容斥原理在更列问题中的应用实例

◎姜　宁　(江苏省南京市金陵中学河西分校　210019)
◎李菲菲　(江苏省南京市东山外国语学校　211103)

【摘要】容斥原理是中学数学中的重要定理,在计数时先不考虑重叠的情况,把包含于某内容中的所有对象的数目先计算出来,然后再把计算时重复计算的数目排斥出去,使得计算的结果既无遗漏又无重复.而更列问题则是组合数学的难点之一.本文首先给出容斥原理的定义及性质与证明,然后引出更列问题,同时给出更列问题的一个有效解法,最后讨论容斥原理在更列问题中的一系列应用.

【关键词】容斥原理;更列问题;排列

一、容斥原理的概念

在计数时,必须注意无一重复,无一遗漏.为了使重叠部分不被重复计算,人们在计数时,必须注意研究出一种新的计算方法,这种方法的基本思想是:先不考虑重叠的情况,把包含于某内容中的所有对象的数目先计算出来,然后再把计算时重复计算的数目排斥出去,使得计算的结果既无遗漏又无重复,这种计数的方法称之为容斥原理

二、容斥原理的性质

假定$|A|$表示集合A的元素个数,根据加法原则,若$A\cup B=\varnothing$,则$|A\cup B|=|A|+|B|$.若$A\cap B=\varnothing$时,这时将$|A\cup B|$多计算一次,可以直观有$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.对于$n$个有限集合$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$,同样有定理:

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n-1}|A_i|-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}|A_{n-1}\cap A_n|+\cdots+(-1)^{n-2}|A_1\cap A_n|\cup(A_2\cap A_n)\cup\cdots\cup(A_{n-1}\cap A_n)|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>1}\sum_{k>1}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.$$

三、更列问题的概念

什么叫作更列问题?我们先来看一个题目,现有五件球衣分属五个运动员,现问五个运动员都不穿自己的球衣,而穿其他球员的球衣,这样的穿法有几种?这就是5个元素的更列问题.

就一般而言,有几个不同的元素,它们一一对应于几个位置,如果这n个元素都不排在自身对应的位置上,这种排列的方法称为几个元素的一个更列.现要计算这种更列的个数.大数学家欧拉曾用容斥原理求出了n个元素的更列个数为:$M_n=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{2}{2!}-\frac{3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right]$.

四、容斥原理与更列问题的关系

这是运用组合数学的方法解决问题的一个运用.下面我们就证明一下这个公式.现在,我们来考虑整数$1,2,\cdots,n$的排列.如果1不出现在第1个位置,2不出现在第2个位置,$\cdots$,n不出现在第n个位置,这时,这些整数的一个排列说成是它们的一个更列.也就是说,没有一个整数出现在它的自然位置上.用M_n记$1,2,\cdots,n$这n个数的更列的个数.如何来求这个M_n,这既是一个排列问题,同时又是一个数列的通项问题.

我们不妨先考虑这个数列的前几项.整数更列的个数可由解递归关系而得到.考虑整数$1,2,\cdots,n$的更列,对其进行合理分布,恰当分类.

由分步计数原理和分类计数原理,我们便得到了数列$\{M_n\}$的递推关系式:$M_n=(n-1)(M_n-1+M_n-2)$.(*)

显然,$M_1=0,M_2=1,M_3=2$.(*)式可进一步变形,$M_n-nM_{n-1}=-[M_{n-1}-(n-1)M_{n-2}]=\cdots=(-1)^{n-3}\cdot(M_3-3M_2)=(-1)^{n-2}=(-1)^n$. $M_n-nM_{n-1}=(-1)^n$式两边同乘$\frac{1}{n!}$,则有

$$\frac{M_n}{n!}-\frac{M_{n-1}}{(n-1)!}=\frac{(-1)^n}{n!}.\qquad(1)$$

由累加法,得$M_n=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{2}{2!}-\frac{3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right]$.

五、容斥原理在更列问题中的应用

例1　4只小鸟飞入四个不同的笼子里,每只小鸟都有自己的一个笼子(不同的鸟,笼子也不同),每个笼子只能飞进一只鸟,若都不飞进自己的笼子,应有多少种不同的飞法?

解　为了准确地计算出有多少种不同的飞法,先求出4只小鸟随意飞有多少种不同的飞法,然后减去不符合条件的飞法.

记$A_1=\{$甲飞入自己的笼子而另3只鸟随意飞的飞法$\}$,$A_2=\{$乙飞入自己的笼子而另3只鸟随意飞的飞法$\}$,$A_3=\{$丙飞入自己的笼子而另3只鸟随意飞的飞法$\}$,$A_4=\{$丁飞入自己的笼子而另3只鸟随意飞的飞法$\}$.

根据上面提到的公式:

$$M_n=n!-C_n^1(n-1)!+C_n^1(n-2)!-\cdots+(-1)^nC_n^n(n-n)!=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{2}{2!}-\frac{3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

若是5只小鸟按题意飞入鸟笼,则有$M_n=5!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)=44$(种)不同的飞法.

例2　某市有8个县,每县派出一个巡视组到本市别的县去检查工作(每县去一组),问巡视组有多少种不同的分派方法?

解　设这8个县的编号为$1,2,\cdots,8$,而a_i为第i号县$(i=1,2,\cdots,8)$派出的巡视组.I表示这8个巡视组分派到这8个县(每县一组)的所有可能的方法组成的集合,A_i表示I中a_i分到i号县的分配方法组成的集合$(i=1,2,\cdots,8)$.依题意,根据公式$M_n=n!-C_n^1(n-1)!+C_n^1(n-2)!-\cdots+(-1)^n\cdot C_n^n(n-n)!=8!-C_8^1(8-1)!+C_7^1(7-2)!-\cdots+(-1)^8\cdot C_8^8(8-8)!=14833$(种)分配方法,即为所求.

【参考文献】

[1] 李超英.排列和数列的汇合点——有趣的更列问题.中学数学参考,2003(9):35.

[2] 周小华.由“小鸟飞错鸟笼”谈容斥原理的应用.绍兴文理学院院报,2001(2).

[3] 吴国柱,郝端绪.容斥原理在组合数学中的若干应用.冀东学刊,1994(6):23.

[4] 万大庆.关于容斥原理的一些注记[J].四川大学学报(自然科学版),1985,22(1):15-19.