DOI:10.16355/j.cnki.issn1007-9432tyut.1995.03.012
第26卷 第3期 太原工业大学学报 Vol.26 No.3
1995年9月 JOURNAL OF TAIYUAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY Sept. 1995

关于第二类Stirling数的一种新算法

阎世珍
(计算机科学与工程系)

摘 要 本文给出第二类Stirling数的一种新算法，并推出几个有用的推论。

关键词 第二类Stirling数；Bell数；容斥原理
中国图书资料分类法分类号 O15

0 概 述

众所周知，第二类Stirling数是组合数学的重要内容之一，在计算机科学与其它科学中有不少重要应用。在迄今文献中，它的计算一直沿用下面的递推公式

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} \tag{1}$$

其中$\left\{ {m \atop r} \right\}$表示将$m$个元素的集合划分为$r$个类的不同划分的个数（即是将$m$个元素的集合分为$r$个互不相交的非空子集的分法数）。与此相联系的是Bell数。n个元素的集合的Bell数B_n是指该集合一切可能的划分的数目，即应有

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$$

至今人们计算Bell数所仰赖的公式也是递推的

$$B_n = C_{n-1}^{0} B_0 + C_{n-1}^{1} B_1 + \cdots + C_{n-1}^{n-1} B_{n-1} \tag{2}$$

其中定义$B_0=1$.

由于这些公式的递推性，无疑，用它们计算第二类Stirling数和Bell数是不方便的。在应用中，笔者通过简单归纳得到了第二类Stirling数的一个非递推计算公式，并用两种方法给出了严格证明。下面给出该公式的一个较简便的证明。

1 定理·证明·推论

定理 设$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是$n$个元素的集合，则将其划分为$k$个类的不同划分的

① 本文1993年2月8日收到。

数目为

$$\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i C_k^i (k-i)^n \tag{*}$$

$$=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i C_{k-1}^i (k-i)^{n-1} \tag{*'}$$

其中C_m^r表示m个元素中取r个的组合数（前同）。

证明 设$Y=\{y_1, \cdots, y_k\}$是含k个元素的集合，$k\leqslant n$，现求从X到Y的不同满射的数目。(满射是指对后域Y中任一元素在定义域X中都有原象存在的映射)

令$F(n, k)$表示由X到Y的不同满射的个数。令，对$1\leqslant i\leqslant k$，

$$A_i=\{f \mid f\in Y^X;\text{对任 } j, f(x_j)\neq y_i\}$$

(其中全集Y^X表示由X到Y的一切映射的集合）则A_i是“不以y_i为象的一切映射的集合”。于是$\overline{A}_i$表示“象集中含y_i的一切映射的集合”。所以有

$$F(n,k)=|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_k|$$

其中$|B|$表示集合B的基数。

显然，$A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\cdots\cap A_{j_i}$，$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_i\leqslant k$，是$X$到$Y-\{y_{j_1}, \cdots y_{j_i}\}$的所有映射的集合，所以应有

$$|A_{j_1}\cap\cdots\cap A_{j_i}|=|Y-\{y_{j_1},\cdots y_{j_i}\}|^{|X|}$$
$$=(k-i)^n$$

由容斥原理可得

$$F(n,k)=|A_{\overline{1}}\cap\cdots\cap A_{\overline{k}}|$$
$$=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i (k-i)^n$$
$$=\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i C_k^i (k-i)^n \tag{3}$$

另一方面，设$f: X\longrightarrow Y$是一个满射，则显然

$$\varphi_f=\{f^{-1}(y_1),\cdots,f^{-1}(y_k)\}$$

是X的一个划分，称为由满射f诱导的划分。其中$f^{-1}(y_i)$表示y_i的原象集。不同的满射可以诱导出同一划分。容易看出，同一划分可以由$k!$个不同的满射导出。所以由X到Y的不同满射数应为

$$F(n,k)=\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}\cdot k! \tag{4}$$

由(3)，(4)式便得

$$\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i C_k^i (k-i)^n \tag{5}$$

$$=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\frac{C_k^i(k-i)}{k}\cdot(k-i)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i C_{k-1}^i (k-i)^{n-1} \tag{6}$$

(*) 和 (*′) 得证。 证毕。

推论 1　n 个元素的集合所有可能的划分数——Bell 数为

$$B_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^iC_k^i(k-i)^n \qquad (**)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^iC_{k-1}^i(k-i)^{n-1} \qquad (**)'$$

推论 2　对任正整数 $k\geqslant 1$，有阶乘分解式

$$k!=\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^iC_k^i(k-i)^k \qquad (***)$$

证明　在（5）式中令 $k=n$，则由 $\begin{Bmatrix}k\\k\end{Bmatrix}=1$ 立得该结论。

推论 3　对任正整数 m 和 i，$1\leqslant i\leqslant m-1$，有

$$C_{m-i}^0C_m^{m-i}-C_{m-i+1}^1c_m^{m-i+1}+\cdots+(-1)^iC_m^iC_m^m=0 \qquad (7)$$

特别地有

$$1\cdot C_m^1-2C_m^2+3C_m^2-\cdots+(-1)^{m-1}mC_m^m=0 \qquad (8)$$

证明　设 $|X|=n$，$|Y|=m$，则显然有 $|Y|^{|X|}=m^n$. 这表示 X 到 Y 的所有映射为 m^n 个.

另一方面，X 到 Y 的全部映射又可分为：值域为单元素集；值域为二元素集；…；值域为 m 个元素的集；共 m 种情况。

一般地，若值域为 k 个元素的集合 $\{y_{i_1},\cdots,y_{i_k}\}$，则由（3）式可知这种映射总共有 $\sum_{i=0}^{k-1}$ $(-1)^iC_k^i$ $(k-i)^n$ 个。而在 Y 中取 k 个元素作为映象，共有 C_m^k 种不同的取法，故全部映射的总个数又应为

$$\sum_{k=1}^{m}C_m^k\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^iC_k^i(k-i)^n$$

改变求和次序得到等式

$$m^n=m^n+\sum_{i=1}^{m-1}(C_{m-i}^0C_m^{m-i}-C_{m-i+1}^1C_m^{m-i+1}+\cdots+(-1)^iC_m^iC_m^m)(m-i)^n$$

两边消去 m^n，便知和式恒为 0. 而和式为 0 的充要条件显然是每个 $(m-i)^n$ 的系数为 0. 于是立得推论中的结论（7）式。当 $i=m-1$ 时即得（8）式。证毕。

2　讨　论

1）本文所得公式均可用具体数值验证之。特别地，笔者用简单的程序上机对 Bell 数进行了 $1\leqslant n\leqslant 30$ 的计算，所得结果的前十个值与其它文献中用递推公式得到的结果完全一致。

2）从定理的证明可知，我们附带推出了 n 个元素集到 k（$\leqslant n$）个元素集的满射个数的两种计算公式。

3）推论 2 在理论上有重要意义，它表明对任何正整数 k，其阶乘 $k!$ 可由 1^k，2^k，…，$(k-1)^k$，k^k 线性表出。

4）对（7）式和（8）式，尽管用别的方法也可得到，但本文不失为一种新的证法。

参 考 文 献

1 陈景润. 组合数学. 郑州：河南教育出版社，1985. 148～151
2 卢开澄. 组合数学——算法与分析. 北京：清华大学出版社，1983. 127～133
3 Brualdi R A. Introductory Combinatorics. North-Holland，1977
4 徐利治等. 计算组合数学. 上海：上海科学技术出版社，1988

New Calculation Method for the Second Kind of Stirling's Number

Yan Shizhen
(Department of Computer Science and Engineering)

Abstract In this paper, a new calculation method for the second kind of stirling's numbers was given and some useful corollaries were deduced.

Key words second kind of stirling' s numbers; Bell' s numbers; principle of inclusion and exclusion