边旋转一周而成的面围成的几何体; 如果将一个半圆以它的直径所在的直线为轴旋转一周, 所得的几何体应该是__________.

答案: 1. B. 2. A. 3. C. 4. D. 5. 直角梯形以它的一条垂直于底边的腰, 球.

方格纸中的排列组合问题

225700 江苏省兴化市城北中学 蒋彩荣

研究性学习理论认为, 学生应在教师指导下, 从一定情境中, 多角度发现有价值的问题, 主动地、自主地探求解决方案, 从而培养学生创新意识, 发展学生能力. 课堂教学中, 对开放型问题的编组与探究正是这一理论的具体体现. 下面, 是笔者在排列、组合习题课上, 对一类问题的有关做法.

1. 创设情境

给出如图1所示的图形, 请同学们就此编组排列、组合问题, 并寻求解决方案.

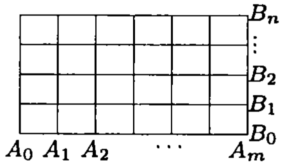

图 1

2. 编组探究

类型一 摆棋

问题1 摆围棋, 每一个交叉点均有放白棋、放黑棋和不放棋三种可能, 共有多少种不同的方案?

思路: 共有 $(m+1)(n+1)$ 个交叉点, 每一交叉点均有3种放法, 由乘法原理, 不同的方案总共有 $3^{(m+1)(n+1)}$ 种.

问题2 摆围棋, 每一格内均有放白、放黑和不放三种可能, 共有多少种不同方案?

思路: 同上, 共有 3^{mn} 种不同方案.

类型二 作图

问题3 上述图中, 共有多少条线段? 多少条有向线段?

思路: 每一个横边中, 均有 C_{m+1}^2 条线段, 每一个纵边中, 均有 C_{n+1}^2 条线段, 则图中共可作出线段 $(n+1)C_{m+1}^2+(m+1)C_{n+1}^2=\frac{1}{2}(m+1)(n+1)(m+n)$ 条.

同理, 有向线段有 $(n+1)P_{m+1}^2+(m+1)P_{n+1}^2=(m+1)(n+1)(m+n)$ 条.

问题4 上述图中, 共有多少矩形?

思路: 分两步, 横边有 C_{m+1}^2 种取法, 纵边有 C_{n+1}^2 种取法, 共可作矩形 $C_{m+1}^2C_{n+1}^2$ 个.

问题5 令 $m=5$, $n=4$, 图中共有多少个正方形(假定每格均为单位正方形)?

思路: 单位正方形和边长分别为2、3、4的正方形的个数依次为 $5\times4=20$ 个、$4\times3=12$ 个、$3\times2=6$ 个、$2\times1=2$ 个, 共有 $20+12+6+2=40$ 个正方形.

问题6 令 $m=5$, $n=4$, 且每一小格的横边是纵边的2倍, 图中共有多少个正方形?

思路: 不妨令每一小格的纵边长为1, 正方形有两种类型: 边长为2、边长为4. 边长为2的有 $5\times3=15$ 个, 边长为4个的正方形有 $4\times1=4$ 个, 共有正方形19个.

类型三 路径

问题7 如图1, 是一张道路网, 即从 A_0 走到 B_n 的最短路径共有多少种?

思路: 所谓"最短", 即行走方向只能是向右、向上, 向右需移动 m 步, 向上需移动 n 步, 故只需在 $m+n$ 步中确定哪些步向右, 哪些步向上, 所以最短路径共有 C_{m+n}^m 种.

问题8 如图1, 是一张道路网, 从 A_0 到

(下转第5-38页)

6条直线有$1+2+3+4+5=15$个交点,

……

n条直线有$1+2+3+\cdots+(n-1)$个交点.

至于$1+2+\cdots+(n-1)$与$n(n-1)\div 2$的相等关系, 可以通过其它途径加以理解, 这里不再赘述.

在探求挑战课题B中, n个等圆将平面分割成几部分时, 可以先着眼于分割的部分数与交点数之间的关系: (部分数)=(交点数)+1.

因为, 圆的个数与交点数之间的关系, 可以从1个圆没有交点, 2个圆有2个交点. 求3个圆的交点时, 考虑第3个圆与前2个圆相交, 增加2×2个交点, 所以, 有$2+2\times 2=6$个交点, 从而归纳得到:

4个圆时, 有$2+2\times 2+2\times 3=12$个交点,

5个圆时, 有$2+2\times 2+2\times 3+2\times 4=20$个交点,

……

n个圆时, 有

$$\begin{aligned}&2+2\times 2+2\times 3+\cdots+2(n-1)\\ &=2[1+2+3+\cdots+(n-1)]\\ &=2\times\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1)\end{aligned}$$

个交点.

列表如下:

圆的个数	1	2	3	4	5	$\cdots$	n
交点的个数	0	2	6	12	20	$\cdots$	

再着眼于上表中, 尺字型图形中数字之间的规律, 得到:

4个圆时, 有$4\times 3=12$个交点,

5个圆时, 有$5\times 4=20$个交点,

……

n个圆时, 有$n(n-1)$个交点.

因此, n个等圆将平面分割成$n(n-1)+1$个部分.

第二次“数学开放题学术研讨会”会讯

第二次“数学开放题学术研讨会”定于2003年11月下旬在上海举行. 主题是: 开放题和课程内容, 开放题的教学, 开放题的考试与评价, 开放题的心理机制. 现已开始征集论文, 2003年10月1日截止. 出席会议者由筹备组发出正式邀请. 联系地址: 上海市红松路81弄18号上海市新基础教育实验学校, 邮编: 201103; 电话: 021-64024300; Email: slr@shxjc.net.

主办单位: 华东师范大学数学教育研究所; 上海市新基础教育实验学校; 上海教育出版社; 全国教育科学“九五”规划课题“开放题——数学教学的新模式”课题组.

(上接第5-12页)

B_n, 再从B_n回到A_0的最短路径有多少种? 任一路段均不可重复的往返的路径有多少种?

思路: 前一问题的答案为$(C_{m+n}^{m})^2$种, 后一问题留作课后讨论.

类型四 涂色

问题9 从5种不同的颜色中选取2种颜色, 涂到每一格中, 每格只涂一色, 相邻两格不同色, 共有多少种方案? 用3种颜色涂呢?

思路: 涂2色, 结论为$2C_5^2$; 涂3色问题留作课后讨论.

类型五 剪纸

问题10 如图1, 是一张矩形纸, 沿图中的线, 将纸剪成面积相等的两块, 共有多少剪法?

思路: 此问题仅讨论到“当mn为偶数时, 才可剪成面积相等的两块”.

开放型问题, 由于条件、结论、解题过程的不惟一性, 其探究问题的角度、方式与结果可能是多种多样的, 有时, 甚至会劳而无获, 这一点, 无论是教师, 还是学生, 都应有此心理准备. 基于同样的理由, 对学生展示出的探究问题方式与结果, 教师不能去轻易否定, 而应从中去发现其闪光处. 只有这样, 才能最终实现开设开放型课题的初衷.