苏州大学

硕士学位论文

最大公约数与最小公倍数的k次和函数

姓名：邢慧

申请学位级别：硕士

专业：基础数学

指导教师：余红兵

20090501

摘 要

本文在第一章中首先介绍最大公约数，最小公倍数，积性数论函数，Dirichlet 卷积，Dirichlet 级数，Riemann zata 函数，Euler 求和公式及数论函数的均值等一些基本概念及结果. 第二章则对 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i,j)$ 的渐进公式的误差项进行改进，并给出了最大公约数与最小公倍数的 k 次和函数 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i,j)^k(k>0$ 且 $k\neq 1)$ 、 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[i,j]^k(k>0)$ 的均值公式.

关键词：最大公约数； 最小公倍数； 渐进公式.

作　　者：邢慧

指导老师：余红兵教授

The k-th Power Sum Functions of GCD and LCM

Abstract

In the first chapter of this paper, we introduce the definition of greatest common divisor, lowest common multiple, multiplicative function, Dirichlet product, Dirichlet series, Riemann zata function, Euler's identity and so on. In the second one, we improved the error term of asymptotic formula for $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i,j)$, and we also give the asymptotic formulas for sum functions $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i,j)^k(k>0 \text{ and } k\neq 1)$ and $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[i,j]^k(k>0)$.

Keywords: Greatest common divisor; Lowest common multiple; Asymptotic formula.

Written by Xing Hui

Supervised by Prof. Yu Hongbing

苏州大学学位论文独创性声明及使用授权的声明

学位论文独创性声明

本人郑重声明：所提交的学位论文是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果，也不含为获得苏州大学或其它教育机构的学位证书而使用过的材料。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人承担本声明的法律责任。

研究生签名：邢慧 日 期：5.13

学位论文使用授权声明

苏州大学、中国科学技术信息研究所、国家图书馆、清华大学论文合作部、中国社科院文献信息情报中心有权保留本人所送交学位论文的复印件和电子文档，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。本人电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。除在保密期内的保密论文外，允许论文被查阅和借阅，可以公布（包括刊登）论文的全部或部分内容。论文的公布（包括刊登）授权苏州大学学位办办理。

研究生签名：邢慧 日 期：5.13

导 师 签 名：朱红兵 日 期：5月13日

引言

数论函数是指定义在整数集 (或者其某个子集) 上，而值为复数的函数. 数论中自然地产生许多这样的函数. 如除数函数 $\tau(n)$ 、欧拉函数 $\phi(n)$ 、 Möbius 函数 $\mu(n)$ 等 (可以参考 [1][2][3]). 数论函数在数论及组合数学等领域都占有十分重要的位置，因而对其值的研究也有了特殊的意义.

数论函数值的分布往往非常不规则，但许多数论函数的均值 (算术平均值) 则呈现规则的性态. 例如， $\tau(n), \phi(n)$ 的值并不规则，然而对于 $x \geq 1$, 我们能够证明

$$\sum_{n\leq x}\tau(n) = x\log x + O(x);$$

$$\sum_{n\leq x}\phi(n) = \frac{3x^2}{\pi^2} + O(x\log x).$$

数论函数的均值的研究，不仅仅在许多问题中具有较基本的重要性，而且往往具有自身独特的兴趣.

本文主要考虑两类与最大公约数及最小公倍数有关的数论函数的均值. 在 2001 年 Broughan K. A. 研究了最大公约数的和函数 (参考 [4]), 并证明了

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i,j) = \frac{n^2\log n}{\zeta(2)} + O(n^2).$$

(这里及以下的 $\zeta(n)$ 表示 Riemann zata 函数，参见第一章). 2006 年朱瑾相应地考虑了最小公倍数的和函数 (参考 [5]), 并证明了

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[i,j] = \frac{n^4\zeta(3)}{4\zeta(2)} + O(n^3\log n).$$

本文首先对 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(i,j)$ 的上述渐进公式的误差项进行改进；其次，给出最大公约数与最小公倍数的 k 次和函数 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(i,j)^k$($k$ 为正实数且 $k \neq 1$) 、 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}[i,j]^k$($k$ 为任意正实数) 的均值公式.

本文的主要结论如下：

1. $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i,j)=\frac{n^2\log n}{\zeta(2)}+C_0n^2+O(n^{\frac{3}{2}}(\log n)^{\frac{1}{2}}),$$

其中，$C_0=\frac{\gamma}{\zeta(2)}-\sum\limits_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}\log d+\frac{\gamma}{\zeta(2)}-\frac{1}{2\zeta(2)}-\frac{1}{2}$ 为常数，γ 为欧拉常数.

2. 对正实数 $k(k\neq 1)$, 有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i,j)^k=\begin{cases}\frac{n^2\zeta(2-k)}{\zeta(2)}+O(n^{k+1}logn)\ , & 0<k<1;\\ \frac{2n^{k+1}\zeta(k)}{(k+1)\zeta(k+1)}-\frac{n^{k+1}}{k+1}+O(n^2)\ , & 1<k<2;\\ \frac{2n^3\zeta(2)}{3\zeta(3)}-\frac{n^3}{3}+O(n^2\log n)\ , & k=2;\\ \frac{2n^{k+1}\zeta(k)}{(k+1)\zeta(k+1)}-\frac{n^{k+1}}{k+1}+O(n^k)\ , & k>2.\end{cases}$$

3. 对任意正实数 k, 有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[i,j]^k=\frac{n^{2k+2}\zeta(k+2)}{(k+1)^2\zeta(2)}+O(n^{2k+1}\log n).$$

本文的主要内容安排如下：

第一部分　引言.

第二部分　给出本文涉及到的基本知识和基本定理.

第三部分　给出本文主要结果的证明.

第一章　基本知识

本文涉及到数论中的一些基本概念与结果,本章就此作一些简单介绍 (参见 [1],[2],[3]).

1.1 整除

定义 1.1　设 a 和 b 是整数, $b \neq 0$. 如果存在整数 c 使得 $a = bc$, 则我们称 b 整除 a, 记作 $b \mid a$, 并称 b 是 a 的一个因子, 而 a 是 b 的倍数. 如果不存在这样的 c, 则称 b 不整除 a, 记作 $b \nmid a$.

1.2 最大公约与最小公倍

定义 1.2　设 a, b 是不全为零的整数, 满足下面两个条件的唯一的 d 称为它们的最大公约数, 记作 (a, b).

(1) d 是 a, b 公约数, 即 $d \mid a$, $d \mid b$;

(2) d 是 a, b 的所有公约数中最大的, 即如果整数 d_1 也是 a, b 的公约数, 则 $d_1 \leq d$.

如果 $(a, b) = 1$, 则称 a, b 是互素的.

定理 1.1　a, b 的任一公约数都是其最大公约数的约数. 从而有 $d \mid (a, b) \Longleftrightarrow d \mid a$, $d \mid b$.

定义 1.3　设 a, b 是非零整数, 满足下面条件的唯一的 D 称为它 a, b 的最小公倍数, 记作 $[a, b]$.

(1) D 为整数, 且 D 是 a, b 的公倍数, 即 $D \geq 1$ 且 $a \mid D$, $b \mid D$;

(2) D 是 a, b 正公倍数中的最小数, 即如果 $D_1 \geq 1$, 使 $a \mid D_1$, $b \mid D_1$, 则 $D \leq D_1$.

两个整数的最大公约数与最小公倍数有下面的简单关系.

定理 1.2　a, b 为非零整数, 则 $(a, b)[a, b] = |ab|$.

1.3 积性函数

定义 1.4 我们把定义在整数集合 Z 上的复值函数 $y=f(n)$ 称为数论函数. 一个数论函数 $f(n)$ 是积性的, 如果它对于任意的 $m,n\in Z$, $(m,n)=1$, 有

$$f(mn)=f(m)f(n).$$

我们注意, 若 $f(n)$ 是积性函数, 设 n 有标准分解 $n={p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}\cdots{p_s}^{\alpha_s}$, 则我们有

$$f(n)=\prod_{i=1}^{n}f({p_i}^{\alpha_i}).$$

例 1 可以证明, 下面的数论函数均是积性函数.

(1) 除数函数 $\tau(n)$: n 的所有正约数的个数.

(2) 欧拉函数 $\phi(n)$: $1,2,\ldots,n$ 中与 n 互素的个数.

(3) Möbius 函数 $\mu(n)$: 若 $n=1$, 则 $\mu(n)=1$; 若 $n=p_1p_2\ldots p_r$, 其中 $p_1,p_2,\ldots,p_r$ 是两两不同的素数, 则 $\mu(n)=(-1)^r$; 若有 n 有平方因子, 则 $\mu(n)=0$.

1.4 Möbius 变换及其反转公式

定义 1.5 设 $f(n)$ 为数论函数, 令

$$F(n)=\sum_{d|n}f(d),n\in N.$$

我们把 $F(n)$ 称作 $f(n)$ 的 ***Möbius*** 变换, $f(n)$ 称作是 $F(n)$ 的 ***Möbius*** 逆变换.

定理 1.3 设 $f(n)$ 和 $F(n)$ 是两个数论函数, 那么

$$F(n)=\sum_{d|n}f(d)\Longleftrightarrow f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)F\left(\frac{n}{d}\right).$$

例 2 设 n 为正整数, 对于欧拉函数我们不难证明 $\sum\limits_{d|n}\phi(d)=n$, 利用定理 1.3 可得到

$$\phi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}.$$

1.5 Dirichlet 卷积

定义 1.6　给定数论函数（不一定是积性的）$f(n)$ 和 $g(n)$，设 $H(n)$ 定义为

$$H(n)=\sum_{d|n}f(d)g\left(\frac{n}{d}\right),n\in Z,$$

则称 $H(n)$ 为 $f(n)$ 和 $f(n)$ 的 *Drichlet* 卷积，记作 $H=f*g$.

注　上式亦可写为

$$\sum_{d|n}f(d)g(\frac{n}{d})=\sum_{d|n}g(d)f\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{ab=n}f(a)g(b).$$

1.6 Dirichlet 级数和 Riemann zeta 函数

定义 1.7　设 $f(n)$ 是一个数论函数，s 是一个复变函数，称收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$ 为 *Drichlet* 级数，特别地，若 $f(n)\equiv 1$，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 为 *Rimann zeta* 函数，记作 $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$，其中 $Re(s)>1$.

定理 1.4　假设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$ 绝对收敛，如果 $f(n)$ 是积性函数，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\prod_p(1+\frac{f(p)}{p^s}+\frac{f(p^2)}{p^{2s}}+...).$$

例 3　由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}$ 绝对收敛，$\mu(n)$ 是积性函数，利用定理 1.4 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}=\prod_p(1+\frac{\mu(p)}{p^2})=\frac{1}{\zeta(2)}.$$

下面我们看 Dirichlet 级数的乘积和 Dirichlet 卷积之间的联系.

定理 1.5　给定两个 *Dirichlet* 级数 $F(n)$ 和 $G(n)$，

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s},G(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^s},$$

则在它们的绝对收敛的半平面上有

$$F(s)G(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(n)}{n^s},$$

其中，

$$h(n)=(f*g)(n)=\sum_{d|n}f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

利用这个定理我们可以得到很多重要的结论.

例 4 $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, $G(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(s)}{n^s}$, 由于 $\phi(n)\le n$, 则 $G(s)$ 在 $Re(s)>2$ 时绝对收敛, 记

$$f(n)=1, g(n)=\phi(n),$$

则

$$h(n)=(1*\phi)(n)=\sum_{d|n}\phi(d)=n,$$

故当 $Re(s)>2$ 时, 我们有

$$\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(s)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^s}=\zeta(s-1),$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(s)}{n^s}=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}, Re(s)>2.$$

1.7 Euler 求和公式

定理 1.6 设 $f(n)$ 为任意一个函数, 如果 f 在 $[y,x]$ 上连续可微, 其中 $0<y<x$, 则我们有

$$\sum_{y<n\le x}f(n)=\int_y^x f(t)dt+\int_y^x(t-[t])f'(t)dt+f(x)([x]-x)-f(y)([y]-y).$$

证明见 [3,P.54].

下面的定理是 Euler 求和公式的简单应用, 本文多次引用 (见 [3,P.55]).

定理 1.7 设 $x\ge 1$, 则

(1) $\sum\limits_{n\le x}\frac{1}{n}=\log x+\gamma+O(x^{-1})$, 其中 γ 为欧拉常数;

(2) $\sum\limits_{n>x}\frac{1}{n^s}=O(x^{1-s}), s>1$;

(3) $\sum\limits_{n\le x}\frac{1}{n^s}=\zeta(s)+O(x^{1-s}), s>1$;

(4) $\sum\limits_{n\le x}\frac{1}{n^s}=\frac{x^{1-s}}{1-s}+C+O(x^{-s})$, 其中 C 为常数, $0<s<1$;

(5) $\sum\limits_{n\leq x}\frac{1}{n^s}=\frac{x^{1-s}}{1-s}+O(x^{-s}), s\leq 0.$

1.8 数论函数的均值

一般情况，数论函数的值的性态极其复杂，例如随着 n 的变化， $\tau(n)$, $\phi(n)$ 的值极不规则. 但是，下面的定理 1.8 及定理 1.9 表明， $\tau(n)$, $\phi(n)$ 的均值却有规则的性态.

定理 1.8　设 $x\geq 1$, 则

$$\sum_{n\leq x}\tau(n)=x\log x+O(x)$$

定理 1.9　设 $x\geq 1$, 则

(1) $\sum\limits_{n\leq x}\phi(n)=\frac{x^2}{2\zeta(2)}+O(x\log x);$

(2) $\sum\limits_{n\leq x}\frac{\phi(n)}{n}=\frac{x}{\zeta(2)}+O(\log x);$

(3) $\sum\limits_{n\leq x}\frac{\phi(n)}{n^2}=\frac{\log x}{\zeta(2)}+O(\frac{\log x}{x})+C$, 其中， $C=\frac{\gamma}{\zeta(2)}-\sum\limits_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}\log d$ 为常数.

上述两个定理的证明可参见 [3,P.57-62].

第二章　最大公约数与最小公倍数的 k 次和函数

§2.1 一些记号

本文将涉及到最大公约数与最小公倍数 k 次和函数的问题，我们首先对这些概念及记号作一些说明.

(1) 记最大公约数的和函数为

$$g(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i,j). \tag{2.1}$$

最大公约数的 k 次和函数为

$$G(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i,j)^k. \tag{2.2}$$

(2) 记最小公倍数的和函数为

$$h(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[i,j].$$

最小公倍数的 k 次和函数为

$$H(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[i,j]^k. \tag{2.3}$$

以上的 k 为正实数.

§2.2 问题的提出

在 [4] 中 **Broughan** 研究了关于最大公约数的和函数 $\sum\limits_{i=1}^{n}(i,n)$ 的一些性质，并证明了下面的定理.

定理 2.1　$g(n)=\frac{n^2\log n}{\zeta(2)}+O(n^2)$.

在 [5] 中朱瑾相应地考虑了最小公倍数的和函数 $\sum\limits_{i=1}^{n}[i,n]$ 的一些性质，并证明了下面的定理.

定理 2.2　$h(n)=\frac{n^4\zeta(3)}{4\zeta(2)}+O(n^3\log n)$.

本文我们主要的工作是：首先，对定理 2.1 的误差项进行改进；其次，考虑最大公约数与最小公倍数的 k 次和函数的均值．证明了下面的定理 2.3 至定理 2.5.

定理 2.3　设 $g(n)$ 由 *(2.1)* 定义，则有

$$g(n)=\frac{n^2\log n}{\zeta(2)}+C_0n^2+O(n^{\frac{3}{2}}(\log n)^{\frac{1}{2}}),$$

其中，$C_0=\frac{\gamma}{\zeta(2)}-\sum\limits_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}\log d+\frac{\gamma}{\zeta(2)}-\frac{1}{2\zeta(2)}-\frac{1}{2}$ 为常数，γ 为欧拉常数.

定理 2.4　设 $G(n)$ 由 *(2.2)* 定义，则有

$$G(n)=\begin{cases}\frac{n^2\zeta(2-k)}{\zeta(2)}+O(n^{k+1}logn)\ , & 0<k<1;\\ \frac{2n^{k+1}\zeta(k)}{(k+1)\zeta(k+1)}-\frac{n^{k+1}}{k+1}+O(n^2)\ , & 1<k<2;\\ \frac{2n^3\zeta(2)}{3\zeta(3)}-\frac{n^3}{3}+O(n^2\log n)\ , & k=2;\\ \frac{2n^{k+1}\zeta(k)}{(k+1)\zeta(k+1)}-\frac{n^{k+1}}{k+1}+O(n^k)\ , & k>2.\end{cases}$$

定理 2.5　设 $H(n)$ 由 *(2.3)* 定义，则对任意的 $k>0$，有

$$H(n)=\frac{n^{2k+2}\zeta(k+2)}{(k+1)^2\zeta(2)}+O(n^{2k+1}\log n).$$

§2.3 预备引理

引理 2.1　*(Dirichlet 双曲线法)* 设 $f(n)$, $g(n)$ 为两个数论函数，$x>1$ 为给定实数，则对任意满足 $tt'=x$ 的正实数 t 及 t' 有

$$\sum_{mn\le x}f(m)g(n)=\sum_{m\le t}f(m)\sum_{n\le\frac{x}{m}}g(n)+\sum_{n\le t'}g(n)\sum_{m\le\frac{x}{n}}f(m)-\sum_{m\le t}f(m)\sum_{n\le t'}g(n).$$

证明

$$\begin{aligned}\sum_{mn\le x}f(m)g(n) &= \sum_{mn\le x,m\le t}f(m)g(n)+\sum_{mn\le x,m>t}f(m)g(n)\\ &= \sum_{m\le t}f(m)\sum_{n\le\frac{x}{m}}g(n)+\sum_{n\le t'}g(n)\left(\sum_{m\le\frac{x}{n}}f(m)-\sum_{m\le t}f(m)\right)\\ &= \sum_{m\le t}f(m)\sum_{n\le\frac{x}{m}}g(n)+\sum_{n\le t'}g(n)\sum_{m\le\frac{x}{n}}f(m)-\sum_{m\le t}f(m)\sum_{n\le t'}g(n).\end{aligned}$$

引理 2.2　设 k 为正实数，则

$$\sum_{t=1}^{n}\frac{\phi(t)}{t^k}=\begin{cases} O(n^{2-k})\,, & 1<k<2;\\ O(\log n)\,, & k=2;\\ O(1)\,, & k>2.\end{cases}$$

证明　因为 $\phi(t)<t$, 所以

$$\sum_{t=1}^{n}\frac{\phi(t)}{t^k}<\sum_{t=1}^{n}\frac{t}{t^k}=\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{t^{k-1}},$$

结合定理 1.7 即得结果.

§2.4　定理 2.3 – 定理 2.5 的证明

定理 2.3 的证明

本文处理 $g(n)$ 的入手点与 **Broughan** 的不同 (参见 [4]). 我们注意到，对任意 $k>1$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{(x,y)=1\\1\le x,y\le k}}1 &= (2\sum_{\substack{(x,y)=1\\1\le x\le y\le k}}1)-1\\ &= 2\sum_{1\le y\le k}\phi(y)-1.\end{aligned}$$

所以，设 $(i,j)=d$, 则有

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{d\le n}d\sum_{\substack{(m,l)=1\\1\le m,l\le\frac{n}{d}}}1\\ &= \sum_{d\le n}d(2\sum_{\substack{(m,l)=1\\1\le l\le m\le\frac{n}{d}}}1-1)\\ &= \sum_{d\le n}d(2\sum_{m\le\frac{n}{d}}\phi(m)-1)\\ &= 2\sum_{md\le n}d\phi(m)-\sum_{d=1}^{n}d\\ &= 2\sum_{md\le n}d\phi(m)-\frac{n^2+n}{2}.\end{aligned}$$

下面我们用 **Drichlet** 双曲线法处理 $\sum\limits_{md\le n}d\phi(m)$.

设正实数 t 及 t' 满足 $tt'=n$, 则由引理 2.1 得

$$\begin{aligned}\sum_{md\le n} d\phi(m) &= \sum_{m\le t}\sum_{d\le \frac{n}{m}} d\phi(m)+\sum_{d\le t'}\sum_{m\le \frac{n}{d}} d\phi(m)-\sum_{m\le t}\sum_{d\le t'} d\phi(m)\\ &= \sum_{m\le t}\phi(m)\sum_{d\le \frac{n}{m}} d+\sum_{d\le t'} d\sum_{m\le \frac{n}{d}}\phi(m)-\sum_{d\le t'} d\sum_{m\le t}\phi(m).\end{aligned}$$

记 $\sum_1=\sum\limits_{m\le t}\phi(m)\sum\limits_{d\le\frac{n}{m}} d$, $\sum_2=\sum\limits_{d\le t'} d\sum\limits_{m\le\frac{n}{d}}\phi(m)$, $\sum_3=\sum\limits_{d\le t'} d\sum\limits_{m\le t}\phi(m)$.

对于 $\sum_1$ 利用定理 1.9 的 (2), (3) 得

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_1 &= \frac{1}{2}\sum_{m\le t}\phi(m)(\frac{n^2}{m^2}+O(\frac{n}{m}))\\ &= \frac{n^2}{2}\sum_{m\le t}\frac{\phi(m)}{m^2}+O(n\sum_{m\le t}\frac{\phi(m)}{m})\\ &= \frac{n^2}{2}(\frac{\log t}{\zeta(2)}+C+O(\frac{\log t}{t}))+O(\frac{nt}{\zeta(2)})\\ &= \frac{n^2\log t}{2\zeta(2)}+\frac{Cn^2}{2}+O(\frac{n^2\log t}{t})+O(nt)\\ &= \frac{n^2\log t}{2\zeta(2)}+\frac{Cn^2}{2}+O(nt'\log t)+O(nt).\end{aligned}$$

其中, $C=\frac{\gamma}{\zeta(2)}-\sum\limits_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}\log d$ 为常数, γ 为欧拉常数.

对于 $\sum_2$ 利用定理 1.9(1) 及定理 1.7(1) 得

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_2 &= \sum_{d\le t'} d(\frac{n^2}{2\zeta(2)d^2}+O(\frac{n}{d}\log\frac{n}{d})\\ &= \frac{n^2}{2\zeta(2)}\sum_{d\le t'}\frac{1}{d}+O(n\sum_{d\le t'}\log\frac{n}{d})\\ &= \frac{n^2}{2\zeta(2)}(\log t'+\gamma+O(\frac{1}{t'}))+O(n\log nt')\\ &= \frac{n^2\log t'}{2\zeta(2)}+\frac{\gamma n^2}{2\zeta(2)}+O(nt)+O(nt'\log n).\end{aligned}$$

对于 $\sum_3$ 利用定理 1.9(1) 得

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_3 &= \sum_{d\le t'}\sum_{m\le t}\phi(m) \\
&= \sum_{d\le t'} d(\frac{t^2}{2\zeta(2)}+O(t\log t)) \\
&= \frac{t^2}{2\zeta(2)}\sum_{d\le t'} d+O(t\log t\sum_{d\le t'} d) \\
&= \frac{t^2}{4\zeta(2)}(t'^2+t')+O(t'^2 t\log t) \\
&= \frac{n^2}{4\zeta(2)}+\frac{nt}{4\zeta(2)}+O(nt'\log t).
\end{aligned}$$

这样

$$\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2+\sum\nolimits_3=\frac{n^2\log n}{2\zeta(2)}+n^2(\frac{C}{2}+\frac{\gamma}{2\zeta(2)}-\frac{1}{4\zeta(2)})+O(nt'\log n)+O(nt),$$

所以

$$\begin{aligned}
g(n) &= \frac{n^2\log n}{\zeta(2)}+n^2(C+\frac{\gamma}{\zeta(2)}-\frac{1}{2\zeta(2)})+O(nt'\log n)+O(nt)-\frac{n^2+n}{2} \\
&= \frac{n^2\log n}{\zeta(2)}+n^2(C+\frac{\gamma}{\zeta(2)}-\frac{1}{2\zeta(2)}-\frac{1}{2})+O(\frac{n^2\log n}{t})+O(nt).
\end{aligned}$$

因为随着 t 增加 $\{\frac{n^2\log n}{t}\}$ 递减，而 $\{nt\}$ 增加．我们取 t 使得 $\frac{n^2\log n}{t}=nt$ 则有

$$t=(n\log n)^{\frac{1}{2}},O(\frac{n^2\log n}{t})+O(nt)=O(n^{\frac{3}{2}}(\log n)^{\frac{1}{2}}),$$

若记 $C_0=C+\frac{\gamma}{\zeta(2)}-\frac{1}{2\zeta(2)}-\frac{1}{2}$，则

$$g(n)=\frac{n^2\log n}{\zeta(2)}+n^2C_0+O(n^{\frac{3}{2}}(\log n)^{\frac{1}{2}}),$$

其中，$C_0=\frac{\gamma}{\zeta(2)}-\sum\limits_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}\log d+\frac{\gamma}{\zeta(2)}-\frac{1}{2\zeta(2)}-\frac{1}{2}$ 为常数，γ 为欧拉常数．

注 我们能够改进定理 2.2 中的误差项的关键在于，我们注意到了证明开始所说的 $g(n)$ 的表达形式，因此可以用 Dirichlet 双曲线法给出更好的误差估计．

定理 2.4 的证明

采用和定理 2.3 相同的处理方法．

设 $(i,j)=d$, 则

$$\begin{aligned}
G(n) &= \sum_{d\le n} d^k \sum_{\substack{(s,t)=1\\ 1\le s,t\le \frac{n}{d}}} 1\\
&= \sum_{d\le n} d^k \Big(2\sum_{1\le t\le \frac{n}{d}} \phi(t) - 1\Big)\\
&= 2\sum_{dt\le n} d^k\phi(t) - \sum_{d=1}^{n} d^k.
\end{aligned}$$

记 $\sum_4 = \sum\limits_{dt\le n} d^k\phi(t)$, $\sum_5 = \sum\limits_{d=1}^{n} d^k$.

对于 $\sum_5$ 由定理 1.7(5) 得

$$\sum\nolimits_5 = \frac{n^{k+1}}{k+1} + O(n^k).$$

下面求 $\sum_4$.

(1) 当 $0<k<1$ 时, 由定理 1.9(1) 得

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_4 &= \sum_{d=1}^{n} d^k \sum_{t\le \frac{n}{d}} \phi(t)\\
&= \sum_{d=1}^{n} d^k \Big(\frac{n^2}{2\zeta(2)d^2} + O\big(\frac{n}{d}\log\frac{n}{d}\big)\Big)\\
&= \frac{n^2}{2\zeta(2)}\sum_{d=1}^{n} d^{k-2} + O\Big(n\sum_{d=1}^{n} d^{k-1}\log\frac{n}{d}\Big),
\end{aligned}$$

首先考虑主项. 由于 $0<k<1$, 所以, $1<2-k<2$, 从而利用引理 1.7(3) 得

$$\begin{aligned}
\frac{n^2}{2\zeta(2)}\sum_{d=1}^{n} d^{k-2} &= \frac{n^2}{2\zeta(2)}\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d^{2-k}}\\
&= \frac{n^2}{2\zeta(2)}\big(\zeta(2-k) + O(n^{k-1})\big)\\
&= \frac{n^2\zeta(2-k)}{2\zeta(2)} + O(n^{k+1}).
\end{aligned}$$

现在考虑误差项 $O(n\sum\limits_{d=1}^{n} d^{k-1}\log\frac{n}{d})$. 利用定理 1.7(4) 得

$$\begin{aligned}
\Big|n\sum_{d=1}^{n} d^{k-1}\log\frac{n}{d}\Big| < n\sum_{d=1}^{n} d^{k-1}\log n &= n\log n\sum_{d=1}^{n} d^{k-1}\\
&= n\log n\Big(\frac{n^k}{k} + C + O(n^{k-1})\Big)\\
&= O(n^{k+1}\log n).
\end{aligned}$$

所以，当 $0<k<1$ 时，

$$\begin{aligned}
G(n) &= 2\sum\nolimits_4-\sum\nolimits_5\\
&= \frac{n^2\zeta(2-k)}{\zeta(2)}+O(n^k)+O(n^{k+1}\log n)-\frac{n^{k+1}}{k+1}+O(n^k)\\
&= \frac{n^2\zeta(2-k)}{\zeta(2)}+O(n^{k+1}\log n),
\end{aligned}$$

(2) 当 $1<k<2$ 时，对于 $\sum_4$ 利用定理 1.7(5), 引理 2.2(1) 及例 4 得

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_4 &= \sum_{t=1}^{n}\phi(t)\sum_{d\leq\frac{n}{t}}d^k\\
&= \sum_{t=1}^{n}\phi(t)(\frac{n^{k+1}}{(k+1)t^{k+1}}+O(\frac{n^k}{t^k}))\\
&= \frac{n^{k+1}}{k+1}\sum_{t=1}^{n}\frac{\phi(t)}{t^{k+1}}+O(\sum_{t=1}^{n}\phi(t)\frac{n^k}{t^k})\\
&= \frac{n^{k+1}}{k+1}\sum_{t=1}^{n}\frac{\phi(t)}{t^{k+1}}+O(n^2)\\
&= \frac{n^{k+1}}{k+1}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\phi(t)}{t^{k+1}}-\frac{n^{k+1}}{k+1}\sum_{t>n}\frac{\phi(t)}{t^{k+1}}+O(n^2)\\
&= \frac{n^{k+1}}{k+1}\frac{\zeta(k)}{\zeta(k+1)}+O(n^2)+(n^2)\\
&= \frac{n^{k+1}}{k+1}\frac{\zeta(k)}{\zeta(k+1)}+O(n^2).
\end{aligned}$$

所以，当 $1<k<2$ 时，

$$G(n)=2\sum\nolimits_4-\sum\nolimits_5=\frac{2n^{k+1}\zeta(k)}{(k+1)\zeta(k+1)}-\frac{n^{k+1}}{k+1}+O(n^2).$$

(3) 当 $k=2$ 时，和 (2) 类似，利用定理 1.7(5), 引理 2.2(2) 及例 4 得

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_4 &= \sum_{t=1}^{n}\phi(t)\sum_{d\leq\frac{n}{t}}d^2\\
&= \frac{n^3}{3}\sum_{t=1}^{n}\frac{\phi(t)}{t^3}+O(\sum_{t=1}^{n}\phi(t)\frac{n^2}{t^2})\\
&= \frac{n^3}{3}\sum_{t=1}^{n}\frac{\phi(t)}{t^3}+O(n^2\log n)\\
&= \frac{n^3}{3}\frac{\zeta(2)}{\zeta(3)}+O(n^2\log n).
\end{aligned}$$

所以，当 $k=2$ 时，

$$G(n)=2\sum\nolimits_4-\sum\nolimits_5=\frac{2n^3\zeta(2)}{3\zeta(3)}-\frac{n^3}{3}+O(n^2\log n).$$

(4) 当 $k>2$ 时，和 (2) 类似，利用定理 1.7(5), 引理 2.2(3) 及例 4 得

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_4 &= \sum_{t=1}^{n}\phi(t)\sum_{d\leq\frac{n}{t}}d^k\\ &= \sum_{t=1}^{n}\phi(t)(\frac{n^{k+1}}{(k+1)t^{k+1}}+O(\frac{n^k}{t^k}))\\ &= \frac{n^{k+1}}{k+1}\sum_{t=1}^{n}\frac{\phi(t)}{t^{k+1}}+O(n^k)\\ &= \frac{n^{k+1}}{k+1}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\phi(t)}{t^{k+1}}-\frac{n^{k+1}}{k+1}\sum_{t>n}\frac{\phi(t)}{t^{k+1}}+O(n^k)\\ &= \frac{n^{k+1}}{k+1}\frac{\zeta(k)}{\zeta(k+1)}+O(n^k)+(n^2)\\ &= \frac{n^{k+1}}{k+1}\frac{\zeta(k)}{\zeta(k+1)}+O(n^k).\end{aligned}$$

所以，当 $k>2$ 时，

$$G(n)=2\sum\nolimits_4-\sum\nolimits_5=\frac{2n^{k+1}\zeta(k)}{(k+1)\zeta(k+1)}-\frac{n^{k+1}}{k+1}+O(n^k).$$

综上可得

$$G(n)=\begin{cases}\frac{n^2\zeta(2-k)}{\zeta(2)}+O(n^{k+1}logn)\ , & 0<k<1;\\ \frac{2n^{k+1}\zeta(k)}{(k+1)\zeta(k+1)}-\frac{n^{k+1}}{k+1}+O(n^2)\ , & 1<k<2;\\ \frac{2n^3\zeta(2)}{3\zeta(3)}-\frac{n^3}{3}+O(n^2\log n)\ , & k=2;\\ \frac{2n^{k+1}\zeta(k)}{(k+1)\zeta(k+1)}-\frac{n^{k+1}}{k+1}+O(n^k)\ , & k>2.\end{cases}$$

注 1　本定理我们能够得证，关键在于我们采用了与定理 2.3 相同的处理方法，给出了 $G(n)$ 的较简单的表达形式.

注 2　上述 (1) 的证明求 $\sum_5$ 时先对 t 求和再对 d 求和. 而 (2), (3), (4) 的证明求 $\sum_5$ 的过程中必须先对 d 求和，再对 t 求和；若先对 t 求和，则产生的误差项的阶将高于主项的阶.

注 3　(2), (3), (4) 证明过程类似，只是因为 $\sum\limits_{t=1}^{n}\frac{\phi(t)}{t^k}$ 对不同的 k 需作不同的处理.

定理 2.5 的证明

我们首先找一个函数 f 使得

$$\frac{1}{m^k}=\sum_{d|m}f(d),$$

由定理 1.3 知，这样的函数是唯一存在的：

$$f(m)=\sum_{d|m}\mu(d)\frac{d^k}{m^k}.$$

如果令 $l(m)=m^k f(m)$, 则 l 为积性函数且

$$\begin{aligned}
l(m) &= \sum_{d|m}\mu(d)d^k\\
&= \prod_{p^\alpha\|m}\sum_{d|p^\alpha}\mu(d)d^k\\
&= \prod_{p^\alpha\|m}(1-p^k)\le\prod_{p|m}p^k<m^k.
\end{aligned}$$

由定理 1.2 知 $[i,j]^k=\frac{(ij)^k}{(i,j)^k}$, 设 $(i,j)=d$, 则由定理 1.1, 定理 1.7(5) 得

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}[i,j]^k &= \sum_{j=1}^{n}\frac{i^kj^k}{(i,j)^k}\\
&= \sum_{j=1}^{n}i^kj^k\sum_{\substack{d|i\\ d|j}}f(d)\\
&= i^k\sum_{d|i}f(d)\sum_{\substack{j\le n\\ d|j}}j^k\\
&= i^k\sum_{d|i}f(d)d^k\sum_{q=1}^{[\frac{n}{d}]}q^k\\
&= i^k\sum_{d|i}l(d)(\frac{n^{k+1}}{(k+1)d^{k+1}}+O(\frac{n^k}{d^k}))\\
&= \frac{n^{k+1}}{k+1}i^k\sum_{d|i}\frac{l(d)}{d^{k+1}}+O(n^ki^k\sum_{d|i}\frac{l(d)}{d^k}),
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
H(n) &= \frac{n^{k+1}}{k+1}\sum_{i=1}^{n}i^k\sum_{d|i}\frac{l(d)}{d^{k+1}}+O(n^k\sum_{i=1}^{n}i^k\sum_{d|i}\frac{l(d)}{d^k})\\
&= \frac{n^{k+1}}{k+1}\sum_{d=1}^{n}\frac{l(d)}{d^{k+1}}\sum_{\substack{i\le n\\ d|i}}i^k+O(n^k\sum_{d=1}^{n}\frac{l(d)}{d^k}\sum_{\substack{i\le n\\ d|i}}i^k).
\end{aligned}$$

记

$$\sum\nolimits_6 = \frac{n^{k+1}}{k+1}\sum_{d=1}^{n}\frac{l(d)}{d^{k+1}}\sum_{\substack{i\le n\\ d|i}} i^k, \sum\nolimits_7 = n^k\sum_{d=1}^{n}\frac{l(d)}{d^k}\sum_{\substack{i\le n\\ d|i}} i^k.$$

令 $i = dt$, 由定理 1.7(5) 得

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_6 &= \frac{n^{k+1}}{k+1}\sum_{d=1}^{n}\frac{l(d)}{d^{k+1}}d^k\sum_{t\le\frac{n}{d}} t^k\\ &= \frac{n^{k+1}}{k+1}\sum_{d=1}^{n}\frac{l(d)}{d}\left(\frac{n^{k+1}}{(k+1)d^{k+1}} + O\left(\frac{n^k}{d^k}\right)\right)\\ &= \frac{n^{2k+2}}{(k+1)^2}\sum_{d=1}^{n}\frac{l(d)}{d^{k+2}} + O\left(\frac{n^{2k+1}}{k+1}\sum_{d=1}^{n}\frac{l(d)}{d^{k+1}}\right)\\ &= \frac{n^{2k+2}}{(k+1)^2}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{l(d)}{d^{k+2}} - \frac{n^{2k+2}}{(k+1)^2}\sum_{d>n}\frac{l(d)}{d^{k+2}} + O\left(\frac{n^{2k+1}}{k+1}\sum_{d=1}^{n}\frac{l(d)}{d^{k+1}}\right).\end{aligned}$$

因为, $l(d) < d^k$, 再利用定理 1.7(1), (2) 我们有

$$\begin{aligned}O\left(\frac{n^{2k+1}}{k+1}\sum_{d=1}^{n}\frac{l(d)}{d^{k+1}}\right) &= O\left(\frac{n^{2k+1}}{k+1}\sum_{d=1}^{n}\frac{d^k}{d^{k+1}}\right)\\ &= O\left(\frac{n^{2k+1}}{k+1}\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d}\right)\\ &= O(n^{2k+1}\log n),\end{aligned}$$

$$\frac{n^{2k+2}}{(k+1)^2}\sum_{d>n}\frac{l(d)}{d^{k+2}} < \frac{n^{2k+2}}{(k+1)^2}\sum_{d>n}\frac{d^k}{d^{k+2}} = \frac{n^{2k+2}}{(k+1)^2}\sum_{d>n}\frac{1}{d^2} = O(n^{2k+1}),$$

所以

$$-\frac{n^{2k+2}}{(k+1)^2}\sum_{d>n}\frac{l(d)}{d^{k+2}} + O\left(\frac{n^{2k+1}}{k+1}\sum_{d=1}^{n}\frac{l(d)}{d^{k+1}}\right) = O(n^{2k+1}\log n).$$

对于主项, 由于 $l(d)$ 为积性函数, 且 $h(d) < d^k$, 则利用定理 1.4 得

$$\begin{aligned}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{l(d)}{d^{k+2}} &= \prod_{P}\left(1 + \frac{l(p)}{p^{k+2}} + \frac{l(p^2)}{p^{2k+4}} + \frac{l(p^3)}{p^{3k+6}} + \ldots\right)\\ &= \prod_{P}\left(1 + \frac{1-p^k}{p^{k+2}} + \frac{1-p^k}{p^{2k+4}} + \ldots\right)\\ &= \prod_{P}\frac{p^{k+2}-p^k}{p^{k+2}-1}\\ &= \prod_{P}\frac{p^{k+2}}{p^{k+2}-1}\prod_{P}\frac{p^2-1}{p^2}\\ &= \frac{\zeta(k+2)}{\zeta(2)},\end{aligned}$$

所以

$$\sum\nolimits_6 = \frac{n^{2k+2}}{(k+1)^2}\frac{\zeta(k+2)}{\zeta(2)} + O(n^{2k+1}\log n).$$

同理

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_7 &= n^k\sum_{d=1}^{n}\frac{l(d)}{d^k}d^k\sum_{t\le\frac{n}{d}}t^k\\ &= n^k\sum_{d=1}^{n}l(d)\left(\frac{n^{k+1}}{(k+1)d^{k+1}} + O\left(\frac{n^k}{d^k}\right)\right)\\ &= \frac{n^{2k+1}}{k+1}\sum_{d=1}^{n}\frac{l(d)}{d^{k+1}} + O\left(n^{2k}\sum_{d=1}^{n}\frac{l(d)}{d^k}\right).\end{aligned}$$

由于 $h(d) < d^k$, 再利用定理 **1.7(1)** 得

$$\sum_{d=1}^{n}\frac{l(d)}{d^{k+1}} < \sum_{d=}^{n}\frac{d^k}{d^{k+1}} = \sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d} = O(\log n),$$

$$\sum_{d=1}^{n}\frac{l(d)}{d^k} < \sum_{d=1}^{n}1 = n,$$

从而， $\sum_7 = O(n^{2k+1}\log n)$.

综上

$$\begin{aligned}H(n) &= \sum\nolimits_6 + O\left(\sum\nolimits_7\right)\\ &= \frac{n^{2k+2}}{(k+1)^2}\frac{\zeta(k+2)}{\zeta(2)} + O(n^{2k+1}\log n).\end{aligned}$$

结论

本文主要是对最大公约数的和函数的误差项进行改进及给出最大公约数与最小公倍数的 k 次和函数的渐进公式，现在对本文所得结论作一下回顾.

本文主要证明了三个定理:

定理 1 $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i,j)=\frac{n^2\log n}{\zeta(2)}+C_0n^2+O(n^{\frac{3}{2}}(\log n)^{\frac{1}{2}}),$$

其中，$C_0=\frac{\gamma}{\zeta(2)}-\sum\limits_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}\log d+\frac{\gamma}{\zeta(2)}-\frac{1}{2\zeta(2)}-\frac{1}{2}$ 为常数，γ 为欧拉常数.

定理 2 对正实数 $k(k\neq 1)$，有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i,j)^k=\begin{cases}\frac{n^2\zeta(2-k)}{\zeta(2)}+O(n^{k+1}logn)\ , & 0<k<1;\\ \frac{2n^{k+1}\zeta(k)}{(k+1)\zeta(k+1)}-\frac{n^{k+1}}{k+1}+O(n^2)\ , & 1<k<2;\\ \frac{2n^3\zeta(2)}{3\zeta(3)}-\frac{n^3}{3}+O(n^2\log n)\ , & k=2;\\ \frac{2n^{k+1}\zeta(k)}{(k+1)\zeta(k+1)}-\frac{n^{k+1}}{k+1}+O(n^k)\ , & k>2.\end{cases}$$

定理 3 对任意正实数 k，有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[i,j]^k=\frac{n^{2k+2}\zeta(k+2)}{(k+1)^2\zeta(2)}+O(n^{2k+1}\log n).$$

参 考 文 献

[1] 潘承洞，潘承彪，简明数论，北京大学出版社， 1981. 1.

[2] 冯克勤，余红兵，整数与多项式，高等教育出版社， 1999. 10.

[3] T. M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, New York, Berlin Heidelberg:Springer-Verlag, 1976.

[4] K. A. Broughan, The gcd-sum Function, Journal of Integer Sequences, 2001,Vol.4:Article 01.2.2.

[5] 朱瑾，最小公倍数的和函数，苏州大学学报 (自然科学版), 2006 年第 2 期.

致　谢

本论文是在导师余红兵教授的悉心指导下完成的，从选题到定稿，余老师倾注了大量心血．三年的学习和生活中，余老师给予我极大的关心，支持和鼓励．我在数学方向上走过的每一步都离不开余老师的谆谆教诲．他严谨的治学态度，一丝不苟的敬业精神值得我终身学习．在此，向余老师致以最衷心的感谢！

感谢张伟，何震给我的帮助和支持！

感谢苏州大学数学科学学院所有关心，帮助我的老师和同学们！

最后感谢我的家人对我一贯的支持！