转 博弈论翻硬币游戏

翻硬币游戏

一般的翻硬币游戏的规则是这样的：

N 枚硬币排成一排，有的正面朝上，有的反面朝上。我们从左开始对硬币按1 到N 编号。

第一，游戏者根据某些约束翻硬币，但他所翻动的硬币中，最右边那个硬币的必须是从正面翻到反面。例如，只能翻3个硬币的情况，那么第三个硬币 那就不能翻硬币了，因为第三个是反的。

第二，谁不能翻谁输。

有这样的结论：局面的SG 值为局面中每个正面朝上的棋子单一存在时的SG 值的异或和。即一个有k个硬币朝上，朝上硬币位置分布在的翻硬币游戏 硬币朝上的翻硬币游戏的SG值异或和。比如THHTTH这个游戏中，2号、3号、6号位是朝上的，它等价于TH、TTH、TTTTTH三个游戏和，即sg[TH 我们的重点就可以放在单个硬币朝上时的SG值的求法。

约束条件一：每次只能翻一个硬币。

一般规则中，所翻硬币的最右边必须是从正面翻到反面，因为这题是只能翻一个硬币，那么这个硬币就是最右边的硬币，所以，每次操作是挑选一个

对于任意一个正面的硬币，SG值为1。

有奇数个正面硬币，局面的SG值==1，先手必胜，有偶数个正面硬币，局面的SG值==0，先手必败。

约束条件二：每次能翻转一个或两个硬币。(不用连续)

每个硬币的SG值为它的编号，初始编号为0，与NIM游戏是一样的。

如果对于一个局面，把正面硬币的SG值异或起来不等于0，既a1^a2^a3^...^an==x,对于an来说一定有an’=an^x<an。

如果an’==0，意思就是说，把an这个值从式子中去掉就可以了。对应游戏，就是把编号为an的正面硬币翻成背面就可以了。因为an^x==0，而 an^a1^a2^a3^...^an==0，即a1^a2^a3^...^an-1==0，只要在原来的x里面去掉an就可以了。

如果an’!=0，意思就是说，把an这个值从式子中去掉后再在式子中加上an’，an’<an。对应游戏，去掉an就是把编号为an的正面硬币翻成背面 面，我们就把它翻成背面，是背面就翻成正面，总之，就是翻转编号为an’的硬币。因为an^x!=0，所以an^a1^a2^a3^...^an!=0，即a1^a2^a3

an’=a1^a2^a3^...^an-1，所以在x中去掉an后，要对an’进行异或，也就是翻转，正转反，反转正。

约束条件三：每次必须连续翻转k个硬币。

我们以k==3为例。

我们计算的是个数为N的硬币中，其中最后一个硬币为正面朝上,的sg值。

当N==1时，硬币为：正，先手必输，所以sg[1]=0。

当N==2时，硬币为：反正，先手必输，所以sg[2]=0。

当N==3时，硬币为：反反正，先手必胜，所以sg[3]=1。

当N==4时，硬币为：反反反正，先手操作后为：反正正反，子状态局面的SG=0^1=1，那么sg[4]=0。

当N==5时，硬币为：反反反反正，先手操作后为：反反正正反，子状态局面的SG=1^0=1，那么sg[5]=0。

当N==6时，硬币为：反反反反反正，先手操作后为：反反反正正反，子状态局面的SG=0^0=0，那么sg[6]=1。

根据观察，可以知道，从编号为1开始，sg值为：001 001 001 001……

根据观察，可以知道，sg的形式为000...01 000...01，其中一小段0的个数为k-1。

约束条件4：每次翻动一个硬币后，必须翻动其左侧最近三个硬币中的一个，即翻动第x个硬币后，必须选择x-1，x-2，x-3中的其中一个硬币进行翻动
Games)

当N==1时，硬币为：正，先手必赢，所以sg[1]=1。

当N==2时，硬币为：反正，先手必赢，因为先手可以翻成反反或正反，可能性为2，所以sg[2]==2。

当N==3时，硬币为：反反正，先手操作后可以为：反正

位置x：1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14...

sg[x]： 1 2 3 0 1 2 3 0 1 2 3 0 1 2...

这个与每次最多只能取3个石子的取石子游戏的SG分布一样，同样还有相似的这类游戏，约束条件5也是一样。

约束条件5：每次必须翻动两个硬币，而且这两个硬币的距离要在可行集S={1,2,3}中，硬币序号从0开始。(Twins游戏)

当N==1时，硬币为：正，先手必输，所以sg[0]=0。

当N==2时，硬币为：反正，先手必赢，所以sg[1]=1。

当N==3时，硬币为：反反正，先手必赢，所以sg[2]=2。

当N==4时，硬币为：反反反正，先手必赢，所以sg[3]=3。

当N==5时，硬币为：反反反反正，先手必输，所以sg[4]=0。

位置x：0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14...

sg[x]： 0 1 2 3 0 1 2 3 0 1 2 3 0 1 2...

约束条件6：每次可以翻动一个、二个或三个硬币。（Mock Turtles游戏)

初始编号从0开始。

当N==1时，硬币为：正，先手必胜，所以sg[0]=1.

当N==2时，硬币为：反正，先手必赢，先手操作后可能为：反反或正反，方案数为2，所以sg[1]=2。

当N==3时，硬币为：反反正，先手必赢，先手操作后可能为：反反反、反正反、正反正、正正反，方案数为4，所以sg[2]=4。

位置x：0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14...

sg[x]： 1 2 4 7 8 11 13 14 16 19 21 22 25 26 28...

看上去sg值为2x或者2x+1。我们称一个非负整数为odious，当且仅当该数的二进制形式的1出现的次数是奇数，否则称作evil。所以1，2，4，7是o
1,10,100,111.而0,3,5,6是evil，因为它们的二进制形式是0,11,101,110。而上面那个表中，貌似sg值都是odious数。所以当2x为odious时，sg值

这样怎么证明呢？我们会发现发现，

evil^evil=odious^odious=evil

evil^odious=odious^evil=odious

假设刚才的假说是成立的，我们想证明下一个sg值为下一个odious数。注意到我们总能够在第x位置翻转硬币到达sg为0的情况；通过翻转第x位置的
小的evil数，因为每个非零的evil数都可以由两个odious数异或得到；但是我们不能移动到下一个odious数，因为任何两个odious数的异或都是evil

假设在一个Mock Turtles游戏中的首正硬币位置x1,x2,...,xn是个P局面，即sg[x1]^...^sg[xn]=0.那么无可置疑的是n必定是偶数，因为奇数个odio
由上面可知sg[x]是2x或者2x+1，sg[x]又是偶数个，那么x1^x2^...^xn=0。相反，如果x1^x2^...^xn=0且n是偶数，那么sg[x1]^...^sg[xn]=0
看下。2x在二进制当中相当于把x全部左移一位，然后补零，比如说2的二进制是10，那么4的二进制就是100。而2x+1在二进制当中相当于把x全部左

10，5的二进制是101。现在看下sg[x1]^...^sg[xn]=0，因为sg[x]是2x或者2x+1，所以式子中的2x+1必须是偶数个（因为2x的最后一位都是0,2x必须出现偶数次）。实际上的情况可能是这样的:

$\overline{x_1 0}$
$\overline{x_2 0}$
$\overline{x_3 0}$
$\overline{x_4 0}$
$\overline{x_5 1}$
$\overline{x_6 1}$
异或得到
$\overline{00}$
在这里$\overline{x_1 0}$表示$2x_1$，$\overline{x_5 1}$表示$2x_5+1$，所以可以得到x_1^x_2^…^x_n=0。

MT游戏当中的P局面是拥有偶数堆石子的Nim游戏的P局面。

约束条件7：每次可以连续翻动任意个硬币，至少翻一个。（Ruler游戏）

初始编号从1开始。

那么这个游戏的SG函数是g(n)=mex{0,g(n-1),g(n-1)^g(n-2),...,g(n-1)^...^g(1)}

根据SG函数可以得到SG值表如下。

位置x：1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16...

g(x): 1 2 1 4 1 2 1 8 1 2 1 4 1 2 1 16...

所以sg值为x的因数当中2的能达到的最大次幂。比如14=2*7，最大1次幂，即2；16=2*2*2*2，最大4次幂，即16。

这个游戏成为尺子游戏是因为SG函数很像尺子上的刻度。

约束条件8：每次必须翻转4个对称的硬币，最左与最右的硬币都必须是从正翻到反。（开始的时候两端都是正面）（Grunt游戏）

这是Grundy游戏的变种，初始编号从0开始。

当首正硬币位置为0,1,2时是terminal局面，即 终结局面，sg值都是0。当首正硬币位置n大于等于3的时候的局面可以通过翻0,x,n-x,n四个位置得到(

这就像是把一堆石子分成两堆不同大小石子的游戏，也就是Grundy游戏。

附注：

参考资料http://blog.sina.com.cn/s/blog_51cea4040100h3wl.html

部分内容还是《Game Theory》翻译过来的

Nim的博弈详解(简单易懂) （一）

Nim游戏的概述：还记得这个游戏吗？给出n列珍珠，两人轮流取珍珠，每次在某一列中取至少1颗珍珠，但不能在两列中取。最后拿光珍珠的人输。后来，在一份资料...