大连理工大学

博士学位论文

偏序集上的组合学中的几个问题

姓名：李玉双

申请学位级别：博士

专业：计算数学

指导教师：王军;冯红

20070401

摘　要

论文主要研究 Dyck 路偏序集的 Möbius 函数和着色布尔格的交性质.

本文第一部分研究 Dyck 路偏序集的 Möbius 函数计算及其应用. Dyck 路偏序集的序关系为模式包含 (pattern containment) 关系. 论文首先给出 Dyck 路的序列表示 —Dyck 序列, 从中可以看到 Dyck 路偏序集是 Sagan 和 Vatter 定义的扩展子字序的特殊情况, 但包含他们重点研究的整数有序分拆偏序集作为特例. 根据这个观察可直接推出 Dyck 路偏序集的 Möbius 函数. 采用结构分解的办法建立秩函数的 Möbius 反演公式, 得到偏序集秩函数的另一种表达. 最后证明其中一类子偏序集具有秩单峰性和 Sperner 性质.

本文第二部分研究偏序集的交性质. 首先定义一个一般性的概念 — 着色布尔格, 它是普通的布尔格的一种推广, 并且包含 Bollobás 和 Leader 定义的 q- 符号集合 (文中称为全着色集) 偏序集以及 Ku 和 Leader 定义的部分置换 (文中称为单着色集) 偏序集作为特例. 本文建立单着色布尔格的交反链的一个 LYM- 型不等式, 由该不等式可立即推出 Ku 和 Leader 给出的 k- 部分置换交族的 EKR 定理, 并证明他们提出的关于 k- 部分置换交族极值结构的唯一性的猜想; 给出着色布尔格的又一个特例 — 无不动点着色布尔格, 证明它具有 EKR 性质, 交族极值结构的唯一性以及交反链的一个 LYM- 型不等式; 建立着色直积的交性质的一个一般性定理. 最后给出置换 (单着色 n- 集) 的交性质的 Katona- 型证明.

关键词: Dyck 路偏序集; 着色布尔格; Möbius 函数; Erdös-Ko-Rado (EKR) 定理; 唯一性; LYM- 型不等式

Several Problems in Combinatorics of Posets

Abstract

This thesis investigates the Möbius function of Dyck path posets and the intersecting property of colored boolean lattices.

The first part of this thesis contributes to the computation and applications of the Möbius function of Dyck path posets. The Dyck path poset is ordered by pattern containment. A sequence representation of Dyck paths is presented, which shows that the Dyck path poset is a special case of the generalized subword order defined by Sagan and Vatter, but contains the composition poset as a subposet, to which Sagan and Vatter paid more attention. From this it follows the Möbius function of the poset and the Möbius inverse of the rank function, which derives another expression of the rank function. In the end, a kind of Sperner and unimodal subposet is given.

The second part of this thesis researches the intersecting property of posets. The authors first introduce a general concept—the colored boolean lattice, which is an extension of the normal boolean lattice, and includes the poset of q-signed sets introduced by Bollobás and Leader (called full colored boolean lattice in the thesis) and the poset of partial permutations introduced by Ku and Leader (called injective colored boolean lattice in the thesis). The authors establish an LYM-type inequality for the injective colored boolean lattice, which deduces the EKR theorem for k-partial permutations given by Ku and Leader immediately, and solve their conjecture on the structure of maximal intersecting families; the thesis gives another example of colored boolean lattice—fixed-point free colored boolean lattice, proves its EKR property, the uniqueness of its maximal intersecting families and an LYM-type inequality of its intersecting antichains; the direct product of colorings (as sets) is also discussed. At last, the authors give a Katona-type proof for intersecting permutations.

Keywords: Dyck path poset; colored boolean lattice; Möbius function; Erdös-Ko-Rado (EKR) theorem ; uniqueness; LYM-type inequality

独创性说明

作者郑重声明：本博士学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得研究成果．尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写的研究成果，也不包含为获得大连理工大学或者其他单位的学位或证书所使用过的材料．与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意．

作者签名： _______ **日期：** 2007.6.08

大连理工大学学位论文版权使用授权书

本学位论文作者及指导教师完全了解"大连理工大学硕士、博士学位论文版权使用规定"，同意大连理工大学保留并向国家有关部门或机构送交学位论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅．本人授权大连理工大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，也可采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编学位论文．

作者签名：

导师签名：

2007 年 6 月 28 日

1 绪　论

1.1　记号、术语和基本结论

设 P 是一个非空集合，如果在 P 的元素中有一个二元关系 "$\leq$" 满足：

(1) 自反性：对任一 $x \in P$ 有 $x \leq x$,

(2) 反对称性： $x \leq y, y \leq x \Longrightarrow x = y$,

(3) 传递性： $x \leq y, y \leq z \Longrightarrow x \leq z$,

那么 "$\leq$" 称为 P 上的一个 *偏序*, P 连同此偏序 "$\leq$" 称为一个 *偏序集*, 记为 $(P, \leq)$. 在不引起混淆的情况下，常把 $(P, \leq)$ 简记为 P. 对 x, $y \in P$, 如果 $x \leq y$ 或 $y \leq x$, 就说 x 与 y 在偏序 "$\leq$" 下是 *可比较的*; 否则 x 与 y 是 *不可比较的*. 如果 $x \leq y$ 但 $x \neq y$, 则记为 $x < y$. 当 $x < y$ 且不存在 $z \in P$ 使得 $x < z < y$, 则称 *y覆盖x*, 记为 $x \lessdot y$. 对 $x \in P$, 如果 $y \in P$ 和 $y \leq x$ 蕴涵 $y = x$, 那么就说 x 是 P 的一个 *极小元*. 类似地有极大元的概念.

设 P 和 P' 是两个偏序集，如果存在一个双射 $\phi : P \to P'$ 使得在 P 中 $x \leq y$ 当且仅当在 p' 中 $\phi(x) \leq \phi(y)$, 那么就说 ϕ 是从偏序集 P 到 P' 的一个 (保序)同构, P 与 P' 称为是 *同构的*. 偏序集 P 的一个 *自同构* 是指从 P 到 P 的一个同构.

设 P, Q 为两个偏序集且 $Q \subseteq P$. 如果对任意 $x, y \in Q$, 在 Q 中 $x \leq y$ 当且仅当在 P 中 $x \leq y$, 那么偏序集 Q 称为偏序集 P 的 *子偏序集*. 当 $x \leq y$ 时，(闭) 区间 $[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$ 是 P 的一类特殊子偏序集 (空集不是一个区间). 如果 P 的每个区间都是有限的，则说 P 是局部有限偏序集. 一个局部有限偏序集 P 完全由它的覆盖关系所决定. 有限偏序集 P 的 Hasse 图是这样一种图：它的结点是 P 的元素，它的边就是覆盖关系，满足如果 $x < y$, 则 y 被画在 x 的上面.

如果存在一个元素 $\hat{0} \in P$ 使得 $x \geq \hat{0}$ 对所有的 $x \in P$ 成立，我们说偏序集 P 有

一个 $\hat{0}$. 类似地，如果存在一个元素 $\hat{1} \in P$ 使得 $x \leq \hat{1}$ 对所有的 $x \in P$ 成立，我们说 P 有一个 $\hat{1}$. 用 $\hat{P}$ 表示 P 并上 $\hat{0}$ 和 $\hat{1}$ (尽管 P 可能已经存在 $\hat{0}$ 和 $\hat{1}$).

设 $\mathcal{F}$ 是 P 的一个子偏序集，若 $\mathcal{F}$ 中任意两个元素都是可比较的，那么就说 $\mathcal{F}$ 是 P 的一条 *链*, 其长记为 $|\mathcal{F}|-1$; 若 $\mathcal{F}$ 中的元素是两两不可比较的，那么就说 $\mathcal{F}$ 是 P 的一条 *反链*. 如果在链 $\mathcal{F}=\{x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_\ell\}$ 中，对 $1 \leq i \leq \ell$ 恒有 x_i 覆盖 x_{i-1}, 则说 $\mathcal{F}$ 是 *饱和链*. P 的最长的饱和链称为 *极大链*. 如果 P 的所有极大链都有相同的长度 n, 则说 P 是秩为 n 的 *分次偏序集*. 此时 P 存在一个秩函数 $\rho : P \longrightarrow \{0,1,\ldots,n\}$, 满足当 x 是 P 的极小元时， $\rho(x)=0$; 当 y 覆盖 x 时，$\rho(y)=\rho(x)+1$. 称 P 中秩为 1 的元素为 *原子*. 本文所涉及到的偏序集均是分次的.

对 P 的一个子集 I, 如果 $x \in I$ 并且 $y \leq x$ 有 $y \in I$ 成立，则说 I 是 P 的一个 *序理想*. 当 P 有限时， P 的所有反链 $\mathcal{F}$ 与所有序理想 I 之间存在一个一一对应，即 $\mathcal{F}$ 是 I 的极大元的集合，此时 $I=\{x \in P : x \leq y,\ y \in \mathcal{F}\}$, 称 $\mathcal{F}$*生成*I. 如果 $\mathcal{F}=\{x_1,\ldots,x_k\}$, 则记 $I=\langle x_1,\ldots,x_k\rangle$; 如果 $\mathcal{F}=\{x\}$, 则序理想 $I=\langle x\rangle$ 被称为由 x 生成的 *主序理想*.

设 $x,\ y \in P$, 如果存在 $z \in P$ 使得 $z \leq x,\ z \leq y$, 那么 z 称为 $x,\ y$ 的一个 *下界*. 如果对 $x,\ y$ 的其它下界 u 均有 $u \leq z$, 那么 z 称为 x,y 的 *最大下界*. 类似地有最小上界的概念. 如果 P 中任意两个元素均有最大下界和最小上界，那么就说 P 是一个 *格*. 有限格 P 是一个 *半模格*, 如果它满足下面两条中的任意一条

(i) P 是分次的; 对所有的 $x,\ y \in P$, 秩函数 ρ 满足 $\rho(x)+\rho(y) \geq \rho(x \wedge y)+\rho(x \vee y)$.

(ii) 如果 x 和 y 都覆盖 $x \wedge y$, 那么 $x \vee y$ 都覆盖 x 和 y.

有限格 P 是一个 *模格* 当且仅当它是分次的，且对所有的 $x,\ y \in P$, 秩函数 ρ 满足 $\rho(x)+\rho(y)=\rho(x \wedge y)+\rho(x \vee y)$. 如果 P 的每个元素都是一些原子的并，则称 P 为 *原子格*. 如果 P 既是有限半模格，又是原子格，则称 P 为 *有限几何格*. 如果格 P 满足分配律 $x \vee (y \wedge z)=(x \vee y) \wedge (x \vee z)$, $x \wedge (y \vee z)=(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, 则称 P 为 *分配格*. 偏序集 P 的序理想格 $J(P)$ 就是一个分配格. 序理想的格运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 就是普通的并与交运算 (看作 P 的子集). 对于格 P 的一个元素 x, 如果它不能写成 $x=y \vee z$, 这里 $y<x,\ z<x$, 则称它为 *并不可约元* (交不可约元可做对偶定义). 偏序集 P 的序理想 I 在 $J(P)$ 中是 *并不可约的* 当且仅当它是 P 的主序理想.

设 P 是局部有限偏序集， P 的 Möbius 函数 μ 可递归地定义为

$$\mu(x,x)=1,\ \ \text{对所有的}x \in P, \tag{1.1.1}$$

$$\mu(x,y) = -\sum_{x\le z<y}\mu(x,z),\ \text{对所有的}x<y,$$

这里 $\mu(x,y)$ 表示 $\mu([x,y])$. 下面列举了较为常见的偏序集的 Möbius 函数：

(1) 链 $\mathbf{N}$ 的 Möbius 函数为

$$\mu(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } i=j; \\ -1 & \text{如果 } i+1=j; \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

(2) 秩为 n 的布尔格的 Möbius 函数为 $\mu(T,S) = (-1)^{|S-T|}$, 如果 $T\subseteq S\subseteq [n]$.

(3) $P = \mathbf{n_1{+}1}\times\mathbf{n_2{+}1}\times\cdots\times\mathbf{n_k{+}1}$, 其中 n_1, n_2, $\ldots$, n_k 是非负整数. 它的 Möbius 函数为

$$\begin{aligned}&\mu((a_1,\ldots,a_k),(b_1,\ldots,b_k)) \\ &\quad= \begin{cases} (-1)^{\sum(b_i-a_i)} & \text{如果每个 } b_i-a_i=0 \text{ 或 } 1; \\ 0 & \text{否则.} \end{cases}\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

如果 $N = p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k}$, 这里 p_i 是不同的素数，则 P 同构于 N 的因子格 (N 的正因子在整除关系下构成的偏序集). 这时，(1.1.2) 具有如下形式：

$$\mu(r,s) = \begin{cases} (-1)^t & \text{如果 } \frac{s}{r} \text{ 是 } t \text{ 个不同素数的乘积;} \\ 0 & \text{否则,} \end{cases}$$

即 $\mu(r,s)$ 是数论中经典的 Möbius 函数 $\mu(s/r)$.

(4) P 是 q 元域上的 n 维向量空间，这里 q 是素数的方幂. 它的 Möbius 函数为 $\mu_n = (-1)^n q^{\binom{n}{2}}$.

(5) P 是有限集合 S 的所有分拆在加细序下构成的偏序集. 它的 Möbius 函数为 $\mu_n = (-1)^{n-1}(n-1)!$.

设 P 是秩为 n 的分次偏序集，对 $0\le m\le n$, 记 $P_m = \{x\in P : \rho(x)=m\}$, $W_m = W_m(P) = |P_m|$. 称 P_m 为 P 的第 m 个*秩集*, W_m 为 P 的第 m 个*秩数*或第 m 个 *Whitney 数*. 函数 $F(t) = F_p(t) = \sum_{m=0}^{n} W_m t^m$ 称为 P 的*秩生成函数*. 如果存在 $0\le \ell\le n$, 使得

$$W_0\le W_1\le\cdots\le W_{\ell-1}\le W_\ell\ge W_{\ell+1}\ge\cdots\ge W_n,$$

则说 P 是*秩单峰*的. 如果对所有 $0\le m\le n$ 均有 $W_m = W_{n-m}$, 则说 P 是*秩对称*的.

为了方便起见，对秩为 n 的分次偏序集 P, 以 $\overline{W}_{i-1}=\overline{W}_{i-1}(P)$ 表示 P 的第 i 个最大 Whitney 数 (相应的秩集称为 P 的第 i 个最大秩集), 那么 $\overline{W}_0 \geq \overline{W}_1 \geq \ldots \geq \overline{W}_n$.

设 $\mathcal{F} \subseteq P$, 如果在 $\mathcal{F}$ 中不存在 k- 链，则说 $\mathcal{F}$ 是 P 的一个 *k-族*. 特别地，1- 族即反链，而任意 k 个秩集的并是 P 的一个 k- 族. 另一方面，易知 P 的每个 k- 族都是 P 的（不超过）k 个反链的并. P 中含元素个数最多的 k- 族称为 P 的一个 Sperner k- 族. 用 $d_k(P)$ 表示 P 的 Sperner k- 族所含元素个数，$d_1(P)$ 称为 P 的 *Dilworth 数*. 如果 $d_k(P)=\sum_{i=0}^{k-1}\overline{W}_i$, 即 P 中 k 个最大的秩集的并是 P 的一个 Sperner k- 族，则说 P 是 *k-Sperner* 的. 1-Sperner 的简称为 *Sperner* 的. 如果对所有的 $k \geq 1$, P 都是 k-Sperner 的，则称 P 具有 *强 Sperner 性质*.

给定一个原子 $a \in P_1$, 定义 $P_i(a) := \{x \in P_i | \ x \geq a\}$, 称 $P_i(a)$ 是一个 *i- 星*. 令 $\mathcal{F} \subseteq P$. 如果 $\mathcal{F} \subseteq P_i$, 则称 $\mathcal{F}$ 是 *i-uniform*; 如果 $\mathcal{F}$ 中的每对元素都有一个秩 ≥ 1 的公共下界，则称 $\mathcal{F}$ 是一个 *交族*; 如果 $\mathcal{F}$ 既是交族又是一条反链，则称 $\mathcal{F}$ 是一条 *交反链*.

如果对每个 i-uniform 交族 $\mathcal{F}$ 都满足

$$|\mathcal{F}| \leq \max_{a \in P_1} |P_i(a)|, \tag{1.1.3}$$

则称 P 具有 *秩 i 上的 EKR 性质*. 如果 P 在每一秩集 P_i 上都具有秩 i 上的 EKR 性质，则称它具有 *EKR 性质*. 如果 (1.1.3) 中的等式成立蕴含 $\mathcal{F}=P_i(a)$ 对某个 $a \in P_1$, 则称 P 具有 *秩 i 上的唯一性*. 如果 P 在每一秩集 P_i 上都具有秩 i 上的唯一性，则称它具有 *交族极值结构的唯一性*. 设 $\mathcal{F}$ 是秩为 n 的偏序集 P 中的任意一条交反链. 对 $1 \leq k \leq n$, 令 $f_k = |\mathcal{F} \cap P_k|$, $N_k = \max_{a \in P_1}\{|P_k(a)|\}$. 如果 $\sum_{k=1}^{i} \frac{f_k}{N_k} \leq 1$, 则称 P 满足 *秩 i 上的 LYM- 型不等式* (注：本段的概念是为了论文内容叙述的方便而定义的，对于一般的偏序集可能不适用).

1.2 历史背景

有限集合上的组合结构的计数和枚举是组合数学的主要研究方向之一，有限或局部有限偏序集在组合计数中具有重要的统一作用 (Stanley 在他的著作《Enumerative Combinatorics》第一卷 [76] 第三章中详细地介绍了这方面的内容), 它们的结构性质也是组合数学中内容丰富的研究课题. 本文主要研究局部有限偏序集的 Möbius 函数和有限偏序集的交性质.

(一) 正如我们在上一节看到的，偏序集的 Möbius 函数是数论中经典的 Möbius 函数的推广，它现在的这种形式是权威的组合数学家 Rota 于 1964 年在他著名的系

列文章“组合论基础”中的第一篇“Möbius 函数理论”[68] 中引进的，这样一来，各种经典的反演问题都可以纳入偏序集的 Möbius 反演的框架. 由于偏序集 P 的 Möbius 函数可看作是 P 的序复形的一个欧拉示性数，这就使得 Möbius 反演与代数拓扑这个强有力的工具联系起来. 因此，偏序集的 Möbius 函数的计算和应用一直是组合学家非常感兴趣的课题.

为了实现 Möbius 反演理论在组合计数方面的强大功能，计算偏序集的 Möbius 函数就显得至关重要了.

自 Rota [68] 于 1964 年给出几何格的 Möbius 函数以后，Sagan [69] 于 1995 年将 Rota 的结果推广到一类更大的格；紧接着 Blass 和 Sagan (1997) [10] 又将其推广到任意格；Bogart, Brylawski, Greene [11, 15, 38] 给出主导序下整数分拆格的 Möbius 函数；Greene [37] 给出 shuffle 偏序集的 Möbius 函数；Björner [9, 8] 先后给出子字序的 Möbius 函数，确定出因子序 Möbius 函数的取值范围并给出递推原则；Pták (1996) [65] 给出移位和极值算子的 Möbius 函数；Putcha (2004) [66] 给出 cross-section 格的 Möbius 函数.

尽管我们已经知道了许多具体的偏序集的 Möbius 函数，但是对于一般的偏序集目前还没有一种简单的方法来计算它的 Möbius 函数，有些偏序集的 Möbius 函数的计算是非常困难的.

作者对 Möbius 函数的研究始于 Wilf [83] 于 2002 年提出的问题. 令 S_n 表示集合 $[n]$ 上的全体置换构成的对称群，$S=\cup_{n\geq 1}S_n$. 对于 $\pi=\pi(1)\pi(2)\dots\pi(n)\in S_n$, $\sigma=\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(m)\in S_m$, 如果有指标 $i_1<i_2<\cdots<i_m$ 使得子序列 $\pi(i_1)\pi(i_2)\dots\pi(i_m)$ 和 $\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(m)$ 有相同的大小关系，则称 π 包含一个 σ- *模式*, 记为 $\pi\geq\sigma$, 这个子序列称为 π 中的一个 σ 复制. 例如: $312\leq 24153$ 因为 24153 中有一个 312 复制—413. 这个模式包含关系是定义在 S 上的一个偏序 (置换模式是一个迅速发展的研究课题，关于置换模式的综合评述读者可参考 [14]. 图 1.1 给出在模式包含序下置换区间 $[1,31524]$ 的 Hasse 图). Wilf 的问题是：这个偏序集的 Möbius 函数是什么？

为了解决 Wilf 提出的问题，Sagan 和 Vatter [70] 在 2006 年给出了整数有序分拆在模式包含关系下的 Möbius 函数. 令 P 表示正整数的集合，P^* 是字母取自 P 中元素的字的集合，即

$$P^*=\{w=w(1)w(2)\dots w(n)\mid n\geq 0,\ \text{对所有的 } i \text{ 满足 } w(i)\in P\}.$$

用 $|w|$ 表示 w 的长度 n. 在 P^* 中定义一个偏序：$u\leq w$ 如果 w 有一个长度为 $l=|u|$ 的子字 $w(i_1)w(i_2)\dots w(i_l)$ 使得 $u(j)\leq w(i_j)$, $j=1,2,\dots,l$. 例如，$442\leq 53412$, 因为后者有子字 542. 实际上，整数有序分拆上的模式包含序与 Björner [9] 的子字序是

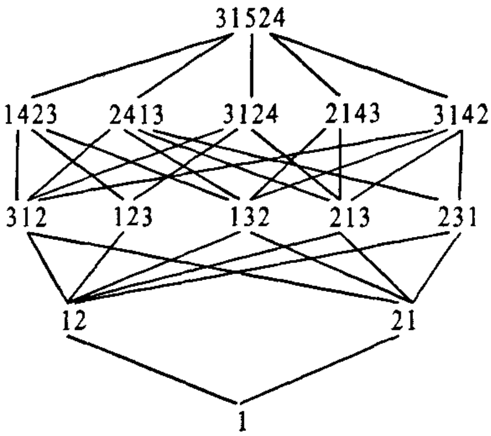

图 1.1 在模式包含序下置换区间 [1, 31524] 的 Hasse 图

非常相似的，文献 [70] 给出了详细的解释. 下面给出整数有序分拆偏序集的 Möbius 函数.

定理 1.1: (Sagan 和 Vatter) *令 P^* 表示整数有序分拆在模式包含关系下构成的偏序集. 如果 u, $w \in P^*$, 则*

$$\mu(u,w) = \sum_{\eta_\mu} (-1)^{d(\eta_\mu)},$$

这里的和取遍所有的 u 到 w 的正规嵌入 η_μ(详见 [70]).

我们知道整数有序分拆和分层置换之间是一一对应的. 给定两个置换 $\pi \in S_n$, $\sigma \in S_m$, 它们的 *直和* 是一个长为 $m+n$ 的置换，它的前 m 个元素构成了 σ, 后 n 个元素是一个 π 复制 $\pi'(1)\pi'(2)\ldots\pi'(n)$, 这里 $\pi'(i) = \pi(i) + m$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 例如, $132 \oplus 32145 = 13265478$. 如果一个置换能表示成几个递减置换的直和，则称它为 *分层置换*. 熟知，一个置换是分层置换当且仅当它既不包含 231- 模式也不包含 312- 模式. 易见前面的例子是分层的，因为 $13265478 = 1 \oplus 21 \oplus 321 \oplus 1 \oplus 1$. 明显地，长为 n 的分层置换的集合与 n 的有序分拆的集合存在一一对应，如 13265478 对应 $8 = 1 + 2 + 3 + 1 + 1$. 显然，这个双射把置换上的模式包含序传递给了整数有序分拆，从这个角度上来讲， Sagan 和 Vatter 的结论部分地解决了 Wilf 的问题.

子字序与整数有序分拆偏序集的 Möbius 函数的相似性使得 Sagan 和 Vatter 提出了一个更一般的序 — 扩展子字序. 令 $(P, \leq_P)$ 是任意一个偏序集. P^* 上的 *扩展子字序* 是这样一种偏序： $u \leq_{P^*} w$, 如果 w 包含一个子序列 $w(i_1), w(i_2), \ldots, w(i_m)$

使得 $u(j) \leq_P w(i_j), 1 \leq j \leq m = |u|$. 显然， Björner 的子字序及 Sagan 和 Vatter 的整数有序分拆序都是一种扩展子字序. 文献 [70] 也给出了扩展子字序的 Möbius 函数，即：

定理 1.2: *(Sagan 和 Vatter) 令 P 是一个带根的森林，则扩展子字序 P^* 的 Möbius 函数为*

$$\mu(u,w) = \sum_{\eta_\mu}(-1)^{d(\eta_\mu)},$$

这里的和取遍所有的 u 到 w 的正规嵌入 η_μ(详见 [70]).

与置换、整数有序分拆密切相关的组合对象之一就是 Dyck 路. 半长为 n 的 Dyck 路是一条起始于原点 $(0,0)$, 由升步 $(1,1)$ 和降步 $(1,-1)$ 组成，终止于点 $(2n,0)$, 并只在第一象限的格路，简称 Dyck n- 路. 众所周知 Dyck n- 路与集合 $[n]$ 上避免三个数字的置换 (如避免 312 的置换 $S_n(312)$) 之间有一一对应关系 (可参考文献 [5]), 而不含外对的 Dyck n- 路又与 n 的有序分拆之间存在一一对应关系. 置换、整数有序分拆、Dyck 路三者之间的关系使我们很自然地想到：在 Dyck 路上如何定义模式包含序来得到类似定理 1.1, 1.2 的结论. 一旦给出这样的结果，它会带给我们哪些应用呢？论文的第二章回答了这些问题.

(二) 在介绍 Erdös-Ko-Rado(EKR) 定理之前，我们先来介绍 Sperner[74] 于 1928 年给出的一个著名结果，现在称之为 Sperner 定理：设 S 是 n 个元素的集合， $\mathcal{F}$ 是 S 的一个子集族使得其中任意两个子集互不包含，则

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{[n/2]},$$

等号成立当且仅当 $\mathcal{F}$ 由所有 $[n/2]$- 子集构成. Lubell, Yamamoto 和 Meschalkin 分别给出了一个比 Sperner 定理更强的结果 — LYM 不等式 (可参阅文献 [25] 了解更详细的介绍). 它讲述的是如果 $\mathcal{F}$ 是 n 元集合的子集的反链，那么有 $\sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{\binom{n}{k}} \leq 1$, 这里 f_k 表示在 $\mathcal{F}$ 中阶为 k 的子集的个数. 该不等式给出了 Sperner 定理的一个简单证明. Sperner 的这个结果建立了布尔格 B_n 的 Sperner 性质. 然而这个看起来很简单的结果却引起了数学家极大的兴趣，并被不断地推广，以至于形成了组合数学中一个独立的分支.

与 Sperner 定理类似， Erdös, Ko(柯召) 和 Rado 进一步给出：若 $\mathcal{F}$ 是 S 的一个 k- 子集族使得其中任意两个子集交非空，其中 $k \leq n/2$, 则

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1},$$

并且这个界可以达到. 这就是与 Sperner 定理同样著名的 Erdös-Ko-Rado 定理，简称 EKR 定理. 根据文献 [26] 介绍，他们在 1938 年就已经证明了这个定理，但直到 1961 年才发表 [29]. EKR 定理是研究有限集的交族的最早结果，也是组合极值理论中最著名的结论之一. Hilton 和 Milner [42] 于 1967 年给出了 EKR 定理中极值结构的描述，即当 $k < \frac{n}{2}$ 时，$\mathcal{F} = \{A : A \subset S,\ |A| = k,\ x \in A\}$, 其中 x 是 S 中的一个固定元.

类似于 LYM 不等式，Bollobás [12] 于 1973 年建立了一个比 EKR 定理更强的结果 — 交族的 LYM- 型不等式：当 $k \le n/2$ 时，如果 $\mathcal{F}$ 是 n 元集合的子集的交反链，那么有 $\sum_{k\ge1} \frac{f_k}{\binom{n-1}{k-1}} \le 1$, 这里 f_k 表示在 $\mathcal{F}$ 中阶为 k 的子集的个数. 由这个不等式我们可以直接得到 EKR 定理. 1976 年 Greene, Katona 和 Kleitman[39] 采用圈序的方法给出这个定理的简单证明. 最近，Wang 和 Zhang [82] 采用移位算子的方法给出这个不等式的新证明.

在过去的四十多年里，EKR 定理不断被推广、模拟和加细，文献 [22, 28] 对此做了较为全面的介绍. 值得一提的是 Ahlswede 和 Khachatrian [2] 于 1996 年证明了集合系的完全非平凡交定理后又于 1997 年 [1] 彻底解决了 Frankl 关于极大 t- 交族结构的著名猜想；Mubayi 和 Verstraëte [64] 于 2005 年彻底解决了 Erdös 关于集合系里三角形的猜想. 除了在集合系中研究交性质外，许多学者给出了 EKR 定理的模拟和极值结构的刻画：Hsieh (1975) [45] 证明了有限向量空间的子空间模拟；Livingston (1979) [54] 证明了有序集合的模拟；Frankl 和 Füredi (1980) [34], Frankl 和 Tokushige (1999) [35] 证明了整数序列的模拟；Moon (1982) [62] 证明了 Hamming schemes 的模拟；Rands (1982) [67] 证明了 t- 设计的模拟；Ahlswede, Aydinian 和 Khachatrian (1998) [3] 证明了直积的交定理；Bey 分别在文献 (1999) [6] 和 (2001) [7] 中证明了函数格的模拟和加权集合的模拟；Erdös, Seress 和 Székely (2000) [31] 证明了偏序集中交链的模拟；Ku (2004) [50] 研究了置换和部分置换的模拟；Meagher 和 Moura (2005) [57] 证明了集合分拆系的模拟；Mubayi (2005) [63] 证明了三集合的模拟；Holroyd 和 Talbot (2005) [43] 研究了具有交性质的图.

EKR 定理的原始证明用的是移位 (shift) 方法，Katona [46] 于 1972 年给出该定理的一个漂亮的证明，该证明中引进圈序方法，通过该方法一般可以建立交族的 LYM- 型不等式. 有关方法的具体介绍可参考文献 [40].

Katona 的圈序方法以它特有的魅力吸引着众多学者去探寻各类组合对象交性质的 Katona- 型证明. 例如 Bollobás 和 Leader (1997) [13] 证明 q- 符号集合交族的 EKR 定理；Katona (1998) [47] 证明 Milner 定理 (1968) [61]; 以及 Howard, Károlyi 和 Székely (2001) [44] 证明 2- 交的 EKR 定理.

本文研究着色布尔格 (一种有限偏序集) 的交性质. 这项研究始于 Deza 和 Frankl (1977) [23] 关于置换交族以及 Ku 和 Leader (2006) [49] 关于部分置换 (partial permutations) 交族所做的工作.

用 S_n 表示 $[n]$ 上的对称群. 称 S_n 的一个子集 S 是 *相交的*, 如果对任意两个置换 g, $h \in S$, 集合 $\{x : g(x) = h(x)\} \neq \phi$.

定理 1.3: (Deza 和 Frankl [23]) *令 $S \subseteq S_n$ 是一个交族, 则 $|S| \leq (n-1)!$, 且这个界是可以达到的.*

该定理没有进一步刻画最大交族的结构. 大约二十六年以后, Cameron 和 Ku (2003) [16] 以及 Larose 和 Malvenuto (2004) [53] 分别解决了这个问题.

定理 1.4: (Cameron 和 Ku [16], Larose 和 Malvenuto [53]) *定理 1.3 中的等式成立当且仅当 S 是某一点的稳定子的一个陪集.*

事实上, 采用文献 [16] 和 [53] 中所使用的点传递图的方法可以很容易地证明定理 1.3, 然而定理 1.4 的证明是较困难的. 在证明定理 1.4 时, Cameron 和 Ku 采用了固定算子这个递归技巧. 最近, Wang 和 Zhang [81] 给出定理 1.4 一个非常简单的证明.

作为置换交族的一个推广, Ku 和 Leader [49] 考虑了部分置换的交性质. $[n]$ 上的一个 *k-部分置换* 是一个对 (A, f), 这里 $A \subseteq [n]$, $|A| = k$, $f : A \to [n]$ 是一个单射. 注意 $[n]$ 上的一个 n- 部分置换恰好就是 $[n]$ 上的一个置换. 部分置换构成的族 $\mathcal{F}$ 是 *相交的*, 如果对任意的 (A, f), $(B, g) \in \mathcal{F}$, 存在一个 $x \in A \cap B$ 使得 $f(x) = g(x)$.

定理 1.5: (Ku 和 Leader) *固定 k, n, 这里 $k \leq n-1$. 令 $\mathcal{F}$ 是 k- 部分置换构成的交族, 则*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1} \frac{(n-1)!}{(n-k)!}.$$

Ku 和 Leader 采用圈序与固定算子相结合的办法证明了定理 1.5, 并且刻画了部分交族的极值结构.

定理 1.6: (Ku 和 Leader) *当 $8 \leq k \leq n-3$ 时, 定理 1.5 中的等式成立当且仅当 $\mathcal{F}$ 由所有这样的 k- 部分置换 (A, f) 构成, $x_0 \in A$ 且 $f(x_0) = \varepsilon_0$ 对某一固定的 x_0, $\varepsilon_0 \in [n]$.*

同时他们提出

猜想 1.1: (Ku 和 Leader) 定理 1.6 对所有的 $1 \le k \le n-1$ 均成立.

促使 Ku 和 Leader 研究部分置换交族的一个主要因素是 Bollobás 和 Leader (1997) [13] 给出的 q- 符号集合 (q-signed sets) 交族的 EKR 定理. 一个 q- 符号 k- 集合是一个对 (A,f), 这里 $A \subseteq [n]$ 是一个 k- 集合, f 是一个从 A 到 $[q]$ 的映射. q-符号 k- 集合构成的族 $\mathcal{F}$ 是 *相交的*, 如果对任意的 $(A,f),(B,g) \in \mathcal{F}$, 存在 $x \in A \cap B$ 使得 $f(x) = g(x)$.

定理 1.7: (Bollobás 和 Leader) 固定一个正整数 $k \le n$. 令 $\mathcal{F}$ 是 $[n]$ 上的一个 q- 符号 k- 集合交族, 这里 $q \ge 2$, 则 $|\mathcal{F}| \le \binom{n-1}{k-1}q^{k-1}$. 除了 $q=2$ 且 $k=n$ 的情况外, 等式成立当且仅当 $\mathcal{F}$ 由所有这样的 q- 符号 k- 集合 (A,f) 构成, $x_0 \in A$ 且 $f(x_0) = \varepsilon_0$ 对某个固定的 $x_0 \in [n]$, $\varepsilon_0 \in [q]$.

本文作者注意到对于部分置换交族的 EKR 定理可以用圈序方法建立一个更强的结果 — 交反链的 LYM- 型不等式, 并解决猜想 1.1. 此外, 作者引进 "着色布尔格" 的概念, 并在论文的三、四章考虑各种着色的交性质. 为方便理解, 这里给出 Katona 的证明的主要步骤:

- 将数字 $1,2,\ldots,n$ 按自然顺序排在一个圈中, 令 $\alpha = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ 是一个有序族, 这里 A_i 为圈中 k 个连续数字构成的段 (显然有 n 个). 将 $[n]$ 上的一个置换 π 作用在 α 上我们将得到一个新的有序族 $\pi(\alpha)$. 令 $\mathcal{S}(\alpha)$ 表示所有有序族的集合, $|\mathcal{S}(\alpha)| = n!$. 令 $\mathcal{F}$ 是 $[n]$ 的 k- 子集的交族, 则
  - (i) $\mathcal{S}(\alpha)$ 包含 $n \cdot n!$ 个 k- 子集;
  - (ii) $[n]$ 的每个 k- 子集出现在 $\mathcal{S}(\alpha)$ 中的 $n \cdot k!(n-k)!$ 个有序族中 (通过对称性可得到);
  - (iii) 任何一个 $\alpha \in \mathcal{S}(\alpha)$ 最多包含 $\mathcal{F}$ 中的 k 个成员.
- 定义 $\chi(A,\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } A \in \alpha; \\ 0 & \text{否则.} \end{cases}$ 那么有

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{S}(\alpha)} \left(\sum_{A \in \mathcal{F}} \chi(A,\alpha) \right) \le n! \cdot k$$

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{S}(\alpha)} \chi(A,\alpha) \right) = |\mathcal{F}| n \cdot k!(n-k)!$$

- 比较两式即得 $|\mathcal{F}| \le \binom{n-1}{k-1}$.

1.3 主要工作

论文主要分为两大部分，第一部分由第二章构成，主要研究两类 Dyck 路偏序集的 Möbius 函数计算及其应用，以及偏序集上的一些相关性质，如 Hasse 图的构造、Sperner 性质、单峰性. 第二部分由三、四章构成，主要研究着色布尔格的交性质，包括 Erdös-Ko-Rado 性质、交族极值结构的唯一性以及交反链的 LYM- 型不等式.

第一部分以 Dyck n- 路偏序集 $D_1(n)$ 开始，即由所有 Dyck n- 路在包含关系下构成的有限偏序集，这里的包含关系是指对任意两条 Dyck n- 路 $\alpha,\beta,\alpha\leq_1\beta$ 当且仅当 α 不穿过 β. 文中从 Dyck n- 路峰和谷的角度详细地阐释了 $D_1(n)$ 的结构. Ferrari 和 Pinzani 证明了 $D_1(n)$ 是一个分配格，而分配格的 Möbius 函数已经知道，为了给出 $D_1(n)$ 的 Möbius 函数的确切表达式，论文证明 $D_1(n)$ 中什么样的区间是布尔格，并且给出 $D_1(n)$ 的 Möbius 函数的两个应用. [33] 中给出的 $D_1(n)$ 的 Hasse 图的构造是较为复杂的. 借助 Dyck 路的 ECO 构造，本文给出 $D_1(n)$ 的 Hasse 图的另一种更为直观的构造，该构造利用 $D_1(n-1)$ 的元素与 $D_1(n)$ 的饱和链分拆之间的关系使问题简单化. 在 $D_1(n)$ 的包含序基础之上作者又考虑 Dyck n- 路中峰的个数，得到 Dyck n- 路上的另一个偏序集 $D_2(n)$, 验证 $D_2(n)$ 是秩对称的、秩单峰的且具有强 Sperner 性质.

第一部分的重点内容是关于 Dyck 路偏序集 D 的结构性质的研究，即所有 Dyck 路在模式包含关系下构成的局部有限偏序集，这里的模式包含关系是指给定两条 Dyck 路 p_1, p_2, $p_1\preceq p_2$ 当且仅当 p_1 是由 p_2 删除一些金字塔和外对后自然连接余下步得到的. 文中首先给出 Dyck 路的序列表示 —Dyck 序列，即由正整数、$\bar{0}$、$\bar{1}$ 组成并满足一定条件的序列. 该序列的个数是用 Catalan 数来计数的. 迄今为止，Catalan 数已有一百多种组合解释， Dyck 序列为 Catalan 数再增一种组合解释. 由 Dyck 路的序列表示自然地得到偏序集 D 的序列表示，从该表示可以看到： D 是 Sagan 和 Vatter 定义的扩展子字序的特殊情况，但包含他们重点研究的整数有序分拆偏序集作为特例. 根据这个观察可直接推出 D 的 Möbius 函数. 论文利用结构分解的办法以及 Möbius 函数的递推公式建立了秩函数的 Möbius 反演公式，从而得到偏序集秩函数的另一种表达. 偏序集的单峰性和 Sperner 性质一直是组合学家关注的问题. 通过建立序匹配 (order matching) 论文证明 D 的一类子偏序集具有秩单峰性和 Sperner 性质，并且利用归纳法确定峰点.

定理 1.5 和定理 1.7 是论文第二部分内容的起点. 根据两个定理中的研究对象论文定义一个一般性的概念 — 着色集，它包含 q- 符号集合 (文中称为全着色集) 和部

分置换 (文中称为单着色集); 进一步定义一个一般性的偏序集 — 着色布尔格 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n)$, 它是布尔格的一种推广, 因为当 $\mathfrak{p}_n$ 为空时, $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n)$ 就是普通的布尔格 B_n. 注意 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n)$ 不是一个格. 对于 Ku 和 Leader [49] 给出的 k- 部分置换交族的 EKR 定理, 即定理 1.5, 本文建立了一个更强的结果 — 秩 $n-1$ 上的 LYM- 型不等式, 即定理 3.2, 由该不等式可立即推出定理 1.5. 接下来采用经典的 Katona 圈序方法解决 Ku 和 Leader 提出的关于 k- 部分置换交族极值结构的唯一性的猜想, 即猜想 1.1. 这个问题的解决主要取决于下面三点:

1. Ku 和 Leader 构造的圈序对本文的研究起到重要作用;
2. 文中仅选取他们构造的部分 ($n!^2$ 个) 圈序进行讨论, 使问题简单化;
3. 针对上面选定的圈序, 采取先解决部分 ($(n-1)!^2$ 个), 再解决整体的思路 (这个思路来源于 Bollobás 和 Leader 关于全着色布尔格极值结构的唯一性的证明).

这个猜想连同定理 1.4 说明单着色布尔格具有唯一性. 为了丰富着色布尔格的内容, 文中介绍一个新的例子 — 无不动点着色布尔格, 证明它具有 EKR 性质, 交族极值结构的唯一性并且满足交反链的一个 LYM- 型不等式. 最后讨论着色的直积以及它上的交性质, 得到一般性结论, 即定理 3.6. 作为这个结论的应用, 论文给出全着色和单着色直积的对应结果. 以上内容构成了论文的第三章.

猜想 1.1 的解决以及置换和单着色集的关系 (置换是单着色 n- 集) 促使作者在第四章考虑置换的交性质的 Katona- 型证明. 问题解决的关键是如何从圈序中得到置换. 文中依然采用 Ku 和 Leader 构造的圈序, 这次选取其中 $n!$ 个. 通过变换的技巧给出定理 1.3 和定理 1.4 的 Katona- 型证明, 从而说明单着色布尔格的交性质可以用 Katona 的圈序方法统一证明.

为了方便读者参阅, 这里列出论文的主要结果: 定理 1.3 和定理 1.4 的 Katona- 型证明, 定理 2.5, 推论 2.6, 定理 2.6, 定理 2.7, 定理 3.2, 定理 3.3, 定理 3.4, 定理 3.5, 定理 3.6.

2 Dyck 路偏序集

Dyck 路是用 Catalan 数来计数的一种格路，因它在有序分拆、无序分拆、恒等式的组合证明及 RNA 第二结构等的研究中有着广泛的应用，从而受到众多组合学者的重视，成为组合数学研究中的一个热门课题. Stanley 在他的巨著《Enumerative Combinatorics》[77] 以及它的电子附录 (http://www-math.mit.edu/ rstan/ec/catadd.pdf) 中列出了一百多个与 Dyck 路等价的组合结构. 在各种文献中人们从不同的角度对 Dyck 路进行了研究：文献 [17, 19, 32, 84] 研究了 Dyck 路与 X- 轴所围成的面积；文献 [41, 56] 研究了 Dyck 路的 "*Bounce Score*"；文献 [20] 研究了 Dyck 路的 "金字塔的权重" 和 "外对的个数"；文献 [80] 研究了 Dyck 路 "*udu* 的个数". 关于 Dyck 路上其它一些统计量的研究，读者可参阅文献 [21, 36, 51, 52, 58, 59, 60].

定义 2.1: *半长为 n 的 Dyck 路 p 是一条起始于原点 $(0,0)$，由升步 $(1,1)$ 和降步 $(1,-1)$ 组成，终止于点 $(2n,0)$，并只在第一象限的格路，简称 Dyck n- 路. 用字母 u 表示一个升步，字母 d 表示一个降步，这样就得到了所谓的 Dyck 字 w.*

定义 2.2: *金字塔是 w 中型为 u^hd^h 的因子. 称 h 为金字塔的高. 金字塔作为 w 的因子，如果它的前边不是一个 u，后边不是一个 d，则说金字塔是极大的.*

定义 2.3: *外对是由 w 中的一个 u 和与它匹配的 d (当 Dyck 路中的升步和降步分别视为左括号和右括号时) 构成的对，这里的 u 和 d 不属于任何一个金字塔.*

如图 2.1 所示，阴影部分表示极大金字塔.

图 2.1 Dyck 10- 路的极大金字塔和外对

定义 2.4: Dyck 路中的峰是指 w 中型为 ud 的因子. 谷是指 w 中型为 du 的因子. 峰和谷的高度均指两个步骤交点的纵坐标. 一个降落是指由连续的 d 构成的极大序列. 终结降落是指结束 Dyck 路的最后的降落.

定义 2.5: Dyck 路的面积是指位于 Dyck 路和 x- 轴之间的方格的个数.

如图 2.2 所示，计数面积的方格被涂为阴影.

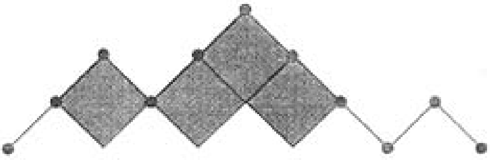

图 2.2 该 Dyck 5- 路的面积为 4

用 $\mathcal{D}_n$ 表示所有 Dyck n- 路构成的集合， $\mathcal{D}$ 表示所有 Dyck 路的集合. 我们知道 (可参考 [18]) $|\mathcal{D}_n| = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, 第 n 个 Catalan 数，则 $\sum_{n\geq 0}|\mathcal{D}_n|x^n = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

2.1 Dyck-n 路偏序集

2.1.1 Dyck-n 路偏序集 $D_1(n)$ 的一些性质

在 $\mathcal{D}_n$ 上定义一个自然的偏序 "$\leq_1$": 对任意两条 Dyck 路 $\alpha,\beta\in\mathcal{D}_n$, $\alpha\leq_1\beta$ 当且仅当 α 不穿过 β. 用 $D_1(n)$ 表示这个偏序集. Ferrari 和 Pinzani [33] 证明了 $D_1(n)$ 是一个分配格，并且采用 ECO 方法给出了 $D_1(n)$ 的 Hasse 图的递归构造.

不难观察在偏序集 $D_1(n)$ 中， β 覆盖 α 当且仅当 $\alpha\leq_1\beta$ 并且 β 的面积比 α 的面积大 1. Dyck n- 路 α 的秩函数 $\rho(\alpha)$ 可通过它的面积来定义.

令 $g(n,k) = |\{\alpha\in D_1(n) : \rho(\alpha) = k\}|$, 秩为 k 的 Dyck n- 路的个数，即 $D_1(n)$ 的第 k 个 Whitney 数.

定理 2.1: (i) Whitney 数 $g(n,k)$ 满足递推关系

$$g(n,k) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{\binom{i}{2}} g(i,j)g(n-i-1,k-j-i) \ \text{当}\ 0\leq k\leq\binom{n}{2},\ n\geq 1\ \text{时},$$

$$g(i,0) = 1\ \text{当}\ 0\leq i\leq n\ \text{时},\quad g(0,k) = 0\ \text{当}\ k>0\ \text{时}.$$

(ii) 秩生成函数 $G(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}g(n,k)x^ny^k$ 满足

$$G(x,y)=1+xG(xy,y)G(x,y),$$

或等价地表示为连分数的形式

$$G(x,y)=\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1-\cfrac{xy}{1-\cfrac{xy^2}{1-\cdots}}}}.$$

证明: (i) 给定一条 Dyck n- 路，令它的第 $2i+2$ 步是最先落到 x 轴上的. 那么从点 $(1,1)$ 到点 $(2i+1,1)$ 的格路就是一条 Dyck i- 路. 假设它的面积等于 j. 余下的从点 $(2i+2,0)$ 到点 $(2n,0)$ 的格路是一条 Dyck $(n-i-1)$- 路，它的面积等于 $k-j-i$. 由此得出 Whitney 数 $g(n,k)$ 的递推关系.

(ii) 从 (i) 我们得到

$$\begin{aligned}
G(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}g(n,k)x^ny^k\\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}g(i,j)g(n-1-i,k-j-i)x^ny^k\\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}g(i,j)g(n-1-i,\ell)x^ny^{i+j+\ell}\\
&= 1+x\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}g(i,j)(xy)^iy^j\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}g(n-1-i,\ell)x^{n-1-i}y^{\ell}\\
&= 1+xG(xy,y)G(x,y).
\end{aligned}$$

通过简单的计算即可得到连分数的表达形式. □

注上述结果在文献 [48] 的一些结论中也可推出，为方便阅读这里做了简单的证明.

众所周知如果 L 是一个有限分配格，则有唯一的一个 (在同构的意义下) 有限偏序集 P 使得 $L\cong J(P)$. 另一个基本的结论是: L 的并不可约元的集合 (可以看作是 L 的一个子偏序集) 和 P 是同构的 (可参考文献 [76] 了解详细内容). 接下来我们将考虑 $D_1(n)$ 的并不可约元所构成的偏序集 P 的结构，文献 [33] 曾提到此问题，但没有给出具体的说明.

定理 2.2: 如果 $D_1(n) \cong J(P)$, 则 P 恰好是 n- 元链的区间的偏序集 (P 的结构如图 2.3 所示).

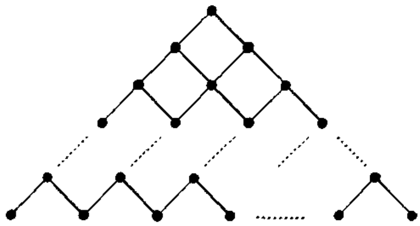

图 2.3 P 的结构

证明: 不难观察 $D_1(n)$ 中恰好覆盖 k 个元素的 Dyck n- 路就是 $D_1(n)$ 中恰含 k 个高峰的 Dyck n- 路, 即高 ≥ 2 的峰, 用 Narayana 数 $\frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}$ 来计数 (见文献 [21]). 这意味着 $D_1(n)$ 的并不可约元所构成的偏序集 P 是由恰含一个高峰的 Dyck n- 路构成的, 即型如 $(ud)^i u^j d^j (ud)^k$ 的 Dyck n- 路, 其中 $i \geq 0$, $j \geq 2$, $k \geq 0$ 且 $i+j+k=n$. 显然 P 是分次的. 不难证明 P 中高峰的高为 j 的 Dyck n- 路的个数是 $n-j+1$. 因此 P 的第一层元素的个数为 $n-1$, 第二层为 $n-2$, 依次下去直到第 $n-1$ 层的元素个数为 1. P 中元素的覆盖关系如下: 如果一条 Dyck n- 路 $(ud)^i u^j d^j (ud)^k$ 满足 $i \geq 1$ 且 $k=0$ (或 $i=0$ 且 $k \geq 1$), 则它仅覆盖 Dyck n- 路 $(ud)^{i+1} u^{j-1} d^{j-1}$ (或 Dyck n- 路 $u^{j-1} d^{j-1} (ud)^{k+1}$), 同时也仅被 Dyck n- 路 $(ud)^{i-1} u^{j+1} d^{j+1}$ (或 Dyck n- 路 $u^{j+1} d^{j+1} (ud)^{k-1}$) 所覆盖. 如果一条 Dyck n- 路 $(ud)^i u^j d^j (ud)^k$ 满足 $i>0$ 且 $k>0$, 则它仅覆盖 Dyck n- 路 $(ud)^i u^{j-1} d^{j-1} (ud)^{k+1}$ 和 $(ud)^{i+1} u^{j-1} d^{j-1} (ud)^k$, 同时也仅被 Dyck n- 路 $(ud)^i u^{j+1} d^{j+1} (ud)^{k-1}$ 和 $(ud)^{i-1} u^{j+1} d^{j+1} (ud)^k$ 所覆盖. 证毕. □

注记 2.1: 显然, P 是秩为 $n-2$ 的分次偏序集, 它的第 i 个 Whitney 数为 $n-1-i$. 因此 $|P| = \binom{n}{2}$. P 的秩生成函数为

$$F(P,x) = \sum_{i=0}^{n-2} (n-1-i)x^i = \frac{x^n - nx + n - 1}{(1-x)^2}.$$

注记 2.2: 我们知道 P 的 k- 元反链 ($k>1$) 的个数等于 $D_1(n)$ 中恰好覆盖 k 个元素的 Dyck n- 路的个数 (见文献 [76] 第三章), 即恰含 k 个高峰的 Dyck n- 路的个数. 显然, P 中第一层的 $n-1$ 条 Dyck n- 路形成了它唯一的最大反链, 因此在 $D_1(n)$ 中只有一条 Dyck n- 路 $u(ud)^{n-1}d$ 恰覆盖 $n-1$ 个元素.

接下来考虑 $D_1(n)$ 的 Möbius 函数. 已经知道 (见文献 [76] 第三章) 分配格的 Möbius 函数为

$$\mu(I,I')=\begin{cases}(-1)^{\ell(I,I')} & \text{如果 } [I,I'] \text{ 是一个布尔格;}\\ 0 & \text{否则.}\end{cases}$$

为了计算 $D_1(n)$ 的 Möbius 函数, 关键是要确定 $D_1(n)$ 中什么样的区间是布尔格. 下面的定理回答了这个问题.

定理 2.3: 对任意的 Dyck 路 $\alpha\in D_1(n)$, 如果 α 恰有 m 个高峰 $(0\le m\le n-1)$, 则 $D_1(n)$ 的区间 $[\alpha_s,\alpha]$ 是一个秩为 s 的布尔格, 这里 α_s 是 α 删除 s $(0\le s\le m)$ 个含高峰的方格后得到的 Dyck n- 路 (如果不做特殊说明, 下面的 α_s 同上).

证明: α 删除 s $(0\le s\le m)$ 个含高峰的方格后增加了 s 个谷, 这意味着恰好有 s 个 α_{s-1}, 它们两两不可比较且均覆盖 α_s. 仔细分析后不难证明区间 $[\alpha_s,\alpha]$ 恰好是 s 个 α_{s-1} 的所有序理想构成的子格, 也就是说 $[\alpha_s,\alpha]$ 是布尔格 B_s. □

注记 2.3: 令 $\alpha=u(ud)^{n-1}d\in D_1(n)$. Λ_α 是由 α 生成的主序理想, 则 Λ_α 同构于 B_{n-1}, 并且 Λ_α 是嵌入到 $D_1(n)$ 中的最大的布尔格.

推论 2.1: 对任意的 Dyck 路 $\alpha,\beta\in D_1(n)$, 假设 $\beta\le_1\alpha$, α 恰有 m $(0\le m\le n-1)$ 个高峰, 则 $D_1(n)$ 的 Möbius 函数如下:

$$\mu(\beta,\alpha)=\begin{cases}(-1)^s & \beta=\alpha_s;\\ 0 & \text{否则.}\end{cases}$$

注记 2.4: $\mu(\hat{0},\hat{1})=1$ 如果 $n=1,\ 2$; $\mu(\hat{0},\hat{1})=0$ 如果 $n\ge 3$.

推论 2.2: 对任意的 Dyck 路 $\alpha\in D_1(n)$, 秩函数的 Möbius 反演公式为

$$\psi(\alpha)=\sum_{\beta\le_1\alpha}\mu(\beta,\alpha)\rho(\beta)=\begin{cases}1 & \text{如果 } \alpha \text{ 是并不可约元;}\\ 0 & \text{否则.}\end{cases}$$

证明: 如果 α 是并不可约元, 则由 $D_1(n)$ 的 Möbius 函数有

$$\psi(\alpha)=\sum_{\beta\le_1\alpha}\mu(\beta,\alpha)\rho(\beta)=\mu(\alpha,\alpha)\rho(\alpha)+\mu(\alpha_1,\alpha)\rho(\alpha_1)=\rho(\alpha)-(\rho(\alpha)-1)=1.$$

另一方面，如果 α 有 m $(m \geq 2)$ 个方格，它们中的每个都包含一个高峰，则

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha) &= \sum_{\beta \leq_1 \alpha} \mu(\beta, \alpha)\rho(\beta) \\
&= \mu(\alpha, \alpha)\rho(\alpha) + \binom{m}{1}\mu(\alpha_1, \alpha)\rho(\alpha_1) + \cdots + \binom{m}{m}\mu(\alpha_m, \alpha)\rho(\alpha_m) \\
&= \rho(\alpha) - \binom{m}{1}(\rho(\alpha) - 1) + \cdots + (-1)^m \binom{m}{m}(\rho(\alpha) - m) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

由 Möbius 反演公式立即得到：

$$\rho(\alpha) = \sum_{\beta \leq_1 \alpha} \psi(\beta) = \#\{\beta \in D_1(n) : \beta \leq_1 \alpha \text{ 且 } \beta \text{ 是并不可约元}\}.$$

类似的讨论可以得到下面的结论：

推论 2.3: *对每个 $n \geq 1$, $\alpha \in D_1(n)$, 令 $\phi(\alpha) = \sum_{\beta \leq_1 \alpha} \mu(\hat{0}, \beta)\rho(\beta)$, 则 $\phi(\alpha) = m$ 如果 α 恰有 m 个方格，并且其中的每个方格都包含一个高为 2 的峰.*

证明：从注记 2.4 中我们知道：当 β 满足 $\rho(\beta) = 1$ 时，即 β 是一个含有高为 2 的峰的并不可约元，则有 $\mu(\hat{0}, \beta) = 1$. α 恰好含有 m 个方格，并且其中的每个方格都包含一个高为 2 的峰，这表明恰好有 m 个原子小于 α, 因此

$$\phi(\alpha) = \sum_{\beta \leq_1 \alpha} \mu(\hat{0}, \beta)\rho(\beta) = m.$$

□

下面给出 $D_1(n)$ 的 Hasse 图的一个递归构造. 在这个构造中，文献 [33] 提到的 Dyck 路的 ECO 构造起到了重要作用.

首先简要地回顾一下 Dyck 路的 ECO 构造：考虑一条 Dyck $(n-1)$- 路 α, 设其终结降落的长度为 $k-1$. 从 α 出发，在终结降落的每个点上插入一个高为 1 的峰，这样就构造出 k 条 Dyck n- 路 (称它们为 α 的儿子). 如图 2.4 所示.

对所有的 Dyck $(n-1)$- 路进行这种构造，恰好能够得到所有的 Dyck n- 路且无重复. 这样的构造具有很强的递归性，可用下面的连续原则表示：

$$\begin{cases} (2) \\ (k) \rightarrow (2)(3)\cdots(k)(k+1) \end{cases}$$

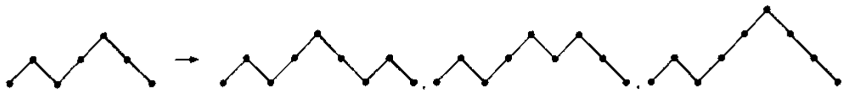

图 2.4 Dyck 路的 ECO 构造

由上面的表示我们看到：每条标号为 (k) 的 Dyck 路 (终结降落的长度为 $k-1$ 的 Dyck 路) 生出 k 个儿子，它们的终结降落的长度分别为 $1, 2, \ldots, k$(由上面的 ECO 构造即得).

显然，给定一条 Dyck $(n-1)$- 路，它的所有的儿子构成了 $D_1(n)$ 的一条饱和链. 因此， ECO 方法实际上给出了 $D_1(n)$ 的一种饱和链的分拆，称这种分拆为 $D_1(n)$ 的 *ECO- 分拆*.

为叙述方便，令 $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ 分别表示由 Dyck $(n-1)$- 路 α, β 的儿子构成的两条饱和链. 在 $D_1(n-1)$ 中，如果 α 覆盖 β, 那么 $\bar{\alpha}$ 中的 Dyck n- 路恰好覆盖 $\bar{\beta}$ 中的 Dyck n- 路当且仅当它们的终结降落有相同的长度 (从 Dyck 路的 ECO 构造中容易得到).

现在，从 $D_1(n-1)$ 的 Hasse 图出发，我们来画 $D_1(n)$ 的 Hasse 图. 首先，找出构成 $D_1(n-1)$ 的 ECO 分拆的饱和链. 考虑每条长为 ℓ $(1 \leq \ell \leq n-2)$ 的饱和链，对它上的第 m 层结点 A, $m = 1, 2, \ldots, \ell+1$, 用一条长为 m 的链 $\bar{A}$ 来替换. 事实上，这些型如 $\bar{A}$ 的新链就是构成 $D_1(n)$ 的 ECO- 分拆的所有饱和链. 最后，根据下面的方式连接 $D_1(n)$ 的结点：如果结点 A 和结点 B 在 $D_1(n-1)$ 的 Hasse 图中是相连接的，则链 $\bar{A}$ 中的结点与链 $\bar{B}$ 中的结点相连接当且仅当它们位于各自链的相同层. 图 2.5 解释了从 D_3 的 Hasse 图构造 D_4 的 Hasse 图的过程.

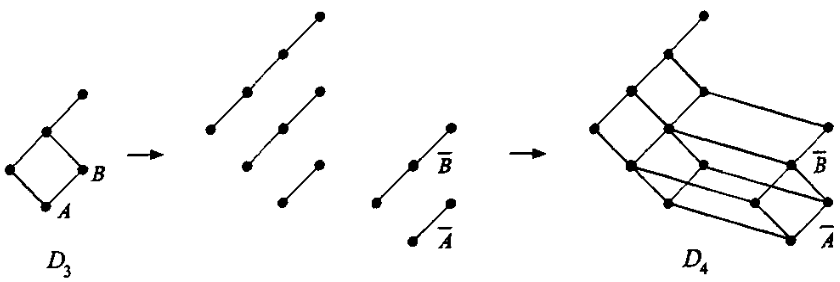

图 2.5 由 D_3 的 Hasse 图构造 D_4 的 Hasse 图

偏序集 $D_1(n)$ 是否具有单峰性一直是个公开问题 (参考文献 [72]), 即有一个指标 ℓ 使得 $g(n,0) \leq g(n,1) \leq \cdots \leq g(n,\ell) \geq \cdots \geq g(n,\binom{n}{2})$. 通过简单的计算得到 $D_1(n)$ 的交不可约元的最小秩数为 $[\frac{n}{2}][\frac{n-1}{2}]$. 已经验证 $\ell = [\frac{n}{2}][\frac{n-1}{2}]$ 如果 $1 \leq n \leq 5, \ell < [\frac{n}{2}][\frac{n-1}{2}]$

如果 $6 \le n \le 20$. 此外，作者还验证了当 $n \le 6$ 时， $D_1(n)$ 的一个秩集是一条最大的反链. 基于这些结果作者猜测： $D_1(n)$ 具有单峰性和 Sperner 性质.

2.1.2 Dyck-n 路偏序集 $D_2(n)$ 的一些性质

基于上面未解决的问题，在集合 $\mathcal{D}_n$ 中定义另一种偏序关系 "$\le_2$": 给定两条 Dyck n- 路 α 和 β, 称 $\alpha \le_2 \beta$ 如果 $\alpha \le_1 \beta$ 并且 $p(\alpha) \ge p(\beta)$, 这里 $p(\alpha)$ 表示 α 所含峰的个数. 用 $D_2(n)$ 表示这个偏序集.

容易看到在 $D_2(n)$ 中 β 覆盖 α 当且仅当 $\alpha \le_1 \beta$ 并且 $p(\alpha) = p(\beta) + 1$. 因此 α 的秩函数可表示为 $\rho(\alpha) = n - p(\alpha)$, Whitney 数恰好就是 Narayana 数 $\frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}$.

首先来回顾一下集合 $[n]$ 的非相交分拆在加细序下构成的偏序集 $NC(n)$. $[n]$ 的一个分拆是非相交的，如果任意的四个元素 $1 \le a < b < c < d \le n$, 满足 a 和 c 在一个块， b 和 d 在一个块，那么这四个元素一定都在同一个块. 对于 $\pi, \tau \in NC(n)$, 我们说 $\pi \le \tau$ 如果 τ 的每一个块都是 π 的块的并. 已经知道： $NC(n)$ 是分次的，秩函数为 $\rho(\pi) = n - bk(\pi)$ 如果 $\pi \in NC(n)$ 有 $bk(\pi)$ 个块，它的 Whitney 数也是 Narayana 数.

现在我们来寻找一个从 $D_2(n)$ 到 $NC(n)$ 的保序双射，使得 Dyck 路上的面积统计量与非相交分拆上的块统计量是一致的. 下面介绍一个这样的双射 (可参考文献 [72]): 从原点开始顺着格路走直到点 $(2n, 0)$, 用正整数 $1, 2, \ldots, n$ 标号沿途经过的升步. 格路中的步可以这样来配对：升步视为左括号，降步视为右括号，两个步是陪对的如果它们对应的括号是配对的. 对于每个降步，它的标号与和它配对的升步的标号是一样的. 那么一个连续的降步的标号 (也就是一个降落的标号) 构成的集合恰好就是集合 $[n]$ 的某个非相交分拆的一个块.

这个双射和 $D_2(n)$ 的覆盖关系说明偏序集 $D_2(n)$ 实际上就是偏序集 $NC(n)$ 的一个扩展. 文献 [73] 证明了 $NC(n)$ 是秩对称的、秩单峰的且具有强 Sperner 性质，因此我们有

定理 2.4: *偏序集 $D_2(n)$ 是秩对称的、秩单峰的且具有强 Sperner 性质.*

实际上，偏序集 $D_1(n)$ 是 $D_2(n)$ 的一个加细. 一些较好的性质 (如秩对称), $D_2(n)$ 具有但 $D_1(n)$ 却不具有. 然而，当 $n \ge 4$ 时 $D_2(n)$ 却不是一个格. 例如 Dyck 字 *uduuuddd* 和 *uuduuddd* 都覆盖 Dyck 字 *uduuddud* 和 *ududuudd*.

最后，将偏序集 $NC(n)$ 上的性质平移到偏序集 $D_2(n)$ 中，我们将得到 Dyck 路计数上的一些新结果.

推论 2.4: 令 $\bar{D}(n)$ 表示不包含 $uu\alpha dd$ 的 Dyck n- 路的集合，这里 α 是一条 Dyck 路，当然也可能是空的. 令 $\tilde{D}(n)$ 表示不包含 ddd 的 Dyck n- 路的集合. 那么对于所有的 $n \geq 1$ 有 $|\bar{D}(n)| = |\tilde{D}(n-1)| = M_{n-1}$, 这里 M_{n-1} 是 Motzkin 数.

令 $|\bar{D}(0)| = |\bar{D}(1)| = 1$, 建立发生函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\bar{D}(n)| x^n = \frac{1 + x - \sqrt{1 - (2x + 3x^2)}}{2x}.$$

由推论 2.4 立即得到下面的结论

推论 2.5: 固定 $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$. 令 $\bar{D}(n,k)$ 表示不包含 $u\alpha(u\beta d)d$ 的 Dyck n- 路的集合，这里 α 是一条半长 $\leq k-1$ 的 Dyck 路，β 也是一条 Dyck 路，当然也可能是空的. 令 $\tilde{D}(n,k)$ 表示不包含 ddd 和 $u\alpha(u\beta d)d$ 的 Dyck n- 路的集合，这里 α 和 β 如上所述. 那么 $|\bar{D}(n,k)| = |\tilde{D}(n-1, k-1)|$.

当 $k = 1$ 时即得推论 2.4. 它们的证明与文献 [73] 中关于偏序集 $NC(n)$ 的证明类似，这里不做详细解释.

2.2 Dyck 路偏序集

接下来我们将讨论 $\mathcal{D}$ 在模式包含关系 "$\preceq$" 下构成的偏序集 D. 给定两条 Dyck 路 p_1, $p_2 \in \mathcal{D}$, $p_1 \preceq p_2$ 当且仅当 p_1 是由 p_2 删除一些金字塔和外对后自然连接余下步得到的. 如图 2.6 所示，$p_1 \prec p_2$ 因为 p_1 是由 p_2 删除两个高为 1 的金字塔和一个外对再自然连接余下步得到的. 显然，D 是以 $\mathcal{D}_n$ 为第 n 个秩集的局部有限偏序集.

图 2.6 $p_1 \prec p_2$

2.2.1 Dyck 路的序列表示

我们将一条 Dyck 路 $p \in \mathcal{D}_n$ 从原点开始，终止于点 $(2n, 0)$, 将其分解成金字塔和外对. 用正整数 "h" 表示高为 h 的极大金字塔，用 "$\bar{1}$" 表示外对中的升部，"$\bar{0}$"

表示外对中的降步．引入 $\bar{1}$ 和 $\bar{0}$ 是为了区分外对和高为 1 的极大金字塔．这样，对每条 Dyck 路 p, 我们得到了一个由正整数、 $\bar{1}$ 和 $\bar{0}$ 构成的序列 $\sigma(p)$, 它满足两个条件：

(1) 在 $\sigma(p)$ 中，$\bar{1}$ 和 $\bar{0}$ 成对出现且满足括号原则，即如果 $\sigma(p)=(\ldots,\bar{1},\ldots,\bar{1},\ldots,\bar{0},\ldots,\bar{0},\ldots)$, 并且第一个 $\bar{1}$ 到最后一个 $\bar{0}$ 之间没有其它的 $\bar{1}$ 和 $\bar{0}$, 那么内部的 $\bar{1}$ 与内部的 $\bar{0}$ 配对，外部的 $\bar{1}$ 与外部的 $\bar{0}$ 配对．

(2) 每对 $\bar{1}$ 和 $\bar{0}$ 之间至少有两个正整数．

相反地，每个满足 (1) 和 (2) 的序列都对应一条 Dyck 路．称这样的序列为 *Dyck 序列*. 显然， Dyck 序列的个数是用 Catalan 数来计数的．迄今为止， Catalan 数已有一百多种组合解释， Dyck 序列为 Catalan 数再增一种组合解释．

用 $\mathcal{D}'$ 表示所有 Dyck 序列构成的集合．给定 $\sigma=(\sigma(1),\ldots,\sigma(m))\in\mathcal{D}'$, 称 m 为 σ 的长度，用 $\ell(\sigma)$ 表示．令 $\rho(\sigma)=\sigma(1)'+\cdots+\sigma(m)'-1$, 这里 $\sigma(i)'=1$ (0) 如果 $\sigma(i)=\bar{1}$ $(\bar{0})$, 否则 $\sigma(i)'=\sigma(i)$. 在这种情况下，与 σ 对应的 Dyck 路的秩为 $\rho(\sigma)$. 例如，图 2.1 所示的 Dyck 路对应 Dyck 序列 $\sigma=(\bar{1},1,\bar{1},2,2,1,\bar{0},\bar{0},2)$, 它的秩 $\rho(\sigma)=9$.

如果一个序列只满足条件 (1) 而不一定满足条件 (2), 则称该序列为 *扩展的 Dyck 序列*. 用 $\tilde{\sigma}(p)$ 表示．容易看到从一个扩展的 Dyck 序列依然可以得到一条 Dyck 路．例如，扩展序列 $\tilde{\sigma}=(\underbrace{\bar{1},\ldots,\bar{1}}_{k},h,\underbrace{\bar{0},\ldots,\bar{0}}_{k})$ 表示由高为 $k+h$ 的金字塔构成的 Dyck 路，或者 Dyck 序列 $(k+h)$. 事实上，我们把扩展的 Dyck 序列中型如 $\tilde{\sigma}$ 的部分用正整数代替，其余部分保持不变，这样就得到了一个 Dyck 序列．用 ψ 表示扩展的 Dyck 序列构成的集合到 $\mathcal{D}'$ 的映射．对于两个扩展的 Dyck 序列 $\tilde{\sigma}_1$ 和 $\tilde{\sigma}_2$, 如果 $\psi(\tilde{\sigma}_1)=\psi(\tilde{\sigma}_2)$, 就说 $\tilde{\sigma}_1$ 和 $\tilde{\sigma}_2$ 是等价的，称它们为 Dyck 序列 $\psi(\tilde{\sigma}_1)$ 的扩展表示．

令 $S=\mathbb{N}\cup\{\bar{0},\bar{1}\}$, 这里 $\mathbb{N}$ 是所有自然数的集合．在 S 上定义一个偏序 "$\leq$" 使得 $\mathbb{N}$ 保持自然序， $\bar{0}$ 和 $\bar{1}$ 是不可比的，并且对 $r\in\mathbb{N}$, 有 $r\leq\bar{0}$ 或者 $r\leq\bar{1}$ 当且仅当 $r=0$.

现在我们用 Dyck 序列语言来描述 $\mathcal{D}$ 上的模式包含关系．对于 $\tau=(\tau(1),\ldots,\tau(n))$, $\sigma=(\sigma(1),\ldots,\sigma(m))\in\mathcal{D}'$, 称 $\tau\succeq\sigma$ 如果 τ 包含一个扩展的 Dyck 序列 $\tilde{\tau}'$ 使得 $\psi(\tilde{\tau}')=(\tau'(1),\ldots,\tau'(m))$ 满足在 S 中 $\tau'(i)\geq\sigma(i)$, $i=1,2,\ldots,m$.

例如，$(\bar{1},\bar{1},4,2,\bar{0},\bar{0},\bar{1},2,1,\bar{0})\succeq(5,\bar{1},1,1,\bar{0})$ 因为 $\psi(\bar{1},4,\bar{0},\bar{1},2,1,\bar{0})=(5,\bar{1},2,1,\bar{0})\geq(5,\bar{1},1,1,\bar{0})$. 用 D' 表示由所有 Dyck 序列在模式包含关系下构成的偏序集，即 D 的序列表示．

不难看到：在 D' 中删除包含 $\bar{1}$ 和 $\bar{0}$ 的 Dyck 序列就得到了 Sagan 和 Vatter [70] 重点研究的整数有序分拆偏序集，也就是说，整数有序分拆偏序集是 Dyck 路偏序集的一个子偏序集. 此外，Dyck 路上的这种模式包含序恰好是 Sagan 和 Vatter 所定义的扩展子字序中的一种. 下一节我们将利用这个观察来描述 D 的 Möbius 函数.

2.2.2 Dyck 路偏序集的 Möbius 函数和它的一个应用

首先介绍一些相关的概念.

对于一个序列 $\alpha = (\alpha(1), \ldots, \alpha(n))$，它的 *support* 是指集合 $\mathrm{Supp}(\alpha) = \{i \mid \alpha(i) \neq 0\}$. 给定 $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(m)) \in \mathcal{D}'$, σ 的一个 *expansion* 是指一个序列 $\epsilon_\sigma = (\epsilon_\sigma(1), \ldots, \epsilon_\sigma(n))$ 使得如果把 ϵ_σ 限制在它的 support 上我们将会得到 σ.

给定 $\tau = (\tau(1), \ldots, \tau(n))$, σ 到 τ 的一个 *$\tilde{\sigma}$-embedding* 是指 σ 的一个扩展序列 $\tilde{\sigma}$ 的一个 expansion $\epsilon_{\tilde{\sigma}\tau} = (\epsilon_{\tilde{\sigma}\tau}(1), \ldots, \epsilon_{\tilde{\sigma}\tau}(n))$ 使得在 S 中 $\tau(i) \geq \epsilon_{\tilde{\sigma}\tau}(i)$, $1 \leq i \leq n$, 并且出现在 $\epsilon_{\tilde{\sigma}\tau}$ 中的 $\bar{1}$ 和 $\bar{0}$ 与 τ 出现的一致.

例 2.1: *若* $\tau = (\bar{1}, \bar{1}, 4, 1, \bar{0}, \bar{0}, 2, 2, \bar{1}, 2, 1, \bar{0})$, $\sigma = (5, 2, \bar{1}, 1, 1, \bar{0})$, $\tilde{\sigma} = (\bar{1}, 4, \bar{0}, 2, \bar{1}, 1, 1, \bar{0})$, *那么* $(0, \bar{1}, 4, 0, \bar{0}, 0, 2, 0, \bar{1}, 1, 1, \bar{0})$ *和* $(\bar{1}, 0, 4, 0, 0, \bar{0}, 0, 2, \bar{1}, 1, 1, \bar{0})$ *都是* σ *到* τ *的* $\tilde{\sigma}$-embeddings, *但* $(0, \bar{1}, 4, 0, 0, \bar{0}, 2, 0, \bar{1}, 1, 1, \bar{0})$ *不是，因为第一对* $\bar{1}$ *和* $\bar{0}$ *违反了定义.*

显然，如果 σ 有一个到 τ 的 $\tilde{\sigma}$-embedding, 则在 D' 中就有 $\sigma \preceq \tau$.

给定 $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(m)) \in \mathcal{D}'$, k 的一个 *run* 是指指标区间 $[r, t]$ 使得

$$\sigma(r-1) \neq \sigma(r) = \sigma(r+1) = \cdots = \sigma(t) = k \neq \sigma(t+1)$$

($\sigma(r-1)$ 和 $\sigma(t+1)$ 可能不存在). 称 σ 到 τ 的一个 $\tilde{\sigma}$-embedding $\eta_{\tilde{\sigma}\tau}$ 是 *正规的*, 如果它满足

1. 对 $1 \leq i \leq l(\tau)$, 有 $\eta_{\tilde{\sigma}\tau}(i) = \tau(i)$, $\tau(i) - 1$, 或者 0 (注意 $\bar{1}$ 与 $\bar{0}$ 是配对的. 如果 $\bar{1}$ 变为 0, 那么与它匹配的 $\bar{0}$ 也要变为 0. 为了叙述简洁，我们将不再强调这一规则).

2. 对于 τ 中 k 的每个 run $[r, t]$, 有

(2.1) $(r, t] \subseteq \mathrm{Supp}(\eta_{\tilde{\sigma}\tau})$ 如果 $k = 1$ 或 $\bar{1}$, 或者

(2.2) $[r, t) \subseteq \mathrm{Supp}(\eta_{\tilde{\sigma}\tau})$ 如果 $k = \bar{0}$, 或者

(2.3) $r \in \mathrm{Supp}(\eta_{\tilde{\sigma}\tau})$ 如果 $k \geq 2$.

例 2.1 中，对于 σ 到 τ 的两个 $\tilde{\sigma}$-embeddings, 我们说第一个是正规的但第二个不是，因为它的第二个分量违反了 (2.1), 第五个分量违反了 (2.2), 第七个分量违反

了 (2.3).

定义

$$d(\eta_{\sigma\tau}) := |\{i \mid \eta_{\sigma\tau}(i) = \tau(i)' - 1\}|.$$

由 [70] 的结果和 D 的序列表示 D' 可以直接得到 D 的 Möbius 函数.

定理 2.5: *D 的 Möbius 函数为*

$$\mu(\sigma,\tau) = \sum_{\eta_{\sigma\tau}} (-1)^{d(\eta_{\sigma\tau})},$$

这里的和取遍 σ 到 τ 的所有 $\eta_{\sigma\tau}$.

推论 2.6: *对任意的 Dyck 序列 $\tau \in D'$, 秩函数的 Möbius 反演为*

$$f(\tau) = \sum_{\sigma \preceq \tau} \mu(\sigma,\tau)\rho(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } \tau = (k),\ k > 1, \text{ 或者 } \tau = (k,\dots,k),\ k \geq 1; \\ 0 & \text{否则}. \end{cases}$$

证明:

$$f(\tau) = \sum_{\sigma \preceq \tau} \mu(\sigma,\tau)\rho(\sigma) = \sum_{\sigma \in P_\tau} \mu(\sigma,\tau)\rho(\sigma),$$

这里 $P_\tau = \{\sigma \in D' \mid \sigma \preceq \tau \text{ 且 } \mu(\sigma,\tau) \neq 0\}$. 我们只需考虑 D' 的子偏序集 P_τ.

情况 1. 如果 $\tau = (k)$, $k > 1$, 或者 $\tau = (1,\dots,1)$ 并且 $\ell(\tau) = k$, 那么 $f(\tau) = (k-1) - (k-2) = 1$, 得证.

情况 2. 如果 $\tau = (k,\dots,k)$, $k > 1$, $l(\tau) = n$. 由定理 2.5 和正规 embedding 的定义我们知道 τ 的第一个分量 k 仅能被减 1 或者保持不变. 选取第一个分量 k 为 τ 的特殊分量. 令

$$P_1 = \{\sigma \in P_\tau \mid \sigma = (k,\dots) \text{ 且 } \ell(\sigma) > 1\},$$

$$P_2 = \{\sigma \in P_\tau \mid \sigma = (k-1,\dots) \text{ 且 } \ell(\sigma) > 1\},$$

$P_3 = \{(k),\ (k-1)\}$. 仔细分析后不难发现: $P_\tau = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cong P_{\tau'} \cup P_{\tau'} \cup P_3$, 这里 $\tau' = (k,\dots,k)$, $l(\tau') = n-1$, 并且当 $i \neq j$ 时, $P_i \cap P_j = \phi$. P_1 和 P_2 之间的双射是很显然的: $\sigma_1 = (k, a_2, \dots, a_m) \to (k-1, a_2, \dots, a_m) = \sigma_2$, 该双射蕴含 $\mu(\sigma_1,\tau) = -\mu(\sigma_2,\tau)$, 并且 $\rho(\sigma_1) = \rho(\sigma_2) + 1$. 见图 2.7 所示的例子.

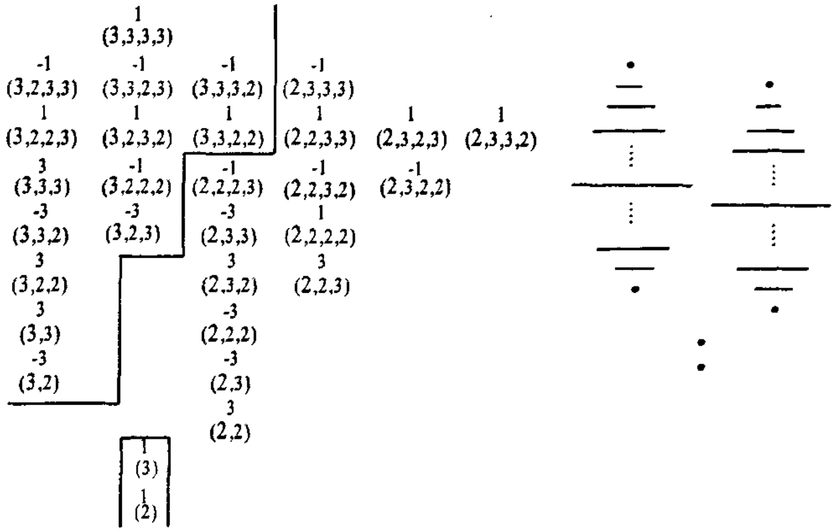

图 2.7 P_τ 的分解和它的简图

从上面的分析我们有

$$
\begin{aligned}
f(\tau) &= \sum_{\sigma\in P_\tau}\mu(\sigma,\tau)\rho(\sigma)\\
&= \sum_{\sigma\in P_1}\mu(\sigma,\tau)\rho(\sigma)+\sum_{\sigma\in P_2}\mu(\sigma,\tau)\rho(\sigma)+\sum_{\sigma\in P_3}\mu(\sigma,\tau)\rho(\sigma)\\
&= \sum_{\sigma\in P_{\tau'}}\mu(\sigma,\tau')+\sum_{\sigma\in P_{\tau''}}\mu(\sigma,\tau'')+1\\
&= 0+0+1\\
&= 1,
\end{aligned}
$$

这里 $\tau''=(k,\ldots,k)$, $l(\tau'')=n-2$.

情况 3. 如果 $\tau=(\tau(1),\ldots,\tau(n))\in D'$ 但 $\tau\neq(k)$, $k>1$ 且 $\tau\neq(k,\ldots,k)$, $k\geq 1$, 采用与情况 2 类似的方法将 P_τ 进行分解. 基于 τ 的形式， P_τ 分为两种情况讨论：如果 τ 完全由 k 的 runs $[r,t]$ $(r<t)$ 组成，这里 $k>1$, 则 P_τ 在 (3.2) 中讨论；否则，在 (3.1) 中讨论.

(3.1) 在 τ 中选取一个合适的特殊分量 $\tau(i)$ (它只能被减 1 或保持不变).

- 如果 $\tau(i)\neq 1$, $\bar{1}$, 或 $\bar{0}$, $\tau(i-1)\neq\tau(i)\neq\tau(i+1)$ ($\tau(i-1)$ 或 $\tau(i+1)$ 可能是空的), 令

$$P_1=\{\sigma\in P_\tau \mid \sigma=(\ldots,\tau(i),\ldots)\},$$

$$P_2 = \{\sigma \in P_\tau \mid \sigma = (\ldots, \tau(i) - 1, \ldots)\}.$$

则 $P_\tau = P_1 \cup P_2 \cong P_{\tau'} \cup P_{\tau'}$, 这里 $\tau' = (\tau(1), \ldots, \overline{\tau(i)}, \ldots, \tau(n))$, 即将 τ 的分量 $\tau(i)$ 删除后所得到的 Dyck 序列.

- 如果 $\tau(i) = \cdots = \tau(j) = 1, j \geq i$, 令 P_1 同上,

$$P_2 = \{\sigma \in P_\tau \mid \sigma \preceq (\tau(1), \ldots, \overline{\tau(i)}, \ldots, \tau(n))\}.$$

那么 $P_\tau = P_1 \cup P_2 \cong P_{\tau'} \cup P_{\tau'}$, 这里

$$\tau' = (\tau(1), \ldots, \overline{\tau(i), \ldots, \tau(j)}, \ldots, \tau(n)).$$

- 如果 $\tau(i) = \cdots = \tau(i+m-1) = \bar{1}$, $\tau(j) = \cdots = \tau(j+m-1) = \bar{0}$, 这里 $m \geq 1$, 令

$$P_1 = \{\sigma \in P_\tau \mid \sigma = (\ldots, \tau(i), \ldots, \tau(j+m-1), \ldots)\},$$
$$P_2 = \{\sigma \in P_\tau \mid \sigma \preceq (\tau(1), \ldots, \overline{\tau(i)}, \ldots, \overline{\tau(j+m-1)}, \ldots, \tau(n))\}.$$

那么 $P_\tau = P_1 \cup P_2 \cong P_{\tau'} \cup P_{\tau'}$, 这里

$$\tau' = (\tau(1), \ldots, \overline{\tau(i), \ldots, \tau(i+m-1)}, \ldots, \overline{\tau(j), \ldots, \tau(j+m-1)}, \ldots, \tau(n)).$$

总之可以断言 $P_\tau = P_1 \cup P_2 \cong P_{\tau'} \cup P_{\tau'}$. $P_1 \cap P_2$ 可空可不空. 如果不空, 重复 P_τ 中这样的 σ, 它满足 $\sigma \in P_1 \cap P_2$ 且 $\mu(\sigma_{P_1}, \tau) + \mu(\sigma_{P_2}, \tau) = \mu(\sigma, \tau)$, 这里 $\mu(\sigma_{P_i}, \tau)$ 表示在 P_i 中区间 $[\sigma, \tau]$ 的 Möbius 函数. P_1 和 P_2 的关系与情况 2 中的一样. 见图 2.8 所示的例子.

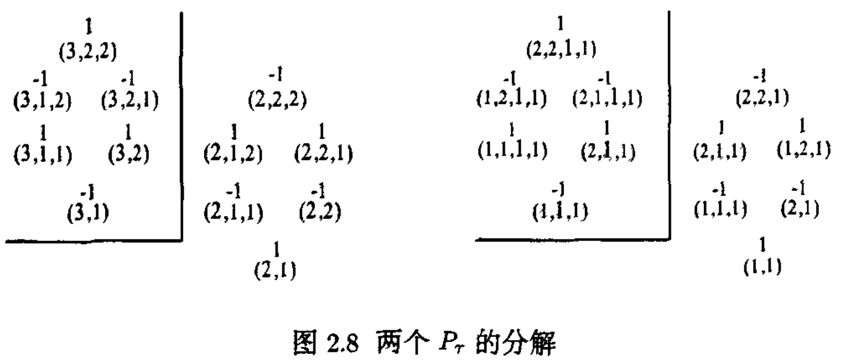

图 2.8 两个 P_τ 的分解

(3.2) 这里我们仅考虑完全由 $k(k > 1)$ 的 runs $[r, t]$ $(r < t)$ 构成的 τ. $\tau(1)$ 可以作为特殊元. 假设 $\tau(1) = \cdots = \tau(m) = p$, $\tau(m+1) = \cdots = \tau(j) = q$. 令

$$P_1 = \{\sigma \in P_\tau \mid \sigma(1) = \tau(1) \text{ 且 } \sigma(2) = \tau(2) \text{ 或 } \tau(2) - 1\},$$

$$P_2 = \{\sigma \in P_\tau \mid \sigma(1) = \tau(1) - 1 \text{ 且 } \sigma(2) = \tau(2) \text{ 或 } \tau(2) - 1\},$$

$P_3 = P_{\tau'}$, 这里 $\tau' = (\overline{\tau(1)}, \ldots, \tau(n))$. 那么 $P_\tau = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cong P_{\tau'} \cup P_{\tau'} \cup P_{\tau'}$. 不难看出： $P_1 \cap P_2$ 是空的； $P_1 \cap P_3$ 和 $P_2 \cap P_3$ 都是空的如果 $|p-q| > 1$, 或者都不空如果 $|p-q| = 1$ (序列 $(p,p,q,\tau(j+1),\ldots,\tau(n)) \in P_1 \cap P_3$, 序列 $(p-1,p,q,\tau(j+1),\ldots,\tau(n)) \in P_2 \cap P_3$).

显然， $|P_1| = |P_2| = |P_3|$. 当 $|p-q| = 1$ 时，采取与 (3.1) 相同的重复措施. P_1 和 P_2 的关系也与情况 2 中的相同. 见图 2.9 所示的例子.

经过上面的分析，对 (3.1) 有

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \sum_{\sigma \in P_\tau} \mu(\sigma,\tau)\rho(\sigma) \\ &= \sum_{\sigma \in P_1} \mu(\sigma,\tau)\rho(\sigma) + \sum_{\sigma \in P_2} \mu(\sigma,\tau)\rho(\sigma) \\ &= \sum_{\sigma \in P_{\tau'}} \mu(\sigma,\tau') \\ &= 0, \end{aligned}$$

对于 (3.2) 有

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \sum_{\sigma \in P_\tau} \mu(\sigma,\tau)\rho(\sigma) \\ &= \sum_{\sigma \in P_1} \mu(\sigma,\tau)\rho(\sigma) + \sum_{\sigma \in P_2} \mu(\sigma,\tau)\rho(\sigma) + \sum_{\sigma \in P_3} \mu(\sigma,\tau)\rho(\sigma) \\ &= 0 + \sum_{\sigma \in P_3} \mu(\sigma,\tau)\rho(\sigma) \\ &= \sum_{\sigma \in P_{\tau'}} \mu(\sigma,\tau')\rho(\sigma). \end{aligned}$$

从条件 $\tau(1) = \cdots = \tau(m) = p$ 出发，经 $m-1$ 次递推有

$$f(\tau) = \sum_{\sigma \in P_{\tau'}} \mu(\sigma,\tau')\rho(\sigma) = \sum_{\sigma \in P_{\tau''}} \mu(\sigma,\tau'')\rho(\sigma) = f(\tau''),$$

这里 $\tau'' = (\overline{\tau(1),\ldots,\tau(m-1)}, \tau(m), \ldots, \tau(n))$. 由 (3.1) 得

$$f(\tau'') = 0.$$

□

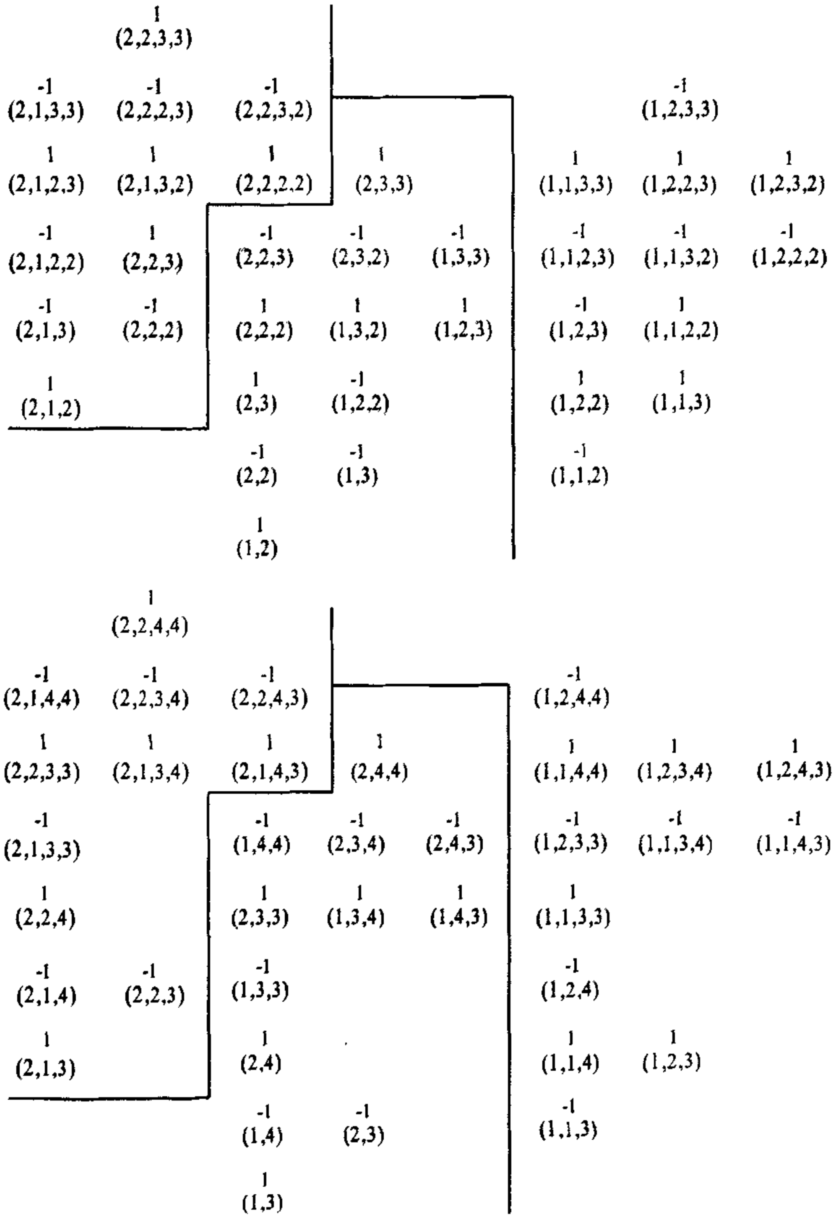
1 (2,2,3,3)
-1 (2,1,3,3) -1 (2,2,2,3) -1 (2,2,3,2) -1 (1,2,3,3)
1 (2,1,2,3) 1 (2,1,3,2) 1 (2,2,2,2) 1 (2,3,3) 1 (1,1,3,3) 1 (1,2,2,3) 1 (1,2,3,2)
-1 (2,1,2,2) 1 (2,2,3) -1 (2,2,3) -1 (2,3,2) -1 (1,3,3) -1 (1,1,2,3) -1 (1,1,3,2) -1 (1,2,2,2)
-1 (2,1,3) -1 (2,2,2) 1 (2,2,2) 1 (1,3,2) 1 (1,2,3) -1 (1,2,3) 1 (1,1,2,2)
1 (2,1,2) 1 (2,3) -1 (1,2,2) 1 (1,2,2) 1 (1,1,3)
-1 (2,2) -1 (1,3) -1 (1,1,2)
1 (1,2)
1 (2,2,4,4)
-1 (2,1,4,4) -1 (2,2,3,4) -1 (2,2,4,3) -1 (1,2,4,4)
1 (2,2,3,3) 1 (2,1,3,4) 1 (2,1,4,3) 1 (2,4,4) 1 (1,1,4,4) 1 (1,2,3,4) 1 (1,2,4,3)
-1 (2,1,3,3) -1 (1,4,4) -1 (2,3,4) -1 (2,4,3) -1 (1,2,3,3) -1 (1,1,3,4) -1 (1,1,4,3)
1 (2,2,4) 1 (2,3,3) 1 (1,3,4) 1 (1,4,3) 1 (1,1,3,3)
-1 (2,1,4) -1 (2,2,3) -1 (1,3,3) -1 (1,2,4)
1 (2,1,3) 1 (2,4) 1 (1,1,4) 1 (1,2,3)
-1 (1,4) -1 (2,3) -1 (1,1,3)
1 (1,3)

图 2.9 两个 P_T 的分解

由 Möbius 反演公式立即得到

$$\rho(\tau)=\sum_{\sigma\preceq\tau}f(\sigma)=\#\{\sigma\mid\sigma\preceq\tau,\ \sigma=(k),\ k>1,\ \text{或}\ \sigma=(k,\ldots,k),\ k\geq 1\}.$$

2.2.3 具有单峰性和 Sperner 性质的子偏序集

从推论 2.6 的证明中容易看到：当 $\tau=(k)$, $k>1$, 或 $\tau=(k,\ldots,k)$, $k\geq 1$ 时，子偏序集 $P_\tau=\{\sigma\in D'\mid\sigma\preceq\tau$ 且 $\mu(\sigma,\tau)\neq 0\}$ 是秩单峰的 (见图 2.7). 那么子偏序集 $Q_\tau=\{\sigma\in D'\mid\sigma\preceq\tau\}$ 是否具有秩单峰性呢？显然，当 $\tau=(k)$, $k>1$, 或 $\tau=(1,\ldots,1)$ 且 $\ell(\tau)=k$ 时，Q_τ 是秩单峰的且具有 Sperner 性质，因为它们都是长为 $k-1$ 的链. 较为一般地，我们有下面的结论

定理 2.6: 当 $\tau=(2,\ldots,2)$ 时，Q_τ *是秩单峰的且具有* Sperner *性质*.

证明：令 $\ell(\tau)=n\geq 2$, 则 $\rho(Q_\tau)=2n-1$. 令 $Q_i=\{\sigma\in Q_\tau:\rho(\sigma)=i\}$, $|Q_i|=a_i$, $i=0,1,\ldots,2n-1$.

我们说映射 $\phi:Q_i\to Q_{i+1}$, 或映射 $\phi:Q_{i+1}\to Q_i$ 是一个序匹配 (order matching) 如果 ϕ 是单射且 ϕ 保持序关系，即对于所有的 $\sigma\in Q_\tau$, 有 $\phi(\sigma)\succ\sigma$ 或 $\phi(\sigma)\prec\sigma$. 为了证明这个定理，只需证明存在序匹配 $Q_0\to Q_1\to\cdots Q_r\leftarrow Q_{r+1}\leftarrow\cdots Q_{2n-1}$ (可参考文献 [78]).

给定一个 $\sigma\in Q_\tau$, 把 σ 中的分量 "1" 看作左括号，"2" 看作右括号，得到一个与 σ 对应的括号序列. 称 σ 中的分量 "1" 和分量 "2" 是*配对的*当且仅当在与 σ 对应的括号序列中代表它们的括号是配对的. 例如，$\tau=(2,2,2,2,2,2)$, $\sigma=(2,1,2,1,1,2)$, 则 σ 对应括号序列)()((), 其蕴含 $\sigma(2)$ 与 $\sigma(3)$ 配对，$\sigma(5)$ 与 $\sigma(6)$ 配对.

在 Q_τ 上定义两个映射 ϕ 和 φ 如下：

$$\phi(\sigma)=\begin{cases}\sigma(i)=1\to 2 & \text{如果 } \ell(\sigma)=n-k\ (k\geq 0)\ \text{且至少有 } 2k \text{ 个未配对的 } 2;\\ (1,\sigma) & \text{如果 } \ell(\sigma)=n-k\ (k>0)\ \text{且至多有 } 2k-1 \text{ 个未配对的 } 2;\\ \sigma & \text{否则 } (\sigma(i) \text{ 不存在}),\end{cases}$$

这里 $\sigma(i)=1\to 2$ 表示将 σ 最左边未配对的分量 $\sigma(i)=1$ 变为 2 后所得到的 Dyck 序列 $\phi(\sigma)$.

$$\varphi(\sigma)=\begin{cases}\sigma(j)=2\to 1 & \text{如果 } \ell(\sigma)=n-k \text{ 且至少有 } 2k+1 \text{ 个未配对的 } 2;\\ (\overline{\sigma(1)},\ldots,\sigma(n-k)) & \text{如果 } \sigma(1)=1 \text{ 且至多有 } 2k \text{ 个未配对的 } 2;\\ \sigma & \text{否则,}\end{cases}$$

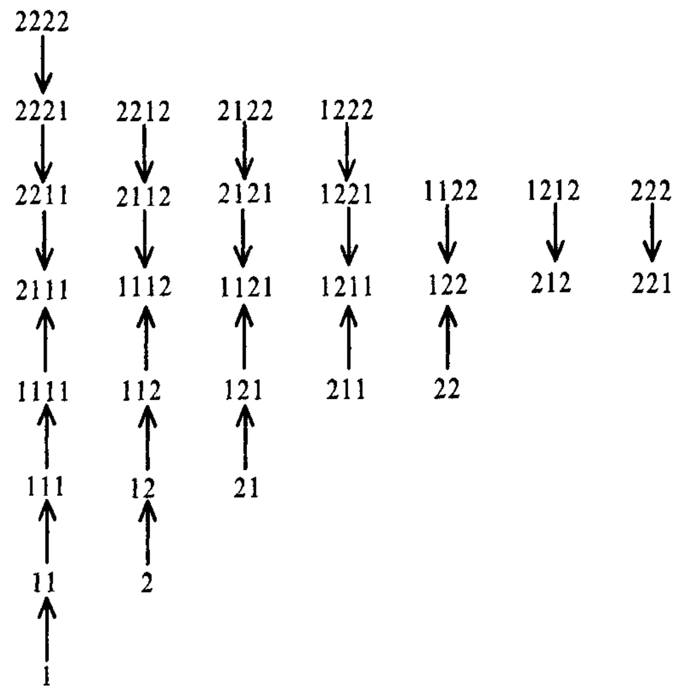

图 2.10 映射 ϕ 和 φ

这里 $k \geq 0$, $\sigma(j) = 2 \to 1$ 表示将 σ 最右边未配对的分量 $\sigma(j) = 2$ 变为 1 后所得到的 Dyck 序列 $\varphi(\sigma)$. 图 2.10 解释了这两个映射.

令 $r = \max\{\rho(\sigma) \mid \varphi(\sigma) = \sigma\}$. 容易看到 $r \leq \min\{\rho(\sigma) \mid \phi(\sigma) = \sigma\}$.

现在来证明当 $0 \leq i < r$ 时, 限制 $\phi : \mathcal{Q}_i \to \mathcal{Q}_{i+1}$ 是一个序匹配. 显然, 对 $\sigma \in \mathcal{Q}_i$ 有 $\phi(\sigma) \succ \sigma$. 给定 $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{Q}_i$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

(1) 如果 $\phi(\sigma_1) = (1, \sigma_1)$ 且 $\phi(\sigma_2) = (1, \sigma_2)$, 那么显然有 $\phi(\sigma_1) \neq \phi(\sigma_2)$.

(2) 如果 $\phi(\sigma_1) : \sigma_1(i) = 1 \to 2$ 且 $\phi(\sigma_2) : \sigma_2(j) = 1 \to 2$, 那么显然有 $\phi(\sigma_1) \neq \phi(\sigma_2)$ 当 $i = j$ 时. 不失一般性, 假设 $i < j$. 设 $\phi(\sigma_1) = \phi(\sigma_2)$, 则 $\sigma_1(j) = 2$ 且 $\sigma_2(i) = 2$. 从 $\sigma_2(j) = 1 \to 2$ 我们知道出现在 $(\sigma_2(1), \ldots, \sigma_2(j-1))$ 中的所有的 1 都是配好对的, 由此得出 $\sigma_1(i) = 1$ 是配好对的, 与 $\sigma_1(i) = 1 \to 2$ 矛盾, 因此有 $\phi(\sigma_1) \neq \phi(\sigma_2)$.

(3) 如果 $\phi(\sigma_1) = (1, \sigma_1)$ 且 $\phi(\sigma_2) : \sigma_2(j) = 1 \to 2$, 那么也采用反证法来证明. 假设 $\phi(\sigma_1) = \phi(\sigma_2)$, 则 $\sigma_2(1) = 1$. 假设 $\sigma_2(1)$ 与 $\sigma_2(i) = 2$ 匹配, 这里 $i < j$ (如果 $i > j$, 则是 $\sigma_2(j)$ 而不是 $\sigma_2(1)$ 与 $\sigma_2(i)$ 匹配), 则有 $\sigma_1(1)$ 与 $\sigma_1(i) = 2$ 匹配. 如果

$\ell(\sigma_2) = n - k \ (k \geq 0)$, 则 $\ell(\sigma_1) = n - (k+1)$. 根据 ϕ 的定义我们知道在 σ_2 中至少有 $2k$ 个未配对的 2, 因此在 σ_1 中至少有 $2k+2$ 个未配对的 2 ($\sigma_1(i)$ 和 $\sigma_1(j)$ 都在其中), 与 $\phi(\sigma_1) = (1, \sigma_1)$ 矛盾，所以 $\phi(\sigma_1) \neq \phi(\sigma_2)$.

采用类似的方法可以证明当 $j \geq r$ 时，限制 $\varphi : Q_{j+1} \to Q_j$ 是一个序匹配. □

定理 2.6 已经告诉我们 Q_r 是 Q_τ 的最大秩集，但我们依然不知道与 τ 的秩相关联的 r 的大小. 为了解决这个问题需要先给出 a_k 的确切表达式. 令子偏序集 $Q_k = \{\sigma \mid \sigma \preceq \tau \text{ 且 } \ell(\sigma) = k\}$. 不难观察：布尔格 B_k 是 Q_k 的一个子偏序集且它们有相同的秩数. Q_k 与 B_k 之间的双射是显然的：对任意一个 $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(k)) \in Q_k$, 令 $\varphi(\sigma) = \{i \mid \sigma(i) = 2\}$. 因此

$$a_k = \begin{cases} \sum_{i\geq 0} \binom{k+1-i}{i} & 0 \leq k \leq n-1; \\ \sum_{i \geq 0} \binom{n-i}{k-n+1+i} & n \leq k \leq 2n-1. \end{cases}$$

定理 2.7: 对于一个固定的正整数 n, 序列 $\{a_k\}$ 满足 $a_0 \leq \cdots \leq a_r \geq \cdots \geq a_{2n-1}$, 这里 $r = \frac{3n}{2} - 2$ 如果 n 是偶数； $r = \frac{3n-3}{2}$ 如果 n 是奇数且 $1 \leq n \leq 27$, $r = \frac{3n-5}{2}$ 如果 n 是奇数且 $n \geq 29$.

证明：注意当 $0 \leq k \leq n-1$ 时， $a_k = \sum_{i\geq 0}\binom{k+1-i}{i}$ 是 Fibonacci 数，因此序列 $a_0, \ldots, a_{n-1}$ 是严格增加的. 我们仅需考虑余下的序列 $a_{n-1}, \ldots, a_{2n-1}$. 为方便起见，把 $a_k \ (n-1 \leq k \leq 2n-1)$ 写为 $b_{2n-1-k} = \sum_{i\geq 0}\binom{n-i}{2n-1-k-2i}$, 即当 $0 \leq k \leq n$ 时，$b_k = \sum_{i \geq 0}\binom{n-i}{k-2i}$.

现在要证明定理 2.7 只需证明 $b_0 \leq \cdots \leq b_t \geq \cdots \geq b_n$, 这里 $t = \frac{n}{2}+1$ 如果 n 是偶数； $t = \frac{n+1}{2}$ 如果 n 是奇数且 $1 \leq n \leq 27$, $t = \frac{n+1}{2}+1$ 如果 n 是奇数且 $n \geq 29$, 从而得到 $r = 2n-1-t$.

当 $0 \leq k \leq n+1$ 时有 $c_k = c_{n-k+1}$, 因此序列 $\{c_k = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-2}\}$ 是对称的，并且满足 $c_0 \leq \cdots \leq c_{\frac{n}{2}} = c_{\frac{n}{2}+1} \geq \cdots \geq c_{n+1}$ 如果 n 是偶数； $c_0 \leq \cdots \leq c_{\frac{n+1}{2}} \geq \cdots \geq c_{n+1}$ 如果 n 是奇数.

当 n 是偶数时，结论显然成立对 $n = 2, 4$. 接下来对 n 归纳证明. 假设 $n = 2m > 4$ 时，$t = m+1$. 当 $n = 2m+2$ 时，由假设条件和序列 $\{c_k\}$ $(0 \leq k \leq 2m+3)$ 的对称单峰性有： $b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_{m+2}, b_{m+5} \geq b_{m+4} \geq \cdots \geq b_{2m+2}$. 现在讨论 b_{m+2} 、 b_{m+3} 、 b_{m+4} 和 b_{m+5} 之间的关系.

$$
\begin{aligned}
& b_{m+2} - b_{m+3} \\
= \; & \left[\binom{2m+2}{m+2} - \binom{2m+2}{m+3}\right] \\
& - \left\{\left[\binom{2m}{m-1} - \binom{2m}{m-2}\right] + \left[\binom{2m-1}{m-3} - \binom{2m-1}{m-4}\right] + \cdots\right\} \\
= \; & \left\{\left[\binom{2m-1}{m} - \binom{2m-1}{m-3}\right] + \left[\binom{2m-2}{m-1} - \binom{2m-2}{m-4}\right] + \cdots\right\} \\
& - \left\{\left[\binom{2m-1}{m-3} - \binom{2m-1}{m-4}\right] + \left[\binom{2m-2}{m-5} - \binom{2m-2}{m-6}\right] + \cdots\right\} \\
> \; & 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& b_{m+3} - b_{m+4} \\
= \; & \left[\binom{2m+2}{m+3} - \binom{2m+2}{m+4}\right] + \left[\binom{2m+1}{m+1} - \binom{2m+1}{m+2}\right] \\
& - \left\{\left[\binom{2m}{m} - \binom{2m}{m-1}\right] + \left[\binom{2m-1}{m-2} - \binom{2m-1}{m-3}\right] + \cdots\right\} \\
= \; & \left\{\left[\binom{2m}{m-1} - \binom{2m}{m-3}\right] + \left[\binom{2m-1}{m-1} - \binom{2m-1}{m-4}\right]\right. \\
& \left. + \left[\binom{2m-2}{m-2} - \binom{2m-2}{m-5}\right] + \cdots\right\} \\
& - \left\{\left[\binom{2m-1}{m-2} - \binom{2m-1}{m-3}\right] + \left[\binom{2m-2}{m-4} - \binom{2m-2}{m-5}\right] + \cdots\right\} \\
> \; & 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& b_{m+4} - b_{m+5} \\
= \; & \left[\binom{2m+2}{m+4} - \binom{2m+2}{m+5}\right] + \left[\binom{2m+1}{m+2} - \binom{2m+1}{m+3}\right] \\
& - \left\{\left[\binom{2m-2}{m-3} - \binom{2m-2}{m-4}\right] + \left[\binom{2m-3}{m-5} - \binom{2m-3}{m-6}\right] + \cdots\right\} \\
= \; & \left\{\left[\binom{2m}{m-1} - \binom{2m}{m-4}\right] + \left[\binom{2m-1}{m-2} - \binom{2m-1}{m-5}\right]\right. \\
& \left. + \left[\binom{2m-2}{m-3} - \binom{2m-2}{m-6}\right] + \cdots\right\} \\
& - \left\{\left[\binom{2m-2}{m-3} - \binom{2m-2}{m-4}\right] + \left[\binom{2m-3}{m-5} - \binom{2m-3}{m-6}\right] + \cdots\right\} \\
> \; & 0.
\end{aligned}
$$

因此有 $b_0 \le \cdots \le b_{m+1} \le b_{m+2} \ge b_{m+3} \ge \cdots \ge b_{2m+2}$, 即 $t = m + 2$.

当 $n = 2m - 1$ 为奇数时可采取类似的方法. 用 Maple 作者验证了只有 $n = 2m - 1 \le 27$ 时, $b_m > b_{m+1}$. □

如果将 τ 中相间的 "2" 变成 "11", 我们就得到了一个新的序列 τ'. 显然, $Q_{\tau'}$ 也是秩单峰的, 因为 $Q_{\tau'}$ 和 Q_τ 有相同的秩数. 分拆中的单峰性问题一直是组合学家关注的问题 (可参考文献 [71, 79, 75]). 事实上定理 2.6 和 2.7 告诉我们在整数有序分拆偏序集中, 以有序分拆 $(2, 2, \ldots, 2)$ 为最大元的子偏序集是秩单峰的.

2.2.4 一个猜想

对任意的 $\tau = (k, \ldots, k)$, $k > 2$, Q_τ 的秩数与二项式系数是相关联的. 从另一个角度来解释这一点可能更为清楚. 在所有的整数有序分拆中定义一个右因子序: 称 σ 是 τ 的一个右因子, 如果

(1) $\tau = v_1 v_2$,

(2) $\ell(v_2) = \ell(\sigma)$,

(3) $\sigma(i) \le v_2(i)$ 对所有的 $1 \le i \le \ell(\sigma)$ 成立.

用 L 表示这个偏序集. 不难验证 L 是一个分配格. 给定 $\tau \in L$, 令 $L_\tau = \{\sigma \in L \mid \sigma \preceq \tau\}$. 对于 $\tau = (k, \ldots, k)$, $k > 0$, 我们断言 L_τ 是一些布尔格的并. 一般来说, L_{τ_1} 中布尔格的个数等于 $|L_{\tau_2}|$, 这里 $\tau_1 = (2k, \ldots, 2k)$ 且 $\ell(\tau_1) = n$, $\tau_2 = (k, \ldots, k)$ 且 $\ell(\tau_2) = n$; $L_{\tau_1'}$ 中布尔格的个数等于 $|L_n|$ 加上 $L_{\tau_2'}$ 中布尔格的个数, 这里 $\tau_1' = (2k+1, \ldots, 2k+1)$ 且 $\ell(\tau_1') = n$, $\tau_2' = (2k+1, \ldots, 2k+1)$ 且 $\ell(\tau_2') = n - 2$, $L_n = \{\sigma \preceq \tau_3' \mid \ell(\sigma) = n\}$, 这里 $\tau_3' = (k+1, \ldots, k+1)$ 且 $\ell(\tau_3') = n$. L_τ 和 Q_τ 之间的关系是很显然的: L_τ 是 Q_τ 的一个子偏序集. 此外, $|L_\tau| = |Q_\tau|$ 且它们有相同的秩数.

当 $\tau = (k, \ldots, k)$ 且 $\ell(\tau) = n$ 时, 对于较小的 k 和 n, 作者已经验证了 Q_τ 的单峰性. 对于一般情况有下面的猜想

猜想 2.1: 当 $\tau = (k, \ldots, k)$, $k > 2$ 时, Q_τ 是秩单峰的.

2.3 本章小结

本章首先讨论所有 Dyck n- 路按包含关系构成的偏序集 $D_1(n)$, 描述 $D_1(n)$ 的结构; 证明什么样的区间是布尔格; 提出 Möbius 函数的一些应用, 并且给出 $D_1(n)$ 的

Hasse 图的更直观的构造. 在 $D_1(n)$ 的包含序关系基础之上文中又考虑 Dyck n- 路中峰的个数, 从而得到 Dyck n- 路上的另一个偏序集 $D_2(n)$, 并且验证 $D_2(n)$ 是秩对称的、秩单峰的且具有强 Sperner 性质.

本章重点研究所有 Dyck 路在模式包含关系下构成的偏序集 D 的结构性质. 首先给出 Dyck 路的序列表示 —Dyck 序列, 它是以 Catalan 数来计数的, 从而为 Catalan 数再增一种组合解释. 由 Dyck 路的序列表示自然地得到偏序集 D 的序列表示, 从中可以看到 Dyck 路偏序集是 Sagan 和 Vatter 定义的扩展子字序的特殊情况, 但包含他们重点研究的整数有序分拆偏序集作为特例. 根据这个观察可直接推出 D 的 Möbius 函数. 接下来采用结构分解的办法建立秩函数的 Möbius 反演公式, 得到偏序集秩函数的另一种表达. 最后证明其中一类子偏序集具有秩单峰性和 Sperner 性质.

3 着色布尔格的交性质

3.1 定义

设 N 是一个选定的有限集合， $N^{[n]}$ 表示从 $[n]$ 到 N 的所有映射的集合. 令 $\mathfrak{p}_n \subseteq N^{[n]}$, 那么 $\mathfrak{p}_n$ 可以看作是对集合 $[n]$ 的一组着色. 称对 $(A, f|_A)$ 为一个 *着色集*, 这里 $A \subseteq [n]$, $f \in \mathfrak{p}_n$, $f|_A$ 表示 f 在 A 上的限制. 在不引起混淆的情况下，把 $(A, f|_A)$ 简写为 (A, f). 令 $\mathfrak{q}_n = [q]^{[n]}$, 其中 q 是一个 ≥ 2 的正整数. 令 $\mathfrak{s}_n = S_n$, $[n]$ 上的全体置换构成的对称群. 如果 $\mathfrak{p}_n$ 为空集, 则着色集 $(A, f|_A)$ 即为普通的集合；如果 $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{q}_n$, 则着色集 $(A, f|_A)$ 即为 Bollobás 和 Leader 定义的带符号集合；如果 $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{s}_n$, 则着色集 $(A, f|_A)$ 即为 Ku 和 Leader 定义的部分置换. 这里我们称带符号集合为 *全着色集*, 部分置换为 *单着色集*.

用 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n)$ 表示由着色集 $(A, f|_A)$ 构成的集合. 显然， $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n)$ 是由着色 $\mathfrak{p}_n$ 来决定的. 在 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n)$ 上定义一个偏序 "$\leq$": 对任意 (A, f), $(B, g) \in \mathcal{B}(\mathfrak{p}_n)$, $(A, f) \leq (B, g)$ 当且仅当 $A \subseteq B$, $f = g|_A$. 对于偏序集 $(\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n), \leq)$, 简记为 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n)$, 不难看到:

- $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n)$ 是分次的，其秩函数为 $\rho((A, f)) = |A|$. 用 $\mathcal{B}_k(\mathfrak{p}_n)$ 表示 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n)$ 的第 k 个秩集.

- $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n)$ 是普通的布尔格的一种推广，但不是一个格.

这里我们把偏序集 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n)$ 称为 *着色布尔格*. 相应地，称偏序集 $\mathcal{B}(\mathfrak{q}_n)$ 为 *全着色布尔格*, 称偏序集 $\mathcal{B}(\mathfrak{s}_n)$ 为 *单着色布尔格*.

给定一个原子 $\alpha \in \mathcal{B}_1(\mathfrak{p}_n)$, 用 $S_k(\alpha) = \{(A, f) \in \mathcal{B}_k(\mathfrak{p}_n) : (A, f) \geq \alpha\}$ 表示一个 *k- 星*. 令 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(\mathfrak{p}_n)$. 如果对任意的 (A, f), $(B, g) \in \mathcal{F}$, 都存在一个 $x \in A \cap B$ 使得 $f(x) = g(x)$, 则称 $\mathcal{F}$ 是一个 *交族*. 记 $a_k = |\{(A, f) \in \mathcal{F} : |A| = k\}|$, $k = 1, 2, \ldots, n$, 称序列 $(a_1, \ldots, a_n)$ 为 $\mathcal{F}$ 的 *侧面*.

对任意 $A \subseteq [n]$, 定义 $[\mathfrak{p}_n]_A = \{(A,f) : (A,f) \in \mathcal{B}(\mathfrak{p}_n)\}$. 如果 $|[\mathfrak{p}_n]_A|$ 仅仅依赖于 $|A|$, 那么称 $\mathfrak{p}_n$ 是*正则的*. 如果 $|A| = k$, 就用 $[\mathfrak{p}_n]_k$ 表示 $|[\mathfrak{p}_n]_A|$, 这样 $|\mathcal{B}_k(\mathfrak{p}_n)| = \binom{n}{k}[\mathfrak{p}_n]_k$. 前面提到的 $\mathfrak{q}_n$ 和 $\mathfrak{s}_n$ 都是正则的, 且 $[\mathfrak{q}_n]_k = q^k$, $[\mathfrak{s}_n]_k = \frac{n!}{(n-k)!}$. $\mathfrak{p}_n$ 的正则性蕴涵 $|\mathcal{S}_k(\alpha)| = \binom{n-1}{k-1}[\mathfrak{p}_{n-1}]_{k-1}$ 对某个原子 α 成立.

此外, 称 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n)$ 具有*秩 k 上的局部 EKR 性质*, 如果对 $[n]$ 中的任意 k- 子集 A, $[\mathfrak{p}_n]_A$ 都具有 EKR 性质, 即有一个 $x_0 \in A$ 和一个 $y_0 \in N$ 使得 $\{(A,f) : f(x_0) = y_0\}$ 是 $[\mathfrak{p}_n]_A$ 中的一个最大交族.

例 3.1: *由定理 1.7 知 $\mathcal{B}(\mathfrak{q}_n)$ 具有秩 n 上的 EKR 性质. 回顾 $\mathfrak{q}_n = [q]^{[n]}$. 由于 q 与 n 是无关的, 从而 $\mathcal{B}(\mathfrak{q}_n)$ 具有秩 $k = 1,2,\ldots,n$ 上的局部 EKR 性质. 我们确信 $\mathcal{B}(\mathfrak{s}_n)$ 也具有秩 $k = 1,2,\ldots,n$ 上的局部 EKR 性质, 但它不能从秩 n 上的 EKR 性质推导出, 因为 $\mathfrak{s}_n$ 的定义域和值域是相关的.*

注记 3.1: *一般来说, 局部 EKR 性质不能蕴涵 EKR 性质. 例如, 当 $\mathfrak{p}_n$ 是空集时, $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n)$ 是普通的布尔格 B_n. 对每个 $A \subseteq [n]$, $|A| > n/2$, $[\mathfrak{p}_n]_A$ 显然具有 EKR 性质, 但 B_n 不具有秩 $> n/2$ 上的 EKR 性质.*

3.2 全着色布尔格的交性质

由定理 1.7 知道全着色布尔格 $\mathcal{B}(\mathfrak{q}_n)$ 具有 EKR 性质和交族极值结构的唯一性. 实际上它也满足秩 n 上的 LYM- 型不等式, 并且这个结论也是已经知道的. 为了说明这个问题需要介绍下面的概念: 令 M_1, $M_2, \ldots$, M_n 是 n 个具有相同势 q 的彼此不交的集合, 即 $M_i = \{x_{i,1}, \ldots, x_{i,q}\}$, $i = 1, \ldots, n$. 定义集合

$$\mathcal{B}(n,q) = \{C \subseteq M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n : |C \cap M_i| \leq 1,\ i = 1, \ldots, n\} \tag{3.2.1}$$

按包含关系构成的偏序集为*广义布尔格*. 一个 q- 符号 k- 集合能够表示成广义布尔格中的一个元素. 给定一个 k- 集合 $C \in \mathcal{B}(n,q)$, $C = \{x_{i_1,j_1}, \ldots, x_{i_k,j_k}\}$, 定义唯一的一个 q- 符号 k- 集合 (A,f), 这里 $A = \{i_1, \ldots, i_k\}$, $f(i_t) = j_t$, $t = 1, \ldots, k$. 显然广义布尔格与全着色布尔格是同构的, 而且在 $\mathcal{B}(n,q)$ 中两个元素是相交的当且仅当与其对应的 q- 符号集合是相交的. Deza 和 Frankl [22] 在 1983 年证明了下面的结论: 如果 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{B}(n,q)$ 中的一个 k-uniform 交族, 这里 $q \geq 2$, $k = 1,2,\ldots,n$, 那么 $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}q^{k-1}$. 该结论与定理 1.7 的第一部分是等价的. Engel [24] 建立了广义布尔格中交反链的一个 LYM- 型不等式, 加强了 Deza 和 Frankl 的结果.

定理 3.1: (Engel) 假设 $q \geq 2$. 令 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(n,q)$ 是一个交反链，侧面为 $(a_1,\ldots,a_n)$, 则

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\binom{n-1}{k-1} q^{k-1}} \leq 1.$$

Erdös, Faigle 和 Kern [27] 在 1992 年用群理论的办法证明了定理 3.1. $\mathcal{B}(n,q)$ 与 $\mathcal{B}(\mathfrak{q}_n)$ 的同构告诉我们 $\mathcal{B}(\mathfrak{q}_n)$ 满足秩 n 上的 LYM- 型不等式.

3.3 单着色布尔格的交性质

定理 1.3 和定理 1.5 告诉我们单着色布尔格 $\mathcal{B}(\mathfrak{s}_n)$ 具有 EKR 性质，定理 1.4 和定理 1.6 告诉我们 $\mathcal{B}(\mathfrak{s}_n)$ 具有秩 m 上的唯一性，$m = 8,\ldots,n-3,n$. 那么 $\mathcal{B}(\mathfrak{s}_n)$ 是否具有交族极值结构的唯一性呢？也就是说猜想 1.1 是否成立呢？ $\mathcal{B}(\mathfrak{s}_n)$ 是否满足某一个 LYM- 型不等式呢？对这些问题本节做出了肯定的回答：猜想 1.1 是成立的，并且 $\mathcal{B}(\mathfrak{s}_n)$ 满足秩 $n-1$ 上的一个 LYM- 型不等式.

这里使用的证明技巧是基于文献 [13, 39, 49] 中的思想，其最终都来于 Katona [46] 所使用的圈序思想.

令 σ 是 $[n]$ 上的一个圈序. 称 σ 包含一个子集 A, 如果 A 的元素在圈序 σ 中是连续的，即 A 是 σ 的一个区间. 对于一个子集族 $\mathcal{F}$, 令 $\mathcal{F}_\sigma$ 表示 $\mathcal{F}$ 中包含在 σ 里的子集构成的集合. 下面的引理对 Katona 给出 EKR 定理的经典证明是非常关键的.

引理 3.1: (Katona) 令 σ 是 $[n]$ 上的一个圈序，$\mathcal{F}$ 是 $[n]$ 上的 k-uniform 交族，$2k \leq n$. 那么 $|\mathcal{F}_\sigma| \leq k$. 等式成立蕴含 $\mathcal{F}_\sigma$ 由 σ 中包含一个固定点的所有 k- 区间构成.

正如 Ku 和 Leader 所定义的，$[n]\times[n]$ 的一个 圈序 是指一个双射 $\sigma : [n]\times[n] \to [n^2]$. 给定一个圈序 σ, 我们可以以一种自然的方法把 $[n]\times[n]$ 中的元素排在一个长为 n^2 的圈上. 令 k, n 是正整数， $k \leq n-1$. 圈序中的一个 k- 区间 是指 $[n]\times[n]$ 中 k 个元素 $(x_1,\varepsilon_1),\ldots,(x_k,\varepsilon_k)$ 的序列，满足 $\sigma(x_{i+1},\varepsilon_{i+1}) = \sigma(x_i,\varepsilon_i)+1 \pmod{n^2}$, $1 \leq i \leq k-1$. 用 $[(x_1,\varepsilon_1),\ldots,(x_k,\varepsilon_k)]$ 表示这个 k- 区间. 一个单着色 k- 集 (即 k- 部分置换) (A,f) 与圈序 σ 是 相容的, 记为 $(A,f) \prec \sigma$, 如果圈序中有一个 k- 区间 $[(x_1,\varepsilon_1),\ldots,(x_k,\varepsilon_k)]$ 使得 $x_i \in A$, $f(x_i) = \varepsilon_i$ 对 $i = 1,2,\ldots,k$ 成立.

Ku 和 Leader 构造的 $n!^2$ 个良圈序对本节的讨论起到至关重要的作用. 定义 标准的 良圈序 τ: $\tau(x,\varepsilon) = x + dn$, 这里 $d = \varepsilon - x \pmod{n}$. 定义其它的良圈序 $\tau_{\pi\pi'}$: $\tau_{\pi\pi'}(x,\varepsilon) = \tau(\pi(x),\pi'(\varepsilon))$, 这里 π, $\pi' \in S_n$. 记这些良圈序的集合为 $\mathcal{C}_n$.

引理 3.2: 令 $k \le n-1$ 是一个正整数，则每个单着色 k- 集恰好与 $\mathcal{C}_n$ 中 $n^2k!(n-k)!^2$ 个良圈序相容.

证明: 令 $(A,f) \in \mathcal{B}_k(\mathfrak{s}_n)$, $A = \{a_1,\dots,a_k\}$, $f(A) = \{b_1,\dots,b_k\}$, 这里 $b_i = f(a_i)$, $i = 1,\dots,k$. 则对于一个 $\sigma \in \mathcal{C}_n$, (A,f) 与 σ 是相容的当且仅当 σ 有一个 k- 区间 $[(x_1,\varepsilon_1),\dots,(x_k,\varepsilon_k)]$, 使得 $\{(x_1,\varepsilon_1),\dots,(x_k,\varepsilon_k)\} = \{(a_1,b_1),\dots,(a_k,b_k)\}$, 也就是说, 如果 $\sigma = \tau_{\pi\pi'}$, 那么在 τ 中有一个 k- 区间 $[(y_1,\theta_1),\dots,(y_k,\theta_k)]$ 使得作为两个集合

$$\{(y_1,\theta_1),\dots,(y_k,\theta_k)\} = \{(\pi(a_1),\pi'(b_1)),\dots,(\pi(a_k),\pi'(b_k))\}. \tag{3.3.1}$$

显然, τ 有 n^2 个 k- 区间, 对其中每一个, 有 $k!(n-k)!^2$ 个对 (π,π') 满足 (3.3.1), 证毕. □

定理 3.2: 令 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{B}(\mathfrak{s}_n)$ 中的任意一条交反链, 其侧面为 $(a_1,\dots,a_{n-1})$, 则

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{\binom{n-1}{k-1}\frac{(n-1)!}{(n-k)!}} \le 1.$$

证明: 下面的讨论是标准的, 可参考文献 [4, p.73]. 对每个 $\sigma \in \mathcal{C}_n$ 和每个单着色集 $(A_i,f_i) \in \mathcal{F}$, 定义

$$F(\sigma,(A_i,f_i)) = \begin{cases} \frac{1}{|A_i|} & \text{如果 } (A_i,f_i) \prec \sigma; \\ 0 & \text{否则}. \end{cases}$$

以两种不同的方法计算 $\sum_{i,\sigma} F(\sigma,(A_i,f_i))$. 首先我们有

$$\sum_{i,\sigma} F(\sigma,(A_i,f_i)) = \sum_{\sigma} \sum_{(A_i,f_i)\prec\sigma} \frac{1}{|A_i|}.$$

考虑内和, 这里 σ 是固定的. 从与 σ 相容的 (A_i,f_i) 中选取 (A_j,f_j) 使得

$$\rho(A_j,f_j) = \min_{(A_i,f_i)\prec\sigma} \rho(A_i,f_i).$$

显然, σ 中最多有 $|A_j|$ 个区间是彼此相交的, 即内和中最多有 $|A_j|$ 项, 每项 $\le \frac{1}{|A_j|}$. 因此内和最多不超过 $|A_j| \cdot \frac{1}{|A_j|} = 1$, 这样有

$$\sum_{i,\sigma} F(\sigma,(A_i,f_i)) \le \sum_{\sigma} 1 = n!^2. \tag{3.3.2}$$

另一方面,

$$\sum_{i,\sigma} F(\sigma,(A_i,f_i)) = \sum_i \frac{1}{|A_i|} n^2 |A_i|!(n-|A_i|)!^2 = \sum_{k=1}^{n-1} a_k n^2 (k-1)!(n-k)!^2. \qquad (3.3.3)$$

比较 (3.3.2) 和 (3.3.3) 即可得到所要的不等式. □

从定理 3.2 立即得出：如果 $\mathcal{F}$ 是一个 k-uniform 交族，则 $|\mathcal{F}| \le \binom{n-1}{k-1}\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$. 下面的定理证明了猜想 1.1.

定理 3.3: 固定 k, n 使得 $k \le n-1$. 假设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{B}(\mathfrak{s}_n)$ 中的一个 k-uniform 交族且 $|\mathcal{F}| = \binom{n-1}{k-1}\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$, 则 $\mathcal{F} = S_k(\alpha)$ 对某个原子 $\alpha \in \mathcal{B}_1(\mathfrak{s}_n)$.

证明: 根据引理 3.1 我们知道：对每个 $\sigma \in \mathcal{C}_n$, 最多有 k 个 k- 区间可能是彼此相交的，因为 $2k < n^2$ (注 [50, p.70] 给出了这个结论的证明，这里不做详细解释). 假设 $|\mathcal{F}| = \binom{n-1}{k-1}\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$, 那么每个 $\sigma \in \mathcal{C}_n$ 一定恰好包含 $\mathcal{F}$ 中的 k 个成员. 又因为与这 k 个成员对应的 k- 区间必须是两两相交的，所以这些区间一定包含 $[n]\times[n]$ 中的一个固定元素，用 $(x^{(\sigma)}, \varepsilon^{(\sigma)})$ 来表示这个固定元 (依赖于 $\mathcal{F}$), 称 σ 中包含 $(x^{(\sigma)}, \varepsilon^{(\sigma)})$ 的每个 k- 区间为一个 $\mathcal{F}$- 区间，它恰好对应 $\mathcal{F}$ 中的一个成员.

考虑标准圈序 τ. 不失一般性，假设 $(x^{(\tau)}, \varepsilon^{(\tau)}) = (n,n)$, 则 τ 的 $(2k-1)$- 区间 $[(n-k+1, n-k+1), \ldots, (n,n), (1,2), (2,3), \ldots, (k-1,k)]$ 包含了 k 个 $\mathcal{F}$- 区间.

令 $\mathcal{C}'_n$ 表示良圈序 $\tau_{\pi\pi'}$ 的集合，这里 $\pi(n)=n, \pi'(n)=n$. 我们断言 $(x^{(\tau_{\pi\pi'})}, \varepsilon^{(\tau_{\pi\pi'})}) = (n,n)$ 对每个 $\tau_{\pi\pi'} \in \mathcal{C}'_n$ 成立.

首先证明 $(x^{(\tau_{\pi\pi})}, \varepsilon^{(\tau_{\pi\pi})}) = (n,n)$. 令 $I = \{(i,i) : 1 \le i \le n-1\}$, $\bar{I} = [n]\times[n] \setminus (I \cup \{(n,n)\})$, 则 $(\pi\times\pi)(I) = \{(\pi(i),\pi(i)) : 1 \le i \le n-1\} = I$, $(\pi\times\pi)(\bar{I}) = \bar{I}$. 假设 $(x^{(\tau_{\pi\pi})}, \varepsilon^{(\tau_{\pi\pi})}) \ne (n,n)$, 则 $(x^{(\tau_{\pi\pi})}, \varepsilon^{(\tau_{\pi\pi})}) \in I$ 或 $(x^{(\tau_{\pi\pi})}, \varepsilon^{(\tau_{\pi\pi})}) \in \bar{I}$. 如果是前者，则 $\tau_{\pi\pi}$ 有一个包含在 I 中的 $\mathcal{F}$- 区间，它显然与 $\mathcal{F}$- 区间 $[(n,n),(1,2),\ldots,(k-1,k)]$ 是不相交的；如果是后者，则 $\tau_{\pi\pi}$ 有一个包含在 $\bar{I}$ 中的 $\mathcal{F}$- 区间，它显然与 $\mathcal{F}$- 区间 $[(n-k+1,n-k+1),\ldots,(n,n)]$ 是不相交的. 两种情况下均产生了矛盾.

现在假设 $(x^{(\tau_{\pi\pi'})}, \varepsilon^{(\tau_{\pi\pi'})}) \ne (n,n)$ 对某个 $\tau_{\pi\pi'} \in \mathcal{C}'_n$, 这里 $\pi \ne \pi'$, 则 $\tau_{\pi\pi'}$ 有一个 $\mathcal{F}$- 区间，记为 J, 它不包含 (n,n). 从前面的讨论我们知道 $J \not\subset I$ 且 $J \not\subset \bar{I}$. 令 $I \cap J = \{(a_1,a_1),\ldots,(a_r,a_r)\}$, 这里 $1 \le r < k$. 定义一个置换 π 使得 $\pi^{-1}(i) = a_i$ 对 $i \in [n]$ 且 $a_n = n$, 则 $\tau_{\pi\pi} \in \mathcal{C}'_n$ 并且 $\tau_{\pi\pi}$ 有一个包含在 $(n-1)$- 区间 $[(a_{r+1},a_{r+1}),\ldots,(n,n),(a_1,a_2),\ldots,(a_{r-1},a_r)]$ 中的 $\mathcal{F}$- 区间. 显然 J 与这个 $(n-1)$- 区间是不相交的. 又推出一个矛盾.

到现在为止我们已经知道 $(x^{(\tau_{\pi\pi'})},\varepsilon^{(\tau_{\pi\pi'})})=(x^{(\tau)},\varepsilon^{(\tau)})=(n,n)$ 对每个 $\tau_{\pi\pi'}\in\mathcal{C}'_n$ 成立. 从引理 3.2 知：如果 (A,f) 是任意一个选定的单着色 k- 集且满足 $n\in A$, $f(n)=n$, 则有 $k!(n-k)!^2$ 个对 (π,π') 使得 $\tau_{\pi\pi'}\in\mathcal{C}'_n$ 且 $(A,f)\prec\tau_{\pi\pi'}$. 由此得出 $\mathcal{F}$ 由所有这样的单着色 k- 集 (A,f) 构成， $n\in A$ ， $f(n)=n$. 证毕. □

3.4 无不动点着色布尔格的交性质

本节将讨论无不动点着色布尔格的 EKR 性质、交族极值结构的唯一性以及一个 LYM- 型不等式. 定理的证明思想来源于文献 [13, 39, 55].

令 $\mathfrak{d}_n=\{f\in[n]^{[n]}\mid f(i)\neq i\}$. 一个 *无不动点着色 r- 集* 是一个对 $(A,f|_A)$, 这里 $A\subseteq[n]$ 是一个 r- 集合， $f\in\mathfrak{d}_n$, 简记为 (A,f). 用 $\mathcal{B}(\mathfrak{d}_n)$ 表示 *无不动点着色布尔格*.

与上一节定义的概念类似，用 Ω_n 表示集合 $([n]\times[n])\setminus\{(1,1),(2,2),\ldots,(n,n)\}$. Ω_n 的一个 *圈序* σ 是一个从 Ω_n 到 $[n^2-n]$ 上的双射. 圈序 σ 中的一个 *r- 区间* 是指 Ω_n 中 r 个元素 $(x_1,\varepsilon_1),\ldots,(x_r,\varepsilon_r)$ 构成的一个序列，满足 $\sigma(x_{i+1},\varepsilon_{i+1})=\sigma(x_i,\varepsilon_i)+1\pmod{n^2-n}$, $1\le i\le r-1$. 用 $[(x_1,\varepsilon_1),\ldots,(x_r,\varepsilon_r)]$ 表示这个 r- 区间.

一个无不动点着色 r- 集 (A,f) 与圈序 σ 是 *相容的*, 记为 $(A,f)\prec\sigma$, 如果 σ 有一个 r- 区间 $[(x_1,\varepsilon_1),\ldots,(x_r,\varepsilon_r)]$ 使得 $x_i\in A$, 且 $f(x_i)=\varepsilon_i$ 对 $i=1,2,\ldots,r$ 成立. 在这种情况下，称这个 r- 区间对应无不动点着色 r- 集 (A,f).

称圈序 σ 是一个 *良圈序*, 如果对每个 $x\in[n]$ 和 $\varepsilon\in[n]\setminus\{x\}$, 有一个 $\varepsilon'\in[n]\setminus\{x\}$ 使得 $\sigma(x,\varepsilon)+n=\sigma(x,\varepsilon')$. 从这个定义不难看出：如果一个圈序 σ 是良圈序，则它的每个 r- 区间恰好对应一个无不动点着色 r- 集.

称下面的圈序 τ 是 *标准的*, 如果它满足

$$\tau(i,j)=\begin{cases} i+(j-1)n & \text{当 } 1\le j<i \text{ 时;}\\ i+(j-2)n & \text{当 } i<j\le n \text{ 时.}\end{cases}\tag{3.4.1}$$

显然， τ 是良的且满足下面的性质：

1. 当 $\tau(x,\varepsilon)\in[kn+1,(k+1)n]$, $k=0,1,\ldots,n-2$ 时， $\tau(x,\varepsilon)$ 关于 x 是严格增加的；
2. 对每个固定的 $x\in[n]$, $\tau(x,\varepsilon)$ 关于 ε 是严格增加的.

对某个固定的 $i\in[n]$, 令 $S_{n,i}$ 表示 S_n 中保 i 不变的所有置换构成的子群. 给定一个 $\pi=a_1a_2\cdots a_n\in S_n$, 即 $\pi(i)=a_i$, 则对任意 $\lambda_i\in S_{n,i}$, $\pi\lambda_i$ 演绎出一个从 $[n]\setminus\{i\}$

到 $[n]\setminus\{a_i\}$ 的双射.

给定一个 $\pi\in S_n$ 和一个 n- 元组 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in S_{n,1}\times\cdots\times S_{n,n}$, 定义

$$\tau_{\pi\lambda}(i,j)=\tau(\pi(i),\pi\lambda_i(j)).$$

不难验证 $\tau_{\pi\lambda}$ 也是 Ω_n 上的一个良圈序，并且，$[(x_1,\varepsilon_1),\ldots,(x_r,\varepsilon_r)]$ 是 $\tau_{\pi\lambda}$ 中的一个 r- 区间当且仅当 τ 有一个 r- 区间 $[(y_1,\epsilon_1),\ldots,(y_r,\epsilon_r)]$, 使得 $\pi(x_i)=y_i$, $\pi\lambda_{x_i}(\varepsilon_i)=\epsilon_i$, $i=1,2,\ldots,r$.

例 3.2: 令 $n=4$. 则 τ 把 Ω_4 的元素排在如下的圈中

$$\big((1,2),(2,1),(3,1),(4,1),(1,3),(2,3),(3,2),(4,2),(1,4),(2,4),(3,4),(4,3)\big).$$

令 $\pi=2413$, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$, 其中 $\lambda_1=1243$, $\lambda_2=4213$, $\lambda_3=2431$, $\lambda_4=1324$, 则 $\tau_{\pi\lambda}$ 把 Ω_4 的元素排在如下的圈中

$$\big((3,4),(1,4),(4,2),(2,4),(3,2),(1,3),(4,1),(2,3),(3,1),(1,2),(4,3),(2,1)\big).$$

记 $n!(n-1)!^n$ 个良圈序的集合为 $\mathcal{C}_n$. 首先给出一个重要的引理

引理 3.3: 令 $r\le n$ 是一个正整数，则每个无不动点着色 r- 集恰好与 $\mathcal{C}_n$ 中 $(n^2-n)r!(n-r)!(n-2)!^r(n-1)!^{n-r}$ 个良圈序相容.

证明: 令 $(A,f)\in\mathcal{B}_r(\mathfrak{d}_n)$, 其中 $A=\{a_1,\ldots,a_r\}$, $f(A)=\{b_1,\ldots,b_r\}$, 这里 $b_i=f(a_i)$, $i=1,\ldots,r$. 则对 $\sigma\in\mathcal{C}_n$, $(A,f)\prec\sigma$ 当且仅当 σ 有一个 r- 区间 $[(x_1,\varepsilon_1),\ldots,(x_r,\varepsilon_r)]$, 使得 $\{(x_1,\varepsilon_1),\ldots,(x_r,\varepsilon_r)\}=\{(a_1,b_1),\ldots,(a_r,b_r)\}$. 换句话说，如果 $\sigma=\tau_{\pi\lambda}$, 则在 τ 中有一个 r- 区间 $[(i_1,j_1),\ldots,(i_r,j_r)]$ 使得作为两个集合有

$$\{(i_1,j_1),\ldots,(i_r,j_r)\}=\{(\pi(a_1),\pi\lambda_{a_1}(b_1)),\ldots,(\pi(a_r),\pi\lambda_{a_r}(b_r))\}. \tag{3.4.2}$$

显然，τ 有 n^2-n 个 r- 区间，且对其中每一个都有 $r!(n-r)!(n-2)!^r(n-1)!^{n-r}$ 个对 (π,λ) 满足 (3.4.2), 证毕. □

接下来给出本节的主要结果 — 定理 3.4 和定理 3.5.

定理 3.4: 令 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{B}_r(\mathfrak{d}_n)$ 的任意一条交反链，其侧面为 $(a_1,\ldots,a_n)$, 则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\binom{n-1}{k-1}(n-1)^{k-1}}\le 1.$$

证明: 对每个 $\sigma \in \mathcal{C}_n$ 和 $\mathcal{F}$ 中每个无不动点着色 r- 集 (A_i, f_i), 定义

$$G(\sigma,(A_i,f_i)) = \begin{cases} \frac{1}{|A_i|} & \text{如果 } (A_i,f_i) \prec \sigma; \\ 0 & \text{否则}. \end{cases}$$

以两种不同的方法计算 $\sum_{i,\sigma} G(\sigma,(A_i,f_i))$. 首先有

$$\sum_{i,\sigma} G(\sigma,(A_i,f_i)) = \sum_{\sigma} \sum_{(A_i,f_i)\prec\sigma} \frac{1}{|A_i|}.$$

考虑内和, 此时 σ 已经固定. 从与 σ 相容的 (A_i,f_i) 中选取 (A_j,f_j) 使得 $|A_j|$ 在所有 $|A_i|$ 中是最小的. 容易看出 σ 最多有 $|A_j|$ 个区间是两两相交的, 即内和最多有 $|A_j|$ 项, 每项都 $\le \frac{1}{|A_j|}$. 因此内和最多为 $|A_j| \cdot \frac{1}{|A_j|} = 1$, 这样有

$$\sum_{i,\sigma} G(\sigma,(A_i,f_i)) \le \sum_{\sigma} 1 = n!(n-1)!^n. \tag{3.4.3}$$

然而由引理 3.3 得

$$\sum_{i,\sigma} G(\sigma,(A_i,f_i)) = \sum_{k=1}^{n} a_k(n^2-n)(k-1)!(n-k)!(n-2)!^k(n-1)!^{n-k}. \tag{3.4.4}$$

比较 (3.4.3) 和 (3.4.4) 得 $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\binom{n-1}{k-1}(n-1)^{k-1}} \le 1$. □

定理 3.5: *固定 r, n 满足 $r \le n$. 令 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{B}(\mathfrak{d}_n)$ 中的一个 r-uniform 交族, 则 $|\mathcal{F}| \le \binom{n-1}{r-1}(n-1)^{r-1}$. 除了 $r = n = 3$, 等式成立当且仅当 $\mathcal{F} = S_r(\alpha)$ 对某个原子 $\alpha \in \mathcal{B}_1(\mathfrak{d}_n)$.*

证明: 从定理 3.4 立即得出: 如果 $\mathcal{F}$ 是一个 r-uniform 交族, 则 $|\mathcal{F}| \le \binom{n-1}{r-1}(n-1)^{r-1}$. 让我们来考虑等号成立的情况.

根据引理 3.1 我们知道: 给定一个 $\sigma \in \mathcal{C}_n$, 它最多有 r 个 r- 区间可能两两相交, 因为 $2r \le n^2 - n$. 假设 $r \le n$ 且 $|\mathcal{F}| = \binom{n-1}{r-1}(n-1)^{r-1}$, 则每个 $\sigma \in \mathcal{C}_n$ 一定恰好包含 $\mathcal{F}$ 中的 r 个成员, 因为对应的 r- 区间两两相交且 $2r \le n^2 - n$. 这些区间一定包含 Ω_n 中的一个固定元素, 用 $(x^{(\sigma)}, \varepsilon^{(\sigma)})$ 来表示这个固定元 (依赖于 $\mathcal{F}$). 称 σ 中每个包含 $(x^{(\sigma)}, \varepsilon^{(\sigma)})$ 的 r- 区间为一个 $\mathcal{F}$- 区间, 其对应 $\mathcal{F}$ 中的一个成员.

考虑标准圈序 τ. 不失一般性, 假设 $(x^{(\tau)}, \varepsilon^{(\tau)}) = (n,1)$, 则在 τ 中, $(2r-1)$- 区间 $[(n-r+1,1),\ldots,(n,1),(1,3),(2,3),(3,2)\ldots,(r-1,2)]$ (这里 $r < n$), 或

$[(1,2),(2,1),\ldots,(n,1),\ (1,3),(2,3),(3,2),\ldots,(n-1,2)]$ (这里 $r=n$), 包含 r 个 $\mathcal{F}$- 区间.

首先把 τ 分解成 $n-1$ 个 n- 区间，记作 I_1, I_2, $\ldots$, I_{n-1}, 其中

$$I_j=[(1,j+1),(2,j+1),\ldots,(j,j+1),(j+1,j),\ldots,(n,j)].$$

则

$$\tau(I_j)=\{\tau(x,\varepsilon)|(x,\varepsilon)\in I_j\}=\{i+(j-1)n:i=1,2,\ldots,n\}.$$

从定义我们看到对每个 $(i,j)\in\Omega_n$, 如果 $i>j$, 则 $(i,j)\in I_j$; 如果 $i<j$, 则 $(i,j)\in I_{j-1}$.

用 $\mathcal{C}_n'$ 表示所有良圈序 $\tau_{\pi\lambda}$ 的集合，这里 $\pi\in S_{n,n}$ 满足 $\tau_{\pi\lambda}(I_j)=\tau(I_j)$, $j=1,2,\ldots,n-1$. 我们有下面的结论

Claim 1. 对每个 $\pi\in S_{n,n}$, 有一个 n- 元组 λ 使得 $\tau_{\pi\lambda}\in\mathcal{C}_n'$.

事实上，给定一个 $\pi\in S_{n,n}$, 以下面的方式定义 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$: 对任意的 $(i,j)\in\Omega_n$

(i) 如果 $\pi(i)=i$, 则 $\pi\lambda_i=\mathrm{id}$, 单位置换.

(ii) 如果 $\pi(i)<i$, 则

$$\pi\lambda_i(j)=\begin{cases} j & \text{如果 } j<\pi(i) \text{ 或 } j>i; \\ j+1 & \text{如果 } \pi(i)\le j<i. \end{cases} \tag{3.4.5}$$

(iii) 如果 $\pi(i)>i$, 则

$$\pi\lambda_i(j)=\begin{cases} j & \text{如果 } j<i \text{ 或 } j>\pi(i); \\ j-1 & \text{如果 } i<j\le\pi(i). \end{cases} \tag{3.4.6}$$

不难验证对每个 $i=1,2,\ldots,n$, $\pi\lambda_i$ 是一个从 $[n]\setminus\{i\}$ 到 $[n]\setminus\{\pi(i)\}$ 的双射. 为了证明 Claim 1 只需验证对每个 $(i,j)\in\Omega_n$, (i,j) 和 $(\pi(i),\pi\lambda_i(j))$ 属于同一个 n- 区间 I_j 或 I_{j-1}. 如果 $\pi(i)=i$, 结论是显然的. 现在假设 $\pi(i)\neq i$, 分两种情况考虑. 首先假设 $(i,j)\in I_j$, 则 $j<i$ 且 $\tau(i,j)=i+(j-1)n$. 由 (3.4.5), (3.4.6) 和 (3.4.1) 有 $\tau_{\pi\lambda}(i,j)=\tau(\pi(i),\pi\lambda_i(j))=\pi(i)+(j-1)n$ 成立当 $j<\pi(i)$ 或 $\pi(i)\le j<i$ 时，由此得出 $\tau_{\pi\lambda}(i,j)\in I_j$. 接下来假设 $(i,j)\in I_{j-1}$, 则 $j>i$ 且 $\tau(i,j)=i+(j-2)n$. 再由

(3.4.5), (3.4.6) 和 (3.4.1) 有 $\tau_{\pi\lambda}(i,j)=\tau(\pi(i),\pi\lambda_i(j))=\pi(i)+(j-2)n$ 成立当 $j>\pi(i)$ 或 $i<j\le\pi(i)$ 时，由此得出 $\tau_{\pi\lambda}(i,j)\in I_{j-1}$.

Claim 2. 对 $\tau_{\pi\lambda}\in\mathcal{C}'_n$, 有 $(x^{(\tau_{\pi\lambda})},\varepsilon^{(\tau_{\pi\lambda})})=(n,1)$.

假设 $(x^{(\tau_{\pi\lambda})},\varepsilon^{(\tau_{\pi\lambda})})\neq(n,1)$. 如果 $(x^{(\tau_{\pi\lambda})},\varepsilon^{(\tau_{\pi\lambda})})\in I_1$, 则 $\tau_{\pi\lambda}$ 有一个 $\mathcal{F}$- 区间包含在 $\{(n,n-1)\}\cup I_1\setminus\{(n,1)\}$ 中，它显然与 $\mathcal{F}$- 区间 $[(n,1),(1,3),(2,3),(3,2),\ldots,(r-1,2)]$ 是不相交的；如果 $(x^{(\tau_{\pi\lambda})},\varepsilon^{(\tau_{\pi\lambda})})\notin I_1$, 则 $\tau_{\pi\lambda}$ 有一个 $\mathcal{F}$- 区间包含在某个 I_j 中，$j\neq1$, 它显然与包含在 I_1 中的 $\mathcal{F}$- 区间是不相交的. 两种情况均导出矛盾，所以 Claim 2 成立.

令 $\mathcal{C}''_n$ 表示良圈序 $\tau_{\pi\lambda}$ 的集合，这里 $\pi\in S_{n,n}$ 满足 $\tau_{\pi\lambda}(I_1)=\tau(I_1)$. 显然 $\mathcal{C}'_n\subseteq\mathcal{C}''_n$.

Claim 3. 对每个 $\pi\in S_{n,n}$, 存在 $(n-2)!^n$ 个 n- 元组 λ 使得 $\tau_{\pi\lambda}\in\mathcal{C}''_n$, 并且对每个 $\tau_{\pi\lambda}\in\mathcal{C}''_n$, $(x^{(\tau_{\pi\lambda})},\varepsilon^{(\tau_{\pi\lambda})})=(n,1)$.

事实上，给定一个 $\pi\in S_{n,n}$, $\tau_{\pi\lambda}\in\mathcal{C}''_n$ 当且仅当对任意的 $(i,j)\in I_1$,

$$\pi\lambda_i(j)=\begin{cases}2 & \text{如果 } \pi(i)=1;\\ 1 & \text{如果 } \pi(i)>1.\end{cases}\tag{3.4.7}$$

注意 $\lambda_1(2)$ 和 $\lambda_i(1)$, $i=2,\ldots,n$, 被 (3.4.7) 所赋值，因此我们能够以 $(n-2)!^n$ 种方法来决定 λ. 假设有一个 $\tau_{\pi\lambda}\in\mathcal{C}''_n$ 使得 $(x^{(\tau_{\pi\lambda})},\varepsilon^{(\tau_{\pi\lambda})})\neq(n,1)$, 则 $\tau_{\pi\lambda}$ 有一个 $\mathcal{F}$- 区间，记作 J, 不包含 $(n,1)$. 从这个观察我们知道 $J\not\subset I_j$ 对所有的 j 成立. 令 $|I_1\cap J|=\{(a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots,(a_k,b_k)\}$, 其中 $1\le k<r$. 选取置换 π', 它满足 $\pi'^{-1}(i)=a_i$ 对 $i\in[n]$. 从 Claim 1 和 Claim 2 知有一个 n- 元组 λ' 使得 $\tau_{\pi'\lambda'}\in\mathcal{C}'_n$ 且 $(x^{\tau_{\pi'\lambda'}},\varepsilon^{\tau_{\pi'\lambda'}})=(n,1)$, 则 $\tau_{\pi'\lambda'}$ 有一个 $\mathcal{F}$- 区间包含在 n- 区间 $[(a_{k+1},b_{k+1}),\ldots,(n,1),(a_1,c_1),\ldots,(a_k,c_k)]$ 中，这里 $\{(a_{k+1},b_{k+1}),\ldots,(n,1)\}\subset I_1$, $\{(a_1,c_1),\ldots,(a_k,c_k)\}\subset I_2$. 显然 J 与这个 n- 区间是不相交的. 这个矛盾推出 $(x^{(\tau_{\pi\lambda})},\varepsilon^{(\tau_{\pi\lambda})})=(x^{(\tau)},\varepsilon^{(\tau)})=(n,1)$ 对任意的 $\tau_{\pi\lambda}\in\mathcal{C}''_n$ 都成立.

下面的断言将结束定理 3.5 的证明.

Claim 4. 任意一个 $(A,f)\in\mathcal{B}_r(\mathfrak{d}_n)$, 满足 $n\in A$ 且 $f(n)=1$, 都与某个圈序 $\tau_{\pi\lambda}\in\mathcal{C}''_n$ 相容.

确实如此，如果 $A=\{n,a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_{r-k-1}\}$ (这里可以假设 $k<r-1$) 且 $f(n)=1$, $f(a_i)=c_i$, $(a_i,c_i)\in I_1$ 对 $i=1,\ldots,k$, $f(b_j)=d_j$ 对 $j=1,\ldots,r-k-1$, 选取置换 π 使得 $\pi(n)=n$, $\pi(a_i)=n-i$, $\pi(b_j)=j$. 对这个 π, 选取一个 n- 元组 λ 满足 (3.4.7), 且满足 $\pi\lambda_{b_j}(d_j)=3$ 对 $j=1,2$, $\pi\lambda_{b_j}(d_j)=2$ 对 $j=3,4,\cdots,r-k-1$. 容易验

证 (A,f) 与圈序 $\tau_{\pi\lambda}\in C_n''$ 是相容的. □

3.5 着色的直积

令 $\mathfrak{p}_n$ 和 $\mathfrak{p}_n'$ 是两组着色. 作为两个集合我们考虑它们的直积 $\mathfrak{p}_n\times\mathfrak{p}_n'$. 它的元素 (f,g) 可以看作是 $[n]$ 上的一个映射. 这样我们从旧的着色布尔格得到了一个新的着色布尔格 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n\times\mathfrak{p}_n')=\{(A,f,g):A\subseteq[n],f\in\mathfrak{p}_n,g\in\mathfrak{p}_n'\}$. 从定义不难看出: $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n\times\mathfrak{p}_n')$ 和 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n'\times\mathfrak{p}_n)$ 是同构的; $\mathfrak{p}_n\times\mathfrak{p}_n'$ 是正则的如果 $\mathfrak{p}_n$ 和 $\mathfrak{p}_n'$ 都是正则的; $[\mathfrak{p}_n\times\mathfrak{p}_n']_k=[\mathfrak{p}_n]_k[\mathfrak{p}_n']_k$ 对 $1\le k\le n$ 恒成立. 更一般地, 可以考虑直积 $\mathfrak{p}_n^{(1)}\times\cdots\times\mathfrak{p}_n^{(m)}$. 记 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n^{(1)}\times\cdots\times\mathfrak{p}_n^{(m)})$ 中的一个元素为 $(A,f_1,\dots,f_m)$, 这里 $A\subseteq[n]$, $f_i\in\mathfrak{p}_n^{(i)}$, $i=1,\dots,m$.

把 $(A,f_1,\dots,f_m)$ 重新写成一个矩阵 $[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$ 的形式, 这里 $\alpha_i=(a_{1i},\dots,a_{mi})^T$ 是一个列向量, 定义

$$a_{ji}=\begin{cases} f_j(i) & \text{如果 } i\in A;\\ 0 & \text{如果 } i\notin A,\end{cases}\quad j=1,2,\dots,m.$$

$[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$ 的秩就等于非零向量 α_i 的个数. 令 $M(\mathfrak{p}_n^{(1)}\times\cdots\times\mathfrak{p}_n^{(m)})$ 表示所有矩阵的集合. 定义 $M(\mathfrak{p}_n^{(1)}\times\cdots\times\mathfrak{p}_n^{(m)})$ 上的一个序关系:

$$[\alpha_1,\dots,\alpha_n]\le[\beta_1,\dots,\beta_n] \text{ 当且仅当 } \alpha_i=0\ (\text{向量}) \text{ 或 } \alpha_i=\beta_i,\ i=1,2,\dots,n.$$

那么作为偏序集, $M(\mathfrak{p}_n^{(1)}\times\cdots\times\mathfrak{p}_n^{(m)})$ 与 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n^{(1)}\times\cdots\times\mathfrak{p}_n^{(m)})$ 是同构的, 因此它们都可以看作是函数格的推广 (参考文献 [6] 和 [30]).

定理 3.6: *令 $\mathfrak{p}_n$ 和 $\mathfrak{p}_n'$ 是两组正则的着色, k 是一个不大于 n 的正整数.*

(i) *如果 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n)$ 和 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n')$ 都具有秩 k 上的 EKR 性质, 并且其中之一具有秩 k 上的局部 EKR 性质, 那么 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n\times\mathfrak{p}_n')$ 也具有秩 k 上的 EKR 性质;*

(ii) *如果 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n)$ 和 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n')$ 都具有秩 k 上的唯一性, 那么 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n\times\mathfrak{p}_n')$ 也具有秩 k 上的唯一性;*

(iii) *如果 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n)$ 满足秩 k 上的 LYM- 型不等式, $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n')$ 具有秩 i 上的局部 EKR 性质, 其中 $1\le i\le k$, 那么 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n\times\mathfrak{p}_n')$ 也满足秩 k 上的 LYM- 型不等式.*

证明: (i) 令 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n\times\mathfrak{p}_n')$ 中的一个 k-uniform 交族. 令

$$\mathcal{F}_1=\{(A,f):\text{存在一个 } g\in\mathfrak{p}_n' \text{ 使得 } (A,f,g)\in\mathcal{F}\},\tag{3.5.1}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{(A, g) : \text{存在一个 } f \in \mathfrak{p}_n \text{ 使得 } (A, f, g) \in \mathcal{F}\}. \tag{3.5.2}$$

则 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 分别是 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n)$ 和 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}'_n)$ 中的 k-uniform 交族, 从而有 $|\mathcal{F}_1| \le \binom{n-1}{k-1}[\mathfrak{p}_{n-1}]_{k-1}$, $|\mathcal{F}_2| \le \binom{n-1}{k-1}[\mathfrak{p}'_{n-1}]_{k-1}$. 现在假设 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}'_n)$ 具有秩 k 上的局部 EKR 性质, 则对每个 $(A, f) \in \mathcal{F}_1$, 最多有 $[\mathfrak{p}'_{n-1}]_{k-1}$ 个 $g \in \mathfrak{p}'_n$ 使得 $(A, f, g) \in \mathcal{F}$, 其蕴含

$$|\mathcal{F}| \le \binom{n-1}{k-1}[\mathfrak{p}_{n-1}]_{k-1}[\mathfrak{p}'_{n-1}]_{k-1} = \binom{n-1}{k-1}[\mathfrak{p}_{n-1} \times \mathfrak{p}'_{n-1}]_{k-1}. \tag{3.5.3}$$

证毕.

(ii) 假设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n \times \mathfrak{p}'_n)$ 中一个最大的 k-uniform 交族, 即 (3.5.3) 中的等式成立. 这蕴含着 $|\mathcal{F}_1| = \binom{n-1}{k-1}[\mathfrak{p}_{n-1}]_{k-1}$ 和 $|\mathcal{F}_2| = \binom{n-1}{k-1}[\mathfrak{p}'_{n-1}]_{k-1}$, 因此 $\mathcal{F}_i$ 是一个星, 记作 $S_k(\alpha_i)$, $i = 1, 2$. 令 $\alpha_1 = (\{x_0\}, f_0) \in \mathcal{B}_1(\mathfrak{p}_n)$, $\alpha_2 = (\{y_0\}, g_0) \in \mathcal{B}_1(\mathfrak{p}'_n)$. 仔细分析后有 $x_0 = y_0$, $\mathcal{F} = S_k(\alpha)$, 其中 $\alpha = (\{x_0\}, f_0, g_0)$. 证毕.

(iii) 令 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}_n \times \mathfrak{p}'_n)$ 中的任意一条交反链, 其侧面为 $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. 令 $\mathcal{F}_1$ 如式 (3.5.1) 中所定义, 其侧面为 $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$, $\mathcal{F}_2$ 如式 (3.5.2) 中所定义. 因为 $\mathcal{B}(\mathfrak{p}'_n)$ 具有秩 i 上的局部 EKR 性质, 其中 $1 \le i \le k$, 所以有 $a_i \le b_i[\mathfrak{p}'_{n-1}]_{i-1}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{\binom{n-1}{i-1}[\mathfrak{p}_{n-1} \times \mathfrak{p}'_{n-1}]_{i-1}} &\le \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i[\mathfrak{p}'_{n-1}]_{i-1}}{\binom{n-1}{i-1}[\mathfrak{p}_{n-1}]_{i-1}[\mathfrak{p}'_{n-1}]_{i-1}} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i}{\binom{n-1}{i-1}[\mathfrak{p}_{n-1}]_{i-1}} \le 1,
\end{aligned}$$

证毕. □

作为定理 3.6 的一个应用考虑 $\mathcal{B}(\mathfrak{q}_n \times \mathfrak{s}_n)$. 已知对每个 $k \le n-1$, $\mathcal{B}(\mathfrak{q}_n)$ 和 $\mathcal{B}(\mathfrak{s}_n)$ 都具有秩 k 上的 EKR 性质, 秩 k 上的唯一性, 并且都满足秩 k 上的一个 LYM- 型不等式, $\mathcal{B}(\mathfrak{q}_n)$ 也具有秩 k 上的局部 EKR 性质. 从定理 3.6 我们立即得到下面的结论

推论 3.1: *令 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{B}(\mathfrak{q}_n \times \mathfrak{s}_n)$ 中的任意一条交反链, 其侧面为 $(a_1, \ldots, a_{n-1})$, 则*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{\binom{n-1}{k-1}\frac{(n-1)!}{(n-k)!}q^{k-1}} \le 1.$$

等式成立当且仅当有一个不大于 $n-1$ 的正整数 k 使得 $\mathcal{F}$ 是一个 k- 星.

3.6 本章小结

本章首先定义一个一般性的概念 — 着色集，它包含 Bollobás 和 Leader 定义的 q- 符号集合 (文中称为全着色集) 以及 Ku 和 Leader 定义的部分置换 (文中称为单着色集), 进而定义一个一般性的偏序集 — 着色布尔格，它是布尔格的一种推广. 接下来建立单着色集交反链的一个 LYM- 型不等式，由该不等式可立即推出 Ku 和 Leader 给出的 k- 部分置换交族的 EKR 定理 ($k < n$), 采用经典的 Katona 圈序方法解决他们提出的关于 k- 部分置换交族极值结构的唯一性的一个猜想. 然后给出着色集的又一个特例 — 无不动点着色集，证明无不动点着色布尔格具有 EKR 性质，交族极值结构的唯一性并且满足交反链的一个 LYM- 型不等式. 最后讨论着色的直积以及它上的交性质. 作为这个结论的应用，文中给出全着色和单着色直积的对应结果.

4 置换的交性质

本章将给出定理 1.3 和定理 1.4 的 Katona- 型证明. 记 $[a,b]=\{a,a+1,\dots,b\}$.

4.1 从圈序中构造置换

如第三章中提到的, $[n]\times[n]$ 的一个 *圈序* 是指一个双射 $\sigma:[n]\times[n]\to[n^2]$. 给定一个圈序 σ, 我们可以以一种自然的方法把 $[n]\times[n]$ 中的元素排在一个长为 n^2 的圈上. 令 k, n 是正整数, $k\le n$. 圈序中的一个 *k- 区间* 是指 $[n]\times[n]$ 中 k 个元素 $(x_1,\varepsilon_1),\dots,(x_k,\varepsilon_k)$ 的序列, 使得 $\sigma(x_{i+1},\varepsilon_{i+1})=\sigma(x_i,\varepsilon_i)+1 \pmod{n^2}$ 对 $1\le i\le k-1$ 成立, 用 $[(x_1,\varepsilon_1),\dots,(x_k,\varepsilon_k)]$ 表示这个 k- 区间.

对于 *标准的良圈序* τ, 本节依然采用 Ku 和 Leader 的定义: $\tau(x,\varepsilon)=x+dn$, 这里 $d=\varepsilon-x \pmod n$. 对于其它的良圈序 τ_π, 我们做如下的定义: $\tau_\pi(x,\varepsilon)=\tau(x,\pi(\varepsilon))$, 这里 $\pi\in S_n$. 记这些良圈序的集合为 $\mathcal{D}_n$.

令 $\tau_\pi\in\mathcal{D}_n$. 对于 τ_π 的一个 n- 区间 I, 称 I 是一个 (i,k)- 区间, 如果有指标 i 和 k, 其中 $1\le i\le n$, $0\le k<n$, 使得 $\tau_\pi(I)=[i+kn,i+kn+n-1]$. 换句话说, 如果 $I=[(i,\varepsilon_i),(i+1,\varepsilon_{i+1}),\dots,(n,\varepsilon_n),(1,\varepsilon_1),\dots,(i-1,\varepsilon_{i-1})]$, 则

$$\pi(\varepsilon_j)\equiv\begin{cases} k+j+1 \pmod n & \text{当 } 1\le j\le i-1 \text{ 时;}\\ k+j \pmod n & \text{当 } i\le j\le n \text{ 时.}\end{cases} \tag{4.1.1}$$

这里及后面的置换的所有的像和 ε_j 的角标 j 都是模 n 后的最小正余数.

从 (4.1.1) 中我们得到一个重要的观察:

(*) $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n\}=[n]$ 如果 $i=1$; $\varepsilon_i=\varepsilon_{i-1}$ 且 $\#\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n\}=n-1$ 如果 $i>1$.

根据这个观察有

(i) τ_π 的 (i,k)- 区间决定了唯一的一个置换 $\hat{\pi}_{i,k}$, 满足

$$\hat{\pi}_{i,k}(j) = \begin{cases} \varepsilon_j & \text{如果 } j \neq i; \\ \varepsilon_i^* & \text{如果 } j = i, \end{cases} \tag{4.1.2}$$

这里 $\varepsilon_i^* = [n] \setminus \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_{i+1}, \ldots, \varepsilon_n\}$. 称 $\hat{\pi}_{i,k}$ 与 τ_π 是相容的，记作 $\hat{\pi}_{i,k} \prec \tau_\pi$. 此外，由 (4.1.1) 得

$$\pi(\varepsilon_i^*) \equiv k+1 \pmod n. \tag{4.1.3}$$

(ii) 对某个固定的 k, $0 \le k \le n-1$, 假设 $[(1,\varepsilon_1), \ldots, (n,\varepsilon_n)]$ 是 τ_π 的一个 $(1,k)$- 区间. $[(1,\varepsilon_1),(2,\varepsilon_2),\ldots,(n,\varepsilon_n),(1,\varepsilon_2),(2,\varepsilon_3),\ldots,(n-1,\varepsilon_n),(n,\varepsilon_1)]$ 是 τ_π 中一个长为 $2n$ 的区间，则由 $(*)$ 知:

$$\begin{array}{rcl}
\hat{\pi}_{1,k} & = & \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\cdots\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n \\
\hat{\pi}_{2,k} & = & \varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_3\cdots\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n \\
\hat{\pi}_{3,k} & = & \varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n \\
\cdots & & \cdots \quad \cdots \\
\hat{\pi}_{n-1,k} & = & \varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\cdots\varepsilon_1 \ \ \varepsilon_n \\
\hat{\pi}_{n,k} = \hat{\pi}_{1,k+1} & = & \varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\cdots\varepsilon_n \ \ \varepsilon_1 \\
\hat{\pi}_{2,k+1} & = & \varepsilon_3\varepsilon_2\varepsilon_4\cdots\varepsilon_n \ \ \varepsilon_1 \\
\hat{\pi}_{3,k+1} & = & \varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n \ \ \varepsilon_1 \\
\cdots & & \cdots \quad \cdots \\
\hat{\pi}_{n-1,k+1} & = & \varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\cdots\varepsilon_2 \ \ \varepsilon_1 \\
\hat{\pi}_{n,k+1} = \hat{\pi}_{1,k+2} & = & \varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\cdots\varepsilon_1 \ \ \varepsilon_2 \\
\cdots & & \cdots \quad \cdots
\end{array} \tag{4.1.4}$$

因此，有 n^2-n 个置换与 $\mathcal{D}_n$ 中的一个圈序相容.

由 (4.1.4) 知如果 $\hat{\pi}_{1,k} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\cdots\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n$, 则对 $i=1,2,\ldots,n$,

$$\hat{\pi}_{i,k} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_i)\hat{\pi}_{1,k}, \tag{4.1.5}$$

$$\hat{\pi}_{1,k+i} = \varepsilon_{i+1}\cdots\varepsilon_n\varepsilon_1\ldots\varepsilon_i. \tag{4.1.6}$$

注意 $\hat{\pi}_{i,k}$ 的角标也是模 n 后的最小正余数.

4.2 两个重要的辅助引理

引理 4.1: *每个置换恰好与 $\mathcal{D}_n$ 中 n^2-n 个良圈序相容.*

证明: 令 $\hat{\pi}=\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n$ 是任意选定的置换. 由置换的构造知 $\hat{\pi}$ 可以从下面的 (i,k)- 区间 I_i 中得到, 这里 $i\in[n-1]$, $k\in[0,n-1]$,

$$I_i=[(i,\varepsilon_i^*),(i+1,\varepsilon_{i+1}),\ldots,(n,\varepsilon_n),(1,\varepsilon_1),\ldots,(i-1,\varepsilon_{i-1})],$$

其中 $\varepsilon_i^*=\varepsilon_i$ 如果 $i=1$, $\varepsilon_i^*=\varepsilon_{i-1}$ 如果 $i>1$. 由定义知: 对某个圈序 $\tau_\pi\in\mathcal{D}_n$, I_i 是 τ_π 的一个 (i,k)- 区间当且仅当 τ 有一个形为

$$[(i,a_i),(i+1,a_{i+1}),\ldots,(n,a_n)(1,a_1),\ldots,(i-1,a_{i-1})]$$

的 n- 区间使得

$$\pi(\varepsilon_j)=a_j \text{ 当 } j\in[n]\setminus\{i\} \text{ 时}. \tag{4.2.1}$$

显然, τ 有 $(n-1)n$ 个 (i,k)- 区间, 且对其中每个, 存在唯一的一个置换 π 满足 (4.2.1). 证毕. □

引理 4.2: *$\mathcal{D}_n$ 中的每个圈序最多包含 $\mathcal{F}$ 中的 $n-1$ 个置换. 如果这个界达到, 则存在 $i,j\in[n]$ 使得这 $n-1$ 个置换都将 i 映到 j.*

证明: 对任意的 $\tau_\pi\in\mathcal{D}_n$, 考虑 n^2-n 个与 τ_π 相容的置换 $\hat{\pi}_{i,k}$. 令 $k,k'\in[n]$ 且 $k\neq k'$. 令 $i\in[n-1]$. 从 (4.1.4), (4.1.5) 和 (4.1.6) 中得: 对任意的 $s\in[n]$, $\hat{\pi}_{i,k}(s)=\hat{\pi}_{i,k'}(s)$ 当且仅当有一个 $r\in[n]$ 使得 $\hat{\pi}_{1,k}(r)=\hat{\pi}_{1,k'}(r)$. 然而 (4.1.1) 蕴含 $\hat{\pi}_{1,k}(r)\neq\hat{\pi}_{1,k'}(r)$ 对每个 $r\in[n]$ 恒成立. 这样我们有 $\hat{\pi}_{i,k}(s)\neq\hat{\pi}_{i,k'}(s)$ 对所有的 $s\in[n]$ 成立. 因此 $\mathcal{F}$ 最多包含 $n-1$ 个与 τ_π 相容的置换.

现在假设 $\mathcal{F}$ 恰好包含 $n-1$ 个与 τ_π 相容的置换 $\hat{\pi}_{i,k_i}$, $i=1,2,\ldots,n-1$. 记 $k_1=k$. 不失一般性, 假设 $\hat{\pi}_{1,k}=\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$, 则由 (4.1.1) 推出

$$\pi(\varepsilon_j)=k+j \pmod n$$

对所有的 $j\in[n]$ 成立.

令

$$S=\{\hat{\pi}_{i,k_i}:i=1,2,\ldots,n-1\},$$

$$S_j = \{\hat{\pi} : \hat{\pi} \prec \tau_\pi \text{ 且 } \hat{\pi}(j) = \varepsilon_j\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

我们已经知道每个置换 $\hat{\pi}_{i,m}$ 恰好对应 τ_π 的一个 (i, m)- 区间 $[(i, \epsilon_i), \ldots, (n, \epsilon_n), (1, \epsilon_1), \ldots, (i-1, \epsilon_{i-1})]$, 则有

$$\pi(\epsilon_j^*) = \begin{cases} m+j+1 & (\mathrm{mod}\ n) \quad \text{当 } j < i \text{ 时;} \\ m+1 & (\mathrm{mod}\ n) \quad \text{当 } j = i \text{ 时;} \\ m+j & (\mathrm{mod}\ n) \quad \text{当 } j > i \text{ 时,} \end{cases} \tag{4.2.2}$$

这里 $\epsilon_j^* = \epsilon_j$ 当 $j \neq i$ 时, $\epsilon_i^* = [n] \setminus \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \ldots, \epsilon_n\}$. 对于一个固定的 $j \in [n]$, $\hat{\pi}_{i,m} \in S_j$ 当且仅当 $\epsilon_j^* = \hat{\pi}_{i,m}(j) = \varepsilon_j$, 或等价地 $\pi(\varepsilon_j) = \pi(\epsilon_j^*)$, 即

$$k+j \equiv \begin{cases} m+j+1 & (\mathrm{mod}\ n) \quad \text{当 } j < i \text{ 时;} \\ m+1 & (\mathrm{mod}\ n) \quad \text{当 } j = i \text{ 时;} \\ m+j & (\mathrm{mod}\ n) \quad \text{当 } j > i \text{ 时.} \end{cases}$$

该式蕴含: 当 $j > i$ 时, $m = k$; 当 $j = i$ 时, $m = k + j - 1 \pmod n$; 当 $j < i$ 时, $m = k - 1 \pmod n$. 这样我们有

$$S_j = \{\hat{\pi}_{1,k}, \ldots, \hat{\pi}_{j-1,k}, \hat{\pi}_{j,k+j-1}, \hat{\pi}_{j+1,k-1}, \ldots, \hat{\pi}_{n-1,k-1}\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

对 $i \in [2, n-1]$, 令 $r_i = k + i - 1 \pmod n$, $\hat{\pi}_{i,r_i}(j) = \epsilon_j^*$, 则由 (4.2.2) 和 $\pi(\varepsilon_j) = k + j \pmod n$, 容易得到

$$\hat{\pi}_{i,r_i}(j) = \epsilon_j^* = \begin{cases} \varepsilon_{i+j} & \text{当 } j < i \text{ 时;} \\ \varepsilon_i & \text{当 } j = i \text{ 时;} \\ \varepsilon_{i+j-1} & \text{当 } j > i \text{ 时,} \end{cases}$$

即

$$\hat{\pi}_{i,r_i} = \varepsilon_{i+1} \cdots \varepsilon_{2i-1} \varepsilon_i \varepsilon_{2i} \cdots \varepsilon_{i+n-1}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1. \tag{4.2.3}$$

继续证明 $S = S_j$ 对某个 $j \in [n]$ 成立. 假设 l 是最大的指标使得 $\hat{\pi}_{l,k} \in S$. 首先, 由 (4.2.3) 得如果 $i \neq i'$, 则 $\hat{\pi}_{i,r_i}(j) \neq \hat{\pi}_{i',r_{i'}}(j)$ 对任意的 $j \in [n]$ 成立. 因此最多有一个 $i \in [2, n-1]$ 满足 $\hat{\pi}_{i,r_i} \in S$. 接下来对任意的 $j \in [2, n-1]$, (4.1.5) 和 (4.1.6) 给出

$$\hat{\pi}_{j,k} = \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_j \varepsilon_1 \varepsilon_{j+1} \cdots \varepsilon_n, \tag{4.2.4}$$

$$\hat{\pi}_{j,k-1} = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{j-1}\varepsilon_n\varepsilon_j \cdots \varepsilon_{n-1}. \tag{4.2.5}$$

比较 (4.2.4) 和 (4.2.5) 有 $\hat{\pi}_{j,k-1} \cap \hat{\pi}_{l,k} = \phi$ 对 $j \le l+1$ 成立. 比较 (4.2.4), (4.2.5) 和 (4.2.3), 如果 $\hat{\pi}_{i,r_i} \in S$, 则 $\hat{\pi}_{j,k} \cap \hat{\pi}_{i,r_i} = \phi$ 对 $j \ge i$ 成立; $\hat{\pi}_{j,k-1} \cap \hat{\pi}_{i,r_i} = \phi$ 对 $j \le i$ 成立. 因此当 $l = 1$ 时, $S = S_1$ 如果 $\hat{\pi}_{2,r_2} \notin S$; $S = S_2$ 如果 $\hat{\pi}_{2,r_2} \in S$. 当 $1 < l \le n-1$ 时, $S = S_{l+1}$. 证毕. □

4.3 置换的交性质的 Katona- 型证明

下面将给出定理 1.3 和定理 1.4 的 Katona- 型证明. 对每个 $\sigma \in \mathcal{D}_n$ 和 $\mathcal{F}$ 中的每个置换 π_i, 定义

$$F(\sigma, \pi_i) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } \pi_i \prec \sigma; \\ 0 & \text{否则.} \end{cases}$$

以两种不同的方法计算 $\sum_{i,\sigma} F(\sigma, \pi_i)$. 首先从引理 4.2 有

$$\sum_{i,\sigma} F(\sigma, \pi_i) = \sum_{\sigma} \sum_{\pi_i \prec \sigma} 1 \le n!(n-1), \tag{4.3.1}$$

然而引理 4.1 告诉我们

$$\sum_{i,\sigma} F(\sigma, \pi_i) = \sum_{i} \sum_{\sigma} 1 = |\mathcal{F}|(n^2 - n). \tag{4.3.2}$$

比较 (4.3.1) 和 (4.3.2), 有 $|\mathcal{F}| \le (n-1)!$.

假设 $|\mathcal{F}| = (n-1)!$, 则每个 $\sigma = \tau_\pi \in \mathcal{D}_n$ 一定恰好包含 $\mathcal{F}$ 中的 $n-1$ 个置换. 用 $\mathcal{F}_\pi$ 表示这些置换的集合. 从引理 4.2 我们知道 $\mathcal{F}_\pi$ 中的所有置换都将 i 映到 j 对某个固定的对 $(i,j) \in [n] \times [n]$, 用 $\bigcap \mathcal{F}_\pi = (i,j)$ 表示.

注意标准圈序 $\tau = \tau_e$. 不失一般性, 假设 $\bigcap \mathcal{F}_e = (n,n)$. 用

$$(\pi^i)^{-1} = i \cdots (n-1) 1 \cdots (i-1) n$$

定义一个置换 π^i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. 现在对 i 归纳, 证明 $\bigcap \mathcal{F}_{\pi^i} = (n,n)$. 当 $i = 1$ 时断言是正确的, 因为 $\bigcap \mathcal{F}_{\pi^1} = \bigcap \mathcal{F}_e = (n,n)$. 假设 $\bigcap \mathcal{F}_{\pi^i} = (n,n)$ 对所有的 $1 \le i < n-1$

成立. 由 (4.1.4) 或引理 4.2 得 $\mathcal{F}_{\pi^i}=\{\hat{\pi}^i_{1,0},\ \hat{\pi}^i_{2,0},\ \ldots,\ \hat{\pi}^i_{n-1,0}\}$, 这里

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
\hat{\pi}^i_{1,0}= & i & (i+1) & (i+2) & \cdots & (n-1) & 1 & 2 & \cdots & (i-2) & (i-1) & n, \\
\hat{\pi}^i_{2,0}= & (i+1) & i & (i+2) & \cdots & (n-1) & 1 & 2 & \cdots & (i-2) & (i-1) & n, \\
\hat{\pi}^i_{3,0}= & (i+1) & (i+2) & i & \cdots & (n-1) & 1 & 2 & \cdots & (i-2) & (i-1) & n, \\
 & & \cdots & \cdots & & & & & & & & \\
\hat{\pi}^i_{n-2,0}= & (i+1) & (i+2) & \cdots & (n-1) & 1 & 2 & \cdots & (i-2) & i & (i-1) & n, \\
\hat{\pi}^i_{n-1,0}= & (i+1) & (i+2) & \cdots & (n-1) & 1 & 2 & \cdots & (i-2) & (i-1) & i & n.
\end{array}
$$

不难看出 $(\pi^{i+1})^{-1}=\hat{\pi}^{i+1}_{1,0}=\hat{\pi}^i_{n-1,0}\in\mathcal{F}$, 因此 $\hat{\pi}^{i+1}_{1,0}\in\mathcal{F}_{\pi^{i+1}}$. 假设 $\bigcap\mathcal{F}_{\pi^{i+1}}=(s,t)$, 则 (s,t) 属于 $\tau_{\pi^{i+1}}$ 中的 (1,0)- 区间 $[(1,i+1),\ldots,(n-i-1,n-1),(n-i,1),\ldots,(n-2,i-1),(n-1,i),(n,n)]$, 该区间决定了置换 $\hat{\pi}^{i+1}_{1,0}$. 由 (4.1.5), (4.1.6) 和 (4.1.4) 中的构造我们得到

$$
\begin{array}{rccccccccccc}
\hat{\pi}^{i+1}_{n-1,n-1}= & (i+1) & (i+2) & \cdots & (n-1) & 1 & 2 & \cdots & (i-1) & n & i, \\
\hat{\pi}^{i+1}_{n-1,n-2}= & n & (i+1) & \cdots & (n-1) & 1 & 2 & \cdots & (i-2) & i & (i-1).
\end{array}
$$

不难验证 $\hat{\pi}^{i+1}_{n-1,n-1}\cap\hat{\pi}^i_{1,0}=\emptyset$, $\hat{\pi}^{i+1}_{n-1,n-2}\cap\hat{\pi}^i_{n-2,0}=\emptyset$. 前者导出 $(s,t)\notin\hat{\pi}^{i+1}_{1,0}\cap\hat{\pi}^{i+1}_{n-1,n-1}$, 换句话说, $(s,t)=(n-1,i)$ 或 (n,n). 后者导出 $(s,t)\neq(n-1,i)$. 因此 $(s,t)=(n,n)$.

到现在为止我们已经证明了 $\bigcap\mathcal{F}_{\pi^i}=(n,n)$ 对 $i=1,2,\ldots,n-1$ 成立, 进而推出 $(\pi^i)^{-1}\in\mathcal{F}$ 对所有的 $i\in[n-1]$ 成立. 注意当 $k\neq n$ 时, $(\pi^i)^{-1}(k)\neq(\pi^j)^{-1}(k)$, 则对任意的置换 π 满足 $\pi(n)\neq n$, 它一定与 $(\pi^i)^{-1}$ 中的一个不相交. 因此 $\mathcal{F}$ 由所有把 n 映到 n 的置换构成. 证毕.

4.4 本章小结

仿照单着色 k- 集交族的 EKR 定理的证明 $(k<n)$, 本章将置换 (单着色 n- 集) 放在圈序中考虑, 给出置换的交性质的 Katona- 型证明, 从而说明单着色布尔格的交性质可以用 Katona 的圈序方法统一证明.

结　论

1. 给出 Dyck 路的序列表示 —Dyck 序列，从中可以看到 Dyck 路偏序集是 Sagan 和 Vatter 定义的扩展子字序的特殊情况，但包含他们重点研究的整数有序分拆偏序集作为特例. 根据这个观察可直接推出 Dyck 路偏序集的 Möbius 函数. 采用结构分解的办法建立秩函数的 Möbius 反演公式，得到偏序集秩函数的另一种表达. 证明其中一类子偏序集具有秩单峰性和 Sperner 性质.

2. 给出着色布尔格交性质的一个一般性定理 (定理 3.6). 建立单着色布尔格 (部分置换偏序集) 交反链的一个 LYM- 型不等式，由该不等式可立即推出 Ku 和 Leader 给出的 k- 部分置换交族的 EKR 定理，并且解决了他们提出的关于 k- 部分置换交族极值结构的唯一性的一个猜想.

3. 给出置换的交性质的 Katona- 型证明，从而说明单着色布尔格的交性质可以用 Katona 的圈序方法统一证明.

参考文献

[1] R. Ahlswede and L. H. Khachatrian, The complete intersection theorem for systems of finite sets, *European J. Combin.*, 18 (1997), 125-136.

[2] R. Ahlswede and L. H. Khachatrian, The complete nontrivial-intersection theorem for systems of finite sets, *J. Combin. Theory Ser. A* 76 (1996), 121–138.

[3] R. Ahlswede, H. Aydinian and L. H. Khachatrian, The intersection theorem for direct products, *European J. Combin.*, 19 (1998), 649-661.

[4] I. Anderson, Combinatorics of Finite sets, Oxford University Press, Oxford, 1987.

[5] J. Bandlow and K. Killpatrick, An area-to-inv bijection between Dyck paths and 312-avoiding permutations, *Elec. J. Combin.*, 8 (2001), #R40.

[6] C. Bey, The Erdös-Ko-Rado bound for the function lattice, *Discrete Appl. Math.*, 95 (1999), 115-125.

[7] C. Bey, An intersection theorem for weighted sets, *Discrete Math.*, 235 (2001), 145-150.

[8] A. Björner, The Möbius function of factor order, *Theoret. Comput. Sci.*, 117 (1993), 91-98.

[9] A. Björner, The Möbius function of subword order, *Invariant theory and tableaux*, 19 (1990), 118-124.

[10] A. Blass and B. E. Sagan, Möbius functions of lattices, *Adv. in Math.*, 127 (1997), 94-123.

[11] K. Bogart, The Möbius functions of the domination lattice, unpublished manuscript, 1972.

[12] B. Bollobás, Sperner systems consisting of pairs of complementary subsets, *J. Combin. Theory Ser. A*, 15 (1973), 363-366.

[13] B. Bollobás and I. Leader, An Erdös-Ko-Rado theorem for signed sets, *Comput. Math. Appl.*, 34 (1997), 9-13.

[14] M. Bóna, Combinatorics of permutations, *Discrete Mathematics and its Applications* (Boca Raton). Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.

[15] T. Brylawski, The lattice of integer partitions, *Discrete Math.*, 6 (1793), 201-219.

[16] P. J. Cameron and C. Y. Ku, Intersecting families of permutations, *European J. Combin.*, 24 (2003), 881-890.

[17] L. Carlitz and J. Riordan, Two element lattice permutation numbers and their q-generalization, Duke Math. J., 31 (1964), 371-388.

[18] L. Comtet, Advanced Combinatorics. (Reidel, Dordrecht, 1974.)

[19] M. Delest and X. G. Viennot, Algebraic languages and polyonimoes enumeration, *Theoret. Comput. Sci.*, 34 (1984), 169-206.

[20] A. Denise and R. Simion, Two combinatorial statistics on Dyck Paths, *Discrete Math.*, 137 (1995), 155-176.

[21] E. Deutsch, Dyck path enumeration, *Discrete Math.*, 204 (1999), 167-202.

[22] M. Deza and P. Frankl, Erdös-Ko-Rado theorem-22 years later, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods,* 4 (1983), 419-431.

[23] M. Deza and P. Frankl, On the maximum number of permutations with given maximal or minimal distance, *J. Combin. Theory Ser. A*, 22 (1977), 352-362.

[24] K. Engel, An Erdös-Ko-Rado theorem for the subcubes of a cube, *Combinatorica*, 4 (1984), 133-140.

[25] K. Engel, Sperner Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[26] P. Erdös, My joint work with Richard Rado, Surveys in combinatorics 1987 (New Cross, 1987), 53-80, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 123, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.

[27] P. L. Erdös, U. Faigle and W. Kern, A group-theoretic setting for some intersecting Sperner families, *Combin. Probab. Comput.*, 1 (1992), 323-334.

[28] P. Erdös and D. J. Kleitman, Extremal problems among subsets of a set, *Discrete Math.*, 306 (2006), 923-931.

[29] P. Erdös, C. Ko and R. Rado, Intersection theorems for systems of finite sets, *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, 2 (1961), 313-318.

[30] P. L. Erdös, A. Seress, and L. A. Székely, Non-trivial t-intersection in the function lattice, *Ann. Comb.*, 9 (2005), 177-187.

[31] P. L. Erdös, A. Seress, and L. A. Székely, Erdös-Ko-Rado and Hilton-Milner type theorems for intersecting chains in posets, *Combinatorica*, 20 (2000), 27–45.

[32] J. M. Fédou, Grammaires et q-énumération de polyominos, Ph. D. Thesis, Université de Bordeaux I, 1989.

[33] L. Ferrari and R. Pinzani, Lattices of lattice paths, *J. Statist. Plann. Inference*, 135 (2005), 77-92.

[34] P. Frankl and Z. Füredi, The Erdös-Ko-Rado theorem for integer sequences, *SIAM J. Algebraic Discrete Math.*, 1 (1980), 376-381.

[35] P. Frankl and N. Tokushige, The Erdös-Ko-Rado theorem for integer sequences, *Combinatorica*, 19 (1999), 55-63.

[36] I. P. Goulden and D. M. Jackson, Combinatorial enumeration, Wiley, New York, 1983.

[37] C. Greene, Posets of shuffles, *J. Combin. Theory Ser. A*, 47 (1988), 191-206.

[38] C. Greene, A class of lattices with Möbius function ± 1, *European J. Combin.*, 9 (1988), 225-240.

[39] C. Greene, G. Katona and D. J. Kleitman, Extensions of the Erdös-Ko-Rado theorem, *Studies in Appl. Math.*, 55 (1976), 1-8.

[40] C. Greene and D. J. Kleitman, Proof techniques in the theory of finite sets, In G. -C. Rota, editor, *Studies in Combinatorics*, Vol.17 of MAA Studies in Math., pp.22-79, Math. Assoc. America, Washington, DC (1978).

[41] J. Haglund, Conjectured statistics for the q,t-Catalan numbers, *Adv. in Math.*, 175 (2003), 319-334.

[42] A. J. W. Hilton and E. C. Milner, Some intersection theorems for systems of finite sets. *Quart. J. Math. Oxford*, 18 (1967), 369-384.

[43] F. Holroyd and J. Talbot, Graphs with the Erdös-Ko-Rado property, *Discrete Math.*, 293 (2005), 165-176.

[44] R. Howard, G. Károlyi and L. A. Székely, Towards a Katona type proof for the 2-intersecting Erdös-Ko-Rado theorem, *Elec. J. Combin.*, 8 (2001), #R31.

[45] W. N. Hsieh, Intersection theorems for systems of finite vector spaces, *Discrete Math.*, 12 (1975), 1-16.

[46] G. O. H. Katona, A simple proof of the Erdös-Ko-Rado theorem, *J. Combin. Theory Ser. B*, 13 (1972), 183-184.

[47] G. O. H. Katona, A simple proof of a theorem of Milner, *J. Combin. Theory Ser. A*, 83 (1998), 138-140.

[48] C. Krattenthaler, Permutations with restricted patterns and Dyck paths, *Adv. Appl. Math.*, 27 (2001), 510-530.

[49] C. Y. Ku and I. Leader, An Erdös-Ko-Rado theorem for partial permutations, *Discrete Math.*, 306 (2006), 74-86.

[50] C. Y. Ku, Intersecting families of permutations and partial permutations, Ph. D. Thesis, (2004).

[51] J. Labelle, On pairs of non-crossing generalized Dyck paths, *J. Statist. Plann. Infer.*, 34 (1993), 209-217.

[52] J. Labelle and Y. Yeh, Generalized Dyck paths, *Discrete Math.*, 81 (1990), 1-6.

[53] B. Larose and C. Malvenuto, Stable sets of maximal size in Kneser-type graphs, *European J. Combin.*, 25 (2004), 657-673.

[54] M. L. Livingston, An ordered version of Erdös-Ko-Rado theorem, *J. Combin. Theory Ser. A*, 26 (1979), 162-165.

[55] Y. S. Li and J. Wang, Erdös-Ko-Rado-type theorems for colored sets, *Elec. J. Combin.*, 14 (2007), #R1.

[56] N. Loehr, Permutation statistics and the q,t-Catalan sequence, *European J. Combin.*, 26 (2005), 83-93.

[57] K. Meagher and L. Moura, Erdös-Ko-Rado theorems for uniform set-partition systems, *Elec. J. Combin.*, 12 (2005), #R40.

[58] D. Merlini, R. Sprugnoli and M. C. Verri, Some Statistics on Dyck Paths, *J. Statist. Plann. and Infer.*, 101 (2002), 211-227.

[59] D. Merlini, R. Sprugnoli and M. C. Verri, The Area determined by underdiagonal lattice paths, In: *Proceedings of CAAP'96, Lecture Notes in Computer Science*, Vol.787, Springer, Berlin, 1996, 59-71.

[60] D. Merlini, R. Sprugnoli and M. C. Verri, Algebraic and combinatorial properties of simple, colored walks, In: *Proceedings of CAAP'94, Lecture Notes in Computer Science*, Vol.787, Springer, Berlin, 1994, 218-233.

[61] E. C. Milner, A combinatorial theorem on systems of sets, *J. London Math. Soc.*, 43 (1968), 204-206.

[62] A. Moon. An analogue of the Erdös-Ko-Rado theorem for the hamming schemes h(n, q), *J. Combin. Theory Ser. A*, 32 (1982), 386-390.

[63] D. Mubayi, Erdös-Ko-Rado for three sets, *J. Combin. Theory Ser. A*, 113 (2006), 547–550.

[64] D. Mubayi and J. Verstraëte, Proof of a conjecture of Erdös on triangles in set-systems, *Combinatorica*, 25 (2005), 599–614.

[65] V. Pták, Möbius function of the shift and extremal operators, *Linear Algebra Appl.*, 236 (1996), 43-51.

[66] M. S. Putcha, Möbius function on cross-section lattices, *J. Combin. Theory Ser. A*, 106 (2004) 287-297.

[67] B. M. I. Rands, An extension of the Erdös-Ko-Rado theorem to t-designs, *J. Combin. Theory Ser. A*, 32 (1982), 391-395.

[68] G. C. Rota, On the foundations of combinatorial theory I.Theory of Möbius function, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, 2 (1964), 340-368.

[69] B. E. Sagan, A generalization of Rota's NBC theorem, *Adv. in Math.*, 111 (1995), 195-207.

[70] B. E. Sagan and V. R. Vatter, The Möbius function of a compositon poset, *J. Algebraic Combin.*, 24 (2006), 117-136.

[71] B. E. Sagan, Unimodality and the reflection principle, *Ars Combin.*, 48 (1998), 65-72.

[72] R. Simion, Noncrossing partitions, *Discrete Math.*, 217 (2000), 367-409.

[73] R. Simion, D. Ullman, On the structure of the lattice of noncrossing partitions, *Discrete Math.*, 98 (1991), 193-260.

[74] E. Sperner, Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, *Math. Z.*, 27 (1928), 544-8.

[75] D. Stanton, Unimodality and Young's lattice, *J. Combin. Theory Ser. A*, 1 (1990), 41-53.

[76] R. Stanley, Enumerative combinatorics, Vol. 1, Cambridge University Press, New York/Cambrige, 1986.

[77] R. Stanley, Enumerative combinatorics, Vol. 2, Cambridge University Press, New York/Cambrige, 1999.

[78] R. Stanley, Some applications of algebra to combinatorics, *Discrete appl. Math.*, 34 (1991), 241-277.

[79] R. Stanley, Weyl groups, the hard Lefschetz theorem, and the Sperner property. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 1 (1980), 168-184.

[80] Y. D. Sun, Numerical triangles and several classical sequences, *Fibonacci Quart.*, (to appear).

[81] J. Wang and Sophia J. Zhang, An Erdős-Ko-Rado-Type theorem in Coxeter groups, submitted.

[82] J. Wang and Sophia J. Zhang, Normalized Matching property and LYM property for intersecting families, submitted.

[83] H. S. Wilf, The patterns of permutations, *Discrete Math.*, 257 (2002), 575-583.

[84] W. Woan, Area of Catalan paths, *Discrete Math.*, 226 (2001), 439-444.

读博期间发表、完成论文情况

1. A sequence representation of the Dyck path poset (with J. Wang), *Ars Combinatorica*, (已接收 SCI 刊物 第二章).

2. Erdös-Ko-Rado-type theorems for colored sets (with J. Wang), *Elec. J. Combin.*, 14 (2007), #R1, (SCI 刊物 第三章).

3. 高斯系数恒等式的组合证明 (与冯红合作), 大连理工大学学报, (已接收).

4. An Erdös-Ko-Rado theorem for restricted signed sets, (已投 第三章).

5. The poset of Dyck paths (with Eva Y. P. Deng), (已投 第二章).

6. A Katona-type proof for intersecting permutations (with J. Wang), (待投 第四章).

致 谢

感谢王军教授. 他引导我走进 Möbius 函数和极值组合的研究领域; 指导我如何深入地思考问题、解决问题. 论文的完成凝聚着他的心血.

感谢冯红副教授. 她带我迈入组合数学的大门, 教会我查阅第一篇文献, 指导我完成第一篇论文, 与我分享第一份喜悦.

感谢邓玉平老师给予我的许多具体的帮助和指导, 激发了我对 Dyck 路的研究兴趣. 感谢王毅教授认真讲解《 Combinatorics of Finite Sets 》, 为我研究组合中的极值问题奠定了基础. 感谢孙怡东博士、张华军博士在学习上的指导, 生活上的关心. 感谢博士生吴军、张俊、刘丽、马世美对论文的完成提出的宝贵意见. 感谢同窗好友贾藏芝、邵红梅、石义霞、吴翠芳. 五年的朝夕相处, 让我时刻感觉到友谊的温暖.

感谢初文昌教授、郑斯宁教授、邱瑞锋教授、王天明教授、李德生教授、于洪全副教授、代万基副教授对我的帮助; 感谢张之正博士、吉日木图博士、郑德印博士、吕可波博士、李春博士、庄举娟博士对我的照顾; 感谢博士生王欣、张彩环、张屹、赵光军、王晓霞、闫庆伦、张文龙、王琛颖、王晓元对我的关心; 硕士魏传安、修风光、林洪娟、王翠萍; 硕士生耿兴波、苏循团等对我的鼓励.

感谢多年来所有曾经帮助过我的老师、同学和朋友.

最后, 感谢我的家人多年来对我学业上的支持, 精神上的鼓励和生活上的关怀.