基于容斥原理的群 Sn 中累计计数问题的探讨

胡 猛,王丽敏
(安阳师范学院 数学科学学院,河南 安阳 455000)

摘 要:讨论了容斥原理及其推广,在此基础上研究了在限制条件下对称群 S_n 中累计计数问题及其推广。

关键词:容斥原理;对称群 S_n;累计计数
中图分类号:O152 **文献标志码**: A **文章编号**:1674-3326(2008)01-0003-03

Applications of Including-Excluding Principle to the Enumeration of the Permutation Group

HU Meng, WANG Li-min
(School of Mathmatics, Anyang Normal University, Anyang 455000, China)

Abstract: In this paper, several elementary forms of including-excluding principle are introduced and generalized, and applications of including-excluding principle to the enumeration of the permutation group under the constraints are discussed and generalized.

Key words: including-excluding principle; summetry group S_n; enumeration of the permutation

容斥原理研究一给定元素的集合 A 和由一些性质组成的集合 P,计算恰好满足集合 P 中 r 个性质的集合 A 中元素的个数。容斥原理的几种简单形式如下:

$$|A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|+\cdots(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|; \tag{1}$$

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\cdots\cap\overline{A}_n|=|A|-|A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n|=|A|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|-\cdots-(-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|; \tag{2}$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i<j}|A_i\cup A_j|+\cdots+(-1)^{n+1}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n| \tag{3}$$

其中 A_i 是满足性质 $P_i\in P$ 的 A 的子集[1]。(1)式表示至少满足 P 中一个性质的 A 中元素个数。(2)式表示都不满足 P 中性质的 A 中元素个数。(3)式表示满足 P 中所有性质的 A 中元素个数。

容斥原理在计数过程中有着十分广泛的应用,本文主要介绍运用容斥原理计算在限制条件下群 S_n 中置换的个数。

引理 1 设 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$是满足性质 $P_i\in P$ 的 A 的子集,对于固定的 r,A 中恰好属于 r 个子集的元素个数是:

$$N_{(n,r)}=\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}C_k^r\sum_{\substack{I\subseteq R\\ k=|I|}}|\bigcap_{i\in I}A_i| \tag{4}$$

其中 $R=[1,n]$[2]。

证明 将 $\bigcap\limits_{i\in X}A_i$ 看作(2)式中的 A,将 $\bigcap\limits_{i\in X}A_i\cap\overline{A}_j$,$(j\in R-X)$看作(2)式中的 A_i,代入(2)式即得:

$$|\bigcap_{i\in X}A_i\cap(\bigcap_{j\in R-X}\overline{A}_j)|=|\bigcap_{i\in X}A_i|-\sum_{\substack{K\supseteq X\\ r+1=|K|}}|\bigcap_{i\in k}A_i|+\cdots=\sum_{K\supseteq X}(-1)^{|K|-|X|}|\bigcap_{i\in K}A_i|=\sum_{k=i}^{n}(-1)^{k-r}\sum_{\substack{K\supseteq X\\ k=|K|}}|\bigcap_{i\in k}A_i|$$

故

$$N_{(n,r)}=\sum_{r=|X|}|\bigcap_{i\in X}A_i\bigcap_{j\in R-X}\overline{A}_j|=$$

收稿日期:2008-03-04
作者简介:胡猛(1982-),男,山东枣庄人,安阳师范学院数学科学学院教师,从事应用数学的研究工作。

$$\sum_{r=|X|}\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\sum_{\substack{K\supseteq X\\ k=|K|}}\left|\bigcap_{i\in K}A_i\right|=$$

$$\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\sum_{k=X}\sum_{\substack{K\supseteq X\\ r=|X|}}\left|\bigcap_{i\in K}A_i\right|=$$

$$\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}C_k^r\sum_{\substack{K\supseteq X\\ k=|K|}}\left|\bigcap_{i\in K}A_i\right|。$$

引理得证。

引理 2　将计数问题中的性质分为 n 组，每组 m_i 个性质，对任意给定的正整数 $r_1,r_2,r_3,\cdots,r_n$，则对每个 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，集合 A 中的恰好满足 r_i 个性质的元的权之和

$$w_{(r_1,r_2,r_3,\cdots,r_n)}=$$

$$\sum_{\substack{r_i\leqslant k_i\leqslant m_i\\ 1\leqslant i\leqslant n}}(-1)^{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(k_i-r_i)}\prod_{1\leqslant i\leqslant n}C_{k_i}^{r_i}w_{k_1,k_2,k_3,\cdots,k_n}$$

其中 $w_{(r_1,r_2,r_3,\cdots,r_n)}$ 为所求问题的权；$w_{k_1,k_2,k_3,\cdots,k_{n-1}}$ 为至少满足第 i 组 k_i 个性质的元的权之和[3]。

证明　当 $k=1$ 时，即为一般的容斥原理，显然成立。

假设 $k=n-1$ 时，下式成立：

$$w_{(r_1,r_2,r_3,\cdots,r_{n-1})}=$$

$$\sum_{\substack{r_i\leqslant k_i\leqslant m_i\\ 1\leqslant i\leqslant n-1}}(-1)^{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1}(k_i-r_i)}\prod_{1\leqslant i\leqslant n-1}C_{k_i}^{r_i}w_{k_1,k_2,k_3,\cdots,k_{n-1}}。$$

现将恰好满足第 i 组 $r_i(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 个性质的集合视为容斥原理中所给集合 A，将第 n 组的 m_n 个性质集合视为容斥原理中所给的性质集合 P；则恰好满足第 n 组 r_n 个性质的元的权之和为 $w_{(r_1,r_2,r_3,\cdots,r_n)}$，至少满足第 n 组 k_n 个性质的元的权之和为 $w_{(r_1,r_2,r_3,\cdots,r_n)}$，运用容斥原理，得：

$$w_{((r_1,r_2,\cdots,r_{n-1}),r_n)}=$$

$$\sum_{k_n=r_n}^{m_n}(-1)^{k_n-r_n}C_{k_n}^{r_n}w_{(r_1,r_2,\cdots,r_{n-1}),k_n}=$$

$$\sum_{k_n=r_n}^{m_n}(-1)^{k_n-r_n}C_{k_n}^{r_n}$$

$$\left[\sum_{\substack{m_i\geqslant k_i\geqslant r_i\\ 1\leqslant i\leqslant n-1}}(-1)^{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1}(k_i-r_i)}\prod_{i=1}^{n-1}C_{k_i}^{r_i}w_{k_1,k_2,k_3,\cdots,k_n}\right]=$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ r_i\leqslant k_i\leqslant m_i}}(-1)^{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(k_i-r_i)}\prod_{i=1}^{n}C_{k_i}^{r_i}w_{k_1,k_2,k_3,\cdots,k_n},$$

引理得证。

引理 3　群 S_n 中恰有 k 个轮换的置换个数为 $|s_{(n,k)}|$。(其中 $s_{(n,k)}$ 为第一类 string 数)[1]

定理 1　群 S_n 中恰有 k 个轮换但无 1—轮换的置换个数为：

$$P_{(n,k)}=\sum_{0\leqslant j\leqslant k}(-1)^jC_n^j|s_{(n-j,k-j)}|。$$

证明　首先介绍一种固定轮换的方法，将每个轮换的最小字排在第一位，然后将所有轮换按第一个字由小到大排列。如 $\pi=(326)(41)(5)\in S_6$，在这种固定轮换方法下，$\pi=(14)(263)(5)\in S_6$[4,5]。

按照上述固定轮换的方法，将 S_n 中的轮换固定。记置换的 k 个轮换为 $A_1,A_2,\cdots,A_k$。若 A_i 为 1—轮换，则记为事件 B_i。因为恰有 k 个轮换且 A_i 为 1—轮换的置换与由 $n-1$ 个元构成的恰有 $k-1$ 个轮换的置换一一对应，所以 $|B_i|=|s_{(n-1,k-1)}|$。

同理，$A_1,A_2,\cdots,A_j$ 都是 1—轮换的置换与由 $n-j$ 个元构成的恰有 $k-j$ 个轮换的置换一一对应。所以，$|B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_j|=|s_{(n-j,k-j)}|$，由容斥原理得：

$$|\bar{B}_1\cap\bar{B}_2\cap\cdots\cap\bar{B}_k|=|s_{(n,k)}|-$$

$$|B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_k|=$$

$$|s_{(n,k)}|-C_n^1|B_i|+C_n^2|B_1\cap B_2|-\cdots+$$

$$(-1)^k|s_{(n-k,0)}|=$$

$$\sum_{0\leqslant j\leqslant k}(-1)^jC_n^j|s_{(n-j,k-j)}|。$$

即　$P_{(n,k)}=\sum\limits_{0\leqslant j\leqslant k}(-1)^jC_n^j|s_{(n-j,k-j)}|$。

定理得证。

推论 1　S_n 中恰有 k 个轮换但无 r—轮换的置换个数为：

$$P_{(n,k,r)}=\sum_{0\leqslant j\leqslant k}(-1)^jC_n^{jr}\frac{(jr)!}{j!\ r^j}|s_{(n-jr,k-j)}|。$$

定理 2　S_n 中恰有 k 个 r—轮换的置换个数为：

(1) $Q_{(n,k,r)}=\dfrac{n!}{k!}\sum\limits_{k\leqslant j\leqslant s}(-1)^{j-k}\dfrac{1}{(j-k)!\ r^j}$，当 $0\leqslant k\leqslant s$ 时，其中 $s=[\dfrac{n}{r}]$。

(2) $Q_{(n,k,r)}=0$，当 $k<0$，或 $k>s$，其中 $s=[\dfrac{n}{r}]$。

证明　当 $k<0$，或 $k>s$，结论显然成立。

当 $0\leqslant k\leqslant s$，S_n 中至少有 j 个 r—轮换的置换可由下列方式构成：先从 n 个元中选取 jr 个(共 C_n^{jr} 种选法)，这 jr 个元组成 j 个 r—轮换(共 $\dfrac{(jr)!}{j!\ r^j}$ 种方法)，剩下的 $n-jr$ 个元组成其余的轮换(共 $(n-jr)!$ 种方法)。所以，S_n 中至少有 j 个 r—轮换的置换个数为：

$$C_n^{jr}\frac{(jr)!}{j!\ r^j}(n-jr)!=\frac{n!}{j!\ r^j}$$

由引理 1 知，S_n 中恰有 k 个 r—轮换的置换个数为：

$$Q_{(n,k,r)}=\frac{n!}{k!}\sum_{k\leqslant j\leqslant s}(-1)^{j-k}\frac{1}{(j-k)!\ r^j}。$$

定理得证。

推论 2　S_n 中恰有 k_i 个 r_i—轮换 $(1\leqslant i\leqslant m)$ 的置换个数为：

$Q_{(r_1,r_2,\cdots,r_m)}=$

$$\sum_{\substack{k_i\leqslant f_i\leqslant[\frac{n}{r_i}]\\1\leqslant i\leqslant m}}(-1)^{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m}(f_i-k_i)}\prod_{1\leqslant i\leqslant m}C_{f_i}^{k_i}$$

$\frac{n!}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant m}(f_i)!\ (r_i)^{f_i}}$，若 $0\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}k_ir_i\leqslant n$；$Q_{(r_1,r_2,\cdots,r_k)}=0$，若 $\sum\limits_{i=1}^{n}k_ir_i<0$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}k_ir_i>n$。

证明　若 $\sum\limits_{i=1}^{n}k_ir_i<0$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}k_ir_i>n$，则结论显然。

若 $0\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}k_ir_i\leqslant n$，则对每一个 $i(1\leqslant i\leqslant m)$，$S_n$ 中至少有 f_i 个 r_i—轮换的置换个数为：

$$C_n^{\sum\limits_{i=1}^{n}f_ir_i}\frac{(\sum\limits_{i=1}^{n}f_ir_i)!}{\prod\limits_{i=1}^{n}f_i!\ r_i^{f_i}}(n-\sum_{i=1}^{n}f_ir_i)!\ \frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{n}f_i!\ r_i^{f_i}}$$

由引理 2 得：

$$Q_{(r_1,r_2,\cdots,r_m)}=\sum_{\substack{k_i\leqslant f_i\leqslant[\frac{n}{r_i}]\\1\leqslant i\leqslant m}}(-1)^{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m}(f_i-k_i)}$$

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant m}C_{f_i}^{k_i}\frac{n!}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant m}(f_i)!\ (r_i)^{f_i}}。$$

定理证毕。

本文首先给出了容斥原理的几种基本形式，并将其推广到赋权的情形，给出广义容斥原理的证明，在此基础上研究了在限制条件下对称群 S_n 中置换的个数，并将所得结论进一步推广。

参考文献：

[1]WEI Wan-di, GENERALIZED PRINCIPLE OF INCLUSION AND EXCLUSION AND ITS APPLICATIONS[J]. Chinese Science Bulletin, 科学通报（英文版），2002(3):99.

[2]柯召，魏万迪. 组合论[M]. 北京：科技出版社，1981:210-214.

[3]屠规彰. 组合记数方法及其应用[M]. 北京：科技出版社，1981:98-111.

[4]李振国，刘维翰. 组合数学的基本计数原理——容斥原理[J]. 数学通报，1985(3).

[5]WANG Zhan-min, The Application of Group Index in Combinatorial Calculating [J]. Journal of Tangshang Teachers College, 2001(2).

【责任编辑　邢怀民】