第 25 卷　　哈尔滨师范大学自然科学学报　　Vol. 25, No. 4 2009
第 4 期　　NATURAL SCIENCES JOURNAL OF HARBIN NORMAL UNIVERSITY

在偏序集上单调函数的一些性质*

王礼萍　　潘亚滨　　曹　辉　　李　艳
（哈尔滨学院）　（哈尔滨风华中学）　（哈尔滨学院）

【摘要】 给出单调函数在偏序集上的一些性质，并给予证明. 同时，将全序集上的单调函数与偏序关系中的单调函数进行了比较.

关键词：偏序关系；单调函数；格

0 引言

函数(Function)是数学中最基本最重要的概念之一. 1859 年我国清代数学家李善兰翻译《代数学》一书时首先用"函数"一词翻译"function"一词，他解释说："凡此变数函彼变数，则此为彼之函数". 中国古代用天、地、人、物表示未知数. 李善兰译《代数学》中有"凡式中含天，为天之函数"这样的语句. 莱布尼茨首次用" function "一词表示幂，即 $x,x^2,x^3,\cdots$. 1673 年，他用"function"一词表示任何一个随曲线上的点的变动而变动的量.

伴随着微积分的发展，单调函数一词，最常出现在数学分析中. 指的是数域上的单调函数，即是在全序集合上的单调函数. 在这里给出了很多单调函数的性质，如单调有界定理等. 而在偏序关系上的单调函数的性质，却很难见到. 本文就此问题，找到一些性质，以便充实到偏序集上数学结构理论上.

1 有关单调函数的知识

定义 1 设有非空数集 X 与实数集 R，f 是一个确定的对应规律，如果对数集 X 中的每一个 x，按照对应规律 f，实数集 R 有唯一一个数 y 与之相对应，我们称 f 是从数集 X 到实数集 R 的一个函数，记为：

$$f:X\rightarrow R.$$

函数 f 在 x 点的值记为 $y=f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量，X 称为函数 f 的定义域.

在定义中，函数是定义在数与数之间的一种关系，是从运动变化的观点来描述的，是两个连续数域之间的关系.

定义 2 设 $f:R\rightarrow R$，对于 $\forall x_1,x_2\in R$，

如果 $x_1<x_2$ 时，则 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），就称 f 在 R 上单调递增的（或单调递减的）.

如果 $x_1<x_2$ 时，则 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），就称 f 在 R 上严格单调递增的（或严格单调递减的）.

它们统称为单调函数.

我们将单调函数的概念加以推广，就可以得到在全序集上的单调函数的概念.

定义 3[1] 设 A,B 为二集合，$\leqslant_1$，$\leqslant_2$ 分别为 A,B 上的全序关系. $f:A\rightarrow B$. 若对于任意的 $x_1,x_2\in A$，如果 $x_1<_1x_2$，则 $f(x_1)\leqslant_2 f(x_2)$，则称 f 是单调递增的；如果 $x_1\leqslant_2<_1x_2$，则 $f(x_2)\leqslant_2 f(x_1)$，则 f 是单调递减的. 如果 $x_1<_1x_2$ 时，则 $f(x_1)<_2f(x_2)$，就称 f 在 R 上严格单调递增的；如果 $x_1<_1x_2$ 时，则 $f(x_1)>_2f(x_2)$，就称 f 在 R 上严格单调递减的.

我们可以称这些为广义的单调函数. 如果进行推广，我们还可以得到更广义的单调函数，即在偏序集上的单调函数.

定义 4[2] 设 A,B 为二集合，$\leqslant_1$，$\leqslant_2$ 分别为 A,B 上的偏序关系，$f:A\rightarrow B$. 若对于任意的 x_1，$x_2\in A$，如果 $x_1<_1x_2$，则 $f(x_1)\leqslant_2 f(x_2)$，则称 f 是

收稿日期：2009－07－15
* 哈尔滨学院学科发展研究基金项目(HXK200717)

单调递增的;如果 $x_1 <_1 x_2$,则 $f(x_1) \geqslant_2 f(x_2)$,则称 f 是单调递减的. 如果 $x_1 <_1 x_2$,则 $f(x_1) <_2 f(x_2)$,则称 f 是严格单调递增的;如果 $x_1 <_1 x_2$,则 $f(x_2) <_2 f(x_1)$,则 f 是严格单调递减的.

从上面的叙述中,可以看到单调函数从数域集合上到全序集合上,再从全序集合上到偏序集合上,一步步演变过来,逐步得以推广. 偏序集合上的单调函数的性质一定适合全序集合上的单调函数,全序集合上的单调函数上的性质一定适合数域集合上的单调函数. 反之,未必成立. 我们对数域集合上的单调函数研究较多,结论也较多. 但对全序集合上和偏序集合上的单调函数的研究就少之又少. 本文主要就从偏序集合上的单调函数的研究入手,研究其一些性质.

2 结论

定理: 设 $<X, \leqslant>$ 是偏序集合,且 X 中任何两个元素都有上确界(或下确界),f 和 g 是偏序集合 $<X, \leqslant>$ 上的单调递增函数(或单调递减的),则

(1) $f+g$ 是单调递增的(或单调递减的),其中 $(f+g)(x)$ 等于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的上确界,记作 $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;

(2) $f \cdot g$ 是单调递增的(或单调递减的),其中 $(f \cdot g)(x) = f(x)$ 与 $g(x)$ 的下确界,记作 $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;

(3) $f \cdot g$ 也是单调递增的(或单调递减的),其中 $f \cdot g$ 是函数 f 与函数 g 的复合,记作 $f \cdot g(x) = f(g(x))$.

证明 (1) 因为 f 和 g 是偏序集合 $<X, \leqslant>$ 上的单调递增函数,所以,$\forall x_1, x_2 \in X$,若 $x_1 < x_2$,则 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,$g(x_1) \leqslant g(x_2)$.

因此

$(f+g)(x_1) = f(x_1) + g(x_1) \leqslant f(x_2) + g(x_2) = (f+g)(x_2)$;

所以,

$(f+g)(x_1) \leqslant (f+g)(x_2)$

故 $(f+g)$ 是单调增加的.

另,f 和 g 是偏序集合 $<X, \leqslant>$ 上的单调递减的,则 $(f+g)$ 是单调递减的. 证明过程与上面证明类似.

(2) 因为 f 和 g 是偏序集合 $<X, \leqslant>$ 上的单调递增函数,所以,$\forall x_1, x_2 \in X$,若 $x_1 < x_2$,则 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,$g(x_1) \leqslant g(x_2)$.

因为

$f(x) \cdot g(x) = f \cdot g(x)$ 所以

$(f \cdot g)(x_1) = f(x_1) \cdot g(x_1) \leqslant f(x_2) \cdot g(x_2) = (f \cdot g)(x_2)$,所以 $(f \cdot g)(x_1) \leqslant (f \cdot g)(x_2)$,

故 $f \cdot g$ 是单调递增的.

另,f 和 g 是偏序集合 $<X, \leqslant>$ 上的单调递减的,则 $f \cdot g$ 是单调递减的. 证明过程与上面证明类似.

(3) $x_1, x_2 \in X$,若 $x_1 < x_2$,根据 g 是单调递增的,得

$g(x_1) \leqslant g(x_2)$

又因 f 是单调递增的,得

$f(g(x_1)) \leqslant f(g(x_2))$ 所以,

$f \cdot g(x_1) \leqslant f \cdot g(x_2)$

即,$f \cdot g$ 是单调递增的.

另,f 和 g 是偏序集合 $<X, \leqslant>$ 上的单调递减的,则 $f \cdot g$ 是单调递减的. 证明过程与上面证明类似.

4 总结

全序集合上的任何两个元素都是可比的,而偏序集合上的任何两个元素未必可比. 这样就造成了在偏序集合上研究单调函数的难度,但也就有了研究的兴趣,这里,只给出了一部分,其他将另文给出更多的结论.

参 考 文 献

[1] 陈进元,屈婉玲. 离散数学. 北京:北京大学出版社,1987.
[2] 耿素云,屈婉玲. 离散数学. 北京:高等教育出版社,1998.
[3] [美] Kenneth H. Rosen . Discrete Mathematis and Applications. 北京:机械工业出版社,1999.6(影印版).

PROPERTIES OF MONOTONE FUNCTION ON PARTIAL SET

Wang Liping Pan Yabin Cao Hui Li Yan
(Harbin College) (Fenghua Middle school) (Harbin College)

ABSTRACT

Some properties of monotone function in ordered set are given and proved in this paper, meanwhile, we also compare the monotone function in totally ordered set with the monotone function in ordered relation.

Keywords: Partial order; Monotone function; Lattice (责任编辑:王丹红)