剩余类环上的轮换多项式的计数*

唐善刚

(西华师范大学 数学与信息学院, 四川 南充 637009)

摘　要：应用广义容斥原理与群作用于集合的等价类的计数方法等组合分析技巧研究剩余类环上的轮换多项式的组合计数问题, 得到了与之相应的若干显式计数公式与组合恒等式, 拓展了已有的研究结果.

关键词：广义容斥原理; Burnside引理; 等价类; 轮换多项式; 群作用于集合

DOI：10.13568/j.cnki.651094.2018.04.004

中图分类号：O157.1　**文献标识码**：A　**文章编号**：1000-2839(2018)04-0409-07

Enumerations of Rotation Polynomial on Residue Class Ring

TANG Shangang

(*School of Math and Information, China West Normal University, Nanchong Sichuan 637009, China*)

Abstract：Using generalized principle of inclusion-exclusion , enumerating methods of equivalence classes for action of group on set and other combinatorial analysis some enumerating problems of rotation polynomial are studied on residue class ring. Some explicit enumerating formulas and combinatorial identities are obtained for the rotation polynomial problems. These results generalize those existing ones in some literatures.

Key words：generalized principle of inclusion-exclusion; Burnside theorem; equivalence classes; rotation polynomial; action of group on set

容斥原理是组合数学的一个重要的计数方法[1−11], 文献[1-2,4-10]将经典的容斥原理拓广至赋权有限集上的广义容斥原理, 并用于解决更加复杂的组合计数问题, 获得了一系列组合计数问题的显式计数公式, 如限位排列的计数[1−3,12], Ménage问题的计数[4,9,10,13], 本文主要应用广义容斥原理与群作用于集合的等价类的计数方法研究模n 剩余类环上的轮换多项式的组合计数问题, 得到了模n剩余类环上的轮换多项式个数的若干显式计数公式与相应的组合恒等式. 对任意的有限集B, 约定$|B|$ 表示B中的元素的个数, 约定Z表示整数集, Z_0表示非负整数集.

0　有关概念及引理

定义1　已知n,s为正整数, Z_n表示模n剩余类环, 设$f(x_1,\cdots,x_s)$是Z_n上关于不定元$x_q(1\le q\le s)$的多项式, 且

$$f(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_s)=f(x_2,x_3\cdots,x_s,x_1).$$

则称$f(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_s)$是$Z_n$上关于不定元$x_q(1\le q\le s)$的轮换多项式.

定义2　设$M=\left\{c\prod\limits_{q=1}^{s}x_q^{\alpha_q}\,|c\in Z_n\,,\alpha_q\in Z_0,1\le q\le s\right\}$, R表示M上的单项式之间的一种二元关系, 且R被界定为如下的

$$c\prod_{q=1}^{s}x_q^{\alpha_q}\ R\ c'\prod_{q=1}^{s}x_q^{\beta_q}\Leftrightarrow c=c',\ \odot\alpha_1\cdots\alpha_s=\odot\beta_1\cdots\beta_s,$$

∗ 收稿日期: 2018-06-26

基金项目: 国家自然科学基金(11401480); 四川省教育厅自然科学重点项目(17ZA0383).

作者简介: 唐善刚(1978-), 男, 副教授,主要从事计数组合研究.

其中$\odot\alpha_1\cdots\alpha_s$表示由数字$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$组成的环形排列.

注1 R是M上的单项式间的等价关系, $\overline{c\prod\limits_{q=1}^{s}x_q^{\alpha_q}}=\left\{c\prod\limits_{q=1}^{s}x_q^{\beta_q}\in M\,|\odot\beta_1\cdots\beta_s=\odot\alpha_1\cdots\alpha_s\right\}$称为$c\prod\limits_{q=1}^{s}x_q^{\alpha_q}$关于$R$唯一确定的$M$的一个等价类.

根据Z_n上的轮换多项式的定义, 不难得到下面的引理1.

引理1 $f(x_1,\cdots,x_s)$是Z_n上的轮换多项式, $f(x_1,\cdots,x_s)$含有单项式$c\prod\limits_{q=1}^{s}x_q^{\alpha_q}$, 则$f(x_1,\cdots,x_s)$含有单项式$c\prod\limits_{q=1}^{s}x_q^{\beta_q}$, 其中$\odot\beta_1\cdots\beta_s=\odot\alpha_1\cdots\alpha_s$.

注2 当轮换多项式$f(x_1,\cdots,x_s)$含有单项式$c\prod\limits_{q=1}^{s}x_q^{\alpha_q}$时, 由引理1, $c\prod\limits_{q=1}^{s}x_q^{\alpha_q}$关于$R$所唯一确定的$M$的等价类$\overline{c\prod\limits_{q=1}^{s}x_q^{\alpha_q}}$中的每个单项式必为$f(x_1,\cdots,x_s)$的项, 据此, 称$\overline{c\prod\limits_{q=1}^{s}x_q^{\alpha_q}}$为轮换多项式$f(x_1,\cdots,x_s)$的同型项, c称之为轮换多项式$f(x_1,\cdots,x_s)$的同型项$\overline{c\prod\limits_{q=1}^{s}x_q^{\alpha_q}}$的系数.

引理2[5] 对于非负整数d,s,t, 且$s\le t$, 令

$$\sum_{r=s}^{t}(-1)^{d-r}\binom{d}{r}=\xi_{(s,t,d)}.$$

则有

$$\xi_{(s,t,d)}=(-1)^{d-t}\binom{d-1}{t}+(-1)^{d-s}\binom{d-1}{s-1},$$

其中约定: $\binom{-1}{-1}=0$; $\binom{x}{y}=0,\ y>x\ge 0$; $\binom{-1}{x}=(-1)^x,\ x\ge 0$; $\binom{x}{0}=1,\ x\ge 0$; $\binom{x}{y}=0,\ x\ge 0>y$.

1 计数问题

λ是非负整数, 整数$s>1$, 令$Z_n^*=Z_n-\{\bar{0}\}$, 这里$\bar{0}$为Z_n的加法零元. 非负整数$k\le m$, 将Z_n^*作一个m部划分$(m>0)$, 不妨设$Z_n^*=\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i$, 其中$|A_i|=n_i\ge 0(1\le i\le m)$, $\sum\limits_{i=1}^{m}n_i=n-1$. $r_i,r_i{'}$是非负整数, 且$r_i\le r_i{'}\le n_i(1\le i\le m)$, 提出如下$Z_n$上的轮换多项式的计数问题.

问题Ⅰ 求Z_n上的次数不超过λ的s元轮换多项式, 使得A_i中至少有r_i个元素, 但又至多有$r_i{'}$个元素为其系数$(1\le i\le m)$的那样的s元轮换多项式的个数.

问题Ⅱ 求Z_n上的次数等于λ的s元轮换多项式, 使得A_i中至少有r_i个元素, 但又至多有$r_i{'}$个元素为其系数$(1\le i\le m)$的那样的s元轮换多项式的个数.

设G^λ表示Z_n上的次数不大于λ的一切s元轮换多项式构成的集合, 对任意$C\subseteq G^\lambda$, 用$Q(C)$表示C中的元素的个数. 对于$y\in G^\lambda$, $v\in A_i$, 界定命题$P_{iv}(y)$为下面的

$$P_{iv}: v\text{是}y\text{的系数}.$$

对任意$v\in A_i$, 设

$$G_{iv}^\lambda=\left\{y\in G^\lambda\,|P_{iv}(y)\right\},\quad \overline{G}_{iv}^\lambda=\left\{y\in G^\lambda\,|y\notin G_{iv}^\lambda\right\}.$$

对任意$I_i\subseteq A_i$, 设

$$G_{I_i}^\lambda=\bigcap_{v\in I_i}G_{iv}^\lambda,\quad G_{(I_i)}^\lambda=\bigcap_{v\in A_i-I_i}\overline{G}_{iv}^\lambda\cap G_{I_i}^\lambda,$$

其中A_i-I_i表示集合A_i与I_i的差集, 且约定: $\bigcap\limits_{v\in\varnothing}G_{iv}^\lambda=G^\lambda$, $\bigcap\limits_{v\in\varnothing}\overline{G}_{iv}^\lambda=G^\lambda$.

设

$$G_{(r_i,r_i{'})}^\lambda=\bigcup_{\substack{I_i\subseteq A_i\\ r_i\le|I_i|\le r_i{'}}}G_{(I_i)}^\lambda.$$

当$l<k$时，约定

$$\bigcap_{i=k}^{l}G_{I_i}^{\lambda}=\bigcap_{i=k}^{l}G_{(I_i)}^{\lambda}=\bigcap_{i=k}^{l}G_{(r_i,r_i')}^{\lambda}=G^{\lambda}.$$

对任意的非负整数$t_i\le n_i(1\le i\le m)$，用式(1)的右边来定义$Q_{t_1,\cdots,t_m}$为

$$Q_{t_1,\cdots,t_m}=\sum_{\substack{I_i\subseteq A_i\\ |I_i|=t_i\\ 1\le i\le m}}Q(\bigcap_{i=1}^{m}G_{I_i}^{\lambda}).\tag{1}$$

2 $Q_{t_1,\cdots,t_m}$的显式计算公式

根据容斥原理的计数原理[1-2,4-10]，求$Q(\bigcap\limits_{i=1}^{m}G_{(r_i,r_i')}^{\lambda})$的计数公式，关键在于$Q_{t_1,\cdots,t_m}$的显式计算公式.

定理1 对任意的非负整数$t_i\le n_i(1\le i\le m)$，则有

$$Q_{t_1,\cdots,t_m}=\prod_{i=1}^{m}\binom{n_i}{t_i}\sum_{u=0}^{\sum_{i=1}^{m}t_i}(-1)^{\sum_{i=1}^{m}t_i-u}\binom{\sum_{i=1}^{m}t_i}{u}\left[(u+n-\sum_{i=1}^{m}t_i)^{\sum_{0<d|s}\frac{\varphi(d)}{s}\binom{\left[\frac{\lambda}{d}\right]+\frac{s}{d}}{\frac{s}{d}}}-1\right],\tag{2}$$

其中$\left[\frac{\lambda}{d}\right]$表示不大于$\frac{\lambda}{d}$的最大整数；$d|s$表示$d$整除$s$；$\gcd(i,d)$表示整数$i$与$d$的最大公约数，$\varphi(d)$是$d$的欧拉函数，即$\varphi(d)=\sum\limits_{\substack{1\le i\le d\\ \gcd(i,d)=1}}1$.

证明 设集合$X=\{1,2,\cdots,s\}$，对$\forall p\in Z$，定义X上的置换σ_p为

$$\forall q\in X,\ 有\sigma_p(q)=\mu_{p+q},$$

其中μ_{p+q}表示$p+q$除以s的最小正剩余数.

设$S^{\lambda}=\left\{\prod\limits_{q=1}^{s}x_q^{\alpha_q}|\alpha_q\in Z_0,\sum\limits_{q=1}^{s}\alpha_q\le\lambda\right\}$，$E^{\lambda}=\left\{\overline{\prod\limits_{q=1}^{s}x_q^{\alpha_q}}|\alpha_q\in Z_0,\sum\limits_{q=1}^{s}\alpha_q\le\lambda\right\}$，$G=\{\sigma_p|p\in Z\}$，则$G$为$s$阶循环群. 根据群作用于集合的定义[14]，$G$作用于$S^{\lambda}$被定义为：对任意$\sigma_p\in G$，对任意$\prod\limits_{q=1}^{s}x_q^{\alpha_q}\in S^{\lambda}$，有如下的

$$\sigma_p\cdot\prod_{q=1}^{s}x_q^{\alpha_q}=\prod_{q=1}^{s}x_{\mu_{p+q}}^{\alpha_q}.$$

从而对于定义2中的等价关系R，有

$$\prod_{q=1}^{s}x_q^{\alpha_q}\ R\ \prod_{q=1}^{s}x_q^{\beta_q}\Leftrightarrow\exists\sigma_p\in G,\ 使得\sigma_p\cdot\prod_{q=1}^{s}x_q^{\alpha_q}=\prod_{q=1}^{s}x_q^{\beta_q}.$$

于是根据群作用于集合的Burnside引理[14]，即有

$$|E^{\lambda}|=\frac{1}{s}\sum_{p=1}^{s}\Psi(\sigma_p),$$

其中$\Psi(\sigma_p)$表示在S^{λ}中使得$\prod\limits_{q=1}^{s}x_q^{\alpha_q}=\prod\limits_{q=1}^{s}x_{\mu_{p+q}}^{\alpha_q}$的$\prod\limits_{q=1}^{s}x_q^{\alpha_q}$的个数.

用$\gcd(p,s)$表示整数p与s的最大公约数，不妨设$\gcd(p,s)=d$，根据置换的轮换分解[14]，σ_p可唯一分解为d个两两不相交的$\frac{s}{d}$–轮换的乘积. 于是$\Psi(\sigma_p)$相当于求关于非负整数变量$y_j(1\le j\le d)$的不等式$\frac{s}{d}\sum\limits_{j=1}^{d}y_j\le\lambda$的解$(y_1,\cdots,y_d)$的个数，从而$\Psi(\sigma_p)=\binom{\left[\frac{d\lambda}{s}\right]+d}{d}$，又在模$s$的完全剩余系中与$s$的最大公约数为$d$的整数个数为$\varphi(\frac{s}{d})$，且$G$又为$s$阶循环群，进而得到

$$|E^{\lambda}|=\frac{1}{s}\sum_{0<d|s}\varphi(d)\binom{\left[\frac{\lambda}{d}\right]+\frac{s}{d}}{\frac{s}{d}},$$

其中$\left[\frac{\lambda}{d}\right]$表示不大于$\frac{\lambda}{d}$的最大整数; $d|s$表示d整除s; $\varphi(d)$是d的欧拉函数, 即$\varphi(d)=\sum\limits_{\substack{1\le i\le d\\ \gcd(i,d)=1}}1$.

(ⅰ) 从E^{λ}中选取τ个元素的组合的个数为$\binom{|E^{\lambda}|}{\tau}$, $\tau\ge 1$.

(ⅱ) 取定$I_i\subseteq A_i$且$|I_i|=t_i(1\le i\le m)$, 将E^{λ}中选定的τ个元素并赋予其在Z_n^*中的系数作为$\bigcap\limits_{i=1}^{m}G_{I_i}^{\lambda}$中的轮换多项式的同型项, 则这样的轮换多项式的个数相当于求指数型生成函数$(e^x-1)^{\sum_{i=1}^{m}t_i}e^{(n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i)x}$的泰勒展开式中$\frac{x^{\tau}}{\tau!}$的系数, 经计算展开式中$\frac{x^{\tau}}{\tau!}$的系数为

$$\sum_{u=0}^{\sum_{i=1}^{m}t_i}(-1)^{\sum_{i=1}^{m}t_i-u}\binom{\sum_{i=1}^{m}t_i}{u}\left(u+n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)^{\tau}.$$

(ⅲ) 对取定的$I_i\subseteq A_i$且$|I_i|=t_i(1\le i\le m)$, 根据(ⅰ)与(ⅱ)的相应结果, 以及乘法与加法计数原理, 即有

$$\begin{aligned}Q\left(\bigcap_{i=1}^{m}G_{I_i}^{\lambda}\right)&=\sum_{\tau=1}^{|E^{\lambda}|}\sum_{u=0}^{\sum_{i=1}^{m}t_i}(-1)^{\sum_{i=1}^{m}t_i-u}\binom{\sum_{i=1}^{m}t_i}{u}\binom{|E^{\lambda}|}{\tau}\left(u+n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)^{\tau}\\&=\sum_{u=0}^{\sum_{i=1}^{m}t_i}(-1)^{\sum_{i=1}^{m}t_i-u}\binom{\sum_{i=1}^{m}t_i}{u}\left[\left(u+n-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)^{\sum_{0<d|s}\frac{\varphi(d)}{s}\binom{\left[\frac{\lambda}{d}\right]+\frac{s}{d}}{\frac{s}{d}}}-1\right].\end{aligned}\tag{3}$$

注3 当$I_i=\varnothing(1\le i\le m)$, 即$t_i=0(1\le i\le m)$时, $\bigcap\limits_{i=1}^{m}G_{I_i}^{\lambda}=G^{\lambda}$, 式(3)仍然成立, 也即

$$Q(G^{\lambda})=n^{\sum_{0<d|s}\frac{\varphi(d)}{s}\binom{\left[\frac{\lambda}{d}\right]+\frac{s}{d}}{\frac{s}{d}}}-1.\tag{4}$$

将式(3)代入式(1), 化简即得

$$Q_{t_1,\cdots,t_m}=\prod_{i=1}^{m}\binom{n_i}{t_i}\sum_{u=0}^{\sum_{i=1}^{m}t_i}(-1)^{\sum_{i=1}^{m}t_i-u}\binom{\sum_{i=1}^{m}t_i}{u}\left[\left(u+n-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)^{\sum_{0<d|s}\frac{\varphi(d)}{s}\binom{\left[\frac{\lambda}{d}\right]+\frac{s}{d}}{\frac{s}{d}}}-1\right].$$

至此, 式(2)成立.

3 主要结果

定理2 整数$\lambda\ge 0$, Z_n上的次数不超过λ的s元轮换多项式使得A_i中至少有r_i个元素, 但又至多有$r_i{}'$个元素为其系数$(1\le i\le m)$的那样的s元轮换多项式的个数为

$$\sum_{\substack{0\le t_i\le n_i\\1\le i\le m}}\sum_{u=0}^{\sum_{i=1}^{m}t_i}(-1)^{\sum_{i=1}^{m}t_i-u}\binom{\sum_{i=1}^{m}t_i}{u}\prod_{i=1}^{m}\xi_{(r_i,r_i{}',t_i)}\prod_{i=1}^{m}\binom{n_i}{t_i}\left[\left(u+n-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)^{\sum_{0<d|s}\frac{\varphi(d)}{s}\binom{\left[\frac{\lambda}{d}\right]+\frac{s}{d}}{\frac{s}{d}}}-1\right].\tag{5}$$

证明 根据广义容斥原理[6], 则有

$$Q\left(\bigcap_{i=1}^{m}G_{(r_i,r_i{}')}^{\lambda}\right)=\sum_{\substack{0\le t_i\le n_i\\1\le i\le m}}\prod_{i=1}^{m}\xi_{(r_i,r_i{}',t_i)}Q_{t_1,\cdots,t_m}.\tag{6}$$

将式(2)代入式(6)即得式(5).

定理3　当整数$\lambda>0$时, Z_n上的次数等于λ的s元轮换多项式使得A_i中至少有r_i个元素, 但又至多有r_i'个元素为其系数$(1\le i\le m)$的那样的s元轮换多项式的个数为

$$\sum_{\substack{0\le t_i\le n_i\\1\le i\le m}}\sum_{u=0}^{\sum_{i=1}^{m}t_i}(-1)^{\sum_{i=1}^{m}t_i-u}\binom{\sum_{i=1}^{m}t_i}{u}\prod_{i=1}^{m}\xi_{(r_i,r_i',t_i)}\prod_{i=1}^{m}\binom{n_i}{t_i}\cdot \\ [(u+n-\sum_{i=1}^{m}t_i)^{\sum_{0<d|s}\frac{\varphi(d)}{s}\binom{[\frac{\lambda}{d}]+\frac{s}{d}}{\frac{s}{d}}}-(u+n-\sum_{i=1}^{m}t_i)^{\sum_{0<d|s}\frac{\varphi(d)}{s}\binom{[\frac{\lambda-1}{d}]+\frac{s}{d}}{\frac{s}{d}}}]. \tag{7}$$

证明　当整数$\lambda>0$时, Z_n上的次数等于λ的s元轮换多项式使得A_i中至少有r_i个元素, 但又至多有r_i'个元素为其系数$(1\le i\le m)$的那样的s元轮换多项式的个数为

$$Q(\bigcap_{i=1}^{m}G_{(r_i,r_i')}^{\lambda})-Q(\bigcap_{i=1}^{m}G_{(r_i,r_i')}^{\lambda-1}),$$

将式(5)代入上式，化简即得式(7).

在式(5)与(7)中令$r_i'=n_i(1\le i\le m)$, 即得

推论1　整数$\lambda\ge 0$, Z_n上的次数不超过λ的s元轮换多项式使得A_i中至少有r_i个元素$(1\le i\le m)$为其系数的那样的s元轮换多项式的个数为

$$\sum_{\substack{0\le t_i\le n_i\\1\le i\le m}}\sum_{u=0}^{\sum_{i=1}^{m}t_i}(-1)^{\sum_{i=1}^{m}t_i-u}\binom{\sum_{i=1}^{m}t_i}{u}\prod_{i=1}^{m}\xi_{(r_i,n_i,t_i)}\prod_{i=1}^{m}\binom{n_i}{t_i}[(u+n-\sum_{i=1}^{m}t_i)^{\sum_{0<d|s}\frac{\varphi(d)}{s}\binom{[\frac{\lambda}{d}]+\frac{s}{d}}{\frac{s}{d}}}-1]. \tag{8}$$

推论2　当整数$\lambda>0$时, Z_n上的次数等于λ的s元轮换多项式使得A_i中至少有r_i个元素$(1\le i\le m)$为其系数的那样的s元轮换多项式的个数为

$$\sum_{\substack{0\le t_i\le n_i\\1\le i\le m}}\sum_{u=0}^{\sum_{i=1}^{m}t_i}(-1)^{\sum_{i=1}^{m}t_i-u}\binom{\sum_{i=1}^{m}t_i}{u}\prod_{i=1}^{m}\xi_{(r_i,n_i,t_i)}\prod_{i=1}^{m}\binom{n_i}{t_i}\cdot \\ [(u+n-\sum_{i=1}^{m}t_i)^{\sum_{0<d|s}\frac{\varphi(d)}{s}\binom{[\frac{\lambda}{d}]+\frac{s}{d}}{\frac{s}{d}}}-(u+n-\sum_{i=1}^{m}t_i)^{\sum_{0<d|s}\frac{\varphi(d)}{s}\binom{[\frac{\lambda-1}{d}]+\frac{s}{d}}{\frac{s}{d}}}]. \tag{9}$$

在式(5)与(7)中$r_i'=r_i(1\le i\le m)$, 即得

推论3　整数$\lambda\ge 0$, Z_n上的次数不超过λ的s元轮换多项式使得A_i中恰好有r_i个元素$(1\le i\le m)$为其系数的那样的s元轮换多项式的个数为

$$\sum_{\substack{r_i\le t_i\le n_i\\1\le i\le m}}\sum_{u=0}^{\sum_{i=1}^{m}t_i}(-1)^{u+\sum_{i=1}^{m}r_i}\binom{\sum_{i=1}^{m}t_i}{u}\prod_{i=1}^{m}\binom{t_i}{r_i}\prod_{i=1}^{m}\binom{n_i}{t_i}[(u+n-\sum_{i=1}^{m}t_i)^{\sum_{0<d|s}\frac{\varphi(d)}{s}\binom{[\frac{\lambda}{d}]+\frac{s}{d}}{\frac{s}{d}}}-1]. \tag{10}$$

推论4　当整数$\lambda>0$时, Z_n上的次数等于λ的s元轮换多项式使得A_i中恰好有r_i个元素$(1\le i\le m)$为其系数的那样的s元轮换多项式的个数为

$$\sum_{\substack{r_i\le t_i\le n_i\\1\le i\le m}}\sum_{u=0}^{\sum_{i=1}^{m}t_i}(-1)^{u+\sum_{i=1}^{m}r_i}\binom{\sum_{i=1}^{m}t_i}{u}\prod_{i=1}^{m}\binom{t_i}{r_i}\prod_{i=1}^{m}\binom{n_i}{t_i}\cdot \\ [(u+n-\sum_{i=1}^{m}t_i)^{\sum_{0<d|s}\frac{\varphi(d)}{s}\binom{[\frac{\lambda}{d}]+\frac{s}{d}}{\frac{s}{d}}}-(u+n-\sum_{i=1}^{m}t_i)^{\sum_{0<d|s}\frac{\varphi(d)}{s}\binom{[\frac{\lambda-1}{d}]+\frac{s}{d}}{\frac{s}{d}}}]. \tag{11}$$

在式(5)与(7)中$r_i=0(1\le i\le m)$, 即得

推论5 整数$\lambda\ge 0$, Z_n上的次数不超过λ的s元轮换多项式使得A_i中至多有r_i' 个元素$(1\le i\le m)$ 为其系数的那样的s元轮换多项式的个数为

$$\sum_{\substack{0\le t_i\le n_i\\1\le i\le m}}\sum_{u=0}^{\sum_{i=1}^m t_i}(-1)^{u+\sum_{i=1}^m r_i'}\binom{\sum_{i=1}^m t_i}{u}\prod_{i=1}^m\binom{t_i-1}{r_i'}\prod_{i=1}^m\binom{n_i}{t_i}[(u+n-\sum_{i=1}^m t_i)^{\sum_{0<d|s}\frac{\varphi(d)}{s}\binom{[\frac{\lambda}{d}]+\frac{s}{d}}{\frac{s}{d}}}-1]. \tag{12}$$

推论6 当整数$\lambda>0$时, Z_n上的次数等于λ的s元轮换多项式使得A_i中至多有r_i'个元素$(1\le i\le m)$ 为其系数的那样的s元轮换多项式的个数为

$$\sum_{\substack{0\le t_i\le n_i\\1\le i\le m}}\sum_{u=0}^{\sum_{i=1}^m t_i}(-1)^{u+\sum_{i=1}^m r_i'}\binom{\sum_{i=1}^m t_i}{u}\prod_{i=1}^m\binom{t_i-1}{r_i'}\prod_{i=1}^m\binom{n_i}{t_i}\cdot$$
$$[(u+n-\sum_{i=1}^m t_i)^{\sum_{0<d|s}\frac{\varphi(d)}{s}\binom{[\frac{\lambda}{d}]+\frac{s}{d}}{\frac{s}{d}}}-(u+n-\sum_{i=1}^m t_i)^{\sum_{0<d|s}\frac{\varphi(d)}{s}\binom{[\frac{\lambda-1}{d}]+\frac{s}{d}}{\frac{s}{d}}}]. \tag{13}$$

特别地, 当$r_i'=0(1\le i\le m)$时, 显然$Q(\bigcap_{i=1}^m G^{\lambda}_{(r_i,r_i')})=0$, 从而有如下的组合恒等式.

推论7

$$\sum_{\substack{0\le t_i\le n_i\\1\le i\le m}}\sum_{u=0}^{\sum_{i=1}^m t_i}(-1)^{u}\binom{\sum_{i=1}^m t_i}{u}\prod_{i=1}^m\binom{n_i}{t_i}[(u+n-\sum_{i=1}^m t_i)^{\sum_{0<d|s}\frac{\varphi(d)}{s}\binom{[\frac{\lambda}{d}]+\frac{s}{d}}{\frac{s}{d}}}-1]=0, \tag{14}$$

其中n_i为非负整数, 且$\sum_{i=1}^m n_i=n-1$, 整数$\lambda>0$, 整数$s>1$.

当式(14)中的$m=1$时, 有如下的组合恒等式.

推论8

$$\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{u=0}^{t}(-1)^u\binom{n-1}{t}\binom{t}{u}[(u+n-t)^{\sum_{0<d|s}\frac{\varphi(d)}{s}\binom{[\frac{\lambda}{d}]+\frac{s}{d}}{\frac{s}{d}}}-1]=0, \tag{15}$$

其中整数$n\ge 1$, 整数$\lambda>0$, 整数$s>1$.

特别地, 式(14)与(15)中的$\lambda=0$时, 有如下的组合恒等式.

推论9

$$\sum_{\substack{0\le t_i\le n_i\\1\le i\le m}}\sum_{u=0}^{\sum_{i=1}^m t_i}(-1)^{u}\binom{\sum_{i=1}^m t_i}{u}\prod_{i=1}^m\binom{n_i}{t_i}(u+n-1-\sum_{i=1}^m t_i)=0, \tag{16}$$

其中n_i为非负整数$(1\le i\le m)$, 且$\sum_{i=1}^m n_i=n-1$.

推论10

$$\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{u=0}^{t}(-1)^u\binom{n-1}{t}\binom{t}{u}(u+n-t-1)=0, \tag{17}$$

其中整数$n\ge 1$.

参考文献:

[1] 魏万迪. 广容斥原理及其应用[J]. 科学通报,1980, 25(7): 296-299.

[2] 万宏辉. 容斥原理的拓广及其应用[J]. 科学通报, 1984, 29(16): 972-975.

[3] Richard P. Stanley. Enumerative Combinatorics: Volume 1 [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[4] 唐善刚. 关于“容斥原理的拓广及其应用”的注记[J]. 山东大学学报(理学版), 2012, 47(10): 64-69.

[5] 唐善刚. 广义容斥原理及其应用[J]. 山东大学学报(理学版), 2009, 44(1): 83-90.
[6] 唐善刚. 容斥原理及在环形错排计数中的应用[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2018, 40(3): 405-414.
[7] 唐善刚. 容斥原理的拓展及其应用[J]. 山东大学学报(理学版), 2010, 45(12): 12-15.
[8] 唐善刚. 容斥原理的拓展及其应用(Ⅱ)[J]. 山东大学学报(理学版), 2011, 46(12): 70-75.
[9] 曹汝成. 广义容斥原理及其应用[J]. 数学研究与评论, 1988, 8(4): 526-530.
[10] 唐善刚. 赋权有限集上的容斥原理及应用[J]. 浙江大学学报(理学版), 2014, 41(2): 123-126.
[11] BENDER E A, GOLDMAN J R. On the applications of Mobius inversion in combinatorial analysis[J]. Amer Math Monthly, 1975, 82(8): 789-803.
[12] 唐善刚. 一类限位排列的计数[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2018, 57(2): 80-86.
[13] 唐善刚. Kaplansky计数命题的拓广及应用[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2017, 38(6): 892-897.
[14] 韩士安, 林磊. 近世代数[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

责任编辑：赵新科

(上接第408页)

[45] Nield J M, McKenna Neuman C, OBrien P, *et al.* Evaporative sodium salt crust development and its wind tunnel derived transport dynamics under variable climatic conditions[J]. Aeolian Research, 2016, 23(10): 51-62.
[46] OBrien P, Mckenna Neuman C. A wind tunnel study of particle kinematics during crust rupture and erosion[J]. Geomorphology, 2012, 173-174: 149-160.
[47] Buck B J, King J, Etyemezian V. Effects of Salt Mineralogy on Dust Emissions, Salton Sea, California[J]. Soil Science Society of America, 2011, 75: 1958-1972.
[48] Nield J M, Wiggs Giles F S, King J, *et al.* Climate-surface-pore-water interactions on a salt crusted playa: Implications for crust pattern and surface roughness development measured using terrestrial laser scanning[J]. Earth Surface Processes and Landforms, 2016, 41(6): 738-753.
[49] Chen X Y. Evaporation from a salt-encrusted sediment surface: field and laboratory studies[J]. Soil Physics and Hydrology, 1992, 30: 429-42.
[50] Kampfa Stephanie K, Tylerb Scott W, Ortiz Cristian A. Evaporation and land surface energy budget at the Salar de Atacama, Northern Chile[J]. Journal of Hydrology, 2005, 310: 236-252.
[51] Weisbrod N, Dragila M I. Potential impact of convective fracture venting on salt-crust buildup and ground-water salinization in arid environments[J]. Journal of Arid Environments, 2006, 65: 386-399.
[52] Weisbrod N, Nativh R, Adar K M, *et al.* Salt Accumulation and Flushing in Unsaturated Fractures in an Arid Environment[J].Ground Water, 2000, 38(3): 452-461.
[53] 李诚志, 刘志辉. 塔里木河下游土壤风蚀期0-15cm层土壤含水率分布规律研究[J]. 地理科学, 2012, 34(4): 511-515.
[54] 王大环. 风沙土盐结皮性能研究[D]. 乌鲁木齐：新疆大学, 2018.
[55] 李滔鹈. 几种常见盐分组合对风沙土胶结强度的影响研究[D]. 乌鲁木齐：新疆大学, 2018.
[56] Schulz M, Prospero J M, Baker A R. Atmospheric transport and deposition of mineral dust to the ocean: implications for research needs[J]. Environmental Science & Technology, 2012, 46(19): 10390-10404.
[57] Tegen I, Fung I. Modeling of mineral dust in the atmosphere: Sources, transport, and optical thickness[J]. Journal of Geophysical Research Atmospheres, 1994, 99(D11): 22897-22914.
[58] Rice M A, McEwan I K. Crust strength: a wind tunnel study of the effect of impact by saltating particles on cohesive soil surfaces[J]. Earth Surface Processes and Landforms, 2001, 26: 721-733.
[59] Fryrear D W. Mechanics measurement and modeling of wind erosion[J]. Advances in GeoEcology, 1998, 31: 291-300.

责任编辑：赵新科