第 19 卷第 1 期　　常 州 工 学 院 学 报　　Vol. 19　No. 1
2006 年 2 月　　Journal of Changzhou Institute of Technology　　Feb. 2006

有限集合上的划分与覆盖

陈仁荣

(常州市广播电视大学,江苏 常州 213001)

摘要:关于有限集合上的划分与覆盖,一般很少讨论和研究。本文根据集合的划分与覆盖的定义,利用容斥定理和集合理论,给出了有限集合上的划分与等价关系、完全覆盖与相容关系的关系,以及有限集合上的划分数和完全覆盖数的计算公式。

关键词:等价关系;相容关系;集合的划分;集合的覆盖

中图分类号:O144　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-0436(2006)01-0005-04

0 引言

《离散数学》给出了求集合 $S=\{a,b,c\}$ 上所有等价关系和所有相容关系的问题[1],其实它们是与集合 S 的划分和覆盖有关的问题。

现给出集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,共有多少种不同的关于 S 的划分和覆盖?为叙述简洁,设本文讨论的集合均为有限、非空集合,集合 S 上的二元关系 $R=\{(a,b)\mid a,b\in S\}$。如果 R 是自反的、对称的和传递的,称 R 是 S 上的一个等价关系;如果 R 是自反的、对称的,称 R 是 S 上的一个相容关系。

1 集合的划分

1.1 集合的划分原理

定义 1 集合 S 的非空子集 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的集合 $\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 是 S 的一个划分,如果:

(1) $S=\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i$;

(2) 若 $A_i\neq A_j$,则 $A_i\cap A_j=\varnothing(1\leqslant i,j\leqslant m)$[2]。

定义 2 设 R 是集合 S 上的一个等价关系,对于每个 $a\in S$,称 $[a]_R=\{x\mid(x,a)\in R\}$ 为 S 关于 R 的一个等价类,并记 $A_i=[a]_R(i\in N)$。

定理 1 设 R 是集合 S 上的一个等价关系,则 S 关于 R 的所有等价类的集合 $\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 是 S 的一个划分。

证明:$A_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 非空,因 R 是自反的,则 $a\in A_i\subseteq S$ 有 $(a,a)\in R$,即 $a\in A_i$。

$\forall A_i\subseteq S(1\leqslant i\leqslant m)$,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i\subseteq S$;对 $\forall x\in S\ \exists A_k(1\leqslant k\leqslant m)$,有 $(x,x)\in R$ 则 $x\in A_k$,则 $S\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i$。因此 $S=\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i$。

对 A_i、$A_j(1\leqslant i,j\leqslant m)$,不妨设 $A_i=[a]_R$、$A_j=[b]_R$,若 $(a,b)\in R$,对 $\forall x\in A_i$,$(x,a)\in R$。根据 $(a,

收稿日期:2005-10-10

$b)\in R$ 和传递性有 $(x,b)\in R$,即 $x\in A_j$。因此 $A_i\subseteq A_j$,同理 $A_j\subseteq A_i$ 所以 $A_i=A_j$。若 $A_i\neq A_j$,必有 $A_i\cap A_j=\varnothing$;(反证)如若不然 $A_i\cap A_j\neq\varnothing$,则 $\exists y\in A_i\cap A_j$,有 (y,a)、$(y,b)\in R$,根据对称性、传递性有 $(a,b)\in R$,则 $A_i=A_j$,与 $A_i\neq A_j$ 矛盾,因此 $A_i\cap A_j=\varnothing$。于是 S 的所有等价类集合 $\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 是 S 的一个划分。

定理 2 设集合 $\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 是集合 S 的一个划分,则存在 S 上的一个二元关系 R,使得 R 是一个等价关系。

证明 定义 S 上的一个二元关系 $R=\{(a,b)\mid$ 当且仅当 a、$b\in A_i(1\leqslant i\leqslant m)\}$。

对 $\forall a\in S$,$\exists A_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 有 $a\in A_i$,即 $(a,a)\in R$,则 R 是自反的 若 $(a,b)\in R$,有 $a,b\in A_i(1\leqslant i\leqslant m)$,当然有 $(b,a)\in R$,则 R 是对称的 若 $(a,b)\in R$、$(b,c)\in R$,有 a、$b\in A_i$ 和 b、$c\in A_j(1\leqslant i,j\leqslant m)$,即 $A_i\cap A_j\neq\varnothing$,有 $A_i=A_j$,于是 a、b、c 同在 A_i(或 A_j)中,即 $(a,c)\in R$,则 R 是传递的。所以 R 是等价关系。

因此集合 S 上的等价关系与 S 的划分是一一对应的。

1.2 集合的划分个数

设 $A_i\subseteq S(i=1,2,\cdots,m)$,如果 $n(S)$ 表示集合 S 的元素的个数,记 $T_0=n(S)$,$T_1=\sum\limits_{1\leq i\leq m}n(A_i)$,$T_2=\sum\limits_{1\leq i<j\leq m}n(A_i\cap A_j)$,$\cdots$,$T_k=\sum\limits_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq m}n(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap,\cdots\cap A_{i_k})$,$\cdots$,$T_m=n(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m)$,则容斥定理可表示为

定理 3 $n(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_m)=T_0-T_1+T_2-T_3+\cdots+(-1)^mT_m$ [3]

下面讨论集合 $S=\{a_1,a,\cdots,a_n\}$ 的划分个数。按照定义 1,求集合 S 的一个划分就是把 n 个不同元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 分成 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 个非空子集 $A_1,A_2,\cdots,A_m$,其中 $\forall A_i$、$A_j(1\leqslant i<j\leqslant m)$ 满足 $A_i\cap A_j=\varnothing$,集合 $\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 即为 S 的一个划分。现分以下步骤进行。

第一,子集 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 有顺序区别。把 n 个不同元素放入 m 个不同的子集,记 $A_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 为第 i 个子集为空集,$A(n,m)$ 为 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中没有空集的不同放入法数。显然,$T_0=m^n$,

$$T_1=\sum_{1\leq i\leq m}n(A_i)=C_m^1(m-1)^n,T_2=\sum_{1\leq i<j\leq m}n(A_i\cap A_j)=C_m^2(m-2)^n,\cdots$$

$$T_k=\sum_{1\leq i_1<i_2\cdots<i_k\leq m}n(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})=C_m^k(m-k)^n,\cdots$$

则由定理 3 得

$$A(n,m)=n(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_m)=T_0-T_1+T_2-T_3+\cdots+(-1)^mT_m=$$

$$m^n-C_m^1(m-1)^m+C_m^2(m-2)^m+\cdots+(-1)^kC_m^k(m-k)^n+\cdots=\sum_{k=0}^{m}(-1)^kC_m^k(m-k)^n$$

第二,子集 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 没有顺序区别。把 n 个不同元素放入 m 个相同的子集,记 $B(n,m)$ 为 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中没有空集的不同放入法数,根据乘法原理有 $B(n,m)=\dfrac{A(n,m)}{m!}$。

第三,S 的划分是把 n 个不同元素任意分成 m 个子集,因子集个数 m 可分为 $1,2,\cdots,n$ 个,根据加法原理总的不同放入法数为 $\sum\limits_{m=1}^{n}B(n,m)$。即集合 S 的划分个数为 $\sum\limits_{m=1}^{n}\dfrac{A(n,m)}{m!}$。

2 集合的覆盖

2.1 集合的覆盖原理

定义 3 集合 S 的非空子集 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的集合 $\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 是 S 的一个覆盖。如果:

(1) $S=\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i$;

(2) 若 $A_i\neq A_j$,则 $A_i\not\subset A_j(1\leqslant i,j\leqslant m)$ [2](p.106)

定义 4 设 R 是集合 S 上的一个相容关系，对于一个非空子集 $B\subseteq S$，如果 B 中任何元素与 B 中其他元素相容，且 $S-B$ 中的每个元素至少与 B 中一个元素不相容，则称 B 为 S 上关于 R 的一个最大相容类。

定理 4 设 $B_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 是集合 S 上关于相容关系 R 的最大相容类，则 S 的所有最大相容类的集合 $\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$ 是 S 的一个覆盖，并且是唯一的覆盖。

证明：同定理 1 证明显然有 $S=\bigcup\limits_{i=1}^{m}B_i$

对 B_i、$B_j(1\leqslant i,j\leqslant m)$，如果 $B_i\neq B_j$，必有 $B_i\not\subset B_j$；(反证)如果不然，$B_i\subseteq B_j$ 则 $\exists y\in B_j$，但 $y\notin B_i$。一方面，$\forall x\in B_i\subseteq B_j$，$x$ 与 B_j 中每个元素都相容；另一方面，$y\in S-B_i$，根据 B_i 是 S 的一个最大相容类，y 至少与 B_i 中一个元素不相容，和 x 与 B_j 中每个元素相容矛盾。因此 $B_i\not\subset B_j$；$(1\leqslant i,j\leqslant m)$。于是，集合 $\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$ 是 S 的一个覆盖。

现设 $C_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 是 S 上关于同一个相容关系 R 的最大相容类，S 的所有最大相容类的集合是 S 的另一个覆盖。对 $C_i\in\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$，$\exists B_k(1\leqslant k\leqslant m)$，使得 $C_i=B_k$，否则 $C_i\neq B_k(k=1,2,\cdots,m)$，即 $\{B_1,B_2,\cdots B_m,C_i\}$ 是 S 的一个覆盖，与 $\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$ 是 S 关于 R 的所有最大相容类矛盾，所以 $\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}\subseteq\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$，$n\leqslant m$；同理 $\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}\subseteq\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$，$m\leqslant n$。于是 $m=n$，集合 $\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$ 与 $\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 是 S 的同一个覆盖。

定义 5 称集合 S 的最大相容类集合 $\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$ 是 S 的一个完全覆盖。

定理 5 设集合 $\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$ 是集合 S 的一个完全覆盖，则存在 S 上的一个二元关系 R 是 S 上的一个相容关系。

证明类同定理 2 证明(从略)。

定理 6 设 R_1、R_2 是 S 上的两个不同的相容关系，$B_i(1\leqslant i\leqslant m)$、$C_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 分别是 R_1、R_2 的最大相容类，则它们各自所有的最大相容类集合 $\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$、$\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 也不同。

证明：(反证)如若 $\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$，一方面，$m=n$；另一方面，对 $\forall B_i(1\leqslant i\leqslant m)$，$\exists C_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 使得 $B_i=C_j$。对 $\forall(a,b)\in R_1$，$\exists B_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 使得 a、$b\in B_i$，有 a、$b\in C_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 即 $(a,b)\in R_2$，因此 $R_1\subseteq R_2$；同理 $R_2\subseteq R_1$；所以 $R_1=R_2$，与条件矛盾。于是 $\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}\neq\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$。

因此集合 S 上的相容关系与 S 的完全覆盖是一一对应的。

2.2　集合的完全覆盖个数

显然，由定义 3 给出的集合的覆盖不是唯一的。如对集合 $S=\{a,b,c\}$ 来说，根据定义 3，集合 $\{\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\}\}$ 和 $\{\{a,b,c\}\}$ 是 S 的两个不同覆盖，都定义了 S 上的同一相容关系 $R=\{\{a,a\},\{b,b\},\{c,c\},\{a,b\},\{b,a\},\{b,c\},\{c,b\},\{c,a\},\{a,c\}\}$；但是，根据定义 5，$\{\{a,b,c\}\}$ 是 S 的一个完全覆盖，而 $\{\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\}\}$ 不是 S 的完全覆盖。

定义 6 设两个集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$、$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，R 是 A、B 上的一个二元关系，称 $\boldsymbol{m\times n}$ 矩阵 $\boldsymbol{M_R}=[r_{ij}]_{m\times n}$ 为 R 的关系矩阵，其中 $r_{ij}=\begin{cases}1\ 当(a_i,b_j)\in R\\0\ 当(a_i,b_j)\notin R\end{cases}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ [1]，这里，二元关系 R 与它的关系矩阵 $\boldsymbol{M_R}$ 是一一对应的。

定理 7 集合 S 上的相容关系 R 的关系矩阵 $\boldsymbol{M_R}$ 是主对角线上的元素均为 1 的对称矩阵。

证明：设集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 上的一个二元关系 R 是相容关系，它的关系矩阵 $\boldsymbol{M_R}=[r_{ij}]_{m\times n}$。对 $a_i\in S(1\leqslant i\leqslant n)$ 有 $(a_i,a_i)\in R$，因此 $r_{ii}=1$；对 a_i、$a_j\in S(1\leqslant i,j\leqslant n)$，若 $(a_i,a_j)\in R$，有 $(a_j,a_i)\in R$，因此 r_{ij} 与 r_{ji} 同为 1 或 0。所以关系矩阵 $\boldsymbol{M_R}$ 是主对角线上元素均为 1 的 n 阶对称矩阵。

下面讨论集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的完全覆盖个数。按照定理 4，求集合 S 的一个完全覆盖就是求 S

上关于一个相容关系的所有最大相容类的集合 $\{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$。现分以下步骤进行。

第一,求集合 S 上的所有相容关系。根据定义 5 和定理 7,集合 S 上的相容关系与主对角线上的元素均为 1 的 n 阶对称关系矩式一一对应;而主对角线上元素均为 1 的 n 阶对称关系矩阵的非主对角线上元素为 1 的待定个数共有

$$1 + 2 + \cdots + (n - 2) + (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2}(\text{个})$$

于是不同的主对角线上元素均为 1 的 n 阶相容关系矩阵共有:

$$C^0_{\frac{n(n-1)}{2}} + C^1_{\frac{n(n-1)}{2}} + \cdots + C^{\frac{n(n-1)}{2}-1}_{\frac{n(n-1)}{2}} + C^{\frac{n(n-1)}{2}}_{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}(\text{个})$$

因此 S 上共有 $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 个不同的相容关系。

第二,求集合 S 上的所有完全覆盖个数。根据定理 6,集合 S 上的相容关系与 S 的完全覆盖一一对应;因此集合 S 的所有不同的完全覆盖个数等于 S 上所有不同的相容关系个数,即集合 S 的所有不同的完全覆盖个数为 $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$。

[参考文献]

[1] 刘叙华,虞恩蔚,姜云飞. 离散数学[M]. 北京:中央广播电视大学出版社,1999.
[2] [美] C. L. Liu. 离散数学基础[M]. 刘振宏,译. 北京:人民邮电出版社,1982.
[3] 陈景润. 组合数学[M]. 郑州:河南教育出版社,1985.

The Partition and Covering of Finite Set

CHEN Ren-rong

(Changzhou College of Broadcast and Television, Chingzhou, Jiangsu 213001)

Abstract: Generally speaking, there are few profound discussion and research on the partition and covering of finite set. According to the partition of set and the definition of covering, this article which takes advantages of the admissible and repelling law and the set theories indicates the relationship of partition and equality, special – covering and admission and the accounting formula of partition numerals and special – covering numerals.

Key words: equivalent relation; admissible relation; the partition of set; the covering of set

责任编辑:庄亚华