容斥原理的拓广及其应用

万 宏 辉

（华中工学院数学系，武昌）

容斥原理(包容和排斥原理的简称，又称取舍原理或出入原理)是组合计数中的有力工具，它有着广泛而重要的应用．欲知其情，可参考文献[1—4]．Schwenk[5] 和魏万迪[6]推广了容斥原理，得到了很有用的广容斥原理．本文给出了容斥原理的一种新拓广，它包含文献[5,6]中的广容斥原理为特例，其应用范围更为广泛，能解决很多组合计数问题．

设 A 为一个有限集，集中每个元 a 都赋有权 $w(a)$(属于某个加群)．对 $S\subseteq A$，其权定义为 $w(S)=\sum\limits_{a\in S}w(a)$．设 $P_i=\{A_j^i\}_{1\leqslant j\leqslant m_i}(1\leqslant i\leqslant n)$ 为 A 的 n 组子集，l 为一非负整数且不大于 n．对 $I_j\subseteq M_j=\{1,2,\cdots,m_j\}$，$l+1\leqslant j\leqslant n$，令

$$B_{I_{l+1},\cdots,I_n}(r_1,\cdots,r_l)\ \text{为}\ \bigcap_{l+1\leqslant j\leqslant n}\left(\bigcap_{t\in I_j}A_t^j\right)$$

中恰好属于 P_i 中 r_i 个子集 $(1\leqslant i\leqslant l)$ 的那些元组成的集合，记

$$W_{k_{l+1},\cdots,k_n}(r_1,\cdots,r_l)=\sum_{\substack{I_j\subseteq M_j\\ |I_j|=k_j\\ (l+1\leqslant j\leqslant n)}}w(B_{I_{l+1},\cdots,I_n}(r_1,\cdots,r_l)),\tag{1}$$

其中 $r_i(1\leqslant i\leqslant l)$，$k_j(l+1\leqslant j\leqslant n)$ 均为非负整数，$|I|$表示 I 中元的个数．特别地，若 $l=0$，(1)式记为 $W_{k_1,\cdots,k_n}$；若 $l=n$，(1)式记为 $W(r_1,\cdots,r_n)$．

于是，我们有

定理 1 设 $0\leqslant q\leqslant n$，则对任意非负整数 $p\leqslant q$，有

$$W_{k_{q+1},\cdots,k_n}(r_1,\cdots,r_q)=\sum_{\substack{r_i\leqslant k_i\leqslant m_i\\ (p<i\leqslant q)}}(-1)^{\sum\limits_{p<l\leqslant q}(k_l-r_l)}\prod_{p<j\leqslant q}\binom{k_j}{r_j}W_{k_{p+1},\cdots,k_n}(r_1,\cdots,r_p).\tag{2}$$

当 $p=0$ 时，此即为

$$W_{k_{q+1},\cdots,k_n}(r_1,\cdots,r_q)=\sum_{\substack{r_i\leqslant k_i\leqslant m_i\\ (1\leqslant i\leqslant q)}}(-1)^{\sum\limits_{1\leqslant l\leqslant q}(k_l-r_l)}\prod_{1\leqslant j\leqslant q}\binom{k_j}{r_j}W_{k_1,\cdots,k_n}.\tag{3}$$

证 若 $a\in B_{I_{q+1},\cdots,I_n}(r_1,\cdots,r_q)$，而 $w(a)$ 在和 $W_{k_{q+1},\cdots,k_n}(r_1,\cdots,r_q)$ 中出现 c 次，则存在 P_l 中的 r_l 个子集$\{A_{i_t}^l\}_{1\leqslant t\leqslant r_l}$，使 a 恰好属于这 r_l 个子集$(p<l\leqslant q)$，从子集组$\{A_{i_t}^l\}_{1\leqslant t\leqslant r_l}$中选取 k_l 个子集，有$\binom{r_l}{k_l}$种选法，且当 $l\neq s$ 时，从 $\{A_{i_t}^l\}_{1\leqslant t\leqslant r_l}$ 中选取 k_l 个子集和从 $\{A_{j_u}^s\}_{1\leqslant u\leqslant r_s}$ 中选取 k_s 个子集是完全各自独立的．故 a 属于

本文 1983 年3月16日收到．

$$\prod_{p<l\leqslant q}\binom{r_l}{k_l}\cdot c$$

个不同的集 $B_{l_{p+1},\cdots,l_n}(r_1,\cdots,r_p)$. 因此, $w(a)$ 在 $W_{k_{p+1},\cdots,k_n}(r_1,\cdots,r_p)$ 中出现

$$\prod_{p<l\leqslant q}\binom{r_l}{k_l}\cdot c$$

次,从而

$$W_{k_{p+1},\cdots,k_n}(r_1,\cdots,r_p)=\sum_{\substack{k_i\leqslant r_i\leqslant m_i\\(p<i\leqslant q)}}\prod_{p<j\leqslant q}\binom{r_j}{k_j}W_{k_{q+1},\cdots,k_n}(r_1,\cdots,r_q). \tag{4}$$

于是

$$\sum_{\substack{r_i\leqslant k_i\leqslant m_i\\(p<i\leqslant q)}}(-1)^{\sum\limits_{p<l\leqslant q}(k_l-r_l)}\prod_{p<j\leqslant q}\binom{k_j}{r_j}W_{k_{p+1},\cdots,k_n}(r_1,\cdots,r_p)$$

$$=\sum_{\substack{r_i\leqslant\lambda_i\leqslant m_i\\(p<i\leqslant q)}}\prod_{p<j\leqslant q}\left[\sum_{r_j\leqslant k_j\leqslant\lambda_j}(-1)^{k_j-r_j}\binom{k_j}{r_j}\binom{\lambda_j}{k_j}\right]W_{k_{q+1},\cdots,k_n}(r_1,\cdots,r_p,\lambda_{p+1},\cdots,\lambda_q),$$

利用熟知的组合恒等式

$$\sum_{r\leqslant k\leqslant\lambda}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}\binom{\lambda}{k}=\begin{cases}1, & \lambda=r;\\0, & \lambda\neq r.\end{cases}$$

即得(2)式. 证毕.

当然也可利用偏序集上的 Möbius-Rota 反演公式或者采用发生函数的方法来证明定理 1. 令 $q=n$, (3)式就变成文献[5,6]中的广容斥原理. 上述证明过程中令 $p=0$ 和 $q=n$ 而得的特殊情形是广容斥原理的简单新证明.

(3)式是个很有用的计算公式. 现在应用它来解决一些组合计数问题.

问题 1. 设有 e 种共 b 个球, 其中第 μ 种有 b_μ 个均不可辨的球 $(1\leqslant\mu\leqslant e)$. 又有 n 组共 m 个均为可辨的盒子, 其中第 ν 组盒子的个数为 $m_\nu(1\leqslant\nu\leqslant n)$. 把 b 个球分放到 m 个盒中去,使第 i 组盒子中恰有 r_i 个为空 $(1\leqslant i\leqslant q)$, 而第 j 组盒子中至少有 k_j 个为空,求此种分放方式的个数.

设此种分放方式的个数为 $Q_{k_{q+1},\cdots,k_n}(r_1,\cdots,r_q)$, 当 $q=0$ 和 $q=n$ 时, 分别记为 $Q_{k_1,\cdots,k_n}$ 和 $Q(r_1,\cdots,r_n)$. 不难求得

$$Q_{k_1,\cdots,k_n}=\prod_{1\leqslant j\leqslant n}\binom{m_j}{k_j}\cdot\prod_{1\leqslant t\leqslant e}\binom{m-\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n}k_j+b_t-1}{b_t}.$$

应用(3)式得

定理 2

$$Q_{k_{q+1},\cdots,k_n}(r_1,\cdots,r_q)=\sum_{\substack{r_i\leqslant k_i\leqslant m_i\\(1\leqslant i\leqslant q)}}(-1)^{\sum\limits_{1\leqslant l\leqslant q}(k_l-r_l)}\binom{k_l}{r_l}\prod_{1\leqslant j\leqslant q}\binom{m_j}{k_j}$$

$$\times\prod_{1\leqslant t\leqslant e}\binom{m-\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n}k_j+b_t-1}{b_t}.$$

问题 2. 若集 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 的一个全排列 $a_1a_2\cdots a_m$ 被分成长度依次为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的相邻的 n 段，第 i 段中恰有 r_i 个保位——即 $a_l = l$ 者 $(1 \leqslant i \leqslant q)$，第 j 段中至少有 k_j 个保位 $(q+1 \leqslant j \leqslant n)$，这种排列的个数记为 $N_{k_{q+1},\cdots,k_n}(r_1, \cdots, r_q)$，当 $q=0$ 和 $q=n$ 时分别记为 $N_{k_1,\cdots,k_n}$ 和 $N(r_1, \cdots, r_n)$. 易知

$$N_{k_1,\cdots,k_n} = \prod_{1\leqslant i\leqslant n}\binom{m_i}{k_i}\cdot\left(m - \sum_{1\leqslant j\leqslant n} k_j\right)!.$$

应用(3)式即得

定理 3

$$N_{k_{q+1},\cdots,k_n}(r_1, \cdots, r_q) = \sum_{\substack{r_i\leqslant k_i\leqslant m_i\\(1\leqslant i\leqslant q)}} (-1)^{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant q}(k_j-r_j)} \prod_{1\leqslant j\leqslant q}\binom{k_j}{r_j}$$

$$\cdot\prod_{1\leqslant t\leqslant n}\binom{m_t}{k_t}\cdot\left(m - \sum_{1\leqslant j\leqslant n} k_j\right)!.$$

问题 3. 设 $\{p_{ij}\}_{1\leqslant j\leqslant m_i}(1 \leqslant i \leqslant n)$ 为 n 组共 $m = m_1 + \cdots + m_n$ 个不同的素数. 问集 $\{1, 2, \cdots, N\}$中恰被 r_i 个第 i 组中的素数整除 $(1 \leqslant i \leqslant q)$,同时至少被 k_j 个第 j 组中的素数整除 $(q+1 \leqslant j \leqslant n)$ 的数有多少个?

记这种数的个数为 $M_{k_{q+1},\cdots,k_n}(r_1, \cdots, r_q)$，$q=0$ 和 $q=n$ 时就分别记为 $M_{k_1,\cdots,k_n}$ 和 $M(r_1, \cdots, r_n)$. 则(见文献[6])

$$M_{k_1,\cdots,k_n} = \sum_{\substack{\alpha_{ij}=0,1\\ \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant m_i}\alpha_{ij}=k_i\\(1\leqslant i\leqslant n)}}\left[\frac{N}{\prod\limits_{1\leqslant t\leqslant n}\prod\limits_{1\leqslant s\leqslant m_t} p_{ts}^{\alpha_{ts}}}\right],$$

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 由(3)式得

定理 4

$$M_{k_{q+1},\cdots,k_n}(r_1, \cdots, r_q) = \sum_{\substack{r_l\leqslant k_l\leqslant m_l\\(1\leqslant l\leqslant q)}} (-1)^{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant q}(k_j-r_j)} \prod_{1\leqslant j\leqslant q}\binom{k_j}{r_j}$$

$$\cdot\sum_{\substack{\alpha_{ij}=0,1\\ \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant m_i}\alpha_{ij}=k_i\\(1\leqslant i\leqslant n)}}\left[\frac{N}{\prod\limits_{1\leqslant t\leqslant n}\prod\limits_{1\leqslant s\leqslant m_t} p_{ts}^{\alpha_{ts}}}\right].$$

问题 4. 设 $m = m_1 + \cdots + m_n$, $m_i \geqslant 2$,集 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 的无重排列 $a_1a_2\cdots a_m$, 满足阵列

$$\begin{array}{llllllll}
1, & 2, \cdots, & m_1, & m_1+1, & m_1+2, \cdots, & m_1+m_2, & \cdots\cdots, \\
m_1, & 1, \cdots, & m_1-1, & m_1+m_2, & m_1+1, \cdots, & m_1+m_2-1, & \cdots\cdots, \\
\multicolumn{3}{l}{\underbrace{a_1, \quad a_2, \cdots, \quad a_{m_1},}_{\text{第 1 列组}}} & \multicolumn{2}{l}{\underbrace{a_{m_1+1}, \quad a_{m_1+2}, \cdots,}_{\text{第 2 列组}}} & a_{m_1+m_2}, & \cdots\cdots,
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
m_1+\cdots+m_{n-1}+1, & m_1+\cdots+m_{n-1}+2, \cdots, & m \\
m & , m_1+\cdots+m_{n-1}+1, \cdots, & m-1 \\
\multicolumn{3}{l}{\underbrace{a_{m_1+\cdots+m_{n-1}+1}, \qquad a_{m_1+\cdots+m_{n-1}+2}, \qquad \cdots, \quad a_m}_{\text{第 } n \text{ 列组}}}
\end{array}$$

中，第 i 列组内恰有 r_i 个列，第 j 列组内至少有 k_j 个列，它们的任一列都有相同的数 $(1 \leqslant i \leqslant q, q+1 \leqslant j \leqslant n)$. 这种排列的个数有多少？

记所求的个数为 $U_{m_1,\cdots,m_n}(r_1,\cdots, r_q; k_{q+1},\cdots, k_n)$，当 $q=0$ 和 $q=n$ 时，分别记作 $U_{m_1,\cdots,m_n}(\phi; k_1,\cdots, k_n)$ 和 $U_{m_1,\cdots,m_n}(r_1,\cdots, r_n; \phi)$. 魏万迪[6] 利用广容斥原理成功地求出了 $U_{m_1,\cdots,m_n}(r_1,\cdots,r_n; \phi)$的计算公式,现在我们利用(3)式来求 $U_{m_1,\cdots,m_n}(r_1,\cdots, r_q; k_{q+1},\cdots, k_n)$ 的表达式.

令 A 为 $\{1, 2,\cdots, m\}$ 的全体无重排列 $a_1a_2\cdots a_m$ 组成的集，其子集 $A_j^i(1 \leqslant j \leqslant m_i, 1 \leqslant i \leqslant n)$ 确定如下：

A_j^i：$a_1a_2\cdots a_m$ 满足

$$a_{m_1+\cdots+m_{i-1}+j}=\begin{cases}\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant i-1} m_k+j \text{ 或 } \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant i-1} m_k+j-1, \text{ 若 } 2\leqslant j\leqslant m_i, \\ \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant i-1} m_k+1 \text{ 或 } \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant i} m_k, \text{ 若 } j=1(1\leqslant i\leqslant n).\end{cases}$$

文献[6]中已得到

$$U_{m_1,\cdots,m_n}(\phi; k_1,\cdots, k_n)=\prod_{1\leqslant i\leqslant n}\left[\frac{2m_i}{2m_i-l_i}\binom{2m_i-k_i}{k_i}\right] \cdot\left(m-\sum_{1\leqslant j\leqslant n} k_j\right)!.$$

设对一切 $a \in A$,有 $w(a)=1$. 则由(2)式得

定理 5 若 $m_i \geqslant 2(1 \leqslant i \leqslant n)$，则

$$U_{m_1,\cdots,m_n}(r_1,\cdots, r_q; k_{q+1},\cdots, k_n)=\sum_{\substack{r_i\leqslant k_i\leqslant m_i\\(1\leqslant i\leqslant q)}}(-1)^{\sum\limits_{1\leqslant l\leqslant q}(k_l-r_l)}\prod_{1\leqslant j\leqslant q}\binom{k_j}{r_i}$$
$$\times\prod_{1\leqslant i\leqslant n}\left[\frac{2m_i}{2m_i-l_i}\binom{2m_i-k_i}{k_i}\right]\cdot\left(m-\sum_{1\leqslant j\leqslant n} k_j\right)!.$$

必须指出，直接应用文献[6]中的广容斥原理导出定理 2—5 是很困难的. 在定理 3、4、5 中令 $q=n$ 就分别得出文献[6]中的定理 2、3、4.

致谢：承蒙导师徐利治教授的关怀与指导,谨此致以衷心的谢意.

参 考 文 献

[1] Riordan, J., *An Introduction to Combinatorial Analysis*, Wiley, New York, 1958.
[2] Hall, Jr. M., *Combinatorial Theory*, Blaisdell Pub. Company, Walthem, Massachusetts, 1967.
[3] Ryser, H. J., *Carus Math. Monographs*, 1963, No. 14.
[4] Van Lint, J. H., *Combinatorial Theory*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 1974, 382.
[5] Schwenk, A. J., *Discrete Math.*, **18** (1977), 1: 71—78.
[6] 魏万迪，科学通报，**25** (1980)，7: 296—299.