矩形格中的最短路径与杨辉三角

450044 河南省郑州师专数学系 赵红玲

日前,一个小学生拿给本人一道数学题目如下: 如图1,田字格中有4×5条线段组成,试求从点A到点B的最短路径总共有几条?对于此题一般都是非常麻烦地一条条查找,最后合计出答案,似乎找不出巧妙的方法,为此本人试图寻找出一些规律来,于是就做了下面的探索.

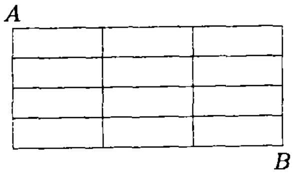


图 1

1.单楼梯$2\times n$阶矩形格中A到B的最短路径数为(2为竖线,$n\geqslant 2$,n为横线数):

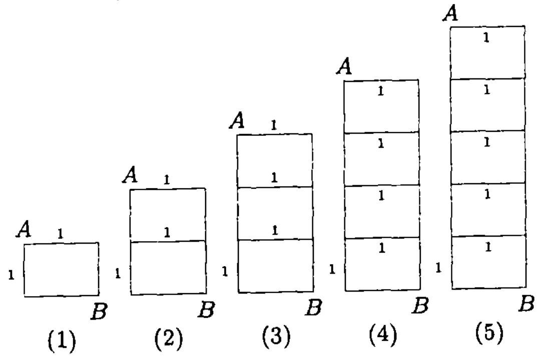


图 2

(1)2×2阶矩形格中A到B的最短路径数为$1+1=2$种;

(2)2×3阶矩形格中A到B的最短路径数为$2+1=3$种;

(3)2×4阶矩形格中A到B的最短路径数为$2+2=4$种;

(4)2×5阶矩形格中A到B的最短路径数为$2+3=5$种;

(5)2×6阶矩形格中A到B的最短路径数为$2+4=6$种;

…….

2.双楼梯$3\times n$阶矩形格中A到B的最短路径数为(3为竖线数,$n\geqslant 2$,n为横线数):

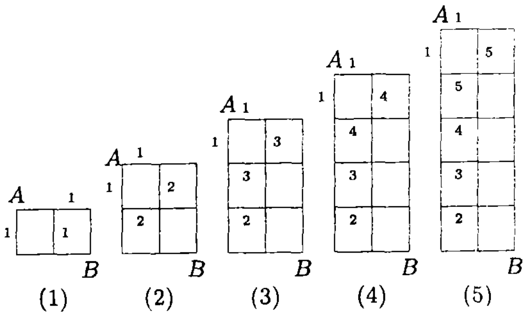


图 3

(1)3×2阶矩形格中A到B的最短路径数为$1+1+1=3$种;

(2)3×3阶矩形格中A到B的最短路径数为$1+2+2+1=6$种;

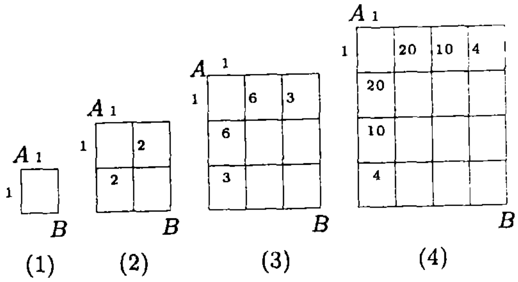
(3)3×4阶矩形格中A到B的最短路径数为$1+3+3+2+1=10$种;

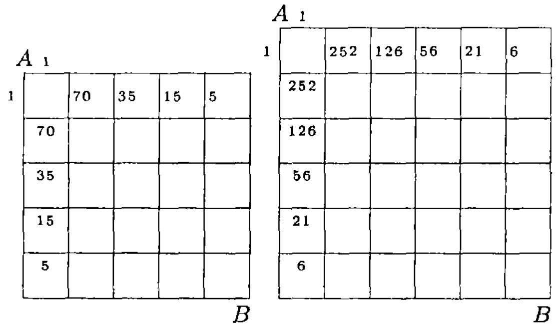
(4)3×5阶矩形格中A到B的最短路径数为$1+4+4+3+2+1=15$种;

(5)3×6阶矩形格中A到B的最短路径数为$1+5+5+4+3+2+1=21$种;

…….

3.斜对称$n\times n$阶矩形格中A到B的最短路径数为(n为竖线或横线数,$n\geqslant 2$):





(5) (6)

图 4

(1) 2×2阶矩形格中A到B的最短路径数为$1+1=2$种;

(2) 3×3阶矩形格中A到B的最短路径数为$2\times 2+2=6$种;

(3) 4×4阶矩形格中A到B的最短路径数为$6\times 2+3\times 2+2=20$种;

(4) 5×5阶矩形格中A到B的最短路径数为$20\times 2+10\times 2+4\times 2+2=70$种;

(5) 6×6阶矩形格中A到B的最短路径数为 $70\times 2+35\times 2+15\times 2+5\times 2+2=252$种;

(6) 7×7阶矩形格中A到B的最短路径数为 $2\times 252+2\times 126+2\times 56+2\times 21+2\times 6+2=2(252+126+56+21+6+1)=924$种;

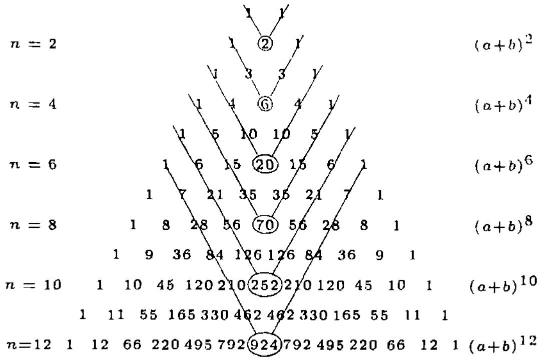
$\cdots\cdots$.

那么$m\times n$ (m、n分别为竖线和横线数, m、$n\geqslant 2$)阶矩形格中A到B的最短路径数究竟有什么规律呢? 从上面的分析来看似乎没有什么明显的一般的特点, 但如果继续分析下去, 就会找出一些规律来.

结论一 根据上面的第三种情况的各项结果发现: $n\times n$阶矩形格中A到B的最短路径数2、6、20、70、252、924、$\cdots$ 和杨辉三角中的中轴上的数字是吻合的

说明: 该数字是$(a+b)^n$展开项中当n是偶数时的中间项系数, 杨辉三角图5中带圈的数字;

而且该数的求得式子如(1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6)也和杨辉三角中该数所在的“*-V”形结构中的各数有关(假设该数字处于*的位置), 处于*的位置的数字(中轴上的数字)正好等于它对应的V结构上的数字的和. (观察杨辉三角中的“*-V”形结构图6即可明白)



杨辉三角

图 5

$$\begin{array}{ccccccccccc} A_1 & & & & & & & & & & A_1 \\ & & A_2 & & & & & & A_2 & & \\ & & & & & A_3 & & & & & \\ A & & B & & C & & D & & E & & F \\ & & & & & * & & & & & \end{array}$$

关系式$*=2(A_1+A_2+A_3)$

杨辉三角中的”*-V”形结构示意

图 6

杨辉三角中的这种数字之间的特殊关系的正确性可作以下的归纳和证明:

对于$(a+b)^n$展开项中, 当n是偶数时, 有奇数$n+1$项, 其中间项系数为$C_n^{\frac{n}{2}}$, 分别对$n=2$、4、6、8、10、12进行归纳, 即

$2(C_2^1+C_1^0)=C_{2+2}^2$;

$2(C_4^2+C_3^1+C_2^0)=C_{4+2}^3$;

$2(C_6^3+C_5^2+C_4^1+C_3^0)=C_{6+2}^4$;

$2(C_8^4+C_7^3+C_6^2+C_5^1+C_4^0)=C_{8+2}^5$;

$2(C_{10}^5+C_9^4+C_8^3+C_7^2+C_6^1+C_5^0)=C_{10+2}^6$;

$\cdots\cdots$.

一般地, 有 $2(C_n^{\frac{n}{2}}+C_{n-1}^{\frac{n}{2}-1}+C_{n-2}^{\frac{n}{2}-2}+C_{n-3}^{\frac{n}{2}-3}+\cdots+C_{\frac{n}{2}}^0)=C_{n+2}^{\frac{n+2}{2}}$ (1)

下面对上述式子(1)进行证明:

因为n是偶数, 可假设$n=2k$, $k\in\mathbf{N}^*$, 则上式变为 $2(C_{2k}^k+C_{2k-1}^{k-1}+C_{2k-2}^{k-2}+C_{2k-3}^{k-3}+\cdots+C_{k+1}^1+C_k^0)=C_{2k+2}^{k+1}$ (2)

故只需证明(2)式即可.

证明: 左边$=2(C_{2k}^{k}+C_{2k-1}^{k-1}+C_{2k-2}^{k-2}+C_{2k-3}^{k-3}+\cdots+C_{k+2}^{2}+C_{k+1}^{1}+C_{k}^{0})$

$=2(C_{2k}^{k}+C_{2k-1}^{k}+C_{2k-2}^{k}+C_{2k-3}^{k}+\cdots+C_{k+2}^{k}+C_{k+1}^{k}+C_{k}^{k})$

$=2(C_{2k}^{k}+C_{2k-1}^{k}+C_{2k-2}^{k}+C_{2k-3}^{k}+\cdots+C_{k+2}^{k}+\boxed{C_{k+1}^{k}+C_{k+1}^{k+1}})$ (由$C_{k}^{k}=C_{k+1}^{k+1}$得到)

$=2(C_{2k}^{k}+C_{2k-1}^{k}+C_{2k-2}^{k}+C_{2k-3}^{k}+\cdots+\boxed{C_{k+2}^{k}+C_{k+2}^{k+1}}$ (由公式$C_{n}^{m}+C_{n}^{m-1}=C_{n+1}^{m}$得到)

$=2(C_{2k}^{k}+C_{2k-1}^{k}+C_{2k-2}^{k}+C_{2k-3}^{k}+\cdots+C_{k+3}^{k+1})$

$=\cdots=2C_{2k+1}^{k+1}$

$=C_{2k+1}^{k+1}+C_{2k+1}^{k}=C_{2k+2}^{k+1}=$右边.

4.一般性推广和证明

对于$m\times n$阶矩形格中从A到B的最短路径数 (m、n分别为竖线和横线数, 且m、$n\geqslant 2$) 也可以作同样的考虑.

考察$4\times n$阶矩形格中从A到B的最短路径数:

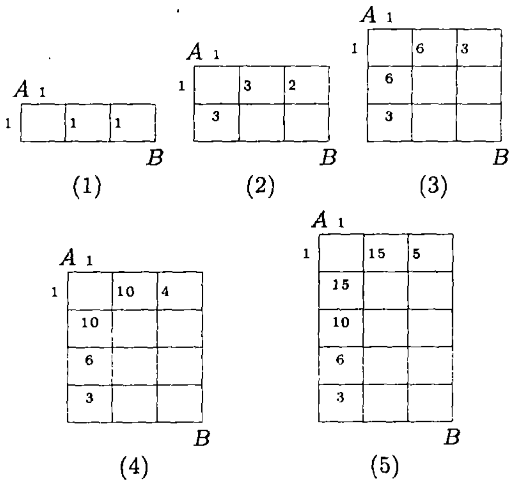


图 7

(1) 4×2阶矩形格中A到B的最短路径数为 $1+1+1+1=4$种;

(2) 4×3阶矩形格中A到B的最短路径数为 $1+3+3+2+1=10$种;

(3) 4×4阶矩形格中A到B的最短路径数为 $1+6+6+3+3+1=20$种;

(4) 4×5阶矩形格中A到B的最短路径数为 $1+3+6+10+10+4+1=35$种;

(5) 4×6阶矩形格中A到B的最短路径数为 $1+3+6+10+15+15+5+1=56$种;

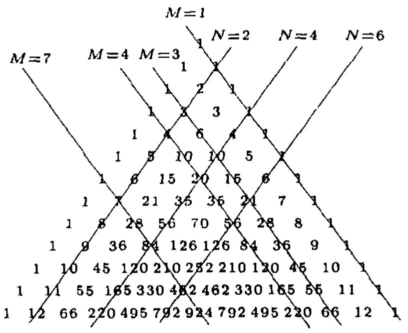
$\cdots\cdots$.

如图8, 归纳以上$2\times n$、$3\times n$、$4\times n\,(n\geqslant 2)$的情况可以发现, $2\times n$所对应的数字正好是杨辉三角中对应的直线 $M=2$上的各个数字; $3\times n$所对应的数字正好是杨辉三角中对应的直线 $M=3$上的各个数字; $4\times n$所对应的数字正好是杨辉三角中对应的直线 $M=4$上的各个数字, 而且可以依次类推下去. 实际上, $n\times n$所对应的数字正好是杨辉三角中对应的直线$M=n$与直线$N=n$交叉处的各个数字(直线M和N如图定义). 由此可见:

结论二　对于$m\times n$阶矩形格(m、n分别为竖线和横线数, 且m、$n\geqslant 2$), 点A到点B的最短路径数等于杨辉三角中对应的直线M和N交叉处的数字. 此数字可用组合数C_{n+m-2}^{m-1}表示.

为此在求$m\times n$阶矩形格中的点A到点B的最短路径数时, 杨辉三角就象数学用表那样可以容易查用. 实际上对于直线M和N交叉处的数字可解释为: 对于直线M上的第一个数字可用C_{m-1}^{0}表示, 从此位置沿直线M往下查到$n-1$个位置便到达直线M和N交叉处, 该处的数字为$C_{m-1+n-1}^{m-1}$即C_{n+m-2}^{m-1}(读者可自行检验).

利用此表达式可以很轻松地解答文章开头提出的问题, 4×5矩形格中的从A到B的最短路径数是C_{n+m-2}^{m-1}, 当$m=4$、$n=5$时取值即$C_{5+4-2}^{4-1}=C_{7}^{3}=35$(种).

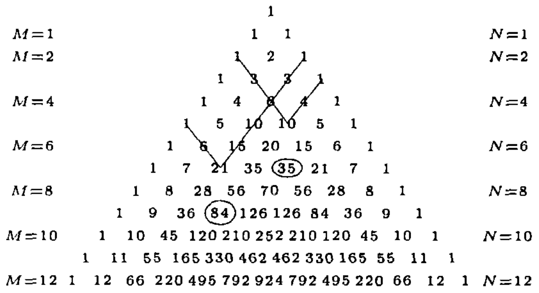


最短路径数的杨辉三角数字用表

图 8

另外在具体的最短路径数的表达式中发现:

结论三 在杨辉三角中,也同样存在着这样普通的“*-V”结构. 凡在这种结构中的数字,都有这样一个代数关系:“*”位置上的数字(图9中的带圈的数字)等于“V”形上的数字之和(考虑杨辉三角的左右对称性,V顶点的数字为2倍).



杨辉三角中的“*-V”形结构

图 9

这个结论可作以下的归纳与证明:

在杨辉三角中存在着这样的关系如 $35=(10+6+3+1)+(10+4+1)$; $84=(1+6+21)+(21+15+10+6+3+1)$, 用组合数表示为 $C_7^4=(C_5^3+C_4^2+C_3^1+C_2^0)+(C_5^3+C_4^3+C_3^3)$,

即 $C_7^4=(C_{7-2}^{4-1}+C_{7-3}^{4-2}+C_{7-4}^{4-3}+C_{7-5}^{4-4})$ (直到 $4-4=0$ 为止) $+(C_{7-2}^{4-1}+C_{7-3}^{4-1}+C_{7-4}^{4-1})$ (直到 $7-4=4-1$ 为止);

又如, $C_9^3=(C_7^2+C_6^1+C_5^0)+(C_7^2+C_6^2+C_5^2+C_4^2+C_3^2+C_2^2)$,

即 $C_9^3=(C_{9-2}^{3-1}+C_{9-3}^{3-2}+C_{9-4}^{3-3})$ (直到 $3-3=0$ 为止) $+(C_{9-2}^{3-1}+C_{9-3}^{3-1}+C_{9-4}^{3-1}+C_{9-5}^{3-1}+C_{9-6}^{3-1}+C_{9-7}^{3-1})$ (直到 $9-7=3-1$ 为止).

一般地有 $C_n^m=(C_{n-2}^{m-1}+C_{n-3}^{m-2}+C_{n-4}^{m-3}+\cdots+C_{n-m}^{m-(m-1)}+C_{n-(m+1)}^{m-m})+(C_{n-2}^{m-1}+C_{n-3}^{m-1}+C_{n-4}^{m-1}+\cdots+C_{n-(n-m)}^{m-1}+C_{n-(n-m+1)}^{m-1})$.

证明: 右边 $=(C_{n-2}^{m-1}+C_{n-3}^{m-2}+C_{n-4}^{m-3}+\cdots+C_{n-m}^{m-(m-1)}+C_{n-(m+1)}^{0})+(C_{n-2}^{m-1}+C_{n-3}^{m-1}+C_{n-4}^{m-1}+\cdots+C_{m}^{m-1}+C_{m-1}^{m-1})$

$=(C_{n-2}^{m-1}+C_{n-3}^{m-2}+C_{n-4}^{m-3}+\cdots+C_{n-m}^{1}+C_{n-m}^{0})+(C_{n-2}^{m-1}+C_{n-3}^{m-1}+C_{n-4}^{m-1}+\cdots+C_{m}^{m-1}+C_{m}^{m})$

$=(C_{n-2}^{m-1}+C_{n-3}^{m-2}+C_{n-4}^{m-3}+\cdots+C_{n-m+1}^{1})+(C_{n-2}^{m-1}+C_{n-3}^{m-1}+C_{n-4}^{m-1}+\cdots+C_{m+1}^{m})$

$=(C_{n-2}^{m-1}+C_{n-2}^{m-2})+(C_{n-2}^{m-1}+C_{n-2}^{m})$

$=C_{n-1}^{m-1}+C_{n-1}^{m}=C_n^m=$ 左边.

一个最值定理的研究性学习

710003 陕西省西安中学 薛党鹏

在高中数学的《不等式》一章有这样一个最值定理: 已知 a、b 是正数, (1) 如果和 $a+b$ 是定值 s, 那么当 $a=b$ 时, 积 ab 有最大值 $\frac{1}{4}s^2$. (2) 如果积 ab 是定值 p, 那么当 $a=b$ 时, 和 $a+b$ 有最小值 $2\sqrt{p}$.

此定理作为基本不等式的一个简单推论,在中学数学中占据着重要的地位. 围绕着此定理,笔者在自己所带的两个班级(共120名学生)中组织了一次研究性学习,收到了较好的效果. 现将这次学习的组织过程和学生的研究结果予以总结,以供参考.

一、问题的提出

在第一天的课末,笔者为学生出示了下述问题,让大家课后探讨,并将探讨结果整理成文作为作业,以便第二天在课堂上交流.

问题:仔细观察、研究下式:

$1\times9<2\times8<3\times7<4\times6<5\times5.$

你有何发现? 你能论证或解释你的发现