第46卷 第12期
Vol. 46 No. 12

山 东 大 学 学 报 (理 学 版)
Journal of Shandong University(Natural Science)

2011年12月
Dec. 2011

文章编号:1671-9352(2011)12-0070-06

容斥原理的拓展及其应用(Ⅱ)

唐善刚
(西华师范大学数学与信息学院,四川 南充 637002)

摘要:将容斥原理拓展到赋权有限集上具带权表达式的一般化情形,得到了具带权表达式的广义容斥原理,并给出广义容斥原理在组合计数中的具体应用。
关键词:赋权有限集;广义容斥原理;组合计数
中图分类号:O157.1 文献标志码:A

A generalization of the principle of inclusion-exclusion and its application(Ⅱ)

TANG Shan-gang
(College of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong 637002, Sichuan, China)

Abstract: The principle of inclusion-exclusion is extended to the general restricted conditions on a weighted finite set, and a weighted generalization of the principle of inclusion-exclusion is given. Some applications of the generalized principle of inclusion-exclusion are given on combinatorial enumeration.
Key words: weighted finite set; generalized principle of inclusion-exclusion; combinatorial enumeration

容斥原理是计数组合学中的一个经典的计数工具。文[1]对容斥原理做出了重要形式的拓广,得到了赋权有限集上恰好具有各分组性质集中的若干个性质的元素集的权的计算公式,即广容斥原理;文[2-3]则进一步提出了拓展容斥原理的方法与技巧;文[4]利用组合分析技巧将容斥原理拓展到赋权有限集上恰好具有某分组性质集中的若干个性质,同时又恰好具有剩余分组性质集中指定的若干个性质的元素集的权的计算公式,是对文[1]中的广容斥原理的再拓展;文[5]研究了赋实数权情形下的无限可数集上的广义容斥原理的四种形式;文[6]利用文[5]中的定理1进一步讨论了相同元素不相邻(或相邻)的重排列的计数问题,获得了一些较为实用的计数公式,关于容斥原理及应用在文[7-9]中还有较为详细的论述。本文的工作是进一步将容斥原理拓展到赋权有限集上至少具有某分组性质集中的若干个性质,而同时又恰好具有剩余分组性质集中指定的若干个性质的元素集的权的计算公式,对此进行了系统深入的研究,得到了完全不同于文[4]中定理1的另一种形式的广义容斥原理,也进一步丰富拓宽了相关文献的研究结果[1-2,4-5]。

1 预备知识

设 A 是赋权有限集,即对任意 $a\in A$,定义 a 的权 $w(a)$ 属于某个加群,对任意 $B\subseteq A$,称 $W(B)=\sum\limits_{b\in B}w(b)$ 为 B 的权;特别地,当 $B=\varnothing$ 时约定 $W(\varnothing)=0$。设 m 为正整数,n_j 是正整数($1\leqslant j\leqslant m$),且 $\sum\limits_{j=1}^{m}n_j=n$。令 $N_j=\{1,2,\cdots,n_j\}$($1\leqslant j\leqslant m$),设 $p_{11},p_{12},\cdots,p_{1n_1},\cdots,p_{m1},p_{m2},\cdots,p_{mn_m}$ 是 n 个性质(或称为命题),令 $P=\{p_{11},p_{12},$

收稿日期:2010-11-09;网络出版时间:2011-06-24 15:27
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/37.1389.N.20110624.1527.005.html
基金项目:西华师范大学校基金资助项目(09A018)
作者简介:唐善刚(1978-),男,讲师,硕士,研究方向为组合数学与群论. Email:tangshangang2001@163.com

$\cdots, p_{1n_1}, \cdots, p_{m1}, p_{m2}, \cdots, p_{mn_m}\}$ 表示性质集。现将性质集 P 作一个 m 部划分,即令 $P_j=\{p_{ji} \mid i \in N_j\}(1 \leqslant j \leqslant m)$。

再设 $I_j \subseteq N_j(1 \leqslant j \leqslant m)$, k 是非负整数且 $k \leqslant m$,以及 $r_1, \cdots, r_k$ 为非负整数且 $r_i \leqslant n_i(i=1,2,\cdots,k)$。

设 $A_{I_1,\cdots,I_m}$ 表示 A 中具有性质 $p_{jt}, t \in I_j(1 \leqslant j \leqslant m)$ 的那些元素组成的集合;设 $A_{I_1,\cdots,I_k(I_{k+1},\cdots,I_m)}$ 表示 A 中具有性质 $p_{jt}, t \in I_j(1 \leqslant j \leqslant k)$,而又恰好具有 P_i 中的性质 $p_{it}, t \in I_i(k+1 \leqslant i \leqslant m)$ 的那些元素组成的集合;设 $A_{(r_1,\cdots,r_k,I_{k+1},\cdots,I_m)}$ 表示 A 中恰好具有 P_j 中的性质 $p_{jt}, t \in I_j(k+1 \leqslant j \leqslant m)$,而又恰好具有 P_i 中的 r_i 个性质$(1 \leqslant i \leqslant k)$ 的那些元素组成的集合;设 $A_{r_1,\cdots,r_k(I_{k+1},\cdots,I_m)}$ 表示 A 中具有 P_i 中的 r_i 个性质$(1 \leqslant i \leqslant k)$,而又恰好具有 P_j 中的性质 $p_{jt}, t \in I_j(k+1 \leqslant j \leqslant m)$ 的那些元素组成的集合,若 $k=m$,将 $A_{r_1,\cdots,r_k(I_{k+1},\cdots,I_m)}$ 记为 $A_{r_1,\cdots,r_m}$ 即表示 A 中具有 P_i 中的 r_i 个性质$(1 \leqslant i \leqslant m)$ 的那些元素组成的集合,若 $k=0$,将 $A_{r_1,\cdots,r_k(I_{k+1},\cdots,I_m)}$ 记为 $A_{(I_1,\cdots,I_m)}$ 即表示 A 中恰好具有 P_j 中的性质 $p_{jt}, t \in I_j(1 \leqslant j \leqslant m)$ 的那些元素组成的集合。

在文[4]中定义了

$$W_{r_1,\cdots,r_k,I_{k+1},\cdots,I_m}=\sum_{\substack{I_j \subseteq N_j \\ |I_j|=r_j \\ (1 \leqslant j \leqslant k)}} W(A_{I_1,\cdots,I_k,I_{k+1},\cdots,I_m}), \tag{1}$$

其中$|I_j|$表示集合 I_j 中元素的个数$(j=1,2,\cdots,k)$。

显然有

$$A_{r_1,\cdots,r_k(I_{k+1},\cdots,I_m)}=\bigcup_{\substack{I_j \subseteq N_j \\ |I_j|=r_j \\ (1 \leqslant j \leqslant k)}} A_{I_1,\cdots,I_k(I_{k+1},\cdots,I_m)}。 \tag{2}$$

令

$$W_{r_1,\cdots,r_k(I_{k+1},\cdots,I_m)}=\sum_{\substack{I_j \subseteq N_j \\ |I_j|=r_j \\ (1 \leqslant j \leqslant k)}} W(A_{I_1,\cdots,I_k(I_{k+1},\cdots,I_m)})。 \tag{3}$$

设 l 为非负整数,且 $k \leqslant l \leqslant m$,令

$$W_{r_1,\cdots,r_k,I_{k+1},\cdots,I_l(I_{l+1},\cdots,I_m)}=\sum_{\substack{I_j \subseteq N_j \\ |I_j|=r_j \\ (1 \leqslant j \leqslant k)}} W(A_{I_1,\cdots,I_l(I_{l+1},\cdots,I_m)})。 \tag{4}$$

文[4]利用组合分析方法巧妙地得出了 $W(A_{(r_1,\cdots,r_k,I_{k+1},\cdots,I_m)})$ 的计算公式,本文则对 $W(A_{r_1,\cdots,r_k(I_{k+1},\cdots,I_m)})$ 的计算公式加以系统研究。下面先给出 $W_{r_1,\cdots,r_k(I_{k+1},\cdots,I_m)}$ 有关的数学表达式,然后给出 $W(A_{r_1,\cdots,r_k(I_{k+1},\cdots,I_m)})$ 与 $W_{r_1,\cdots,r_k(I_{k+1},\cdots,I_m)}$ 之间的数学表达式,最后进一步给出 $W(A_{r_1,\cdots,r_k(I_{k+1},\cdots,I_m)})$ 的计算公式。

2　$W(A_{r_1,\cdots,r_k(I_{k+1},\cdots,I_m)})$ 的计算公式

下面给出广义容斥原理,即 $W(A_{r_1,\cdots,r_k(I_{k+1},\cdots,I_m)})$ 的计算公式,需指出的是,以下各定理中涉及的符号、记法及其含义与前面第 1 节中交代的是完全一致的。

定理 1　设 k, l 为非负整数,且 $k \leqslant l \leqslant m, 0 \leqslant t_i \leqslant n_i(i=1,2,\cdots,k)$,则有

$$W_{t_1,\cdots,t_k(I_{k+1},\cdots,I_m)}=\sum_{\substack{I_i \subseteq B_i \subseteq N_i \\ (k<i \leqslant l)}}(-1)^{\sum_{i=k+1}^{l}(|B_i|-|I_i|)} W_{t_1,\cdots,t_k,B_{k+1},\cdots,B_l(I_{l+1},\cdots,I_m)}。 \tag{5}$$

当 $l=m$ 时,此即为

$$W_{t_1,\cdots,t_k(I_{k+1},\cdots,I_m)}=\sum_{\substack{I_i \subseteq B_i \subseteq N_i \\ (k<i \leqslant m)}}(-1)^{\sum_{i=k+1}^{m}(|B_i|-|I_i|)} W_{t_1,\cdots,t_k,B_{k+1},\cdots,B_m}。 \tag{6}$$

证明　根据式(4)给出的 $W_{r_1,\cdots,r_k,I_{k+1},\cdots,I_l(I_{l+1},\cdots,I_m)}$ 的定义,不难得到如下等式:

$$W_{t_1,\cdots,t_k,I_{k+1},\cdots,I_l(I_{l+1},\cdots,I_m)}=\sum_{\substack{I_i \subseteq B_i \subseteq N_i \\ (k<i \leqslant l)}} W_{t_1,\cdots,t_k(B_{k+1},\cdots,B_l,I_{l+1},\cdots,I_m)}。 \tag{7}$$

用 $F(N_i)$ 表示 N_i 的幂集$(k<i \leqslant l)$,不难求得偏序集$(F(N_i), \subseteq)(k<i \leqslant l)$ 的直积 $\left(\prod_{i=k+1}^{l} F(N_i), \subseteq\right)$ 的关联代数中的 Möbius 函数为:$\mu_{((I_{k+1},\cdots,I_l),(B_{k+1},\cdots,B_l))}=\begin{cases}(-1)^{\sum_{i=k+1}^{l}(|B_i|-|I_i|)}, & 若\ I_i \subseteq B_i \subseteq N_i(k<i \leqslant l), \\ 0, & 其他。\end{cases}$

从而对式(7)应用偏序集$\left(\prod_{i=k+1}^{l}F(N_i),\subseteq\right)$上的Möbius-Rota反演原理,即得式(5)。证毕。

特别地,在上述证明过程中令$k=0$,$l=m$而得的特殊情形是文[6]中定理1的又一种简洁新证明。

定理2

$$W(A_{r_1,\cdots,r_k(I_{k+1},\cdots,I_m)})=\sum_{\substack{r_i\leqslant t_i\leqslant n_i\\(1\leqslant i\leqslant k)}}\prod_{i=1}^{k}\left[\binom{t_i-1}{t_i}+(-1)^{t_i-r_i}\binom{t_i-1}{r_i-1}\right]W_{t_1,\cdots,t_k(I_{k+1},\cdots,I_m)},\tag{8}$$

其中规定$\binom{x}{0}=1$,x为任意整数;$\binom{-1}{x}=(-1)^x$,$x>0$;$\binom{-1}{-1}=0$;$\binom{y}{x}=0$,$0\leqslant y<x$;$\binom{y}{x}=0$,$y\geqslant0>x$。

证明　设$s_1,\cdots,s_k$为非负整数,且$s_i\leqslant n_i(1\leqslant i\leqslant k)$,则易知有

$$A_{s_1,\cdots,s_k(I_{k+1},\cdots,I_m)}=\bigcup_{\substack{s_j\leqslant r_j\leqslant n_j\\(1\leqslant j\leqslant k)}}A_{(r_1,\cdots,r_k,I_{k+1},\cdots,I_m)}$$

以及

$$W(A_{s_1,\cdots,s_k(I_{k+1},\cdots,I_m)})=\sum_{\substack{s_j\leqslant r_j\leqslant n_j\\(1\leqslant j\leqslant k)}}A_{(r_1,\cdots,r_k,I_{k+1},\cdots,I_m)}。\tag{9}$$

对任意$a\in A_{(r_1,\cdots,r_k,I_{k+1},\cdots,I_m)}$,不难求得$w(a)$在$W_{s_1,\cdots,s_k(I_{k+1},\cdots,I_m)}$中恰好被重复计算$\prod_{j=1}^{k}\binom{r_j}{s_j}$次,从而根据式(3)给出的$W_{r_1,\cdots,r_k(I_{k+1},\cdots,I_m)}$的定义,易得如下等式:

$$W_{s_1,\cdots,s_k(I_{k+1},\cdots,I_m)}=\sum_{\substack{s_j\leqslant r_j\leqslant n_j\\(1\leqslant j\leqslant k)}}\prod_{j=1}^{k}\binom{r_j}{s_j}W(A_{(r_1,\cdots,r_k,I_{k+1},\cdots,I_m)})。\tag{10}$$

对式(10)应用自然数集的k重直积偏序集上的Möbius-Rota反演原理,即得

$$W(A_{(r_1,\cdots,r_k,I_{k+1},\cdots,I_m)})=\sum_{\substack{r_j\leqslant t_j\leqslant n_j\\(1\leqslant j\leqslant k)}}(-1)^{\sum_{j=1}^{k}(t_j-r_j)}\prod_{j=1}^{k}\binom{t_j}{r_j}W_{t_1,\cdots,t_k(I_{k+1},\cdots,I_m)}。\tag{11}$$

然后将式(11)代入式(9),并交换变量的求和顺序后可得:

$$W(A_{s_1,\cdots,s_k(I_{k+1},\cdots,I_m)})=\sum_{\substack{s_j\leqslant t_j\leqslant n_j\\(1\leqslant j\leqslant k)}}\sum_{\substack{s_j\leqslant r_j\leqslant t_j\\(1\leqslant j\leqslant k)}}(-1)^{\sum_{j=1}^{k}(t_j-r_j)}\prod_{j=1}^{k}\binom{t_j}{r_j}W_{t_1,\cdots,t_k(I_{k+1},\cdots,I_m)}。\tag{12}$$

又根据数学归纳法,不难证明有如下的组合恒等式:

$$\sum_{\substack{s_j\leqslant r_j\leqslant t_j\\(1\leqslant j\leqslant k)}}(-1)^{\sum_{j=1}^{k}(t_j-r_j)}\prod_{j=1}^{k}\binom{t_j}{r_j}=\prod_{j=1}^{k}\left[\binom{t_j-1}{t_j}+(-1)^{t_j-s_j}\binom{t_j-1}{s_j-1}\right],\tag{13}$$

其中规定$\binom{x}{0}=1$,x为任意整数;$\binom{-1}{x}=(-1)^x$,$x>0$;$\binom{-1}{-1}=0$;$\binom{y}{x}=0$,$0\leqslant y<x$;$\binom{y}{x}=0$,$y\geqslant0>x$。

于是将式(13)代入式(12),即得

$$W(A_{s_1,\cdots,s_k(I_{k+1},\cdots,I_m)})=\sum_{\substack{s_j\leqslant t_j\leqslant n_j\\(1\leqslant j\leqslant k)}}\prod_{j=1}^{k}\left[\binom{t_j-1}{t_j}+(-1)^{t_j-s_j}\binom{t_j-1}{s_j-1}\right]W_{t_1,\cdots,t_k(I_{k+1},\cdots,I_m)}。\tag{14}$$

在式(14)中,令$s_i=r_i(1\leqslant i\leqslant k)$,即得

$$W(A_{r_1,\cdots,r_k(I_{k+1},\cdots,I_m)})=\sum_{\substack{r_i\leqslant t_i\leqslant n_i\\(1\leqslant i\leqslant k)}}\prod_{i=1}^{k}\left[\binom{t_i-1}{t_i}+(-1)^{t_i-r_i}\binom{t_i-1}{r_i-1}\right]W_{t_1,\cdots,t_k(I_{k+1},\cdots,I_m)}。$$

也即式(8)成立。证毕。

于是将式(5)代入式(8),即得下面的广义容斥原理。

定理3　设k,l为非负整数,且$k\leqslant l\leqslant m$,则有

$$W(A_{r_1,\cdots,r_k(I_{k+1},\cdots,I_m)})=$$

$$\sum_{\substack{r_i\leqslant t_i\leqslant n_i,I_j\subseteq B_j\subseteq N_j\\(1\leqslant i\leqslant k,k+1\leqslant j\leqslant l)}}(-1)^{\sum_{j=k+1}^{l}(|B_j|-|I_j|)}\prod_{i=1}^{k}\left[\binom{t_i-1}{t_i}+(-1)^{t_i-r_i}\binom{t_i-1}{r_i-1}\right]W_{t_1,\cdots,t_k,B_{k+1},\cdots,B_l(I_{l+1},\cdots,I_m)},\tag{15}$$

当 $l=m$ 时,此即为

$$W(A_{r_1,\cdots,r_k(I_{k+1},\cdots,I_m)})=\sum_{\substack{r_i\leqslant t_i\leqslant n_i,I_j\subseteq B_j\subseteq N_j\\(1\leqslant i\leqslant k,k+1\leqslant j\leqslant m)}}(-1)^{\sum_{j=k+1}^{m}(|B_j|-|I_j|)}\prod_{i=1}^{k}\left[\binom{t_i-1}{t_i}+(-1)^{t_i-r_i}\binom{t_i-1}{r_i-1}\right]W_{t_1,\cdots,t_k,B_{k+1},\cdots,B_m},\tag{16}$$

其中规定 $\binom{x}{0}=1$, x 为任意整数; $\binom{-1}{x}=(-1)^x$, $x>0$; $\binom{-1}{-1}=0$; $\binom{y}{x}=0$, $0\leqslant y<x$; $\binom{y}{x}=0$, $y\geqslant0>x$。

推论 1　若 $0<r_j\leqslant n_j(1\leqslant j\leqslant k)$,则有

$$W(A_{r_1,\cdots,r_k(I_{k+1},\cdots,I_m)})=\sum_{\substack{r_i\leqslant t_i\leqslant n_i,I_j\subseteq B_j\subseteq N_j\\(1\leqslant i\leqslant k,k+1\leqslant j\leqslant m)}}(-1)^{\sum_{j=k+1}^{m}(|B_j|-|I_j|)}(-1)^{\sum_{i=1}^{k}(t_i-r_i)}\prod_{i=1}^{k}\binom{t_i-1}{r_i-1}W_{t_1,\cdots,t_k,B_{k+1},\cdots,B_m}。\tag{17}$$

3 应用

在式(16)中,对任意 $a\in A$, 令 $w(a)=1$(其中 1 为正整数)就得到集合 $A_{r_1,\cdots,r_k(I_{k+1},\cdots,I_m)}$ 的元素个数的计数公式,它是研究组合计数问题的一个新的有力工具,现在应用它来解决一些组合计数问题。

问题 Ⅰ　已知 s 是正整数,重集 $B=\{s\cdot a_{11},s\cdot a_{12},\cdots,s\cdot a_{1n_1},\cdots,s\cdot a_{m1},s\cdot a_{m2},\cdots,s\cdot a_{mn_m}\}$。(即集合 B 中有 $\sum_{j=1}^{m}n_j=n$ 种不同的元素 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n_1},\cdots,a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn_m}$,且 a_{ij} 有 s 个($i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n_i$)。)求重集 B 上使得$\{a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in_i}\}$中有 r_i 种相同元素是不相邻的($1\leqslant i\leqslant k$),而$\{a_{j1},a_{j2},\cdots,a_{jn_j}\}$中恰有指定的 r_j 种相同元素是不相邻的($k+1\leqslant j\leqslant m$)可重全排列的个数。

设 A 表示重集 B 上的所有可重全排列的集合,对任意 $C\subseteq A$,令 $U(C)$ 表示集合 C 中元素的个数。设 $t_1,\cdots,t_m$ 为非负整数,设 $A_{I_{t_1},\cdots,I_{t_m}}$ 表示 A 中使得$\{a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in_i}\}$中有指定的 t_i 种相同元素是不相邻的($1\leqslant i\leqslant m$)那些可重全排列组成的集合; 设 $A_{r_1,\cdots,r_k(I_{r_{k+1}},\cdots,I_{r_m})}$ 表示 A 中使得$\{a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in_i}\}$中有 r_i 种相同元素是不相邻的($1\leqslant i\leqslant k$),而$\{a_{j1},a_{j2},\cdots,a_{jn_j}\}$中恰有指定的 r_j 种相同元素是不相邻的($k+1\leqslant j\leqslant m$)那些可重全排列的集合。根据式(1)和二项式反演公式,不难求得

$$U_{t_1,\cdots,t_k,I_{t_{k+1}},\cdots,I_{t_m}}=\sum_{\substack{1\leqslant h_{il}\leqslant s\\(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant l\leqslant t_i)}}\prod_{j=1}^{k}\binom{n_j}{t_j}\prod_{i=1}^{m}\prod_{l=1}^{t_i}(-1)^{s-h_{il}}\binom{s-1}{h_{il}-1}\frac{\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{t_i}h_{il}+s\sum_{i=1}^{m}(n_i-t_i)\right]!}{\prod_{i=1}^{m}\prod_{l=1}^{t_i}h_{il}!\ \prod_{i=1}^{m}s!^{n_i-t_i}},$$

其中若 $t_m=0$,规定:

$$U_{t_1,\cdots,t_k,I_{t_{k+1}},\cdots,I_{t_m}}=\sum_{\substack{1\leqslant h_{il}\leqslant s\\(1\leqslant i\leqslant m-1,1\leqslant l\leqslant t_i)}}\prod_{j=1}^{k}\binom{n_j}{t_j}\prod_{i=1}^{m-1}\prod_{l=1}^{t_i}(-1)^{s-h_{il}}\binom{s-1}{h_{il}-1}\frac{\left[\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{t_i}h_{il}+s\sum_{i=1}^{m}(n_i-t_i)\right]!}{\prod_{i=1}^{m-1}\prod_{l=1}^{t_i}h_{il}!\ \prod_{i=1}^{m}s!^{n_i-t_i}};$$

若 $t_k=0$,规定:

$$U_{t_1,\cdots,t_k,I_{t_{k+1}},\cdots,I_{t_m}}=\sum_{\substack{1\leqslant h_{il}\leqslant s\\(1\leqslant i\leqslant m,i\neq k,1\leqslant l\leqslant t_i)}}\prod_{j=1}^{k}\binom{n_j}{t_j}\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{m}\prod_{l=1}^{t_i}(-1)^{s-h_{il}}\binom{s-1}{h_{il}-1}\frac{\left[\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{m}\sum_{l=1}^{t_i}h_{il}+s\sum_{i=1}^{m}(n_i-t_i)\right]!}{\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{m}\prod_{l=1}^{t_i}h_{il}!\ \prod_{i=1}^{m}s!^{n_i-t_i}};$$

对其它 $t_i=0$,作同样处理; 特别当 $t_1=\cdots=t_m=0$ 时, $U_{t_1,\cdots,t_k,I_{t_{k+1}},\cdots,I_{t_m}}=\dfrac{(s\cdot\sum_{i=1}^{m}n_i)!}{\prod_{i=1}^{m}s!^{n_i}}$。

再应用式(16),即得:

定理 4

$$U(A_{r_1,\cdots,r_k(I_{r_{k+1}},\cdots,I_{r_m})})=\sum_{\substack{r_i\leqslant t_i\leqslant n_i\\(1\leqslant i\leqslant m)}}(-1)^{\sum_{i=k+1}^{m}(t_i-r_i)}\prod_{i=1}^{k}\left[\binom{t_i-1}{t_i}+(-1)^{t_i-r_i}\binom{t_i-1}{r_i-1}\right]\prod_{j=1}^{k}\binom{n_j}{t_j}\prod_{j=k+1}^{m}\binom{n_j-r_j}{t_j-r_j}\cdot$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant h_{il}\leqslant s\\(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant l\leqslant t_i)}}\prod_{i=1}^{m}\prod_{l=1}^{t_i}(-1)^{s-h_{il}}\binom{s-1}{h_{il}-1}\frac{\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{t_i}h_{il}+s\sum_{i=1}^{m}(n_i-t_i)\right]!}{\prod_{i=1}^{m}\prod_{l=1}^{t_i}h_{il}!\ \prod_{i=1}^{m}s!^{n_i-t_i}}。\tag{18}$$

推论 2 若 $0<r_j\leqslant n_j(1\leqslant j\leqslant k)$,则有

$$U(A_{r_1,\cdots,r_k(I_{r_{k+1}},\cdots,I_{r_m})})=\sum_{\substack{r_i\leqslant t_i\leqslant n_i\\(1\leqslant i\leqslant m)}}(-1)^{\sum_{i=1}^{m}(t_i-r_i)}\prod_{i=1}^{k}\left[\binom{t_i-1}{r_i-1}\binom{n_i}{t_i}\right]\prod_{j=k+1}^{m}\binom{n_j-r_j}{t_j-r_j}\cdot$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant h_{il}\leqslant s\\(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant l\leqslant t_i)}}\prod_{i=1}^{m}\prod_{l=1}^{t_i}(-1)^{s-h_{il}}\binom{s-1}{h_{il}-1}\frac{\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{t_i}h_{il}+s\sum_{i=1}^{m}(n_i-t_i)\right]!}{\prod_{i=1}^{m}\prod_{l=1}^{t_i}h_{il}!\ \prod_{i=1}^{m}s!^{n_i-t_i}}。\tag{19}$$

问题 Ⅱ 已知 m,n,s 为正整数,设集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_s\}$,$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$,且 $B=\bigcup_{i=1}^{m}B_i$,其中 $B_i\cap B_j=\varnothing,i\neq j(1\leqslant i,j\leqslant m)$,$|B_i|=n_i(1\leqslant i\leqslant m)$。设 f 为 A 到 B 的映射,且使得 B_j 中有 r_j 个元素 b_h 满足 $|f^{-1}(b_h)|=l_j(1\leqslant j\leqslant k)$,而 B_i 中恰好有指定的 r_i 个元素 b_h 满足 $|f^{-1}(b_h)|=l_i(1+k\leqslant i\leqslant m)$,求这样的映射 f 的个数。

以 C 表示 A 到 B 的所有映射组成的集合,对任意 $D\subseteq C$,令 $Q(D)$ 表示集合 D 中元素的个数。设 $t_1,\cdots,t_m$ 为非负整数,设 $C_{I_{t_1},\cdots,I_{t_m}}$ 表示 C 中使得 B_i 中有指定的 t_i 个元素 b_h 满足 $|f^{-1}(b_h)|=l_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 的那些映射组成的集合;设 $C_{r_1,\cdots,r_k(I_{r_{k+1}},\cdots,I_{r_m})}$ 表示 C 中使得 B_j 中有 r_j 个元素 b_h 满足 $|f^{-1}(b_h)|=l_j(1\leqslant j\leqslant k)$,而 B_i 中恰好有指定的 r_i 个元素 b_h 满足 $|f^{-1}(b_h)|=l_i(1+k\leqslant i\leqslant m)$ 的那些映射组成的集合。根据式(1),易求得

$$Q_{t_1,\cdots,t_k,I_{t_{k+1}},\cdots,I_{t_m}}=\frac{s!\ \left(\sum_{i=1}^{m}(n_i-t_i)\right)^{s-\sum_{i=1}^{m}l_it_i}}{(s-\sum_{i=1}^{m}l_it_i)!\ \prod_{i=1}^{m}l_i!^{t_i}}\prod_{j=1}^{k}\binom{n_j}{t_j}。$$

再应用式(16),即得:

定理 5

$$Q(C_{r_1,\cdots,r_k(I_{r_{k+1}},\cdots,I_{r_m})})=$$

$$\sum_{\substack{r_i\leqslant t_i\leqslant n_i\\(1\leqslant i\leqslant m)}}(-1)^{\sum_{i=k+1}^{m}(t_i-r_i)}\prod_{i=1}^{k}\left[\binom{t_i-1}{t_i}+(-1)^{t_i-r_i}\binom{t_i-1}{r_i-1}\right]\prod_{j=1}^{k}\binom{n_j}{t_j}\prod_{j=k+1}^{m}\binom{n_j-r_j}{t_j-r_j}\frac{s!\ \left(\sum_{i=1}^{m}(n_i-t_i)\right)^{s-\sum_{i=1}^{m}l_it_i}}{(s-\sum_{i=1}^{m}l_it_i)!\ \prod_{i=1}^{m}l_i!^{t_i}}。\tag{20}$$

推论 3 若 $0<r_j\leqslant n_j(1\leqslant j\leqslant k)$,则有

$$Q(C_{r_1,\cdots,r_k(I_{r_{k+1}},\cdots,I_{r_m})})=\sum_{\substack{r_i\leqslant t_i\leqslant n_i\\(1\leqslant i\leqslant m)}}(-1)^{\sum_{i=1}^{m}(t_i-r_i)}\prod_{i=1}^{k}\left[\binom{t_i-1}{r_i-1}\binom{n_i}{t_i}\right]\prod_{j=k+1}^{m}\binom{n_j-r_j}{t_j-r_j}\frac{s!\ \left(\sum_{i=1}^{m}(n_i-t_i)\right)^{s-\sum_{i=1}^{m}l_it_i}}{(s-\sum_{i=1}^{m}l_it_i)!\ \prod_{i=1}^{m}l_i!^{t_i}}。\tag{21}$$

问题 Ⅲ 已知 N,m 为正整数,$n_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 是正整数,以及 $\{p_{ij}|1\leqslant j\leqslant n_i\}(1\leqslant i\leqslant m)$ 为 m 组共 $n=\sum_{i=1}^{m}n_i$ 个不同的素数,求 $1,2,\cdots,N$ 中被 r_j 个第 j 组中的素数整除$(1\leqslant j\leqslant k)$,而又恰好被第 i 组中的素数 $p_{ij_1},p_{ij_2},\cdots,p_{ij_{r_i}}$ 整除$(1+k\leqslant i\leqslant m)$ 的整数的个数。

设 $A=\{1,2,\cdots,N\}$,对任意 $B\subseteq A$,令 $M(B)$ 表示集合 B 中元素的个数。设 $t_1,\cdots,t_m$ 为非负整数,设 $A_{p_{1j_1},p_{1j_2},\cdots,p_{1j_{t_1}},\cdots,p_{mj_1},p_{mj_2},\cdots,p_{mj_{t_m}}}$ 表示集合 A 中被第 i 组中的素数 $p_{ij_1},p_{ij_2},\cdots,p_{ij_{t_i}}$ 整除$(1\leqslant i\leqslant m)$ 的那些整数组成的集合,设 $A_{r_1,\cdots,r_k(p_{k+1j_1},p_{k+1j_2},\cdots,p_{k+1j_{r_1}},\cdots,p_{mj_1},p_{mj_2},\cdots,p_{mj_{r_m}})}$ 表示集合 A 中被 r_j 个第 j 组中的素数整除$(1\leqslant j\leqslant k)$,而又恰好被第 i 组中的素数 $p_{ij_1},p_{ij_2},\cdots,p_{ij_{r_i}}$ 整除$(1+k\leqslant i\leqslant m)$ 的那些整数组成的集合,根据式(1),不难求得[4]:

$$M_{t_1,\cdots,t_k,p_{k+1j_1},p_{k+1j_2},\cdots,p_{k+1j_{t_{k+1}}},\cdots,p_{mj_1},p_{mj_2},\cdots,p_{mj_{t_m}}}=\sum_{\substack{x_{ij}=0,1\\(1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant n_i)\\ \sum_{1\leqslant j\leqslant n_i}x_{ij}=t_i\\(1\leqslant i\leqslant k)}}\left[\frac{N}{\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n_i}p_{ij}^{x_{ij}}\prod_{s=k+1}^{m}\prod_{h=1}^{t_s}p_{sj_h}}\right],$$

其中 $[\alpha]$ 表示不大于实数 α 的最大整数。

再应用式(16) ,即得:

定理 6

$$M\left(A_{r_1,\cdots,r_k(p_{k+1j_1},p_{k+1j_2},\cdots,p_{k+1j_{r_{k+1}}},\cdots,p_{mj_1},p_{mj_2},\cdots,p_{mj_{r_m}})}\right) =$$

$$\sum_{\substack{r_i\leqslant t_i\leqslant n_i\\(1\leqslant i\leqslant m)}}(-1)^{\sum_{i=k+1}^{m}(t_i-r_i)}\prod_{i=1}^{k}\left[\binom{t_i-1}{t_i}+(-1)^{t_i-r_i}\binom{t_i-1}{r_i-1}\right]\sum_{\substack{x_{ij}=0,1\\(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n_i)\\ \sum_{1\leqslant j\leqslant n_i}x_{ij}=t_i\\(1\leqslant i\leqslant k)\\ \sum_{\substack{1\leqslant h\leqslant n_s\\h\neq j_1,j_2,\cdots,j_{r_s}}}x_{sh}=t_s-r_s\\(k+1\leqslant s\leqslant m)}}\left[\frac{N}{\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n_i}p_{ij}^{x_{ij}}\prod_{s=k+1}^{m}\prod_{\substack{h=1\\h\neq j_1,j_2,\cdots,j_{r_s}}}^{n_s}p_{sh}^{x_{sh}}\prod_{l=k+1}^{m}\prod_{h=1}^{r_l}p_{lj_h}}\right]。\tag{22}$$

推论 4　若 $0<r_j\leqslant n_j(1\leqslant j\leqslant k)$,则有

$$M\left(A_{r_1,\cdots,r_k(p_{k+1j_1},p_{k+1j_2},\cdots,p_{k+1j_{r_{k+1}}},\cdots,p_{mj_1},p_{mj_2},\cdots,p_{mj_{r_m}})}\right) =$$

$$\sum_{\substack{r_i\leqslant t_i\leqslant n_i\\(1\leqslant i\leqslant m)}}(-1)^{\sum_{i=1}^{m}(t_i-r_i)}\prod_{i=1}^{k}\binom{t_i-1}{r_i-1}\sum_{\substack{x_{ij}=0,1\\(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n_i)\\ \sum_{1\leqslant j\leqslant n_i}x_{ij}=t_i\\(1\leqslant i\leqslant k)\\ \sum_{\substack{1\leqslant h\leqslant n_s\\h\neq j_1,j_2,\cdots,j_{r_s}}}x_{sh}=t_s-r_s\\(k+1\leqslant s\leqslant m)}}\left[\frac{N}{\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n_i}p_{ij}^{x_{ij}}\prod_{s=k+1}^{m}\prod_{\substack{h=1\\h\neq j_1,j_2,\cdots,j_{r_s}}}^{n_s}p_{sh}^{x_{sh}}\prod_{l=k+1}^{m}\prod_{h=1}^{r_l}p_{lj_h}}\right]。\tag{23}$$

参考文献:

[1] 魏万迪. 广容斥原理及其应用 [J]. 科学通报,1980,25(7) : 296-299.

[2] 万宏辉. 容斥原理的拓广及其应用 [J]. 科学通报,1984,29(16) : 972-975.

[3] BENDER E A, GOLDMAN J R. Möbius inversion in combinatorial analysis [J]. Amer Math Monthly, 1975(82) : 789-802.

[4] 唐善刚. 容斥原理的拓展及其应用 [J]. 山东大学学报: 理学版,2010,45(12) : 12-15.

[5] 唐善刚. 广义容斥原理及其应用 [J]. 山东大学学报: 理学版,2009,44(1) : 83-90.

[6] 唐善刚. 广义容斥原理的应用 [J]. 佳木斯大学学报: 自然科学版,2010,28(4) : 573-575.

[7] 柯召,魏万迪. 组合论: 上册 [M]. 北京: 科学出版社,1981.

[8] 李乔. 组合数学基础 [M]. 北京: 高等教育出版社,1993.

[9] 曹汝成. 组合数学 [M]. 广州: 华南理工大学出版社,2004.

(编辑: 李晓红)

(上接第 69 页)

[2] HU Qingping, ISEKI K. On BCI-algebra satisfging (x* y) * z = x* (y* z) [J]. Math Seminer Notes Kobe Univ, 1980, 8: 553-555.

[3] LEI Tiande, XI Changchang. p-Radical in BCI-algebras [J]. Math Japonica, 1985, 30(4) : 511-517.

[4] XI Changchang. On a class of BCI-algebras [J]. Math Japonica, 1990, 35(1) : 13-17.

[5] JUN Y B, HONG S M, ROH E H. BCI-semigroups [J]. Honam Mathematical J, 1993, 15(1) : 59-64.

[6] JUN Y B, XIN X L, RON E H. A Class of algebras related to BCI-algebras and semigroups [J]. Soochow Journal of Mathematics, 1998, 24(4) : 309-321.

[7] 杨闻起. 可生成环与半环的 IS-代数 [J]. 兰州大学学报: 自然科学版, 2007,43(5) : 88-90.

[8] 陈培慈. 半环理论与语言和自动化 [M]. 南昌: 江西高校出版社, 1993.

(编辑: 夏天)