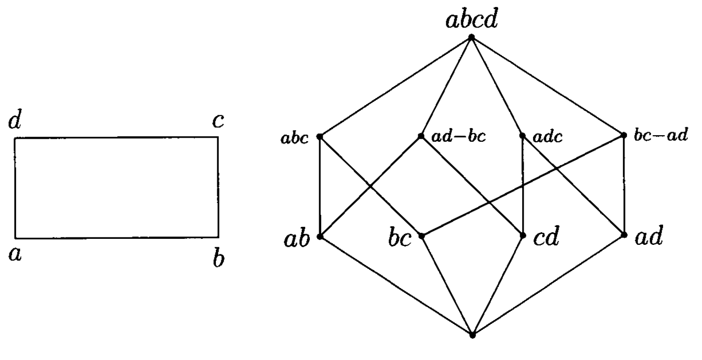

图 3.5　图 G 及偏序集 L_G
Fig.3.5　Graph G and intersection poset L_G

为了简单起见, $L(c(\mathcal{A}_{G,\psi}))$ 中的元素

$$X_\sigma = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha_i y, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, \alpha_i y, x_{j+1}, \ldots, x_n, y)$$

其中 $\alpha_i \in \psi(v_i)$ 或者 $\alpha_i \in \psi(v_j)$, 简记为 $\sigma : v_i = v_j = \alpha_i y$, 或者更简单记为 $\sigma = \{v_i v_j \alpha_i y\}$. $L(c(\mathcal{A}_{G,\psi}))$ 中的元素

$$X_\delta = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n, 0)$$

简记为 $\delta : v_i = v_j = y = 0$, 或者更简单地记为 $\delta = \{v_i v_j y 0\}$.

若一个图中每个长度超过 4 的圈都含有一个弦 (链接圈中两个顶点但是不是圈边的边), 则该图称为**弦图**. 等价的, 弦图的每个诱导圈恰好只有三个顶点. 例如图 3.5 中的图 G 不是弦图, 而在 G 中加一条边 ac 后得到的新图 3.6 就是一个弦图. Stanley[21] 给出图配置 $\mathscr{A}_G$ 是超级可解的等价条件是该图 G 是一个弦图. 本章给出 ψ 图配置超级可解的等价条件.

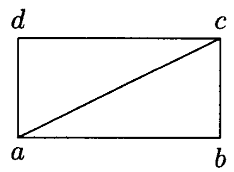

图 3.6　弦图 G
Fig.3.6　Chordal graph G

3.4　ψ 图配置的超级可解性

本节讨论 ψ 图配置的超级可解性的充分必要条件.

3.4.1　ψ 图配置超级可解的充分条件

定理 3.1 设 G 是顶点集为 V 的图, ψ 是定义在 $V \to 2^{\mathbb{P}}$ 上的函数. 则 $\mathcal{A}_{G,\psi}$ 超级可解的充分条件是在 G 中能找到顶点的一个排序 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 满足下面两个条件:

(i) 与 v_{i+1} 相连的且排在 v_{i+1} 前面的点形成一个团 (即, 图 G 是一个弦图).

(ii) 如果 $i < j$ 且 v_i 与 v_j 有边相连, 则 $\psi(v_j) \subseteq \psi(v_i)$.

证明 为了证明 $\mathcal{A}_{G,\psi}$ 的超级可解性, 需要在 $L(c(\mathcal{A}_{G,\psi}))$ 中找到一条极大的模链. 令 $\pi_i = \{v_1 v_2 \cdots v_{i-1} y 0\}$, 稍后证明 $\hat{0} < \pi_1 < \cdots < \pi_n < \hat{1}$ 即为 $L(c(\mathcal{A}_{G,\psi}))$ 中的一

条极大的模链. 首先证明每个元素 $\pi_n=\{v_1v_2\cdots v_{n-1}y0\}$ 是一个模元素. 对任意的 $\sigma=\{B_1,B_2,\ldots,B_t\}\in L_c(\mathscr{A}_{G,\psi})$, 只需要考虑包含 v_n 的块 B_i. 如果 $B_i=\{v_n\}$, 则 $\sigma<\pi_n$. 因此有

$$\mathbf{rk}(\pi_n)+\mathbf{rk}(\sigma)=\mathbf{rk}(\pi_n\wedge\sigma)+\mathbf{rk}(\pi_n\vee\sigma).$$

如果 $B_i=\{v_{i_1}\cdots v_{i_m}v_n\}$, 则 $\pi_n\vee\sigma=\hat{1}$. 因为与 v_n 相连的点形成一个团, 所以块 $B_i'=\{v_{i_1}\cdots v_{i_m}\}$ 存在. 则

$$\pi_n\wedge\sigma=\{B_1,\ldots,B_{i-1},B_{i+1},\ldots,B_t,B_i',v_n\}.$$

因此 $\mathbf{rk}(\pi_n\wedge\sigma)=\mathbf{rk}(\sigma)-1$ 且

$$\mathbf{rk}(\pi_n)+\mathbf{rk}(\sigma)=\mathbf{rk}(\pi_n\wedge\sigma)+\mathbf{rk}(\pi_n\vee\sigma).$$

如果 $B_i=\{v_{i_1}\cdots v_{i_m}v_ny0\}$, 则 $\pi_n\vee\sigma=\hat{1}$ 且

$$\pi_n\wedge\sigma=\{B_1,\ldots,B_{i-1},B_{i+1},\ldots,B_t,v_{i_1}\cdots v_{i_m}y0,v_n\}.$$

因此 $\mathbf{rk}(\pi_n\wedge\sigma)=\mathbf{rk}(\sigma)-1$ 且

$$\mathbf{rk}(\pi_n)+\mathbf{rk}(\sigma)=\mathbf{rk}(\pi_n\wedge\sigma)+\mathbf{rk}(\pi_n\vee\sigma).$$

如果 $B_i=\{v_{i_1}\cdots v_{i_m}v_n\alpha_jy\}$, 这里 $\alpha_j\in\psi(v_{i_j}),1\le j\le m$, 或者 $\alpha_j\in\psi(v_n)$, 则 $\pi_n\vee\sigma=\hat{1}$. 若 v_{i_j} 与 v_n 有边相连, 则 $\psi(v_n)\subseteq\psi(v_{i_j})$, 由此有 $\alpha_j\in\psi(v_{i_j})$. 所以块 $B_i'=\{v_{i_1}\cdots v_{i_m}\alpha_jy\}$ 存在且

$$\pi_n\wedge\sigma=\{B_1,\ldots,B_{i-1},B_{i+1},\ldots,B_t,B_i',v_n\}.$$

因此 $\mathbf{rk}(\pi_n\wedge\sigma)=\mathbf{rk}(\sigma)-1$ 且

$$\mathbf{rk}(\pi_n)+\mathbf{rk}(\sigma)=\mathbf{rk}(\pi_n\wedge\sigma)+\mathbf{rk}(\pi_n\vee\sigma).$$

由以上讨论知得到元素 $\pi_n=\{v_1v_2\cdots v_{n-1}y0\}$ 是模元素. 若 $\pi_{n-1}=\{v_1v_2\cdots v_{n-2}y0\}$ 在区间 $[\hat{0},\pi_n]$ 是模元素, 则其在整个 $L(c(\mathcal{A}_{G,\psi}))$ 上亦是模元素[21]. 因此只需证 π_{n-1} 在区间 $[\hat{0},\pi_n]$ 上是模元素即可.

因为 $[\hat{0},\pi_n]$ 上所有元素 σ 都满足有一个单独的块 $B_i=\{v_n\}$, 因此可以忽略块 $B_i=\{v_n\}$. 同样的方法可以证明 $\pi_{n-1}=\{v_1v_2\cdots v_{n-2}y0\}$ 在区间 $[\hat{0},\pi_n]$ 是模元素. 继续这个过程, 得到极大的模链 $\hat{0}<\pi_1<\cdots<\pi_n<\hat{1}$. □

3.4.2 ψ 图配置超级可解的必要条件

若图中一个顶点的所有邻居形成一个完全子图 (或者团), 则这个顶点称为**单纯的**. 若一个图只包含一个单独的点, 或者该图包含一个单纯顶点 v, 且当把 v 移去后剩下的子图仍然包含单纯的顶点, 则该图称为**递归单纯的**. 很容易发现, 若将一个递归单纯的图移去任何一个点的 v, 剩下的图仍是递归单纯的. 在给出必要性的证明之前, 我们先给出 Dirac 的两个引理[100].

引理 3.1 G 是弦图的充要条件是 G 是递归单纯的.

引理 3.2 每个不是完全图的弦图 G 至少含有两个不相连的单纯顶点.

定理 3.2 定理 3.1 中的两个条件也是 $\mathcal{A}_{G,\psi}$ 超级可解的必要条件.

证明 条件 (1) 容易验证. 因为超级可解格的区间也是超级可解的[99], 而 $L(\mathcal{A}_G)$ 是 $L(c(\mathcal{A}_{G,\psi}))$ 的区间, 由条件 $L(\mathcal{A}_G)$ 的超级可解性推出 $L(\mathcal{A}_G)$ 的超级可解性. 因此由图配置超级可解的等价条件知道图 G 是弦图[99].

由引理3.2知在图 G 中至少存在两个不相连的单纯点. 假设其中一个单纯点, 不妨设为 v_{i_n}, 满足下面条件:

$$\psi(v_{i_n})\subseteq\psi(v_{i_j})\text{ 对所有的}v_{i_j}v_{i_n}\in E. \tag{3.1}$$

则将 v_{i_n} 标号为最后一个元素 v_n, 然后移掉这个元素. 由引理 3.1知, 剩下的图仍然是递归单纯的, 即仍然存在单纯的点. 继续上面的过程, 若仍存在单纯的点满足上面条件, 则将该单纯点标号为 v_{n-1} 然后移掉该点. 继续这个过程. 如果条件 (2) 不满足, 则说明在上面的操作中存在一步 m 使得图中剩下的所有单纯顶点都不满足(3.1). 下面证明这是矛盾的, 即若图中剩下的所有的单纯点都不满足条件(3.1), 则 $L(c(\mathscr{A}_{G,\psi}))$ 中不存在极大的模链.

首先证明在 $L(c(\mathscr{A}_{G,\psi}))$ 的所有对偶原子中只有

$$\sigma_i=\{v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_{n-1}}y0\}\text{ 和 }\delta_i=\{v_1v_2\cdots v_n\alpha_iy\},$$

这里 $\alpha_i\in\psi(v_i), 1\le i\le n$ 可能是模元素. 下面要证明的一个事实就是若一个对偶原子包含超过两个块或者只含有两个块但是两块的大小都大于 1, 则该对偶原子就不是模元素.

首先一个含有超过两个块的对偶原子不是模元素的事实是容易验证的. 假设对偶原子 $\sigma = \{A, B, C\}$. 因为 $\mathbf{rk}(\sigma) = n-1$, 即 $\mathbf{dim}(\sigma) = 1$, 则 A, B 和 C 只可能是

$$\{v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_{j_i}} \alpha_i y\}$$

这里 $i = 1, 2, 3$ 且 $\alpha_i \in \psi(v_{i_m}), m = 1, 2, \ldots, j_i$. 设

$$\gamma = \{v_1 v_2 \cdots v_n, y0\},$$

则

$$\mathbf{rk}(\sigma) = \mathbf{rk}(\gamma) = n-1,\ \mathbf{rk}(\sigma \vee \gamma) = n,$$

但是 $\mathbf{rk}(\sigma \wedge \gamma) < n-2$, 因此 σ 不是模元素.

其次如果对偶原子 σ 恰好有两个块, 不妨假设 $\sigma = \{A, B\}$, 且每块大小都大于 1, 即 $|A| > 1$ 且 $|B| > 1$, 下面证明 σ 不是模元素. 不失一般性, 假设在 A 中存在 u, v, 在 B 中存在 u', v' 使得 $u \neq v', u' \neq v, uu' \in E(G)$ 且 $vv' \in E(G)$. 令

$$\gamma = \{(A \cup u')/v, (B \cup v)/u'\}.$$

则

$$\mathbf{rk}(\sigma) = \mathbf{rk}(\gamma) = n-1, \mathbf{rk}(\sigma \vee \gamma) = n,$$

但是 $\mathbf{rk}(\sigma \wedge \gamma) < n-2$. 因此 σ 不是模元素.

由上面的讨论知所有的对偶原子中只有 $\sigma_i = \{v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_{n-1}} y0\}$ 和

$$\delta_i = \{v_1 v_2 \cdots v_n \alpha_i y, \alpha_i \in \psi(v_i), 1 \leq i \leq n\}$$

可能是模元素. 类似的, 容易验证所有被 σ_i 覆盖的元素中只有

$$\{(v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_{n-1}}/v_{i_j}) y0\}$$

可能是模元素.

下面证明对于 σ_i, 若 v_{i_n} 不是单纯的, 则 σ_i 不是模元素. 不失一般性, 设 v_{i_s} 和 v_{i_n} 在 G 中有边相连且 v_{i_t} 和 v_{i_n} 也有边相连, 但是 v_{i_s} 和 v_{i_t} 在 G 中无边相连. 令

$$\gamma = \{(v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_{n-1}}/v_{i_s} v_{i_t}) y0, v_{i_s} v_{i_t} v_{i_n}\}.$$

则

$$\mathbf{rk}(\sigma) = \mathbf{rk}(\gamma) = n-1,\ \mathbf{rk}(\sigma \vee \gamma) = n,$$

但是 $\mathbf{rk}(\sigma \wedge \gamma) < n-2$. 因此如果 v_{i_n} 不是单纯点, 则 σ_i 不是模元素

若 v_{i_n} 是单纯点但是不满足(3.1) 则 σ_i 也不是模元素. 不失一般性, 假设 v_{i_j} v_{i_n} 有边相连, 但是

$$\alpha_i \in \psi(v_{i_n}),\ \alpha_i \notin \psi(v_{i_j}).$$

则令

$$\gamma = \{v_{i_j} v_{i_n} \alpha_i y\},$$

有

$$\mathbf{rk}(\sigma_i) = n-1,\ \mathbf{rk}(\gamma) = 2,\ \mathbf{rk}(\sigma_i \vee \gamma) = n,$$

但是 $\mathbf{rk}(\sigma_i \wedge \gamma) = 0$. 由上面的讨论知, 若条件 (2) 不满足, 则会存在一步 m 使得剩下所有的单纯点都不满足(3.1). 这意味着所有的 $\{v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_{n-m}} y0\}$ 都不是模元素. 因此在 $\hat{0}$ 到 σ_i 中无极大模链.

下面证明若 δ_i 是模元素, 则对所有 $i \in [n]$ 都有 $\alpha_i \in \psi(v_i)$. 等价的, 需要证明如果存在顶点 v_m 使得 $\alpha_i \notin \psi(v_m)$, 则 δ_i 是模元素. 令

$$\gamma = \{v_1 v_2 \cdots v_n / v_m, v_m y 0\}.$$

则

$$\mathbf{rk}(\delta_i) = \mathbf{rk}(\gamma) = n-1,\ \mathbf{rk}(\delta_i \vee \gamma) = n,$$

但是 $\mathbf{rk}(\delta_i \wedge \gamma) < n-2$. 由上面的讨论知, 如果条件 (2) 不满足, 则至少存在两个不相连的单纯点, 假设为 v_s 和 v_t, 不满足条件(3.1). 这意味着, 存在 $\alpha_s \in \psi(v_s)$, $\alpha_t \in \psi(v_t)$ 这里 $\alpha_s, \alpha_t \neq \alpha_i$. 若 $\alpha_s = \alpha_t$, 令

$$\gamma = \{(v_1 v_2 \cdots v_n / v_s v_t)\alpha_i y, v_s v_t \alpha_s y\}.$$

则

$$\mathbf{rk}(\delta_i) = \mathbf{rk}(\gamma) = n-1,\ \mathbf{rk}(\delta_i \vee \gamma) = n,$$

但是 $\mathbf{rk}(\delta \wedge \gamma) < n-2$. 因此 δ_i 不是模元素.

若 $\alpha_s \neq \alpha_t$, 令

$$\gamma = \{v_t \alpha_t y, v_s \alpha_s y, (v_1 v_2 \cdots v_n / v_t v_s)\alpha_i y\}.$$

则

$$\mathbf{rk}(\delta_i) = \mathbf{rk}(\gamma) = n - 1,\ \mathbf{rk}(\delta_i \vee \gamma) = n,$$

但是 $\mathbf{rk}(\delta_i \wedge \gamma) < n - 2$, 因此 δ_i 不是模元素.

综上所述, 如果不存在满足条件 (1) 和 (2) 的标号, 则在 $L(c(\mathcal{A}_{G,\psi}))$ 中不存在极大的模链. 这就完成了证明. □

3.5 ψ 图配置的自由性

设 $\mathcal{A}$ 是 K^n 上的超平面配置, $L(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 所对应的交偏序集. 记 $K[x] = K[x_1, x_2, \ldots x_n]$ 为一多项式环. 定义

$$\mathcal{J}(\mathcal{A}) = \{(p_1, \ldots, p_n) \in K[x]^n : (p_1(H), \ldots, p_n(H)) \subseteq H \text{ 对所有的 } H \in \mathcal{A}\},$$

为多项式环 $K[x]$ 上的映射. 当 $\mathcal{A}$ 是 K^n 上的线性超平面配置时,$\mathcal{J}(\mathcal{A})$ 是 $K[x]$ 模. 如果 $\mathcal{J}(\mathcal{A})$ 是自由的 $K[x]$ 模, 即存在 $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathcal{J}(\mathcal{A})$ 使得 $\mathcal{J}(\mathcal{A})$ 中每个元素 Q 可以被唯一的写成下面形式

$$Q = q_1 Q_1 + \cdots + q_n Q_n,$$

这里 $q_i \in K[x]$, 则称超平面配置 $\mathcal{A}$ 是**自由的**, 其中 $\{Q_1, \ldots, Q_n\}$ 称为 $\mathcal{J}(\mathcal{A})$ 的一组基. 更一般的, 如果 $\mathcal{J}(\mathcal{A})$ 是自由的, 则 $\mathcal{J}(\mathcal{A})$ 中的基 $\{Q_1, \ldots, Q_n\}$ 是齐次的, 即每个 Q_i 是齐次多项式且有相同的度 d_i, 称

$$\mathbf{exp}(\mathcal{A}) = \{d_1, \ldots, d_n\}$$

为超平面配置 $\mathcal{A}$ 的**指数**, 称

$$Q(\mathcal{A}) = \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H$$

为 $\mathcal{A}$ 的**定义多项式**, 这里 $H = ker(\alpha_H)$. 例如, 图 3.1 中 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 的定义多项式为

$$Q(\mathcal{A}_1) = xy(x + y),\ Q(\mathcal{A}_2) = xy(x + y - 1).$$

$\mathcal{A}$ 的**着色多项式**定义为

$$\chi(\mathcal{A}, t) = \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(X) t^{\dim X},$$

这里 $\mu(X)$ 表示 $L(\mathcal{A})$ 的 Möbius 函数.

定义图 G 在 $[n]$ 上的一个**着色**为映射 $\kappa : [n] \to \mathbb{Z}^+$. 着色 κ 称为**恰当的**, 如果任意的

$ij \in E(G)$ 都有 $\kappa(i) \neq \kappa(j)$. 设 q 为一正整数, 假设每个点有 q 种着色可能, 令 $\chi_G(q)$ 表示 G 上所有恰当着色的数目. 方程 χ_G 称为图 G 的**着色多项式**.

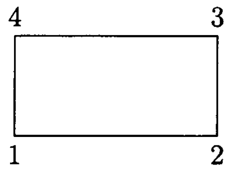

图 3.7　四条边的圈 C_4
Fig.3.7　Cycle C_4

例如, 当图 G 是完全图 K_n 时, 定义 G 上一个恰当着色 $\kappa : [n] \to [q]$ 为: 首先选定一个顶点不妨设为 1, 则顶点 1 有 q 种着色的可能, 然后再选择去掉 1 之外的一个点, 不妨设为 2, 则顶点 2 有 $q-1$ 种着色的可能, 依次进行下去, 最后得到

$$\chi_{K_n}(q) = q(q-1)\cdots(q-n+1).$$

然而并不是所有图都可以这样一个点一个点的计算着色多项式. 例如图 3.6 中的四条边的圈 C_4, 如果恰当着色 $\kappa : [4] \to [q]$ 满足 $\kappa(1) = \kappa(3)$, 则 $\kappa(1)$ 有 q 中选择, $\kappa(2)$ 和 $\kappa(4)$ 有 $q-1$ 种选择. 如果恰当着色 $\kappa : [4] \to [q]$ 满足 $\kappa(1) \neq \kappa(3)$, 则 $\kappa(1)$ 有 q 中选择, $\kappa(3)$ 有 $q-1$ 种选择, 而 $\kappa(2)$ 和 $\kappa(4)$ 有 $q-2$ 种选择. 因此,

$$\begin{aligned}\chi_H(q) &= q(q-1)^2 + q(q-1)(q-2)^2 \\ &= q(q-1)(q^2-3q+3).\end{aligned}$$

若图 G 中的顶点集有个序 $v_1, \ldots, v_n$ 使得如果 $i < k$, $j < k$ 且 $v_iv_k \in E(G)$, $v_jv_k \in E(G)$ 则一定有 $v_iv_j \in E(G)$, 等价地, 与 v_{i+1} 相连且排在 v_{i+1} 前面的顶点形成一个团, 这个序称为**消除序**. Stanley[21] 给出图 G 是超级可解的充分必要条件是 G 有一个消除序. 因此若图 G 是超级可解的, 则 G 的着色多项式可以按照顶点的消除序写出来. 例如图 3.8 中 G 的顶点标号是一个消除序, 顶点 5 有 q 种着色可能, 顶点 4 有 $q-1$ 种着色可能, 顶点 3 有 $q-1$ 种可能, 顶点 2 有 $q-1$ 种可能, 顶点 1 有 $q-4$ 种可能, 因此图 G 的着色多项式为 $\chi_G(q) = q(q-1)^4(q-4)$.

当 G 是一个弦图时, Edelman[101] 等人对于图 G 超平面配置 $\mathcal{A}(G)$ 的指数给出一个组合解释.

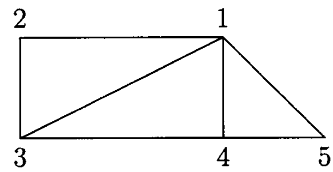

图 3.8 弦图 G
Fig.3.8 Chordal graph G

性质 3.1 [101] 设图 G 是一个弦图, 其顶点消除序为 $v_1, \ldots, v_n$. 对于 $2 \leqslant i \leqslant n$, 令 b_i 为顶点 v_i 在图 $G - \{v_n, \ldots, v_{i+1}\}$ 中的度, 则 $\{b_2, \ldots, b_n\}$ 恰是超平面配置 $\mathcal{A}(G)$ 的指数.

对于 ψ 图配置 $\mathcal{A}_{G,\psi}$ 的指数我们有类似的结论成立.

性质 3.2 设 (G, ψ) 是弦图, 其顶点消除序为 $v_1, \ldots, v_n$. 假设对任意的 v_i, v_j 在 G 中有边相连, 如果 $i < j$ 都有 $\psi(v_j) \subseteq \psi(v_i)$. 对于 $2 \leqslant i \leqslant n$, 令 b_i 为 $|\psi(v_i)|$ 和 v_i 在图 $G - \{v_n, \ldots, v_{i+1}\}$ 中度的和, 则 $\{b_2, \ldots, b_n\}$ 是 ψ 图配置 $\mathcal{A}_{G,\psi}$ 的指数.

众所周知, 每个超级可解的超平面配置都是自由的[39], 而每个自由的图配置都是超级可解的. 自然的, Stanley 在文献[102]中猜想每个自由的 ψ 图配置也是超级可解的. 下面先列出关于超平面自由性的一些结论, 然后给出 ψ 图配置自由性的一个必要条件.

定理 3.3 [39] 设 $\mathcal{A}$ 是自由的超平面配置且其指数为 $b_1, \ldots, b_n$, 则 $\mathcal{A}$ 的着色多项式为

$$\chi(\mathcal{A}, t) = \prod_{i=1}^{n} (t - b_i).$$

设 $\mathcal{A}$ 是向量空间 V 上的超平面配置, 称 $\mathcal{A}$ 的子集合 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ 为 $\mathcal{A}$ 的*子配置*. 定义 $\mathcal{A}$ 的子配置 $\mathcal{A}_x$

$$\mathcal{A}_x = \{H \in \mathcal{A} : x \subseteq H\}.$$

定理 3.4 [39] 若 $\mathcal{A}$ 是自由的, 则对所有的 $x \in L(\mathcal{A})$ 都有 $\mathcal{A}_x$ 是自由的.

定理 3.5 如果在图 G 中 v_i, v_j 有边相连但是 $\psi(v_i) \not\subseteq \psi(v_j)$ 且 $\psi(v_j) \not\subseteq \psi(v_i)$. 则 ψ 图配置 $\mathcal{A}_{G,\psi}$ 不是自由的.

称 $(\mathcal{A}, K)$ 为一个*多重配置*, 其中 $\mathcal{A}$ 为一超平面配置, K 为定义在 $\mathcal{A}$ 上的映射 $K : \mathcal{A} \to \mathbb{P} = \{1, 2, \ldots, n\}$. 任意的一个配置可看成一个多重配置, 其中映射 K 满足对任意 $\mathcal{A}$ 中的超平面 H 都有 $K(H) = 1$.

对于一个多重配置 $(\mathcal{A}, K : \mathcal{A} \to \mathbb{P})$, 称

$$Q(\mathcal{A}, K) := \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{K(H)}$$

为定义多项式. 记 $K[x] = K[x_1, x_2, \ldots x_n]$, 定义

$$\mathcal{J}(\mathcal{A}, K) = \{p = (p_1, \ldots, p_n) \in K[x]^n : p\alpha_H \in \alpha_H^{K(H)} K[x] \text{ 对所有 } H \in \mathcal{A}\}.$$

如果 $\mathcal{J}(\mathcal{A}, K)$ 是一个自由的 $K[x]$ 模, 称一个多重配置 $(\mathcal{A}, K)$ 是自由的. 这种情况下, $\mathcal{J}(\mathcal{A}, K)$ 的齐次基的度数的多重集称为多重指数, 记为 $\exp(\mathcal{A}, K)$.

设 $\mathcal{A}$ 为 V 上的超平面配置. 令 H_1 是 $\mathcal{A}$ 上的超平面, 定义 $\mathcal{A}$ 在 H_1 上的限制配置为

$$\mathcal{A}^{H_1} := \{H \cap H_1 : H \in \mathcal{A} \setminus \{H_1\}\}.$$

这个限制作为一个多重配置 $(\mathcal{A}^{H_1}, K_{\mathcal{A}}^{H_1})$ 有一个自然的结构, 其中 $K_{\mathcal{A}}^{H_1} : \mathcal{A}^{H_1} \to \mathbb{P}$, 定义为

$$K_{\mathcal{A}}^{H_1} : \mathcal{A}^{H_1} \ni H' \mapsto \#(\{H \in \mathcal{A} : H \cap H_1 = H'\}).$$

2005 年, Yoshinaga 给出三维空间中多重配置与多重指数的关系[103].

定理 3.6 [103] 设 $\mathcal{A}$ 是 K^3 上的超平面配置, H_1 是 $\mathcal{A}$ 上的超平面. 则 $\mathcal{A}$ 是自由的充要条件是

$$\chi(\mathcal{A}, q) = (q-1)(q-d_2')(q-d_3'),$$

这里 (d_2', d_3') 是限制多重配置 $(\mathcal{A}^{H_1}, K_{\mathcal{A}}^{H_1})$ 的多重指数.

证明 [定理3.5] 设 $G'(V, E)$ 是连接顶点 $V = \{v_i, v_j\}$ 的路, 这里

$$\psi(v_i) = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\},\ \psi(v_j) = \{b_1, b_2, \ldots b_t\},$$

$\psi(v_i) \not\subseteq \psi(v_j)$ 且 $\psi(v_j) \not\subseteq \psi(v_i)$. 假设 $s < t$, 我们证明 $\mathcal{A}_{G',\psi}$ 不是自由的.

$$Q(c(\mathcal{A}_{G',\psi})) = y(x_i - x_j) \prod_{m=1}^{s} (x_i - a_m y) \prod_{m=1}^{t} (x_j - b_m y).$$

设 $H_1=\{y=0\}$, 则 $\mathcal{A}^{H_1}$ 是一个 2 配置, 因此它是自由的. 对 H_1 选择坐标 y_1,y_2 则

$$\mathcal{A}^{H_1}=\{\{y_1=y_2\},\{y_1=0\},\{y_2=0\}\},$$

$K_{\mathcal{A}}^{H_1}(\{y_1=y_2\})=1, K_{\mathcal{A}}^{H_1}(\{y_1=0\})=s$ 且 $K_{\mathcal{A}}^{H_1}(\{y_2=0\})=t$. 因此

$$Q((\mathcal{A}^{H_1},K_{\mathcal{A}}^{H_1}))={y_1}^s{y_2}^t(y_1-y_2).$$

所以

$$\theta_1=(y_1^sy_2^{t-s},y_2^t)$$

$$\theta_2=(y_1^s(y_1-y_2),0)$$

是 $\mathcal{J}(\mathcal{A}^{H_1})$ 的基. 因此

$$\exp(\mathcal{A}^{H_1})=(s+1,t).$$

由定理 3.6 知道

$$\chi(\mathcal{A}_{G',\psi})=(q-1)(q-s-1)(q-t).$$

另一方面, 因为 $\psi(v_i)\not\subseteq\psi(v_j)$ 和 $\psi(v_j)\not\subseteq\psi(v_i)$, 对 $1\le i\le m<s$, 假设 $a_i=b_i$, 则

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{A}_{G',\psi})&=(s-m)(q-m)+[q-t-(s-m)](q-s-1)\\&=q^2+(-s-1-t)q+m^2+ts+t+s^2+s-m-2ms\end{aligned}$$

因此

$$t(s+1)=m^2+ts+t+s^2+s-m-2ms,$$

即 $(m-s)(m-s-1)=0$, 矛盾. 因此得到 $\mathcal{A}_{G',\psi}$ 不是自由的.

对图 G, 如果存在边 $v_iv_j\in E(G)$ 使得 $\psi(v_i)\not\subseteq\psi(v_j)$, 则令

$$X=\{v_i=v_j=y=0\}.$$

因此 $\mathcal{A}_X=\mathcal{A}_{G',\psi}$ 不是自由的. 由定理 3.4 知 $\mathcal{A}_{G,\psi}$ 不是自由的, 定理得到证明. □

3.6 本章小结

每个超平面配置都唯一地对应一个交偏序集, Stanley 定义了交偏序集的超级可解性, 即在交偏序集中存在一条极大的模链. 众所周知, 图配置超级可解性的等价条件是该图是

一个弦图. 本节考虑 ψ 图配置的超级可解性, 通过 ψ 图配置的交偏序集是否存在极大模链给出 ψ 图配置超级可解的充要条件.

超平面配置的自由性可以推出它的超级可解性, 而对于图配置而言两者是等价的, 即图配置的超级可解性也可推出自由性. 本节考虑 ψ 图的自由性, 并给出 ψ 图配置自由性的一个必要条件.

4 Riordan 矩阵的行多项式矩阵

4.1 引 言

Riordan 矩阵是由一对形式幂级数定义的下三角矩阵，是证明组合恒等式强有力的工具. 下三角矩阵的行多项式及行多项式矩阵是最近几年大家比较感兴趣的课题之一. 比如, Wang 和 Yeh[3] 证明许多著名三角的行多项式具有实零点. Wang 和 Yeh[104] 通过行多项式矩阵给出线性变换保持对数凹性的充分条件. Cheon 和 Kim[59] 证明 Riordan 矩阵的行多项式可以表示成 Stieltjes 转换矩阵的特征多项式并且计算了他们的零点. Radoux[105] 给出 Catalan 三角的行多项式 Catalan 多项式的加法公式并计算了其 Hankel 行列式. Chang 等人[106] 将 Radoux 的结果推广到广义 Motzkin 三角上. Chen 等人[60,61] 研究了 Riordan 矩阵的 TP 性质, 第 0 列的对数凸性及每行的对数凹性. 本章我们研究 Riordan 矩阵行多项式矩阵的全正性、第 0 列的 q 对数凸性及每行的 q 对数凹性.

4.2 Riordan 矩阵

Riordan 矩阵 $R=[r_{n,k}]_{n,k\geq 0}$ 是由一对形式幂级数 $(g(x),f(x))$ 定义的无限下三角矩阵, 它的第 k 列的发生函数为 $\sum_{n\geq k} r_{n,k}x^n = g(x)f^k(x)$, 其中 $g(0)=1, f(0)=0, f'(0)\neq 0$.

给定两个 Riordan 矩阵 $(g(x),f(x))$ 和 $(d(x),h(x))$, 定义它们的矩阵乘积 $*$ 为

$$(g(x),f(x))*(d(x),h(x))=(g(x)d(f(x)),f(x)h(f(x))). \tag{4.1}$$

Riordan 矩阵关于乘法 $*$ 形成一个群, Shapiro 等人称之为 Riordan 群. Riordan 群的单位元为单位矩阵 $I=(1,x)$, 逆元 $(g(x),f(x))^{-1}=(1/g(\bar{f}(x)),\bar{f}(x))$ 存在, 其中 $\bar{f}$ 是 f 的复合逆, 即 $f(\bar{f}(x))=\bar{f}(f(x))=x$.

Riordan 矩阵还有几类重要的子群:

- Appell 子群 $\{(g(x),x)\}$;
- Lagrange 子群 $\{(1,xf(x))\}$;
- Bell 子群 $\{(f(x),xf(x))\}$;
- hitting-time 子群 $\left\{\left(\frac{xf'(x)}{f(x)},f(x)\right)\right\}$.

例如 Shapiro 的 Catalan 三角、Motzkin 三角、大 Schröder 三角属于 Bell 子群, $\left[\frac{k!}{n!}S(n,k)\right]_{n,k\geq 0}$ 和 $\left[\frac{k!}{n!}c(n,k)\right]_{n,k\geq 0}$ 属于 Lagrange 子群. 有关这些子群的更多研究见文献 [75,107,108] 等.

Riordan 矩阵还可以用两个序列 $A = (a_n)_{n\geq 0}$ 和 $Z = (z_n)_{n\geq 0}$ 来刻画[58,75,77,109]. 令 $R = [r_{n,k}]_{n,k\geq 0}$ 为一个 Riordan 矩阵, 则 R 满足递归关系

$$r_{0,0} = 1, \quad r_{n+1,0} = \sum_{j\geq 0} z_j r_{n,j}, \quad r_{n+1,k+1} = \sum_{j\geq 0} a_j r_{n,k+j}, \tag{4.2}$$

其中当 $k < 0$ 或 $k > n$ 时 $r_{n,k} = 0$. 称序列 $A = (a_n)_{n\geq 0}$ 和 $Z = (z_n)_{n\geq 0}$ 分别为 R 的 A-序列和 Z-序列. 定义

$$J(R) = \begin{bmatrix} z_0 & a_0 & & & & \\ z_1 & a_1 & a_0 & & & \\ z_2 & a_2 & a_1 & a_0 & & \\ z_3 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ \vdots & \vdots & & \cdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

为 Riordan 矩阵R 的乘积矩阵[110] (或者称为R 的特征矩阵[111])

当给定 A-序列和 Z-序列, 利用递归关系 (4.2) 可以唯一地确定 Riordan 矩阵中的每个元素. Riordan 矩阵 $R = (g(x), f(x))$ 的 A-序列, Z-序列和 $g(x), f(x)$ 之间有着密切的联系. 令 $A(x)$ 和 $Z(x)$ 分别为 A-序列和 Z-序列的发生函数, 则

$$g(x) = \frac{1}{1 - xZ(f(x))}, \quad f(x) = xA(f(x)). \tag{4.3}$$

$$\text{且} \quad A(x) = \frac{x}{\bar{f}(x)}, \quad Z(x) = \frac{1}{\bar{f}(x)}\left(1 - \frac{1}{g(\bar{f}(x))}\right). \tag{4.4}$$

这里 $\bar{f}(x)$ 表示 $f(x)$ 的复合逆.

下面是常见 Riordan 矩阵及其所对应的 A-序列, Z-序列.

(i) Pascal 三角: $A = (1, 1, 0, \ldots), Z = (1, 0, \ldots)$;

(ii) Catalan 三角: $A = (1, 2, 1, 0, \ldots), Z = (1, 1, 0, \ldots)$;

(iii) 移位 Catalan 三角: $A = (1, 2, 1, 0, \ldots), Z = (2, 1, 0, \ldots)$;

(iv) Ballot table: $A = Z = (1, 1, 1, \ldots)$;

(v) Motzkin 三角: $A = (1, 1, 1, 0, \ldots), Z = (1, 1, 0, \ldots)$;

(vi) 大 Schröder 三角: $A = (1, 2, 2, \ldots), Z = (2, 2, 2, \ldots)$;

(vii) 大 Schröder 三角: $A = (1, 3, 2, 0, \ldots), Z = (2, 2, 0, \ldots)$;

(viii) 小 Schröder 三角: $A = Z = (1, 2, 2, \ldots)$;

(ix) 中心二项式系数三角: $A = (1, 2, 1, 0, \ldots), Z = (2, 2, 0, \ldots)$.

设 $R=[r_{n.k}]_{n,k\geq 0}$ 为 Riordan 矩阵. 组合学中主要关心的行和包括以下四种 (Sprugnoli[48]):

(i) 行和 $\alpha_n=\sum_{k=0}^{n} r_{n,k}$;

(ii) 交错行和 $\beta_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k r_{n,k}$;

(iii) 带权行和 $\delta_n=\sum_{k=1}^{n} k r_{n,k}$;

(iv) 带权的交错行和 $\gamma_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k r_{n,k}$.

定义 R 的行多项式

$$R_n(q)=\sum_{j=0}^{n} r_{n,j}q^j,\quad n=0,1,2,\ldots$$

以及行多项式矩阵$R(q)=[r_{n.k}(q)]_{n.k\geq 0}$, 其中

$$r_{n,k}(q)=\sum_{j=k}^{n} r_{n,j}q^{j-k}.$$

显然 $R_n(q)$ 位于 $R(q)$ 的第 0 列, 而且有 $\alpha_n=R_n(1)$, $\beta_n=R_n(-1)$, $\delta_n=R'_n(1)$, $\gamma_n=R'_n(-1)$. 进一步有 $R(0)$ 为 Rioran 矩阵 R, $R(1)$ 为 R 的和矩阵. 因此行多项式及行多项式矩阵作为一个平台可以统一的处理行和问题.

本章主要的目的是给出 Riordan 矩阵 R 的行多项式矩阵 $R(q)$ 是 Riordan 矩阵的两种刻画, 并研究 $R(q)$ 的 q-TP 性及第 0 列 $(R_n(q))_{n\geq 0}$ 的 q-对数凸性, 以及 $R(q)$ 每行的 q-对数凹性.

4.3 行多项式矩阵的两种刻画

定理 4.1 设 $R=(d(x),h(x))$ 是 Riordan 矩阵. 则

(i) $R(q)$ 是 Riordan 矩阵且 $R(q)=\left(\frac{d(x)}{1-qh(x)},h(x)\right)$.

(ii) $\sum_{n\geq 0} R_n(q)x^n=\dfrac{d(x)}{1-qh(x)}$.

证明 (i) 令

$$Q=[q^{n-k}]_{n,k\geq 0}=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ q & 1 & & & \\ q^2 & q & 1 & & \\ q^3 & q^2 & q & 1 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

为序列 $(1, q, q^2, \ldots)$ 的 Toeplitz 矩阵, 则 Q 是 Riordan 矩阵:

$$Q = \left(\frac{1}{1-qx}, x\right).$$

注意到 $R(q) = RQ$, 因此 $R(q)$ 也是 Riordan 矩阵且

$$R(q) = (d(x), h(x))\left(\frac{1}{1-qx}, x\right) = \left(\frac{d(x)}{1-qh(x)}, h(x)\right).$$

(ii) 因为 $R_n(q)$ 位于 $R(q)$ 的第 0 列, 故由 (i) 可推得 (ii) 成立. □

由定理4.1 (ii), 即 $R_n(q) = [x^n]\frac{d(x)}{1-qh(x)}$, 可以统一地得到下面结论.

推论 4.1 设 $R = [r_{n,k}]_{n,k\geq 0} = (d(x), h(x))$, 则

(i) $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} r_{n,k} = [x^n]\frac{d(x)}{1-h(x)}$.

(ii) $\beta_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k r_{n,k} = [x^n]\frac{d(x)}{1+h(x)}$.

(iii) $\delta_n = \sum_{k=1}^{n} k r_{n,k} = [x^n]\frac{d(x)h(x)}{(1-h(x))^2}$.

(iv) $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k r_{n,k} = -[x^n]\frac{d(x)h(x)}{(1+h(x))^2}$.

满足条件 $h(x) = xd(x)$ 的 Riordan 矩阵 $(d(x), h(x))$ 称为 Bell-型 Riordan 矩阵[45,112]. Bell-型 Riordan 矩阵包含许多著名的三角, 例如 Shapiro 定义的 Catalan 三角、Motzkin 三角、大 Schröder 三角等. 下面我们考虑 Bell-型 Riordan 矩阵. 由推论 4.1, 容易得到下面结论.

推论 4.2 如果 $R = [r_{n,k}]_{n,k\geq 0}$ 是 Bell-型 Riordan 矩阵, 则

(i) $\delta_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\alpha_{n-i}$.

(ii) $\gamma_{n+1} = -\sum_{i=0}^{n} \beta_i\beta_{n-i}$.

例 4.1 考虑 Shapiro 定义的 Catalan 三角[113]

$$B = [B_{n,k}]_{n,k\geq 0} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 2 & 1 & & & & \\ 5 & 4 & 1 & & & \\ 14 & 14 & 6 & 1 & & \\ 42 & 48 & 27 & 8 & 1 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad B_{n,k} = \frac{k+1}{n+1}\binom{2n+2}{n-k}.$$

$B=(C^2(x),xC^2(x))$ 是 Bell-型 Riordan 矩阵, 这里 $C(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ 是 Catalan 数 $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ 的发生函数. 显然 $1+xC^2(x)=C(x)$. 因此由推论4.1可以得到,

(i) $\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}=[x^n]\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right)=\binom{2n+1}{n}$.

(ii) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^kB_{n,k}=C_n$.

(iii) $\sum_{k=0}^{n}(k+1)B_{n,k}=2^{2n}$ 因为 $\sum_{k=0}^{n}kB_{n,k}=2^{2n}-\binom{2n+1}{n}$.

(iv) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^kkB_{n,k}=[x^n](1-C(x))=-C_n$, 对 $n\ge 1$.

由推论4.2 (ii) 知 $C_{n+1}=\sum_{i=0}^{n}C_iC_{n-i}$.

例 4.2 由 Aigner 定义的 Catalan 三角[114]

$$A=[A_{n,k}]_{n,k\ge 0}=\begin{bmatrix}1&&&&&\\1&1&&&&\\2&3&1&&&\\5&9&5&1&&\\14&28&20&7&1&\\\vdots&&&&&\ddots\end{bmatrix},$$

这里 $A_{n,k}=\frac{2k+1}{n+k+1}\binom{2n}{n+k}$, $A=(C(x),xC^2(x))$. 因此由推论4.1得到,

(i) $\sum_{k=0}^{n}C_{n,k}=[x^n]\frac{1}{\sqrt{1-4x}}=\binom{2n}{n}$.

(ii) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_{n,k}=0$, 对 $n\ge 1$.

(iii) $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)C_{n,k}=[x^n]\frac{1}{1-4x}=2^{2n}$.

(iv) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^kkC_{n,k}=-[x^n]xC(x)=-C_{n-1}$, 对 $n\ge 1$.

例 4.3 Ballot table[115]

$$C=[C_{n,k}]_{n,k\ge 0}=\begin{bmatrix}1&&&&&\\1&1&&&&\\2&2&1&&&\\5&5&3&1&&\\14&14&9&4&1&\\\vdots&&&&&\ddots\end{bmatrix},$$

这里 $C_{n,k}=\frac{k+1}{n+1}\binom{2n-k}{n}$. $C=(C(x),xC(x))$. 因此由推论4.1得到,

(i) $\sum_{k=0}^{n}C_{n,k}=[x^n]\frac{C(x)}{1-xC(x)}=C_{n+1}$.

(ii) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_{n,k}=F_{n+1}$, 这里 F_n 是 Fine 数.

(iii) $\sum_{k=0}^{n}(k+1)C_{n,k}=[x^n]C^4(x)=\frac{2n}{n+3}C_{n+1}$.

下面给出 Riordan 矩阵行多项式矩阵的 A-序列和 Z-序列的刻画.

定理 4.2 设 R 是 Riordan 矩阵, 其 A-序列和 Z-序列分别为 $(a_n)_{n\geq 0}$ 和 $(z_n)_{n\geq 0}$, 则 R 的行多项式矩阵 $R(q)$ 的 A-序列与 R 的 A-序列相同, $R(q)$ 的 Z-序列为

$$z_0(q)=z_0+qa_0,\quad z_n(q)=z_n+q(a_n-z_{n-1}),\quad n=1,2,\ldots.$$

证明 由定理4.1, $R(q)$ 仍是Riordan矩阵. 设 $P(q)$ 是 $R(q)$ 的乘积矩阵, 则 $\overline{R(q)}=R(q)P(q)$. 另一方面, $R(q)=RQ$, 所以有 $\overline{R(q)}=\overline{R}Q$. 因此

$$P(q)=(R(q))^{-1}\overline{R(q)}=\left(Q^{-1}R^{-1}\right)\left(\overline{R}Q\right)=Q^{-1}PQ.$$

设 $P=[Z,A]$ 且 $Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \zeta & Q\end{bmatrix}$, 这里 $Z=[z_0,z_1,\ldots]^t, A=[a_{i-j}]_{i,j\geq 0}$ 和 $\zeta=[q,q^2,\ldots]^t$, 则

$$P(q)=Q^{-1}PQ=Q^{-1}[Z,A]\begin{bmatrix}1 & 0\\ \zeta & Q\end{bmatrix}=[Q^{-1}Z+Q^{-1}A\zeta,Q^{-1}AQ]. \tag{4.5}$$

注意到 Q 和 A 都是 Toeplitz 矩阵, 因此 $QA=AQ$, 也就可以得到 $Q^{-1}AQ=A$. 另一方面, 由 $Q=\left(\frac{1}{1-qx},x\right)$ 有 $Q^{-1}=(1-qx,x)$. 因此

$$Q^{-1}Z=\begin{bmatrix}1 & & & \\ -q & 1 & & \\ & -q & 1 & \\ & & \ddots & \ddots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_0\\ z_1\\ z_2\\ \vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z_0\\ z_1-qz_0\\ z_2-qz_1\\ \vdots\end{bmatrix}$$

和

$$Q^{-1}A\zeta=AQ^{-1}\zeta=\begin{bmatrix}a_0 & & & \\ a_1 & a_0 & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & \\ \vdots & & & \ddots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q\\ 0\\ 0\\ \vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_0q\\ a_1q\\ a_2q\\ \vdots\end{bmatrix}.$$

由 (4.5) 知

$$P(q)=\begin{bmatrix} z_0+qa_0 & a_0 & & & \\ z_1+q(a_1-z_0) & a_1 & a_0 & & \\ z_2+q(a_2-z_1) & a_2 & a_1 & a_0 & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

$P(q)$ 的第一列为 $R(q)$ 的 Z-序列, 第二列为 $R(q)$ 的 A-序列. □

4.4 行多项式矩阵的全正性

本小节主要研究行多项式矩阵 $R(q)$ 的 TP 性. 令 q 为一个变量, 设 $f(q)$ 和 $g(q)$ 是关于 q 的两个实多项式. 如果 $f(q)$ 的系数全是非负的, 称 $f(q)$ 是 q-非负的. 如果 $f(q)-g(q)$ 是 q-非负的, 记 $f(q)\geq_q g(q)$. 设 $M(q)=[m_{n,k}(q)]_{n,k\geq 0}$ 是一个多项式矩阵, 其每个元素都是关于 q 的实多项式. 如果 $M(q)$ 的所有子式 (小于等于 r 阶的子式) 都是非负的, 称 $M(q)$ 是*q-TP 的* (q-TP$_r$ 的). 令 $(a_n(q))_{n\geq 0}$ 是关于 q 的实多项式序列. 如果对 $n\geq m\geq 1$ 都有 $a_{m-1}(q)a_{n+1}(q)\geq_q a_m(q)a_n(q)$ $(a_{m-1}(q)a_{n+1}(q)\leq_q a_m(q)a_n(q))$, 称序列 $(a_n(q))_{n\geq 0}$ 是*q-对数凸的* (*q-对数凹的*). 显然, 序列是 q 对数凸的当且仅当其 Hankel 矩阵 $[a_{i+j}(q)]_{i,j\geq 0}$ 是 q-TP$_2$ 的. 如果序列 $(a_n(q))_{n\geq 0}$ 的 Hankel 矩阵是 q-TP 的, 则称此序列是*q-SM* 序列.

定理 4.3 设 R 为 Riordan 矩阵, 则下面结论成立.

(i) 如果 R 是 TP$_k$ (TP) 的, 则 $R(q)$ 是 q-TP$_k$ (q-TP) 的.

(ii) 如果 R 的第 n 行是对数凹的, 则 $R(q)$ 的第 n 行是 q-对数凹的.

证明 (i) 注意到 $R(q)=RQ$, 这里 $Q=[q^{n-k}]_{n,k\geq 0}$. 不难验证 Q 是 q-TP 的. 事实上 Q 的每个子式要么等于 0 要么等于 q 的方幂. 假设 R 是 TP$_k$ 的, 则由 Cauchy-Binet 公式知 $R(q)=RQ$ 是 q-TP$_k$ 的. 更进一步, 如果 R 是 TP 的, 则 $R(q)$ 是 q-TP 的.

(ii) 假设序列 $r_{n,0},\ldots,r_{n,n}$ 是对数凹的, 则需要证明 $r_{n,0}(q),\ldots,r_{n,n}(q)$ 是 q-对数凹的. 设 U_n 和 $V_n(q)$ 分别是序列

$$r_{n,n},\ldots,r_{n,0},0,0,0,\ldots \tag{4.6}$$

和

$$r_{n,n}(q),\ldots,r_{n,0}(q),qr_{n,0}(q),q^2r_{n,0}(q),q^3r_{n,0}(q),\ldots \tag{4.7}$$

的 Toeplitz 矩阵. 则 $V_n(q)=U_nQ$. 由 $r_{n,0},\ldots,r_{n,n}$ 是对数凹的, 得到其逆序序列 $r_{n,n},\ldots,r_{n,0}$ 及其扩展序列(4.6)都是对数凹的. 因此序列 (4.6)的 Toeplitz 矩阵 U_n 是

TP_2 的. 由 Cauchy-Binet 公式知乘积矩阵 $V_n(q)$ 是 q-TP_2 的. 换言之, 序列 (4.7) 是 q-对数凹的. 所以序列(4.7)的前 $n+1$ 项 $r_{n,n}(q),\ldots,r_{n,0}(q)$ 也是 q-对数凹的, 由此得到其逆序序列 $r_{n,0}(q),\ldots,r_{n,n}(q)$ 是 q-对数凹的. □

下面从 A-序列和 Z-序列角度给出 $R(q)$ 满足 q-TP 性的充分条件.

引理 4.1 [116] 设 $R=[r_{n,k}]_{n,k\geq 0}$ 是 Riordan 矩阵, $(a_n)_{n\geq 0}$ 和 $(z_n)_{n\geq 0}$ 是 R 的 A-序列和 Z-序列. 如果 A-序列和 Z-序列满足下面条件:

(i) $(a_n)_{n\geq 0}$ 是内部无零点的对数凹序列

(ii) 对 $j\geq i\geq 0$ 有 $a_jz_i\geq a_iz_j$.

则 $(r_{n,0})_{n\geq 0}$ 是对数凸的.

定理 4.4 设 Riordan 矩阵 R 的 A-序列和 Z-序列满足下面三个条件:

(A) 对 $n\geq 1$ 有 $a_n\geq z_{n-1}\geq 0$.

(B) 对 $j\geq i\geq 0$ 有 $a_jz_i\geq a_iz_j$.

(C) $(a_n)_{n\geq 0}$ 是对数凹的.

则 $R(q)$ 是 q-TP_2 的且 $(R_n(q))_{n\geq 0}$ 是 q-对数凸的.

证明 由引理4.1知, 如果条件 (B) 和 (C) 满足则 R 是 TP_2 的. 因此由定理 4.3 (i) 知, $R(q)$ 是 q-TP_2 的.

另一方面有

$$\begin{bmatrix} r_{0,0}(q) & r_{1,0}(q) \\ r_{1,0}(q) & r_{2,0}(q) \\ r_{2,0}(q) & r_{3,0}(q) \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{0,0}(q) & & & \\ r_{1,0}(q) & r_{1,1}(q) & & \\ r_{2,0}(q) & r_{2,1}(q) & r_{2,2}(q) & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z_0(q) \\ 0 & z_1(q) \\ 0 & z_2(q) \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

由假设知, $z_n(q)=z_n+(a_n-z_{n-1})q\geq_q 0$. 因此上面右手边第二个矩阵是 q-TP_2 的. 由此得到左手边矩阵是 q-TP_2 的. 换言之, 序列 $(r_{n,0}(q))_{n\geq 0}$ 是 q-对数凸的. □

引理 4.2 [75] 设 $R=(d(x),h(x))$ 是 Riordan 矩阵. $A(x)$ 和 $Z(x)$ 分别是 R 的 A-序列和 Z-序列的发生函数, 则 $h(x)=xd(x)$ 的充要条件是 $A(x)=a_0+xZ(x)$.

引理 4.3 [61] 设 $R=[r_{n,k}]_{n,k\geq 0}$ 是 Riordan 矩阵. 若 R 的系数矩阵是 TP_r 的, 则 R 也是 TP_r 的. 若 R 是 TP_2 的, 并且所有 $z_n\geq 0$, 则 $(r_{n,0})_{n\geq 0}$ 是对数凸的.

引理 4.4 [61] 设 $R=[r_{n,k}]_{n,k\geq 0}$ 是 Bell-型 Riordan 矩阵. 若 R 的 A-序列是对数凹的, 则 $(r_{n,0})_{n\geq 0}$ 是对数凸的且 $(r_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ 是对数凹的.

推论 4.3 设 R 是 Bell-型 Riordan 矩阵. 假设 R 的 A-序列是非负且对数凹的. 则

(i) $R(q)$ 是 q-TP_2 的且 $(R_n(q))_{n\geq 0}$ 是 q-对数凸的.

(ii) $R(q)$ 的每行都是 q-对数凹的.

(iii) 如果 R 的 A-序列是 PF 序列, 则 $R(q)$ 是 q-TP 的.

证明 (i) 由引理 4.2 知, 如果一个 Riordan 矩阵是 Bell-型的当且仅当其 A-序列和 Z-序列满足 $A(x)=a_0+xZ(x)$. 换言之, 对 $n\geq 1$ 有 $a_n=z_{n-1}$. 因此由定理 4.4知 (i) 成立.

(ii) 由引理 4.4 知 Bell-型 Riordan 矩阵 R 的 A-序列的对数凹性, 我们能推出 R 的每一行都是对数凹的, 因此由定理 4.3 (ii) 知 (ii) 成立.

(iii) 设 A 是 R 的 A-序列的 Toeplitz 矩阵, 由假设知 A 是 TP 的. 已知 R 是 Bell-型, 故 R 的乘积矩阵恰好是 $\overline{A}$, 这里的 $\overline{A}$ 是由 A 去掉第 0 行得到, 由此乘积矩阵 $\overline{A}$ 也是 TP 的. 由引理 4.3知乘积矩阵的 TP 性能推出 Riordan 矩阵的 TP 性, 因此 R 是 TP 的. 于是由定理4.3 (i) 知 $R(q)$ 是 q-TP 的. □

4.5 Catalan-like 数

本节考虑 Catalan-like 数的 Hankel 行列式. 令 $\mathfrak{s}=(s_k)_{k\geq 0},\mathfrak{t}=(t_k)_{k\geq 1}$ 为非负数列, 定义下列无限下三角矩阵

$$A=[a_{n,k}]_{n,k\geq 0}=\begin{bmatrix} a_{0,0} & & & & \\ a_{1,0} & a_{1,1} & & & \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} & & \\ a_{3,0} & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

使其满足递归关系

$$\begin{aligned} a_{0,0}=1,\quad a_{n+1,0}&=s_0a_{n,0}+t_1a_{n,1},\\ a_{n+1,k}&=a_{n,k-1}+s_ka_{n,k}+t_{k+1}a_{n,k+1}, \end{aligned}\tag{4.8}$$

其中, 当 $k<0$ 或 $k>n$ 时令 $a_{n,k}=0$. 称 A 为一个对应 $(\mathfrak{s},\mathfrak{t})$ 的递归矩阵, 称 $a_{n,0}$ 为对应 $(\mathfrak{s},\mathfrak{t})$ 的 Catalan-like 数.

递归矩阵是组合学中比较常见的一类矩阵, 许多著名三角矩阵都是递归矩阵, 例如 Aigner[114] 定义的 Catalan 三角、Shapiro[113] 定义的 Catalan 三角、Motzkin 三角 (文

献 [114])、大 Schröder 三角 (文献 [117][A133367])、小 Schröder 三角 (见文献 [77])、中心二项式系数三角 (文献 [117][A094527]) 等.

Catalan-like 数统一了许多著名的数列, 例如

(i) Catalan 数 C_n, 对应 $\mathfrak{s} = (1, 2, 2, \ldots), \mathfrak{t} = (1, 1, 1, \ldots)$;

(ii) 移位 Catalan 数 C_{n+1}, 对应 $\mathfrak{s} = (2, 2, 2, \ldots), \mathfrak{t} = (1, 1, 1, \ldots)$;

(iii) Motzkin 数 M_n, 对应 $\mathfrak{s} = \mathfrak{t} = (1, 1, 1, \ldots)$;

(iv) 中心二项式系数 $\binom{2n}{n}$, 对应 $\mathfrak{s} = (2, 2, 2, \ldots), \mathfrak{t} = (2, 1, 1, \ldots)$;

(v) 中心三项式系数 T_n, 对应 $\mathfrak{s} = (1, 1, 1, \ldots), \mathfrak{t} = (2, 1, 1, \ldots)$;

(vi) 大 Schröder 数 r_n, 对应 $\mathfrak{s} = (2, 3, 3, \ldots), \mathfrak{t} = (2, 2, 2, \ldots)$;

(vii) 小 Schröder 数 S_n, 对应 $\mathfrak{s} = (1, 3, 3, \ldots), \mathfrak{t} = (2, 2, 2, \ldots)$;

(viii) 中心 Delannoy 数, 对应 $\mathfrak{s} = (2, 2, \ldots), \mathfrak{t} = (1, 1, 1, \ldots)$;

(ix) Riordan 数, 对应 $\mathfrak{s} = (0, 1, 1, \ldots), \mathfrak{t} = (1, 1, 1, \ldots)$;

(x) Fine 数, 对应 $\mathfrak{s} = (0, 2, 2, \ldots), \mathfrak{t} = (1, 1, 1, \ldots)$;

(xi) 有限制的六边形数, 对应 $\mathfrak{s} = (3, 3, 3, \ldots), \mathfrak{t} = (1, 1, 1, \ldots)$;

(xii) 对合数, 对应 $\mathfrak{s} = (1, 1, 1, \ldots), \mathfrak{t} = (1, 2, 3, \ldots)$;

(xiii) Bell 数 B_n, 对应 $\mathfrak{s} = \mathfrak{t} = (1, 2, 3, 4, \ldots)$;

(xiv) 阶乘数, 对应 $\mathfrak{s} = (1, 4, 9, \ldots), \mathfrak{t} = (1, 3, 5, \ldots)$.

计算各类组合数的 Hankel 转换是代数组合数学中非常有趣的一类课题. 近年来, 相当多的研究致力于各种组合数的 Hankel 转换. 比如 Catalan 数、Motzkin 数、大小 Schröder 数等组合数的 Hankel 转换成为众多组合学家研究的对象, 详见文献 [63,114,118–128]. 上述这类数统称为 Catalan-like 数. 本节将研究移位 Catalan-like 数的 Hankel 行列式.

Catalan-like 数 $\mathfrak{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ 及向后移位的 Catalan-like 数 $\mathfrak{a}^+ = (a_{n+1})_{n\geq 0}$ 的 Hankel 转换是众所周知的, 详见文献[118,126]. 我们感兴趣的是计算向前移位的 Catalan-like 数 $\mathfrak{a}^- = (a_{n-1})_{n\geq 0}$ 的 Hankel 转换, 这里 $a_{-1} = 0$.

给定一序列 $\mathfrak{a} = (a_n)_{n\geq 0} := (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, 令 $\mathfrak{a}^+ = (a_{n+1})_{n\geq 0} = (a_1, a_2, \ldots)$ 和 $\mathfrak{a}^- = (0, a_0, a_1, \ldots)$ 分别为 $\mathfrak{a}$ 的向前和向后移位序列. 设

$$h_n(\mathfrak{a}^+) = \det[a_{i+j+1}]_{0\leq i,j\leq n} = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n+1} \end{bmatrix},$$

$$h_n(\mathfrak{a}^-) = \det[a_{i+j-1}]_{0\le i,j\le n} = \det\begin{bmatrix} 0 & a_0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{2n-1} \end{bmatrix}.$$

则下面定理是我们本章的主要结论. 定理中的 (i), (ii) 是已有结论, 详见 Aigner[118]. 为了统一性, 我们一并列入定理中.

定理 4.5 设 a_n 是对应于 $(\mathfrak{s},\mathfrak{t})$ 的 Catalan-like 数. 令 $\mathfrak{a}=(a_n)_{n\ge0}$, 则

(i) $h_n := h_n(\mathfrak{a}) = T_0T_1\cdots T_n$,

(ii) $h_n^+ := h_n(\mathfrak{a}^+) = d_nh_n$,

(iii) $h_{n+1}^- := h_{n+1}(\mathfrak{a}^-) = -\bar{d}_nh_n$,

这里 $T_0=1, T_n=t_1t_2\cdots t_n$,

$$d_n := d_n(\mathfrak{s},\mathfrak{t}) = \det\begin{bmatrix} s_0 & 1 & & & \\ t_1 & s_1 & 1 & & \\ & t_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & s_{n-1} & 1 \\ & & & t_n & s_n \end{bmatrix}$$

且

$$\bar{d}_n := d_{n-1}(\mathfrak{s}^+,\mathfrak{t}^+) = \det\begin{bmatrix} s_1 & 1 & & & \\ t_2 & s_2 & 1 & & \\ & t_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & s_{n-1} & 1 \\ & & & t_n & s_n \end{bmatrix}.$$

证明 由 (i), (ii) 已知, 我们只需证明 (iii). 令 $A=[a_{n,k}]_{n,k\ge0}$ 为对应于 $(\mathfrak{s},\mathfrak{t})$ 的递归矩阵, 则由递归关系(4.8), 对 $m,n\ge0$ 我们有

$$a_{m+n} = \sum_k a_{m.k}a_{n,k}T_k \tag{4.9}$$

成立. 另一方面, 对 $n \geq 1$,

$$a_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{n,k} \bar{d}_{k-1}. \tag{4.10}$$

事实上,

$$\begin{aligned}
\text{等式(4.10)的右边} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(a_{n-1,k-1} + s_k a_{n-1,k} + t_{k+1} a_{n-1,k+1}\right) \bar{d}_{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} a_{n-1,k} \left(\bar{d}_k - s_k \bar{d}_{k-1} + t_k \bar{d}_{k-2}\right) + a_{n-1,0} \bar{d}_0 \\
&= a_{n-1,0} = \text{等式(4.10)的左边}.
\end{aligned}$$

最后一个等式是由 $\bar{d}_k = s_k \bar{d}_{k-1} - t_k \bar{d}_{k-2}$ 得到. 由(4.9)和(4.10)我们有下面等式成立

$$\begin{bmatrix} 0 & a_0 & \cdots & a_n \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & & & & \\ a_{1,0} & a_{1,1} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & \\ a_{n+1,0} & a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix}$$
$$\times \begin{bmatrix} 0 & a_{0,0}T_0 & a_{1,0}T_0 & \cdots & a_{n,0}T_0 \\ \bar{d}_0 & 0 & a_{1,1}T_1 & \cdots & a_{n,1}T_1 \\ -\bar{d}_1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,2}T_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n-1}\bar{d}_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n}T_n \\ (-1)^n \bar{d}_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

两边取行列式得,

$$h_{n+1}^{-} = -\bar{d}_n T_0 T_1 \cdots T_n = -\bar{d}_n h_n.$$

□

4.6 Aigner-Riordan 矩阵

下面介绍一类特殊的矩阵, 它既是 Riordan 矩阵又是递归矩阵. 令 p, q, s, t 为四个非负数, 定义递归矩阵 $A(p, q; s, t) := [a_{n,k}]_{n,k\geq 0}$ 满足下面递归关系

$$a_{0,0} = 1, \quad a_{n+1,0} = pa_{n,0} + qa_{n,1}, \quad a_{n+1,k} = a_{n,k-1} + sa_{n,k} + ta_{n,k+1}. \tag{4.11}$$

换言之, $\mathfrak{s} = (p, s, s, \ldots)$ 且 $\mathfrak{t} = (q, t, t, \ldots)$, 则此矩阵既是 Riordan 矩阵又是 Aigner 定义的递归矩阵, 称 $A(p, q; s, t) = (g(x), f(x))$ 为 Aigner-Riordan 矩阵. 其中

$$f(x) = \frac{1 - sx - \sqrt{1 - 2sx + (s^2 - 4t)x^2}}{2tx},$$

$$g(x) = \frac{2t}{2t - q + (qs - 2pt)x + q\sqrt{1 - 2sx + (s^2 - 4t)x^2}}. \tag{4.12}$$

称 $a_n := a_{n,0}(p, q; s, t)$ 为 Aigner-Riordan 数.

递归矩阵为众多组合序列提供了一个平台, 将组合序列嵌入到矩阵中, 借助矩阵这个强大的工具对其进行研究. 此外, 递归矩阵与正交多项式、连分式、moment 问题等联系密切, 有着非常强的分析背景. Riordan 矩阵主要用来研究组合恒等式、反演等, 它有着很强的代数背景. Aigner-Riordan 矩阵兼具上述两方面性质, 因此它是我们研究的主要对象之一.

下面是常见的 Aigner-Riordan 矩阵及对应的 Aigner-Riordan 数序列.

例 4.4 Aigner[114] 定义的 Catalan 三角

$$A(1, 1; 2, 1) = (C(x), xC^2(x)) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 2 & 3 & 1 & & & \\ 5 & 9 & 5 & 1 & & \\ 14 & 28 & 20 & 7 & 1 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

其中

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x},$$

对应的 Aigner-Riordan 数是 Catalan 数 $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

例 4.5 Shapiro[113] 定义的 Catalan 三角

$$B(2,1;2,1)=(c(x),xc(x))=\begin{bmatrix}1&&&&&\\2&1&&&&\\5&4&1&&&\\14&14&6&1&&\\42&48&27&8&1&\\\vdots&&&&&\ddots\end{bmatrix},$$

其中

$$c(x)=\frac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x^2},$$

对应的 Aigner-Riordan 数是移位的 Catalan 数 C_{n+1}.

例 4.6 Motzkin 三角 (见文献 [114])

$$M(1,1;1,1)=(M(x),xM(x))=\begin{bmatrix}1&&&&&\\1&1&&&&\\2&2&1&&&\\4&5&3&1&&\\9&12&9&4&1&\\\vdots&&&&&\ddots\end{bmatrix},$$

其中

$$M(x)=\frac{1-x-\sqrt{1-2x-3x^2}}{2x^2},$$

对应的 Aigner-Riordan 数是 Motzkin 数 M_n. Motzkin 数也是一种常见的组合数, 它有许多组合解释 (详见文献 [71,129–132] 等).

例 4.7 大 Schröder 三角 (见文献 [117][A133367])

$$S(2,2;3,2)=(S(x),f(x))=\begin{bmatrix}1&&&&&\\2&1&&&&\\6&5&1&&&\\22&23&8&1&&\\90&107&49&11&1&\\\vdots&&&&&\ddots\end{bmatrix},$$

其中

$$S(x)=\frac{1-x-\sqrt{1-6x+x^2}}{2x},\ f(x)=\frac{1-3x-\sqrt{1-6x+x^2}}{4x},$$

对应的 Aigner-Riordan 数是大 Schröder 数 S_n (详见文献 [133,134] 等).

例 4.8 小 Schröder 三角 (详见文献 [77])

$$s(1,2;3,2)=(s(x),xS(x))=\begin{bmatrix}1&&&&&\\1&1&&&&\\3&3&1&&&\\11&11&5&1&&\\45&45&23&7&1&\\\vdots&&&&&\ddots\end{bmatrix},$$

其中

$$s(x)=\frac{1+x-\sqrt{1-6x+x^2}}{4x},$$

对应的 Aigner-Riordan 数是小 Schröder 数 s_n.

例 4.9 中心二项式系数三角 (见文献 [117][A094527])

$$C(2,2;2,1)=\left(\frac{\sqrt{1-4x}}{1-4x},xc(x)\right)=\left[\binom{2n}{n-k}\right]_{n,k\geq 0}=\begin{bmatrix}1&&&&&\\2&1&&&&\\6&4&1&&&\\20&15&6&1&&\\70&56&28&8&1&\\\vdots&&&&&\ddots\end{bmatrix},$$

其中

$$c(x)=\frac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x^2},$$

对应的 Aigner-Riordan 数是中心二项式系数 $\binom{2n}{n}$.

本节我们通过研究移位 Aigner-Riordan 数的 Hankel 行列式来统一证明 Barry 关于一些幂级数的级数反演的 Hankel 转换的猜想.

设 $F(x)$ 为一幂级数满足 $F(0)=0$, 则 F 的逆级数定义为 $G(x)=\sum_{n\geq 0}u_nx^n$ 满足 $F(G(x))=x$. 系数 $(u_n)_{n\geq 0}$ 称为 F 的级数反演. 易知 $u_0=0$. Barry[63] 提出关于

$(u_n)_{n\geq 0}$, $(u_{n+1})_{n\geq 0}$, $(u_{n+2})_{n\geq 0}$ 的 Hankel 转换的三个猜想, 其中 $(u_n)_{n\geq 0}$ 是下列幂级数的级数反演:

(i) $F_1(x) = \frac{x}{1+ax+bx^2}$, 这里 $a, b \neq 0$;

(ii) $F_2(x) = \frac{x(1-cx)}{1+ax}$, 这里 $a \neq 0$;

(iii) $F_3(x) = x(1-cx)$, 这里 $c \neq 0$.

关于这三个猜想的部分结论已被一下研究给出[119,135,136]. 本节将统一地处理 Barry 的这三个猜想. 首先考虑一般情况

$$F(x) = \frac{x(1-cx)}{1+ax+bx^2},$$

随后将证明 $\mathfrak{a} := (u_{n+1})_{n\geq 0}$ 恰好是某 Catalan-like 数, 从而得到 $\mathfrak{a}^+ = (u_{n+2})_{n\geq 0}$, $\mathfrak{a}^- = (u_n)_{n\geq 0}$, 因此相关的 Hankel 转换可以从我们的结果中得到.

下面将给出 Aigner-Riordan 矩阵第 0 列序列的 Hankel 转换.

定理 4.6 令 $\mathfrak{a} = (a_n(p,q;s,t))_{n\geq 0}$ 为 Aigner-Riordan 数, 则

$$h_n(\mathfrak{a}) = q^n t^{\binom{n}{2}}, \quad h_n(\mathfrak{a}^+) = d_n q^n t^{\binom{n}{2}}, \quad h_{n+1}(\mathfrak{a}^-) = -\bar{d}_n q^n t^{\binom{n}{2}},$$

其中

$$\sum_{n\geq 0} \bar{d}_n z^n = \frac{1}{1-sz+tz^2}, \tag{4.13}$$

$$\sum_{n\geq 0} d_n z^n = \frac{p-qz}{1-sz+tz^2}. \tag{4.14}$$

证明 将 $\bar{d}_n$ 行列式按照第一列展开我们得到下面递归关系

$$\bar{d}_n = s\bar{d}_{n-1} - t\bar{d}_{n-2}, \quad \bar{d}_0 := 1, \bar{d}_1 = s.$$

则

$$\sum_{n\geq 0} \bar{d}_n z^n = 1 + sz\sum_{n\geq 0} \bar{d}_{n-1} z^{n-1} - tz^2 \sum_{n\geq 0} \bar{d}_{n-2} z^{n-2},$$

令 $\bar{d}(x)=\sum_{n\geq 0}\bar{d}_n z^n$, 则

$$\bar{d}(x)=1+sz\bar{d}(x)-tz^2\bar{d}(x).$$

因此我们有 (4.13) 成立. 将 d_n 的行列式按照第一列展开有

$$d_n=p\bar{d}_n-q\bar{d}_{n-1}.$$

则

$$\sum_{n\geq 0}d_n z^n=p\sum_{n\geq 0}\bar{d}_n z^n-qz\sum_{n\geq 0}\bar{d}_{n-1}z^{n-1},$$

将(4.13)带入我们有 (4.14)成立 $\square$

接下来运用定理4.6, 统一解决 Barry 的三个猜想. 令

$$F(x)=\frac{x(1-cx)}{1+ax+bx^2}.$$

解下面等式

$$\frac{u(1-cu)}{1+au+bu^2}=x$$

得到 F 的逆级数

$$G(x)=\frac{2x}{1-ax+\sqrt{1-2(a+2c)x+(a^2-4b)x^2}}=x\sum_{n\geq 0}a_n x^n.$$

与(4.12)对比得到 a_n 恰是对应于

$$p=a+c,\quad s=a+2c,\quad q=t=b+ac+c^2$$

的 Aigner-Riordan 数. 对于 $\mathfrak{a}=(a_n)_{n\geq 0}$, 由定理 4.6得到

$$h_n(\mathfrak{a})=(b+ac+c^2)^{\binom{n+1}{2}},\quad h_n(\mathfrak{a}^+)=d_n h_n(\mathfrak{a}),\quad h_{n+1}(\mathfrak{a}^-)=-\bar{d}_n h_n(\mathfrak{a}),$$

这里

$$\sum_{n\geq 0}\bar{d}_n z^n=\frac{1}{1-sz+tz^2}=\frac{1}{1-(a+2c)z+(b+ac+c^2)z^2},$$

$$\sum_{n\geq 0}d_n z^n=\frac{p-qz}{1-sz+tz^2}=\frac{(a+c)-(b+ac+c^2)z}{1-(a+2c)z+(b+ac+c^2)z^2}.$$

情况 4.1 令 $F(x)=\frac{x}{1+ax+bx^2}$. 这种情况下

$$a_n(a,b)=\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}C_k a^{n-2k}b^k$$

是对应于 $p=s=a,\ q=t=b$ 的 Aigner-Riordan 数. 因此

$$h_n(\mathfrak{a})=b^{\binom{n+1}{2}},\quad h_n(\mathfrak{a}^+)=\bar{d}_{n+1}h_n(\mathfrak{a}),\quad h_{n+1}(\mathfrak{a}^-)=-\bar{d}_nh_n(\mathfrak{a}),$$

这里

$$\bar{d}_n=\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n-k}{k}a^{n-2k}(-b)^k,$$

证明了 Barry 的猜想 4[63].

注解 4.1 $a_n(a,b)$ 是推广的 Motzkin 数:

$$a_n(1,1)=M_n,\quad a_n(2,1)=C_{n+1},\quad a_n(3,1)=H_n$$

分别是 Motzkin 数、移位 Catalan 数、限制的六边形数.

情况 4.2 令 $F(x)=\frac{x(1-cx)}{1+ax}$. 这种情况下

$$a_n(a,c)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}C_k a^{n-k}c^k$$

是对应于

$$p=a+c,\ s=a+2c,\ q=t=(a+c)c$$

的 Aigner-Riordan 数. 因此

$$h_n(\mathfrak{a})=[(a+c)c]^{\binom{n+1}{2}},\quad h_n(\mathfrak{a}^+)=d_nh_n(\mathfrak{a}),\quad h_{n+1}(\mathfrak{a}^-)=-\bar{d}_nh_n(\mathfrak{a}),$$

这里

$$\bar{d}_n=\frac{(a+c)^{n+1}-c^{n+1}}{a},\quad d_n=(a+c)^{n+1},$$

证明了 Barry 的猜想 6[63].

注解 4.2

$$a_n(0,1) = C_n, \quad a_n(1,1) = r_n, \quad a_n(-1,2) = S_n$$

分别是 Catalan 数、大小 Schröder 数.

情况 4.3 令 $F(x) = x(1-cx)$. 这种情况下 $a_n(c) = C_n c^n$ 是对应于

$$p = c,\ s = 2c,\ q = t = c^2$$

的 Aigner-Riordan 数. 因此

$$h_n(\mathfrak{a}) = c^{n(n+1)}, \quad h_n(\mathfrak{a}^+) = c^{n+1}h_n(\mathfrak{a}), \quad h_{n+1}(\mathfrak{a}^-) = -(n+1)c^n h_n(\mathfrak{a}),$$

证明了 Barry 的猜想 8[63].

4.7 Aigner-Riordan 矩阵的行多项式矩阵

本节研究 Aigner-Riordan 矩阵的行多项式矩阵的各种组合性质.

定理 4.7 设 $R = \mathfrak{R}(a,t;s,t)$. 则

(i) $R(q)$ 是 Aigner-Riordan 矩阵且

$$R(q) = \mathfrak{R}(a+q, t+(s-a)q; s, t).$$

(ii) $R_n(q)$ 的发生函数为

$$\textstyle\sum_{n\geq 0} R_n(q)x^n = \frac{2t}{t-(s-a)q+[(s-2a)t+(s^2-as-2t)q]x+[t+(s-a)q]\sqrt{1-2sx+(s^2-4t)x^2}}.$$

(iii) $R_n(q)$ 的 Hankel 行列式为

$$\det[R_{i+j}(q)]_{0\leq i,j\leq n} = [t+(s-a)q]^n t^{n(n-1)/2}.$$

(iv) $R_n(q)$ 的加法公式为

$$R_{m+n}(q) = R_m(q)R_n(q) + [t+(s-a)q]\sum_{k\geq 1} r_{m,k}(q)r_{n,k}(q)t^{k-1}.$$

例 4.10 当 $t=1$, 矩阵 $\mathfrak{R}(a,t;s,t)$ 被 Aigner[114] 称为容许矩阵. Motzkin 三角, Aigner 和 Shapiro 定义的 Catalan 三角都是容许矩阵. 设 $R=\mathfrak{R}(a,1;s,1)$ 是容许矩阵, S 是 R 的行和矩阵, 则由定理 4.7知

$$S=R(1)=\mathfrak{R}(a+1,1+s-a;s,1).$$

因此得到下面结论, 分别是 Aigner[114] 中的引理 2, 性质 5 和性质 8.

(i) $S=\mathfrak{R}(a+1,1+s-a;s,1)$.

(ii) S 的 Aigner-Riordan 数 S_n 的发生函数是

$$\frac{2}{(1-s+a)(1-(s+2)x)+(1-s-a)\sqrt{1-2sx+(s^2-4)x^2}}$$

(iii) S_n 的 Hankel 行列式是

$$\det[S_{i+j}]_{0\le i,j\le n}=(1+s-a)^n.$$

例 4.11 考虑 Catalan 三角[105,114]:

$$C=[C_{n,k}]_{n,k\ge 0}=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 2 & 3 & 1 & & & \\ 5 & 9 & 5 & 1 & & \\ 14 & 28 & 20 & 7 & 1 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

这里 $C_{n,k}=\frac{2k+1}{n+k+1}\binom{2n}{n+k}$. Radoux[105] 介绍了 C 的行多项式矩阵 $C(q)=[C_{n,k}(q)]_{n,k\ge 0}$ 和行多项式 Catalan 多项式 $C_n(q)$, 并发现了下面的加法公式

$$C_{m+n}(q)=C_m(q)C_n(q)+(q+1)\sum_{k\ge 1}C_{m,k}(q)C_{n,k}(q)$$

并计算了他们的 Hankel 行列式

$$\det[C_{i+j}(q)]_{0\le i,j\le n}=(1+q)^n.$$

因为 C 恰好是容许矩阵 $\mathfrak{R}(1,1;2,1)$, 这些结论可由我们的结论 $C(q)=\mathfrak{R}(1+q,1+q;2,1)$

统一得到.

例 4.12 考虑广义的 Motzkin 三角 $R=\mathfrak{R}(s,t;s,t)$, 三角中的元素可由着色的 Motzkin 路来解释 (详见[48]), 三角的第 0 列元素 $R_{n,0}$ 称为广义 Motzkin 数. He[137] 曾给出广义 Motzkin 数 $R_{n,0}$ 的表达式, Wang 等人[138] 也研究了 $R_{n,0}$ 的各种组合性质. 广义 Motzkin 三角 $R=\mathfrak{R}(s,t;s,t)$ 是 Motzkin 三角 $M=\mathfrak{R}(1,1;1,1)$ 和 Shapiro 定义的 Catalan 三角 $B=\mathfrak{R}(2,1;2,1)$ 的推广.

设 $S=RE$ 是 R 的行和矩阵, 这里 E 为全 1 的下三角矩阵, 则 $S=R(1)=\mathfrak{R}(1+s,t;s,t)$, S 的行多项式矩阵为 $S(q)=\mathfrak{R}(1+s+q,t-q;s,t)$. 特别地, $S(t)=\mathfrak{R}(1+s+t,0;s,t)$, 显然 $S(t)$ 的 Aigner-Riordan 数是 $S_n(t)=(1+s+t)^n$. 因此有

$$S\begin{bmatrix}1\\t\\t^2\\t^3\\\vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1+s+t\\(1+s+t)^2\\(1+s+t)^3\\\vdots\end{bmatrix},$$

或者等价的,

$$R\begin{bmatrix}1\\1+t\\1+t+t^2\\1+t+t^2+t^3\\\vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1+s+t\\(1+s+t)^2\\(1+s+t)^3\\\vdots\end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

矩阵恒等式 (4.15) 恰好是 [71]中的定理 4.1, 这其中包含了许多有趣的矩阵恒等式. 比如在(4.15)中取 $s=t=1$, 可以得到关于 Motzkin 三角 M 的恒等式

$$\begin{bmatrix}1&&&&&\\1&1&&&&\\2&2&1&&&\\4&5&3&1&&\\9&12&9&4&1&\\\vdots&&&&&\ddots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\\\vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\3^2\\3^3\\3^4\\\vdots\end{bmatrix}.$$

在(4.15)中取 $s=2$ 和 $t=1$, 得到 Shapiro 等人[139] 关于 Catalan 三角 B 的恒等式

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 2 & 1 & & & & \\ 5 & 4 & 1 & & & \\ 14 & 14 & 6 & 1 & & \\ 42 & 48 & 27 & 8 & 1 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4^2 \\ 4^3 \\ 4^4 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

最后的恒等式等价于例 4.1 (iii).

最近, Chang 等人在 [106]的定理 3 对带权的 Motzkin 路给出加法公式

$$a_{m+n,0}(q) = \sum_{k\geq 0} a_{m,k}(q)a_{n,k}(q)t^k$$

并且计算 Hankel 行列式

$$\det[a_{i+j}(q)]_{0\leq i,j\leq n} = t^{n(n-1)/2}.$$

对广义的 Motzkin 三角 $R=\mathfrak{R}(s,t;s,t)$ 的行多项式矩阵 $R(q)=[a_{n,k}(q)]_{n,k\geq 0}$ 应用我们的定理4.7, 可以统一地得到这些结论.

本节的最后, 考虑 Aigner-Riordan 矩阵的行多项式矩阵的 q-TP 性及行多项式的 q-对数凸性.

引理 4.5 [61] 设 $R=\mathfrak{R}(a,t;s,t)$, 则有下面结论成立.

(i) 如果 $as\geq t$ 且 $s^2\geq t$, 则 R 是 TP_2 的.

(ii) 如果 $s^2\geq 4t$ 且 $a\frac{s+\sqrt{s^2-4t}}{2}\geq t$, 则 R 是 TP 的.

推论 4.4 设 $R=\mathfrak{R}(a,t;s,t)$, 则有下面结论成立.

(i) 如果 $as\geq t$ 且 $s^2\geq t$, 则 $R(q)$ 是 q-TP_2 的.

(ii) 如果 $s\geq a$ 且 $as\geq t$, 则 $(R_n(q))_{n\geq 0}$ 是 q-对数凸的.

(iii) 如果 $s^2\geq 4t$ 且 $a\frac{s+\sqrt{s^2-4t}}{2}\geq t$, 则 $R(q)$ 是 q-TP 的.

(iv) 如果 $s\geq a, s^2\geq 4t$ 且 $a\frac{s+\sqrt{s^2-4t}}{2}\geq t$, 则 $(R_n(q))_{n\geq 0}$ 是 q-SM 序列.

证明 (i) 由定理 4.3 (i) 和引理 4.5 (i) 得到.

(ii) 因为 $s\geq a$ 且 $as\geq t$ 能推出 $s^2\geq t$, 因此 (ii) 由定理 4.4得到.

(iii) 由定理 4.3 (i) 和引理 4.5 (ii) 得到.

(iv) 由定理 4.7 (i) 知 $R(q)$ 仍然是 Aigner-Riordan 矩阵, 且由条件知道它是 q-TP 的. 又由 $[R_{i+j}(q)]_{i,j\geq 0} = R(q)T(q)R(q)$ 知 $(R_n(q))_{n\geq 0}$ 的 Hankel 矩阵是 q-TP 的, 因此 $(R_n(q))_{n\geq 0}$ 是 q-SM 序列. □

在例4.11中 Radoux 定义的 Catalan 多项式 $(C_n(q))_{n\geq 0}$ 是 q-SM 序列, 这是因为 $C_n(q)$ 恰好是容许矩阵 $C = \mathfrak{R}(1,1;2,1)$ 的行多项式, 而且行多项式矩阵 $C(q)$ 是 q-TP 的. Aigner[114] 指出 $C_n(1) = \binom{2n}{n}$, 由此可以推出中心二项式系数是 SM 序列.

4.8 本章小结

本章介绍了 Riordan 矩阵 R 的行多项式 $R_n(q)$ 及行多项式矩阵 $R(q)$. 证明了 $R(q)$ 仍是 Riordan 矩阵并且给出两种等价刻画. 我们提供了一个统一的方式来处理某些行多项式 $R_n(q)$ 及行多项式矩阵 $R(q)$, 并给出多项式矩阵 $R(q)$ 是 q-TP 及行多项式 $R_n(q)$ 是 q-对数凸的充分条件.

本章着重研究了 Bell 型 Riordan 矩阵及一类特别有趣的矩阵, 即 Aigner-Riordan 矩阵的行多项式及行多项式矩阵. 通过对 Bell 型 Riordan 矩阵 R 的 A-序列的刻画, 得到了 R 的行多项式 $R_n(q)$ 及行多项式矩阵 $R(q)$ 的一些重要性质. Barry 提出三个关于幂级数反演逆 Hankel 转换的猜想, 这三个猜想中的部分结果被不同的作者用不同的方法证明过, 我们通过计算移位 Aigner-Riordan 数的 Hankel 转换统一地证明了 Barry 提出的三个猜想. 最后通过研究 Aigner-Riordan 矩阵的行多项式及行多项式矩阵, 统一地处理了许多已知的零散的结论.

5 结论与展望

5.1 结论

(1) 考虑 Sperner 定理在凸集上的推广. Sperner 定理表明在子集格 $\mathscr{B}_n$ 中最大 Sperner 簇的密度为 $\binom{n}{\lceil n/2\rceil}/2^n$. Akiyama 和 Frankl 猜想如果将 $\mathscr{B}_n$ 替换成 $[n]$ 上的凸集则结论同样成立. 我们证明猜想对一些经典凸集, 例如降簇、Lih 定义的子集簇 Lih 簇等成立. 特别的, 我们考虑一类凸集 –压缩理想, 证明猜想对压缩理想成立.

(2) 给出 ψ 图配置超级可解的充分必要条件. Stanley 证明图配置超级可解的充分必要条件是该图是一个弦图, 随后他对推广的图配置即 ψ 图配置超级可解的充分必要条件给出猜想. 我们通过证明 ψ 图配置对应的交偏序集存在极大的模链证明了猜想. 另一方面, 超平面配置的自由性可以推出超级可解性, 而对于图配置而言两者是等价的. 所以我们考虑了 ψ 图的自由性, 并给出 ψ 图配置自由性的一个必要条件.

(3) 从行多项式角度出发, 研究矩阵及序列的组合性质. 首先给出 Riordan 矩阵行多项式矩阵仍是 Riordan 矩阵的两种等价刻画. 随后借助 Riordan 矩阵这个强有力的工具, 分别给出了多项式矩阵是 q-TP 的以及行多项式是 q-对数凸的充分条件. 着重研究了 Bell 型 Riordan 矩阵、Aigner-Riordan 矩阵的行多项式矩阵的 q-TP 性、第 0 列的 q-对数凸性以及每行的 q-对数凹性. 借助行多项式矩阵的平台, 将一些已有的零散的结论以统一的形式给出. Barry 提出三个关于幂级数反演逆的 Hankel 转换的猜想, 通过计算移位 Aigner-Riordan 数的 Hankel 转换统一地证明了 Barry 的三个猜想.

5.2 创新点

1. Sperner 型问题是极值组合学的核心问题也是经典问题, 证明了 Akiyama-Frankl 猜想对某些经典凸集成立, 从而为猜想成立提供更多证据.
2. Stanley 给出了关于 ψ 图配置超级可解性等价条件的猜想, 证明了 Stanley 的猜想成立并给出 ψ 图配置自由性的必要条件.
3. 从行多项式矩阵角度出发集中处理了一些组合矩阵和序列的组合性质, 提供一个统一的方式来处理组合恒等式、加法公式等组合问题, 将一些已知的零散的结果纳入到我们的结论中. 通过计算移位 Aigner-Riordan 数的 Hankel 行列式, 统一地证明了 Barry 提出的关于幂级数系数的 Hankel 转换的三个猜想.

5.3 展望

(1) 继续考虑 Akiyama-Frankl 猜想. 由于理想是经典的凸集, 因此希望证明 Akiyama-Frankl 猜想对理想的情况成立, 进而证明猜想对所有凸集成立. 同时也将考虑猜想在子空间格中的 q-模拟.

(2) 由超平面配置区域生成的矩阵称为 Varchenko 矩阵, 研究此矩阵的 Smith 标准型是超平面配置研究的热点之一. 我们考虑了几类经典超平面配置的 Varchenko 矩阵并得到它们的 Smith 标准型, 希望给出所有超平面配置 Varchenko 矩阵的 Smith 标准型.

(3) 行多项式矩阵包含丰富的矩阵恒等式, 希望从行多项式矩阵角度出发研究组合恒等式. 其次行多项式矩阵第零列具有丰富的组合性质, 希望对其作进一步研究.

参考文献

[1] ROTA C. On the foundations of combinatorial theory i, Theory of Mobius functions[J]. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1964, 2:340–368.

[2] STANLEY R P. Enumerative Combinatorics Vol. 1[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[3] WANG Y, YEH Y N. Polynomials with real zeros and Pólya frequency sequences[J]. J. Combin. Theory Ser. A, 2005, 109(1):63–74.

[4] STANLEY R P. Recent progress in algebraic combinatorics[J]. Bull. Amer. Math. Soc., 2003, 40:55–68.

[5] BERGERON F. Algebraic Combinatorics and Coinvariant Spaces[M]. Ottawa: Canadian Math.Society, 2009.

[6] BANNAI E, ITO T. Algebraic Combinatorics I[M]. California: The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1984.

[7] ERDŐS P, KO C, RADO R. Intersection theorems for systems of finite set[J]. Quart. J. Math. Oxford Ser., 1961, 12:313–320.

[8] ERDŐS P. Some of my favourite unsolved problems[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[9] ERDŐS P. On a lemma of Littlewood and Offord[J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1945, 51:898–902.

[10] ROTA C. A generalization of Sperner's theorem[J]. J. Combin. Theory, 1967, 2:104.

[11] AIGNER M. Combinatorial Theory[M]. Berlin: Springer, 1979.

[12] ANDERSON I. Combinatorics of Finite Sets[M]. Oxford: Clarendon Press, 1987.

[13] BOLLOBAS B. Combinatorics: Set systems, hypergraphs, families of vectors and probabilistic combinatorics[M]. Cambridge University: Cambridge University Press, 1986.

[14] BERGE C. Hypergraphs. Combinatorics of Finite Sets[M]. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1989.

[15] ENGEL K. Sperner Theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[16] ZASLAVSKY T. Facing up to arrangements: face-count formulas for partitions of space by hyperplanes[J]. Mem. Amer. Math. Soc., 1975, 1(154):vii+102 pp.

[17] ZASLAVSKY T. Counting the faces of cut-up spaces[J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1975, 5:916–918.

[18] ZASLAVSKY T. Maximal dissections of a simplex[J]. J. Combinatorial Theory Ser. A, 1976, 2:244–257.

[19] ZASLAVSKY T. A combinatorial analysis of topological dissections[J]. Advances in Math., 1977, 25:267–285.

[20] ZASLAVSKY T. The slimmest arrangements of hyperplanes. II. Basepointed geometric lattices and Euclidean arrangements.[J]. Mathematika, 1981, 28:169–190.

[21] STANLEY R P. An introduction to hyperplane arrangements[J]. Geometric Combinatorics (E. Miller, V. Reiner, and B. Sturmfels, eds.), 2007, 13:389–496.

[22] BJÖRNER A. On the homology of geometric lattices[J]. Algebra Unibersalis, 1982, 14:107–128.

[23] BJÖRNER A, EDELMAN P, ZIEGLER G. Hyperplane arrangements with a lattice of regions[J]. Dis. Comp. Geometry, 1990, 5:263–288.

[24] ZIEGLER G M. ALGEBRAIC COMBINATORICS OF HYPERPLANE ARRANGEMENTS[D]. PhD

thesis. Massachusetts Institute of Technology: 1987.

[25] ZIEGLER G M. The face lattice of hyperplane arrangements[J]. Discrete Math., 1989, 73(1–2):223–238.

[26] BJÖRNER A, ZIEGLER G M. Introduction to greedoids. Matroid applications[J]. Encyclopedia Math. Appl., 1992, 40:284–357.

[27] BJÖRNER A, LAS M V, STURMFELS B, et al. Oriented matroids[M]. Cambridge University: Cambridge University Press, 1993.

[28] KOHNO T. On the holonomy lie algebra and the nilpotent completion of the fundamental group of the complement of hypersurfaces[J]. Nagoya Math. J., 1983, 92:21–37.

[29] KOHNO T. Differential forms and the fundamental group of the complement of hypersurfaces[J]. Proc. Sympos. Pure Math., 1983, 40:655–662.

[30] KOHNO T. Série de Poincaré-Koszul associée aux groupes de tresses pures. (French)[J]. Invent. Math., 1985, 82:57–75.

[31] KOHNO T. Homology of a local system on the complement of hyperplanes[J]. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 1986, 62:144–147.

[32] FALK M. The minimal model of the complement of an arrangement of hyperplanes[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1988, 309:543–556.

[33] FALK M, RANDELL R. The lower central series of generalized pure braid groups. Geometry and topology[J]. Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 1985, 105:103–108.

[34] RANDELL R. Lattice-isotopic arrangements are topoogically isomorphic[J]. Proc. Amer. MAth. Soc., 1989, 107:555–559.

[35] FALK M, RANDELL R. On the homotopy theory of arrangements. complex analytic singularities[J]. Adv. Stud. Pure Math., 1987, 8:101–124.

[36] RANDELL R. On the fundamental group of the complement of a singular plane curve[J]. Quart. J. MAth., 1980, 31:71–79.

[37] RANDELL R. The fundamental group of the complement of a union of complex hyperplanes[J]. Invent. mant., 1982, 69:103–108.

[38] SALVETTI M. Topology of the complement of real hyperplanes in C^N[J]. Invent. Math., 1987, 88:603–618.

[39] ORLIK P, TERAO H. Arrangements of Hyperplanes[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

[40] SOLL D, WELKER V. Type-B generalized triangulations and determinantal ideals[J]. Discrete Math., 2009, 309:2782–2797.

[41] KNUDSON K, MRAMOR N. Finding critical points discretely[J]. preprint, 2006.

[42] BJÖRNER A. Topological methods[J]. Handbook of combinatorics, 1995, 1:1819–1872.

[43] HARIMA T, MIGLIORE J C, NAGEL U, et al. The weak and strong Lefschetz properties for Artinian K-algebras[J]. J. Algebra, 2003, 1:99–126.

[44] GRÜBAUM B. Arrangements of hyperplanes[C]// Proc. Second Louisiana Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing. Baton Rouge: Louisiana State Univ., 1971: 41–106.

[45] ROGERS D G. Pascal triangles, Catalan numbers and renewal arrays[J]. Discrete Math., 1978, 22(3): 301–310.

[46] KETTLE S G. Families enumerated by the Schröder-Etherington sequence and a renewal array it generates[J]. Combinatorial mathematics, Adelaide, 1982, X:244–274.

[47] SHAPIRO L W, GETU S, WOAN W J, et al. The Riordan group[J]. Discrete Appl. Math., 1991, 34(1–3):229–239.

[48] SPRUGNOLI R. Riordan arrays and combinatorial sums[J]. Discrete Math., 1994, 132(1–3):267–290.

[49] SPRUGNOLI R. Riordan arrays and the Abel-Gould identity[J]. Discrete Math., 1995, 142(1–3):213–233.

[50] SHAPIRO L W. A survey of the Riordan group[J/OL]. `http://www.combinatorics.cn/activities/Riordan%20Group.pdf`.

[51] RIORDAN J. Combinatorial Identities[M]. New York: John Wiley & Sons, 1968.

[52] MERLINI D, SPRUGNOLI R. Algebraic aspects of some Riordan arrays related to binary words avoiding a pattern[J]. Theoret. Comput. Sci., 2011, 412(27):2988–3001.

[53] LUZÓN A, MERLINI D, MORÓN M A, et al. Identities induced by Riordan arrays[J]. Linear Algebra Appl., 2012, 436(3):631–647.

[54] MERLINI D, SPRUGNOLI R, VERRI M C. Human and constructive proof of combinatorial identities: an exaple from Romik[C]//. 2005: 383–391.

[55] MERLINI D, SPRUGNOLI R, VERRI M C. The Akiyama-Tanigawa transformation[J]. Integer, 2005, 5(1):12pp.

[56] MERLINI D, SPRUGNOLI R, VERRI M C. Lagrange inversion: when and how[J]. Acta Appl. Math., 2006, 94(3):233–249.

[57] MERLINI D, SPRUGNOLI R, VERRI M C. The Cauchy numbers[J]. Discrete Math., 2006, 306(16): 1906–1920.

[58] MERLINI D, SPRUGNOLI R, VERRI M C. The method of coefficients[J]. Amer. Math> Monthly, 2007, 114(1):40–57.

[59] CHEON G S, KIM H. Representing polynomials as characteristic polynomials via the stieltjes transform[J]. Linear Algebra Appl., 2015, 476(18):184–196.

[60] CHEN X, LIANG H, WANG Y. Total positivity of recursive matrices[J]. Linear Algebra Appl., 2015, 471:383—393.

[61] CHEN X, LIANG H, WANG Y. Total positivity of Riordan arrays[J]. European J. Combin., 2015, 46:68–74.

[62] LIANG L, MU L, WANG Y. Catalan-like numbers and stieltjes moment sequences[J]. Discrete Math., 2016, 339:484–488.

[63] BARRY P. Some conjectures on the ratio of Hankel transforms for sequences and series reversion [J/OL]. `arxiv.org/abs/math/0701483`.

[64] BARRY P, HENNESSY A. Notes on a family of Riordan arrays and associated integer Hankel transforms[J]. J. Integer Seq., 2009, 12(5):Article 09.5.3.

[65] BARRY P. Exponential Riordan arrays and permutation enumeration[J]. J. Integer Seq., 2010, 13(9):Article 10.9.1.

[66] BARRY P. Riordan arrays, orthogonal polynomials as moments, and Hankel transforms[J]. J. Integer Seq., 2011, 14(2):Article 11.2.2.

[67] BARRY P, HENNESSY A. Generalized Narayana polynomials, Riordan arrays, and lattice paths[J]. J. Integer Seq., 2012, 15(4):Article 12.4.8.

[68] BARRY P. On the central coefficients of Riordan matrices[J]. J. Integer Seq., 2013, 16(5):Article 13.5.1.

[69] BARRY P. Constructing exponential Riordan arrays from their A and Z sequences[J]. J. Integer Seq., 2014, 17(2):Article 14.2.6.

[70] CHEON G S, HWANG S G, LEE S G. Several polynomials associated with the harmonic numbers[J]. Discrete Appl. Math., 2007, 155(18):2573–2584.

[71] CHEN W Y C, LI N Y, SHAPIRO L W, et al. Matrix identities on weighted partial Motzkin paths[J]. European J. Combin., 2007, 28(4):1196–1207.

[72] CORSANI C, MERLINI D, SPRUGNOLI R. Left-inversion of combinatorial sums[J]. Discrete Math., 1998, 180(1–3):107–122.

[73] EGORYCHEV G P, ZIMA E V. Decomposition and group theoretic characterization of pairs of inverse relations of the Riordan type[J]. Acta Appl. Math., 2005, 85(1–3):93–109.

[74] HE T X, HSU L C, SHIUE P J S. The Sheffer group and the Riordan group[J]. Discrete Appl. Math., 2007, 155(15):1895–1909.

[75] HE T X, SPRUGNOLI R. Sequence characterization of Riordan arrays[J]. Discrete Math., 2009, 309(12):3962–3974.

[76] CHEON G S, KIM H, SHAPIRO L W. An algebraic structure for Faber polynomials[J]. Linear Algebra Appl., 2010, 433(6):1170–1179.

[77] CHEON G S, KIM H, SHAPIRO L W. Combinatorics of Riordan arrays with identical A and Z sequences[J]. Discrete Math., 2012, 312(12–13):2040–2049.

[78] MA X. Inverse chains of the Riordan group and their applications to combinatorial sums[J]. J. Math. Res. Exposition, 1999, 19(2):445–451.

[79] PEART P, WOODSON L. Triple factorization of some Riordan matrices[J]. Fibonacci Quart., 1993, 31(2):121–128.

[80] ZHAO X, DING S, WANG T. Some summation rules related to the Riordan arrays[J]. Discrete Math., 2004, 281(1–3):295–307.

[81] ZHAO X, WANG T. Some identities related to reciprocal functions[J]. Discrete Math., 2003, 265(1–3):323–335.

[82] SPERNER E. Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge[J]. Math. Z., 1928, 27:544–548.

[83] CANFIELD E. On a problem of Rota[J]. Adv. Math., 1978, 29:1–10.

[84] GRIGGS J. Matchings, cutsets, and chain partitions in graded posets[J]. Discrete Math., 1995, 144(1–3):33–46.

[85] GRIGGS J. Collections of subsets with the Sperner property[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1982, 269:575–591.

[86] LIH K W. Sperner families over a subset[J]. J. Combin. Theory Ser. A, 1980, 29:182–185.

[87] LOVÁSZ L. Combinatorial Problems and Exercises[M]. Amsterdam: North-Holland, 1979.

[88] MU L, WANG Y, ZHANG B. A generalization of Sperner's theorem for convex families[J]. J. Comb. Number Theory, 2014, 6:183–189.

[89] MU L, WANG Y. A generalization of sperner’ s theorem on compressed ideals[J]. Electron. J. Combin., 2016, 23:P3.24.

[90] LUBELL D. A short proof of Sperner's theorem[J]. J. Combin. Theory, 1966, 1:299.

[91] MESHALKIN L D. A generalization of Sperner's theorem on the number of subsets of a finite set (in Russian)[J]. Teor. Veroyatnost. i Primenen, 1963, 8:219–220.

[92] YAMAMOTO K. Logarithmic order of free distributive lattices[J]. J. Math. Soc. Japan, 1954, 6:343–353.

[93] KLEITMAN D J. Proceedings of the international congress of mathematicians[C]// Canad. Math. Congress. vol 2. Vancouver: Montreal, Que., 1974: 465–469.

[94] DILWORTH R P. A docomposition theorem for partially ordered sets[J]. Ann. Math., 1950, 51:161–166.

[95] FRANKL P, AKIYAMA J. Modern Combinatorics (Japanese)[M]. Tokyo: Kyoritsu, 1987.

[96] PITTELOUD P. Log-concavity and compressed ideals in certain Macaulay posets[J]. Discrete Math., 2002, 254:421–432.

[97] STANLEY R P. Valid orderings of real hyperplane arrangements[J]. Discrete Comput. Geom., 2015, 53:951–964.

[98] MU L, STANLEY R. Supersolvability and freeness for ψ-graphical arrangements[J]. Discrete Comput. Geom., 2015, 53:965–970.

[99] STANLEY R P. Supersolvable lattices[J]. Algebra universalis, 1972, 2:197–217.

[100] DIRAC G A. On rigid circuit graph[J]. Abh. Math. Semin, 1961, 37:71–76.

[101] EDELMAN P, REINER V. Free hyperplane arrangements between a_{n-1} and b_n[J]. Math. Z, 1994, 215:347–365.

[102] STANLEY R P. Catalan Numbers[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2015.

[103] YOSHINAGA M. On the freeness of 3-arrangements[J]. Bull. London Math. Soc., 2005, 37(1):126–134.

[104] WANG Y, YEH Y N. Log-concavity and LC-positivity[J]. J. Combin. Theory Ser. A, 2007, 114(2): 195–210.

[105] RADOUX C. Addition formulas for polynomials built on classical combinatorial sequence[J]. J. Comp. Appl. Math., 2000, 115:471–477.

[106] CHANG X K, HU X B, LEI H C, et al. Combinatorial proofs of addition formulas[J]. Electron. J. Combin., 2016, 23:#P1.8.

[107] PEART P, WOAN W J. A divisibility property for a subgroup of Riordan matrices[J]. Discrete Appl. Math., 2000, 98(3):255–263.

[108] SHAPIRO L W. Bijections and the Riordan group[J]. Theoret. Comput. Sci., 2003, 307(2):403–413.

[109] MERLINI D, ROGERS D G, SPRUGNOLI R, et al. On some alternative characterizations of Riordan arrays[J]. Canad. J. Math., 1997, 49:301–320.

[110] DEUTSCH E, FERRARI L, RINALDI S. Production matrices[J]. Adv. in Appl. Math., 2005, 34:101–122.

[111] HE T X. Matrix characterizations of Riordan arrays[J]. Linear Algebra Appl., 2015, 465:15–42.

[112] HE T X. Shift operators defined in the Riordan group and their applications[J]. Linear Algebra Appl., 2016, 496:331–350.

[113] SHAPIRO L W. A Catalan triangle[J]. Discrete Math., 1976, 14(1):83–90.

[114] AIGNER M. Catalan-like numbers and determinants[J]. J. Combin. Theory Ser. A, 1999, 87(1):33–51.

[115] AIGNER M. Enumeration via ballot numbers[J]. Discrete Math., 2008, 308(12):2544–2563.

[116] WANG Y, ZHANG Z H. Log-convexity of Aigner-Catalan-Riordan numbers[J]. Linear Algebra Appl., 2014, 463:45–55.

[117] SLOANE N J A. The on-line encyclopedia of integer sequences[DB/OL]. `http://oeis.org`.

[118] AIGNER M. Catalan and other numbers: a recurrent theme[G]// Algebraic combinatorics and computer science. Milan: Springer Italia, 2001: 347–390.

[119] BARRY P. Generalized catalan numbers, hankel transforms and somos-4 sequences[J]. J. Integer Seq., 2010, 13(7):Article 10.7.2.

[120] BRUALDI R A, KIRKLAND S. Aztec diamonds and digraphs and Hankel determinants of Schröder numbers[J]. J. Combin. Theory Ser. B, 2005, 94(2):334–351.

[121] CAMERON N T, YIP A. Hankel determinants of sums of consecutive Motzkin numbers[J]. Linear

Algebra Appl., 2011, 434:712–722.
[122] ELOUAFI M. A unified approach for the Hankel determinats of classical combinatorial numbers[J]. J. Math. Anal. Appl., 2015, 431:1253–1274.
[123] EU S P, WONG T, YEN P. Hankel determinants of sums of consecutive weighted Schröder numbers[J]. Linear Algebra Appl., 2012, 437(9):2285–2299.
[124] HOU Q H, LASCOUX A, MU Y P. Evaluation of some Hankel determinants[J]. Adv. in Appl. Math., 2005, 34:845–852.
[125] KRATTENTHALER C. Advanced determinant calculus[J]. Sem. Lothar. Combin., 1999, 42:Article B42q.
[126] KRATTENTHALER C. Advanced determinant calculus: a complement[J]. Linear Algebra Appl., 2005, 411:68–166.
[127] KRATTENTHALER C. Determinants of (generalised) catalan numbers[J]. J. Statist. Plann. Inference, 2010, 140:2260–2270.
[128] SULANKE R, XIN G. Hankel determinants for some common lattice paths[J]. Adv. in Appl. Math., 2008, 40(2):149–167.
[129] DONAGHEY R, SHAPIRO L W. Motzkin numbers[J]. J. Combin. Theory Ser. A, 1977, 23(3):291–301.
[130] AIGNER M. Motzkin numbers[J]. European J. Combin., 1998, 19(6):663–675.
[131] BERNHART F R. Catalan, Motzkin, and Riordan numbers[J]. Discrete Math., 1999, 204(1–3):73–112.
[132] EU S P, LIU S C, YEH Y N. Taylor expansions for Catalan and Motzkin numbers[J]. Adv. in Appl. Math., 2002, 29(3):345–357.
[133] BONIN J, SHAPIRO L, SIMION R. Some q-analogues of the Schröder numbers asrising from combinatorial statistics on lattice paths[J]. J. Statist. Plann. Inference, 1993, 34(1):35–55.
[134] CALLAN D. Notes on Motzkin and Schröder numbers[J/OL]. `http://www.stat.wisc.edu/~callan/papersother/`.
[135] BOJIČIĆ R. Hankel transform of a series reversion of a certain rational function[J]. Linear Algebra Appl., 2013, 438(11):4237–4248.
[136] BOJIČIĆ R, PETKOVIČ M, BARRY P. Hankel transform of a sequence obtained by series reversion[J]. Integral Transforms Spec. Funct., 2012, 23(11):803–816.
[137] HE T X. Parametric Catalan numbers and Catalan triangles[J]. Linear Algebra Appl., 2013, 438(3): 1467–1484.
[138] WANG Y, ZHANG Z H. Combinatorics of generalized Motzkin numbers[J]. J. Integer Seq., 2014, 18:Article 15.2.4.
[139] SHAPIRO L W, WOAN W J, GETU S. Runs, slides and moments[J]. SIAM J. Algebr. Discrete Math., 1983, 4:459–466.

攻读博士学位期间科研项目及科研成果

发表论文

1. **L. Mu**, Y. Wang, A generalization of Sperner's theorem on compressed ideals, Electron. J. Combin. 2016, 23(3): P3.24. (SCI, 本文第 2 章)
2. **L. Mu**, Y. Wang, B. Zhang, A generalization of Sperner's theorem for convex families, J. comb. Number Theory 2014, l6: 183–189. (本文第 2 章)
3. **L. Mu**, R. P. Stanley, Supersolvability and freeness for ψ-graphical arrangements, Discrete Comput. Geom. 2015, 53: 965–970. (SCI, 本文第 3 章)
4. H. Liang, **L. Mu**, Y. Wang, Catalan-like numbers and Stieltjes moment sequences, Discrete Math. 2016, 339(2): 484–488. (SCI)

已接收文章

1. **L. Mu**, Y. Wang, Hankel determinants of shifted Catalan-like numbers, Discrete Math, doi:10.1016/j.disc.2016.09.035. (SCI, 本文第 4 章)

已完成论文

1. **L. Mu**, J. Mao, Y. Wang, Row polynomial matrices of Riordan arrays. (本文第 4 章.)

参与科研项目

1. 国家自然科学面上基金项目 (11071030): 偏序集上的组合极值问题研究, 2011-2013, 负责人：王毅.
2. 教育部博士点基金项目 (20110041110039): 极值组合学中若干经典问题的研究, 2012–2014, 负责人: 王毅.
3. 国家自然科学基金面上项目 (11371078): 组合数学中的组合不等式研究, 2014–2017, 负责人: 王毅.

此页不缺内容

致　　谢

行文至此, 我的博士论文已接近尾声, 这篇浸润着自己辛劳和汗水的论文即将宣布我学生时代的结束. 又一次站在人生的转折路口, 感今惟昔, 心中难免思绪万千, 在大连理工大学的 2000 多个日夜像精心制作的幻灯片一样在脑海中随机播放.

寸草之心, 难报三春之晖. 我这里要感谢的第一个人便是我的导师王毅教授. 2009 年, 我非常幸运的成为王老师的学生, 得到王老师的言传身教, 得以步入组合数学的殿堂. 在学术上, 王老师态度严谨, 追求完美, 对我要求严格. 我每篇论文完成的背后, 都有王老师反反复复十多次修改的辛劳与智慧. 在讨论班上, 王老师总是毫无保留的展现他的学术思想、科研思路和成功素养, 引导我不断开拓思路, 使我在这几年的博士生涯里既增长知识, 又培养了良好的思维习惯和科研能力. 对于我的粗心大意, 不注重细节, 王老师从不会放过任何机会来敲打我. 对读博过程中的失意与彷徨, 王老师又会坚定地相信我、鼓励我. 仍然记得论文退稿后, 王老师总是表现出对我一如既往的肯定和冷静客观的分析, 使我将科研路上必经的痛苦转化为宝贵的经验和继续前进的动力. 更让我难忘的是在我找工作过程中, 王老师出差期间都把我的简历放在背包中, 为的是在适当的场合帮我推荐, 希望我能找到一份合适的工作, 这对我来说意味着感恩, 更是动力. 在日常生活中, 王老师是同学们公认的最和蔼可亲的人, 老师谦虚为人的处世风度将会是我学习的标杆, 使我终身受益. 成为像王老师一样德学兼备的老师, 将是我今后为师的准则. 现在王老师依然如当年那般年轻儒雅, 只是耳鬓多了些许白发, 每根白发都凝聚了他对我们的辛劳与付出。在此, 我向多年来辛勤培养、教育和关心我的王老师致以最诚挚的敬意和感谢! 今后唯以努力科研、好好做人、踏实做事来报答师恩.

读博好比攀登高峰, 有喜悦也有泪水, 有彷徨也有坚持, 纵然过程艰辛无比, 但是每向上迈进一步, 眼前的视野也就越开阔, 风景也就越缤纷美丽. 在南开大学组合数学中心交流学习的半年和麻省理工学院联合培养的一年都是登山途中绚烂的风景. 感谢南开大学组合中心的陈永川院士、马万宝副主任、侯庆虎教授、杨立波教授、季青教授、王星炜副教授、孙慧副教授、郭龙副教授、姜洪华老师、任晓艳老师等各位老师对我生活及学习上的关怀与鼓励. 感谢麻省理工学院的 Richard P. Stanley 院士在联合培养的一年中对我的指导和帮助. 感谢他每次都耐心地解答我遇到的学术问题, 感谢他 70 岁高龄仍风雨无阻的科研精神, 也感谢他在生活上对我的关心和帮助. 感谢蔡吴兴博士、李雪珊副教授、王喻红教授对我在麻省理工学习期间的陪伴与支持.

特别感谢卢玉峰教授、郑斯宁教授、侯中华教授、南基洙教授、冯红副教授、邓玉平副教授、翁国标副教授、孙丽君老师及数学科学学院其他老师的关心和帮助. 感谢刘

丽博士、马世美博士、苏循团博士、祝宝宣博士、孙华博士、张文龙博士、陈晓静博士、周蕊博士、胡昌慧博士、陈曦博士、李纳博士、张治海博士、郭峰、李占峰、张海霞等师兄师姐在学术上以及生活上的鼓励与帮助. 感谢梁胡义乐、郑赛男、王晓雯、张斌、陈晓凡、颜冯尧、赵亮、于斯佳、刘丹丹、毛建玺、李冠儒、刘冠吾等师兄弟姐妹在学习和生活中的陪伴与支持. 感谢室友曾玲莉与我一起分享读博过程的苦与乐.

最后，衷心感谢父母的养育之恩，感谢父母无条件的支持和鼓励, 感谢李志鹏十年坚定的陪伴, 感谢他及其家人对我每个决定的理解与支持!

作者简介

姓名：牟丽丽

性别：女

出生年月：1986 年 03 月 19 日

民族：汉

籍贯：山东省烟台市

研究方向：组合数学

简历：

2005.9–2009.7　菏泽学院数学与应用数学系　应用数学　大学本科

2009.9–至今　大连理工大学数学科学学院　基础数学　博士研究生（硕博连读）

交流经历：

2011.10–2012.1　南开大学　组合数学中心　交流访问

2013.9–2014.9　麻省理工学院　数学系　联合培养博士生