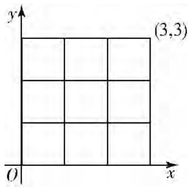
一个格点最短路径问题的思考

◎金晓阳 （上海市复旦大学附属中学高三(5)班 200433)

【摘要】将平面格点最短路径问题，放在平面直角坐标系中研究比较便捷. 本文用三种不同的方法解决了一种平面格点最短路径问题，进而将问题推广到空间情形. 通过对问题的探究，最终成功推广了组合数性质.

【关键词】格点; 最短路径; 概率; 组合数性质

格点最短路径问题是十分有趣的数学问题. 它与高中数学中的排列组合、概率等概念有很大关联，让我们先来做一道这样的问题:

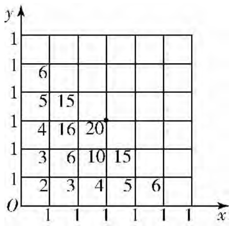


图一

例 1　如图一所示，在平面直角坐标系中有一动点 P，t_0 时刻位于原点处，之后每一秒内，点 P 沿 x 轴正方向或 y 轴正方向运动一个单位，两种运动方式的概率相等. 请问 6 秒后，点 P 运动了 6 个单位的路程，到达 $(3,3)$ 的概率为多少?

分析: 由于整个运动过程可能的路径即基本事件数是有限的，且向右运动 1 个单位与向上运动 1 个单位为等可能事件，即每个基本事件出现的可能性相等，故该模型符合古典概型.

解法一　点 P 到达某个格点之前，必然经过与该格点相邻的左方一个格点或下方一个格点，即到达某格点的最短路径数等于到达左方与之相邻格点的最短路径数和到达下方与之相邻格点的最短路径数之和. 若到达 x 轴上的某个格点，之前必然由原点 O 开始不断沿着 x 轴正方向运动，这是唯一的选择，故到达 x 轴上每个格点的最短路径数都是 1，同理可得，到达 y 轴上每个格点的最短路径数也都是 1. 由此可计算出到达任意格点的最短路径数.



图二

6 秒后，点 P 一共移动了 6 个单位，可能到达 $(6,0)$、$(5,1)$、$(4,2)$、$(3,3)$、$(2,4)$、$(1,5)$、$(0,6)$，可由以上方法求出 6 秒后运动到这些格点的最短路径条数（如图二所示），这些路径中任意两条出现的概率相等.

设 A 表示"6 秒后点 P 通过某种路径运动到 $(3,3)$ 的事件"，它包含基本事件数为 20，基本事件总数为 $1+6+15+20+15+6+1=64$.

$\therefore P(A) = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$.

解法二　到达某个格点 (a, b) 的概率等于少运动一个单位的情况下到达 $(a,b-1)$ 概率的一半与到达 $(a-1,b)$ 概率的一半之和，到达 x 轴上 $(x,0)$ $(x \in \mathbf{N})$ 的概率为 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$，到达 y 轴上 $(y,0)$ $(y \in \mathbf{N})$ 的概率为 $\left(\frac{1}{2}\right)^y$. 由此可以计算出到达任一格点的概率（如图三所示）.

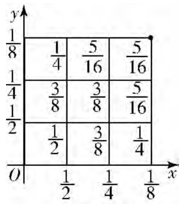


图　三

$\therefore P(A) = \frac{5}{16}$.

解法三: 6 秒后点 P 到达 $(3,3)$ 即 6 次运动中恰有 3 次沿 x 轴正方向运动，另有 3 次沿 y 轴正方向运动，A 的基本事件数为 C_6^3，而每一次运动都有两种等可能的情况，基本事件总数为 2^6.

$\therefore P(A) = \frac{C_6^3}{2^6} = \frac{5}{16}$.

由解法三，我们可以归纳得出一般结论: 经过 $a+b$ 秒 $(a,b \in \mathbf{N}$，不都为 $0)$，点 P 恰好移动到 (a,b) 的不同路径有 C_{a+b}^a 条.

将解法一平面直角坐标系中每个格点的路径数都用组合数表示（如图四），再根据解法一的思路，我们可以发现 $C_{a+b}^a = C_{a+b-1}^a + C_{a+b-1}^{a-1}$. 由此易得组合数性质: $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$.

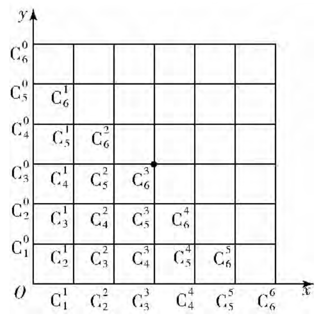


图　四

以下将例 1 的平面情形推广到空间情形.

例 2　在空间直角坐标系中，有一动点 P，t_0 时刻位于原点处，之后每一秒内，点 P 沿 x 轴正方向或 y 轴正方向或 z 轴正方向运动一个单位，三种运动方式的概率相等. 求:

(1) 6 秒后，点 P 运动了 6 个单位的路程，到达 $(1,2,3)$ 的概率为多少?

(2) 经过 $a+b+c$ 秒 $(a,b,c \in \mathbf{N}$，不都为 $0)$，点 P 运动了 $a+b+c$ 个单位的路程，恰好到达 (a,b,c) 的概率为多少?

分析　本题与例 1 相似，符合古典概型，也同样可采用例 1 的三个解法进行求解. 然而如果采用解法一与解法二，解题会比较繁琐，图形也难以绘出，而解法三的优势就体现得更加明显，故在此仅采用这种解法.

解　(1) 设 A 表示"6 秒后点 P 通过某种路径运动到 $(1,2,3)$ 的事件".

（下转 105 页）

$\therefore f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}.$

注:亦可以$\left(\dfrac{\pi}{8},2\sqrt{2}\right)$作为第二关键点求解$\varphi$. 另本题也可用代入法求解,这里不详细叙述.

例4　请你构造一个定义域为R,周期为π,值域为$\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$,在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$是减函数的函数$f(x)$.

解　设函数解析式为:$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+b$,根据题意有$\begin{cases}A+b=\dfrac{3}{2},\\-A+b=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}A=\dfrac{1}{2},\\b=1.\end{cases}$

又已知函数的周期$T=\pi$,$\therefore \omega=\dfrac{2\pi}{T}=2.$

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}\sin(2x+\varphi)+1$. 因为函数周期为$\pi$,且在半个周期$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上是减函数,根据正弦曲线在一个周期上的变化规律可知,当$x=0$时,$y_{\max}=\dfrac{3}{2}$. 故以点$\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$作为"五点法"作图的第二关键点,则有$2\times0+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$,所以$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. 于是函数$f(x)=\dfrac{1}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)+1$.

(3)相位变换法. 将函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)+b(\omega>0)$(此时$A,\omega,b$已经求得)化为$y=A\sin\omega(x-(-\varphi))+b$,依其与函数$y=A\sin\omega x+b$图像间的关系,根据相位变换的"左加右减"原则求解$\varphi$.

例5　如图3,函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的图像上相邻的最高点与最低点的坐标分别为$\left(\dfrac{5\pi}{12},3\right)$和$\left(\dfrac{11\pi}{12},-3\right)$,求该函数的解析式.

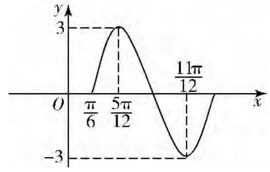


图　3

解　由图像可知,$A=3$,$T=2\times\left(\dfrac{11\pi}{12}-\dfrac{5\pi}{12}\right)=\pi$,$\therefore\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$. $\therefore y=3\sin(2x+\varphi)=3\sin2\left(x-\left(-\dfrac{\varphi}{2}\right)\right)$. 根据图中点$\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$有:$-\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{\pi}{6}$,$\therefore\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$. $\therefore y=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

例6　已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi,x\in\mathbf{R})$的一段图像如图4所示,求此函数的解析式.

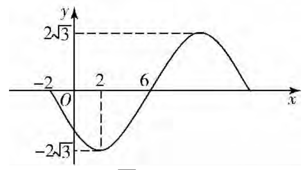


图　4

解　由图可知,$A=2\sqrt{3}$.

$\because T=2\times[6-(-2)]=16$,

$\therefore\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{16}=\dfrac{\pi}{8}$.

$\therefore f(x)=2\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x+\varphi\right)=2\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{8}\left(x-\left(-\dfrac{8}{\pi}\varphi\right)\right)$.

根据正弦曲线的相位变换规律,即"左加右减"原则,结合图像可知$-\dfrac{8}{\pi}\varphi=6$,$\therefore\varphi=-\dfrac{3\pi}{4}$.

$\therefore f(x)=2\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

(上接103页)

6秒后点P到达$(1,2,3)$,即6次运动中恰有1次沿x轴正方向运动,其余5次运动中有2次沿y轴正方向运动,另外3次都是沿z轴正方向运动. A的基本事件数为$C_6^1C_5^2C_3^3$,而每一次运动都有三种等可能的情况,基本事件总数为3^6.

$\therefore\ P(A)=\dfrac{C_6^1C_5^2C_3^3}{3^6}=\dfrac{20}{243}$.

(2)设B表示"$a+b+c$秒后点P通过某种路径运动到(a,b,c)的事件".

$a+b+c$秒后点P到达(a,b,c),即$a+b+c$次运动中恰有a次沿x轴正方向运动,其余$b+c$次运动中有b次沿y轴正方向运动,另外c次都是沿z轴正方向运动. B的基本事件数为$C_{a+b+c}^aC_{b+c}^bC_c^c$,而每一次运动都有三种等可能的情况,基本事件总数为3^{a+b+c}.

$\therefore\ P(B)=\dfrac{C_{a+b+c}^aC_{b+c}^bC_c^c}{3^{a+b+c}}=\dfrac{C_{a+b+c}^aC_{b+c}^b}{3^{a+b+c}}$.

我们用这种解法很简便地找到更一般的规律. 当然,用例1解法一的思考方法,容易得到:运动到格点$(a,b,c)(a,b,c\in\mathbf{N}^*)$的最短路径数等于到达$(a-1,b,c)$,$(a,b-1,c)$,$(a,b,c-1)$三个格点的最短路径数之和. 由此,我们可以归纳得出这样的恒等式$C_{a+b+c}^aC_{b+c}^bC_c^c=C_{a+b+c-1}^{a-1}C_{b+c}^bC_c^c+C_{a+b+c-1}^aC_{b+c-1}^{b-1}C_c^c+C_{a+b+c-1}^aC_{b+c-1}^bC_{c-1}^{c-1}$. 将其简化和推广,我们可以得到这样的结论:对于任意大于1的正整数p,q,r,s,若$p>r$且$q>s$,则$C_p^rC_q^s=C_{p-1}^{r-1}C_q^s+C_{p-1}^rC_{q-1}^{s-1}+C_{p-1}^rC_{q-1}^s$. 证明如下:

$$\begin{aligned}&C_{p-1}^{r-1}C_q^s+C_{p-1}^rC_{q-1}^{s-1}+C_{p-1}^rC_{q-1}^s\\&=\frac{(p-1)!\ q!}{(r-1)!\ (p-r)!\ s!\ (q-s)!}+\frac{(p-1)!\ (q-1)!}{r!\ (p-r-1)!\ (s-1)!\ (q-s)!}+\frac{(p-1)!\ (q-1)!}{r!\ (p-r-1)!\ s!\ (q-s-1)!}\\&=\frac{(p-1)!\ q!\ r+(p-1)!\ (q-1)!\ (p-r)s+(p-1)!\ (q-1)!\ (p-r)(q-s)}{r!\ (p-r)!\ s!\ (q-s)!}\\&=\frac{(p-1)!\ (q-1)!\ (qr+ps-rs+pq-rq-ps+rs)}{r!\ (p-r)!\ s!\ (q-s)!}\\&=\frac{(p-1)!\ (q-1)!\ pq}{r!\ (p-r)!\ s!\ (q-s)!}=\frac{p!\ q!}{r!\ (p-r)!\ s!\ (q-s)!}\\&=C_p^rC_q^s.\end{aligned}$$

由此,我们成功地推广了组合数性质.