偏序集上的余代数

吴美云
（南通大学 理学院，江苏 南通 226007）

摘　要：证明了以偏序集为基的一个余代数是有点的且是余交换的.

关键词：偏序集；余代数；余交换
中图分类号：O177.5　　文献标识码：A　　文章编号：1671 - 9476(2006)02 - 0038 - 02

一般说来，构造出一个余代数未必有很好的性质，但本文中找到一个余代数，其不仅是有点的，且是余交换的. 本文采用符号及相关概念见文献[1].

设 K 是域，S 是一个集合，以 S 为基，构成一个向量空间 KS，通过定义余乘法 $\triangle: KS \to KS \otimes KS$，$s \longmapsto s \otimes s$ 和余单位 $\varepsilon: KS \to K$，$s \longmapsto 1$，$\forall s \in S$. 则有 $(KS, \triangle, \varepsilon)$ 成为一个余代数[2].

若 $\{S, \leqslant\}$ 是一个局部有限的偏序集，令 $X = \{(x,y) \in S \times S$，且 $x \leqslant y\}$，以 X 为基构成一个向量空间 V. 通过定义 $\triangle: (x,y) \to \sum\limits_{x \leqslant z \leqslant y} (x,z) \otimes (z,y)$，$\varepsilon: (x,y) \to \begin{cases} 0, & x \neq y \\ 1, & x = y \end{cases}$，则 $(V, \triangle, \varepsilon)$ 是一个余代数.

对这个一般的余代数 $(V, \triangle, \varepsilon)$ 的生成元添加一些限制，则可得到一些好的结果，即这样的余代数是有点的且是余交换的.

首先给出有点的定义：设 C 是余代数，如果 C 中每个单的子余代数都是 1 - 维的，则称 C 是有点的.

引理[2]　设 C 是余代数，且 $C = \sum C_\alpha$，C_α 均为 C 的子余代数，则

(1) C 的每个单子余代数一定在某个 C_α 中；

(2) C 是不可约的 $\Leftrightarrow$ 每个 C_α 是不可约的，且 $\cap C_\alpha \neq 0$；

(3) C 是有点的 $\Leftrightarrow$ 每个 C_α 是有点的.

定理 1　设 $\{S, \leqslant\}$ 是一个局部有限的偏序集，即如果 $x \leqslant y$，则只有有限个 z，满足 $x \leqslant z \leqslant y$. V 是以 $T = \{(x,y) \in S \times S$，且 $x \leqslant y\}$ 为基的向量空间，对于 $\triangle: (x,y) \to \sum\limits_{x \leqslant z \leqslant y} (x,z) \otimes (z,y)$，$\varepsilon: (x,y) \to \begin{cases} 0, & x \neq y \\ 1, & x = y \end{cases}$，则有 $(V, \triangle, \varepsilon)$ 是一个余代数.

证　$\forall (x,y) \in T$，

$$\begin{aligned}(id \otimes \triangle)\triangle(x,y) &= (id \otimes \triangle)\sum_{x \leqslant z \leqslant y}(x,z) \otimes (z,y) = \sum_{x \leqslant z \leqslant y, z \leqslant w \leqslant y}(x,z) \otimes ((z,w) \otimes (w,y)) \\ &= \sum_{x \leqslant z \leqslant w \leqslant y}(x,z) \otimes (z,w) \otimes (w,y);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\triangle \otimes id)\triangle(x,y) &= (\triangle \otimes id)\sum_{x \leqslant w \leqslant y}(x,w) \otimes (w,y) = \sum_{x \leqslant z \leqslant w, x \leqslant w \leqslant y}((x,z) \otimes (z,w) \otimes (w,y)) \\ &= \sum_{x \leqslant z \leqslant w \leqslant y}(x,z) \otimes (z,w) \otimes (w,y).\end{aligned}$$

由 (x,y) 的任意性，得到：$(id \otimes \triangle)\triangle = (\triangle \otimes id)\triangle$.

$\forall (x,y) \in T$，

收稿日期：2005 - 10 - 31
基金项目：南通大学自然科学基金项目（No：05Z006）
作者简介：吴美云（1971 - ），女，江苏海安人，硕士，讲师，主要从事 Hopf 代数研究.

$$(id \otimes \varepsilon)\triangle(x,y) = (id \otimes \varepsilon)\sum_{x\leqslant z\leqslant y}(x,z)\otimes(z,y) = \sum_{x\leqslant z\leqslant y}(x,z)\otimes\varepsilon(z,y) = (x,y);$$

$$(\varepsilon \otimes id)\triangle(x,y) = (\varepsilon \otimes id)\sum_{x\leqslant z\leqslant y}(x,z)\otimes(z,y) = \sum_{x\leqslant z\leqslant y}(x,z)\otimes\varepsilon(z,y) = (x,y).$$

由 (x,y) 的任意性,得到 :$(id \otimes \varepsilon)\triangle = (\varepsilon \otimes id)\triangle$. 由此得 $(V,\triangle,\varepsilon)$ 是一个余代数. 证毕.

如果定理 1 中的 S 只含两个元,且不可比较,则有 :

推论 1　设 $S = \{s,t\}$ 为偏序集,$T,V,\triangle,\varepsilon$ 如定理 1 中定义,如果 s,t 是不可比较的,则 V 是有点的,且 V 是余交换的.

证　由定理 1 知,$(V,\triangle,\varepsilon)$ 是一个余代数. 由于 s,t 是不可比较的,所以 $T = \{(s,s),(t,t)\}$. 设 $V_s = \langle (s,s) \rangle$,$V_t = \langle (t,t) \rangle$,则 $V = V_s \oplus V_t$. 由定理 1 知,V_s,V_t 均为 V 的子余代数,且为单子余代数,从而 V 是有点的. 又由于

$$\triangle(s,s) = \sum_{s\leqslant z\leqslant s}(s,z)\otimes(z,s) = (s,s)\otimes(s,s) = \tau\triangle(s,s),$$

$$\triangle(t,t) = \sum_{t\leqslant x\leqslant t}(t,x)\otimes(x,t) = (t,t)\otimes(t,t) = \tau\triangle(t,t),$$

故 V 是余交换的. 证毕.

如果推论 1 中的 s,t 是可比较的,则有 :

推论 2　设 $S,T,V,\triangle,\varepsilon$ 如推论 1 中定义,且 $s < t$,则 V 是有点的且不是余交换的.

证　由定理 1 知,$T = \{(s,s),(s,t),(t,t)\}$,且 V 是余代数,令 C_s,C_{st},C_t 分别为由 $(s,s),(s,t),(t,t)$ 生成的子余代数,则 $V = C_s \oplus C_{st} \oplus C_t$,又由于 C_s,C_{st},C_t 均为单子余代数,故 C_s,C_{st},C_t 均为有点的. 由引理 1 知,V 是有点的. 由于

$$\triangle(s,t) = \sum_{s\leqslant z\leqslant t}(s,z)\otimes(z,t) = (s,s)\otimes(s,t)\otimes(s,t)\otimes(t,t),$$

$$\tau\triangle(s,t) = \tau\Big(\sum_{s\leqslant z\leqslant t}(s,z)\otimes(z,t)\Big) = \tau\big((s,s)\otimes(s,t)\otimes(s,t)\otimes(t,t)\big)$$
$$= (s,t)\otimes(s,s)\otimes(t,t)\otimes(t,s) \neq \triangle(s,t),$$

故 V 不是余交换的. 证毕.

这样可得到本文的主要定理 :

定理 2　设 $\{S,\leqslant\}$ 是一个局部有限的偏序集,V 是以 $T = \{(x,y) \in S\times S \mid x \leqslant y\}$ 为基的向量空间. 对于 $\triangle:(x,y) \to \sum_{x\leqslant z\leqslant y}(x,z)\otimes(z,y)$, $\varepsilon:(x,y) \to \begin{cases}0, & x\neq y\\ 1, & x = y\end{cases}$,如果 S 中的任意两个元都是不可比较的,则 V 是有点的,且 V 是余交换的.

证　由定理 1 知,$(V,\triangle,\varepsilon)$ 是一个余代数. 由于 S 中的任意两个元都是不可比较的,则 $T = \{(x,x) \in S\times S\}$. 令 $V_x = \langle (x,x) \rangle$ 则由定理 1 知,V_x 均为 V 的子余代数. 由于 $\dim V_x = 1$,故 V_x 均为 V 的单子余代数,从而 V 是有点的.

由于 $T = \{(x,x) \in S\times S\}$,故 $\forall (x,x) \in T$,根据余乘法 $\triangle$ 的定义有,$\triangle(x,x) = \tau\triangle(x,x)$,故 V 是余交换的. 证毕.

与推论 2 类似,可得出 :

推论 3　设 $S,T,V,\triangle,\varepsilon$ 如定理 2 中定义,如果 T 中至少有两个元是可比较的,则 V 不是余交换的.

参考文献 :

[1] Susan Montgomery. Hopf Algebras and Their Actions on Rings[M]. CBMS no. 82,AMS,Prividence,RI,1993.
[2] Moss E. Sweedler. Hopf Algebras[M]. NewYork :W. A. Benjamin, Inc,1969 .

Coalgebra on a partially ordered set

WU Mei-yun
(Science College, Nantong University, Nantong 226007,China)

Abstract :A coalgebra with a partially ordered set as basis is pointed and cocommutative.

Key words :coalgebra ;pointed ;cocommutative