Computational Geometry

郭晓旭 (@ftiasch)

2019 年 4 月 20 日

Self Introduction

- 叉姐的扮演者
- ftiasch 的扮演者
- ICPC World Finals 2013/2014 的参赛者

The Basics

- "Handbook of geometry for competitive programmers" [1], Chapter 2

[1] https://vlecomte.github.io/cp-geo.pdf

Codeforces Round #296 Triangles 3000

给 n $(n \le 3000)$ 条直线，问所有 $\binom{n}{3}$ 组直线组成的三角形面积和。

假设三角形是 ABC, 面积就是 $A \times B + B \times C + C \times A$, 可以单独考虑 $\overline{AB}$ 的部分.

固定 $\overline{AB}$ 所在的直线 l, 假设它是平的, 那么对于其他直线 i, 有一个斜率 k_i 和交点 p_i. 要算的是 $\sum_{k_i<k_j}(p_i \times p_j) = \left(\sum_{k_i<k_j} p_i\right) \times p_j$.

注意不要写成 $O(n^2 \log n)$.

Convex hulls

Graham's scan

COCI 2008/2009 Contest #2 CAVLI [2]

给 n $(n \leq 3 \times 10^5)$ 个点，$(n-2)$ 次操作

- `L` 删除横坐标最小的点
- `R` 删除横坐标最大的点
- `D` 删除纵坐标最小的点
- `U` 删除纵坐标最大的点

求每次操作后剩下的点的凸包面积。

[2] Source: http://hsin.hr/coci/archive/2008_2009/

逆序操作，维护左上、左下、右上、右下 4 个凸包，排序之后 $O(n)$

Polish Algorithm Engagement 2013 Działka [3]

给 n $(n \leq 3000)$ 个点，m $(m \leq 10^6)$ 个询问 (a_i, b_i, c_i, d_i)，问横坐标在 $[a_i, b_i]$ 中，纵坐标在 $[c_i, d_i]$ 中的点的凸包面积。

[3] Source: https://szkopul.edu.pl/problemset/problem/urlMLiYRSAFOMF8FaPUtxpio/site

和前题类似，只需分别维护 4 个凸包。以右下凸包为例：

固定 i 为凸包的最低点，按照横坐标从小到大枚举所有满足 $(x_i \le x_j) \wedge (y_i \le y_j)$ 的 j. 当枚举到 j 时，栈中的凸包即为以 i 为最低点，j 为最右点的凸包。

询问时只需找出 4 个极点，相加预处理的凸包面积。

注意水平、垂直的情况。

Andrew Stankevich's Contest #40 Average Convex Hull [4]

给 n $(n \leq 2 \times 10^5)$ 个点 $P_1, P_2, \ldots, P_n$，对于所有 i，求 P_i 之外的点的凸包面积。

[4] https://codeforces.com/gym/100492

先求凸包，设它是 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$.

删去不在凸包上的点 P_i，不影响凸包；

删去凸包上的点 Q_i，那么 Q_{i-1} 和 Q_{i+1} 仍然在凸包上，只需要用横坐标在 Q_{i-1} 和 Q_{i+1} 重新跑凸包。复杂度 $O(n)$.

POJ 2595 Min-max

给定 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 和 $q_1, q_2, \ldots, q_n$ $(n \leq 5 \times 10^4)$, 已知

- $\sum_{i=1}^{n} \mu_i p_i = C$
- $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$
- $0 \leq \mu_i \leq 1$

求 $\sum_{i=1}^{n} \mu_i q_i$ 的最小值和最大值。

点 $(\sum_{i=1}^{n}\mu_i p_i, \sum_{i=1}^{n}\mu q_i)$ 位于 $\{(p_1,q_1),(p_2,q_2),\ldots,(p_n,q_n)\}$ 凸包 H 内部

等价于问直线 $x=C$ 和凸包交点的纵坐标

CEOI 2002 A highway and the seven dwarfs

给 n ($n \le 10^5$) 个点 (x_i, y_i)，m 次询问直线 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$，问是否所有点都在直线同侧。

只需考虑点的凸包，等价于询问与直线法向量点积最小和最大的点，在凸包上二分，$O(m \log n)$.

Ural Championship 2013 F. Game Optimization [5]

给定 $n \times m$ $(n, m \leq 10^3)$ 的 01 矩阵，对于每个格子，求欧几里得距离最近的 1.

[5] http://acm.timus.ru/problem.aspx?space=155&num=6

按行做，考虑第 r 行，对于每一列 j，求出第 j 列距离第 r 行最近的点的距离，记为 h_j.

那么格子 (r,j) 的答案，就是 $\min_i (i-j)^2 + h_i^2$. 由对称性，只考虑 $i \leq j$ 的情况。

$\min_i (i-j)^2 + h_i^2 = (\min_{i \leq j} (i^2 + h_i^2) - i \cdot j) + j^2$.

类似上题，相当于问 $(j,1)$ 和 $(-i, i^2 + h_i^2)$ 点积的最小值，对 i 的点求凸包即可。

HDOJ 3507 Print Article

给定序列 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ $(n \leq 5 \times 10^5)$ 和常数 M, 把序列划分成若干段，假设为 k 段，使得每段和的平方之和加上 $k \cdot M$ 最小.

设 $s_i = \sum_{j=1}^{i} c_j$，f_i 表示前 i 个元素最小的划分代价，则

$$f_i = \min_{j=1}^{i-1} f_j + (s_i - s_j)^2 + M = M + s_i^2 + \min_{j=1}^{i-1} -s_j \cdot s_i + (f_j + s_j^2).$$

类似上题，相当于问 $(s_i, 1)$ 和 $(-s_j, f_j + s_j^2)$ 点积的最小值，不同的是需要动态维护点 j 的凸包。

实际上，询问 $(s_i, 1)$ 也具有单调性，不需要二分，只需要维护一个指针即可，$O(n)$.

Duality and half-planes intersection

Definition of Duality

- 考虑平面上所有点的集合 $\mathcal{P} = \{(k, b) : k, b \in \mathbb{R}\}$ 和所有非垂直直线的集合 $\mathcal{L} = \{y = kx + b : k, b \in \mathbb{R}\}$.
- 存在一个双射 $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{L}$ 使得 $\varphi : (k, b) \mapsto y = kx + b$
- 可以验证对于 $A, B \in \mathcal{P}$，如果 $\varphi(A), \varphi(B)$ 的交点为 C，那么 $\varphi(C) = \overline{AB}$.

Slope Selection Problem

给定平面上 n $(n \leq 10^5)$ 个点，求斜率第 k 大的连线的斜率。

直接做不好做，考虑对偶，变成给定 n 条直线，求横坐标第 k 大的交点的横坐标。

二分答案 λ，变成计算横坐标在 $(-\infty, \lambda)$ 内的交点数量，假设直线 i 与 $x = -\infty$ 和 $x = \lambda$ 的交点纵坐标分别是 (a_i, b_i)，相当于求逆序对。复杂度是 $O(n \log n \log A)$.

HDOJ 6259 Rikka with Lines [6]

给定平面上 n $(n \le 10^5)$ 条直线，求在矩形 $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ 内的交点数量。

是上题对偶后问题的某种加强，但是细节比较麻烦。

[6] http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=6259

Duality between CH and Half-planes Intersection

如同我们知道的，凸包就是相邻三个点 A, B, C 比较 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的斜率。对偶后，也就是相邻三条线 $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)$ 比较 $\varphi(A)\varphi(B)$ 交点和 $\varphi(B)\varphi(C)$ 交点的横坐标。

所以凸包和半平面交是互为对偶的问题（知道了也没用?)

POJ 3525 Most Distant Point from the Sea

求给定 n 边凸多边形的最大内切圆。

常见的想法是二分半径 r，然后把每条边往内推 r，求半平面交，不为空则说明 r 合法。这样是 $O(n \log A)$ 的，不是 $O(n \log n \log A)$.

实际上还有 $O(n \log n)$ 的做法，考虑 r 逐渐增大的过程中，那么一条边会在相邻三条边的内心处消失，拿个优先队列维护消失的事件。

Inversion

一些常用性质：- 过反演中心的圆变成直线 - 过反演中心的直线不变 - 交角不变

Hangzhou 2013 Problem of Apollonius [7]

给定两个圆 O_1 和 O_2 和点 P, 求圆 O 过点 P 且与 O_1, O_2 同时外切。

[7] http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=4773

过点 P 反演，所求的圆 O^* 反演后变成直线，那么其实就是随便找一条 O_1^* 和 O_2^* 不过点 P 的公切线反演回来即可。

Google Code Jam 2010 Round 2 Grazing Google Goats [8]

（简化版）给定 n 个过原点的圆 $O_1, O_2, \ldots, O_n$，求交的面积。

[8] https://code.google.com/codejam/contest/635102/dashboard#s=p3&a=3

过原点反演，圆内部变成半平面，求半平面交，再反演回来算出面积。

CCPC 2017 Online The Designer [9]

给定半径为 R 和 r 的两圆 $(R > r)$，每次放入和大圆内切、和小圆内切、且与之前任意圆外切的最大的圆，问 n 次操作后圆的总面积 $(n \leq 10^7)$.

[9] http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=6158

传统的想法是用两圆切点作为反演中心，这样就变成两条平行直线里面放等圆的问题，再把圆反演回来就行，但是推起来有点费劲。

实际上我们有笛卡尔定理[10]，对于相切的四圆 r_1, r_2, r_3, r_4，如果圆与别人内切，则 $k_i = -\frac{1}{r_i}$；否则 $k_i = \frac{1}{r_i}$，有:

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2).$$

其中有 3 个已知数，对于未知圆是二次方程，直接解。

进一步，假设一侧的圆 $k_1, k_2, \ldots$，能发现 k_{i-1} 和 k_{i+1} 就是 R, r, k_i 形成的二次方程的两个根，甚至可以用维达定理得到线性递推。

[10]https://en.wikipedia.org/wiki/Descartes%27_theorem