第29卷 湖北师范学院学报(自然科学版) Vol. 29
第1期 Journal of Hubei Normal University (Natural Science) No. 1,2009

模格中的一个计数公式及其在代数中的应用

陈引兰, 左可正
(湖北师范学院 数学与统计学院,湖北 黄石 435002)

摘要:证明了模格中的维数计算公式,同时给出了分配格中的维数计算公式。由此证明了代数学其他领域中的几个重要的计数公式:组合学中的容斥原理;数论中多个整数的最大公因数与最小公倍数的计算公式;线性代数中线性子空间的和与交的维数计算公式;群论中有限正规子群的积与交的计算公式。从而将这些计数问题统一起来。

关键词:维数公式;模格;容斥原理;最大公因数;最小公倍数;正规子群
中图分类号:O177.5 **文献标识码**:A **文章编号**:1009-2714(2009)01-0015-04

1 模格中的一个维数公式

设 L 是有限长的模格,$a\in L$,用 $h(a)$ 表示元素 a 的维数(或高度),则有下面的维数公式。

定理1[1] 设 L 是有限长的格,则有:L 是模格当且仅当 L 满足 $J-D$ 链条件及维数公式

$$h(a\vee b)=h(a)+h(b)-h(a\wedge b)(\forall a,b\in L) \tag{1}$$

对定理1中的维数公式可以推广到一般情形,由数学归纳法不难证得下面的定理。

定理2 设 L 是有限长的模格, $a_i\in L,i=1,2,\cdots,k$ 则有

$$h(a_1\vee a_1\vee\cdots\vee a_k)=\sum_{i=1}^{k}h(a_i)-h(a_{k-1}\wedge a_k)-h[a_{k-2}\wedge(a_{k-1}\vee a_k)]-\cdots-h[a_1\wedge(a_2\vee a_3\vee\cdots\vee a_k)] \tag{2}$$

$$h(a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_k)=\sum_{i=1}^{k}h(a_i)-h(a_{k-1}\vee a_k)-h[a_{k-2}\vee(a_{k-1}\wedge a_k)]-\cdots-h[a_1\vee(a_2\wedge a_3\wedge\cdots\wedge a_k)] \tag{3}$$

定理3 设 L 是有限长的分配格,$a_i\in L,i=1,2,\cdots,k$, 则有

$$h(a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_k)=\sum_{i=1}^{k}h(a_i)-\sum_{i\neq j}h(a_i\wedge a_j)+\sum_{\substack{i\neq j\\ j\neq l\\ l\neq i}}h(a_i\wedge a_j\wedge a_l)-\cdots+(-1)^{k+1}h(a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_k) \tag{4}$$

$$h(a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_k)=\sum_{i=1}^{k}h(a_i)-\sum_{i\neq j}h(a_i\vee a_j)+\sum_{\substack{i\neq j\\ j\neq l\\ l\neq i}}h(a_i\vee a_j\vee a_l)-\cdots+(-1)^{k+1}h(a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_k) \tag{5}$$

证 用分配格的定义及定理1,对 k 作归纳即可证明。

收稿日期:2008—12—05
基金项目:湖北师范学院教研项目(200719;200821)
作者简介:陈引兰(1974—),女,湖北罗田人,讲师,硕士,主要从事格论研究。

2 代数中的几个计数公式

本节将上节的结果应用到代数中去,得到了几个相应的计数公式。

2.1 容斥原理

设 L 是某个集合的所有的有限子集组成的集合，$\cup$ 与 $\cap$ 是集合的并与交运算,那么 $(L,\cup,\cap)$ 构成一个分配格。如果 $A\in L$,A 的维数 $h(A)=|A|$(A 所含元素的个数)。由定理2,定理3 可得出下面的定理4 与定理5.

定理4　如果 $A_i(i=1,2,\cdots,k)$ 都是有限集,则有

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k|=\sum_{i=1}^{k}|A_i|-|A_{k-1}\cap A_k|-|A_{k-2}\cap(A_{k-1}\cup A_k)|-\cdots-|A_1\cap(A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_k)|$$

$$|A_1\cap A_2\cap\cdots\cup A_k|=\sum_{i=1}^{k}|A_i|-|A_{k-1}\cup A_k|-|A_{k-2}\cup(A_{k-1}\cap A_k)|-\cdots-|A_1\cup(A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_k)|$$

定理5　若 $A_i(i=1,2,\cdots,k)$ 都是有限集合,则有

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k|=\sum_{i=1}^{k}|A_i|-\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|+\sum_{\substack{i\neq j\\ j\neq l\\ l\neq i}}|A_i\cap A_j\cap A_l|-\cdots+(-1)^{k+1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k|$$

$$|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k|=\sum_{i=1}^{k}|A_i|-\sum_{i\neq j}|A_i\cup A_j|+\sum_{\substack{i\neq j\\ j\neq l\\ l\neq i}}|A_i\cup A_j\cup A_l|-\cdots+(-1)^{k+1}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k|$$

定理5 就是集合论中著名的计数公式－容斥原理([2]中的 P_{136}的定理61)。

3 最大公因数与最小公倍数的计算公式

设 $\mathbb{N}$ 是自然数集,“$\leqslant$”表示数的小于或等于关系,那么$(\mathbb{N},\leqslant)$ 是一个格,$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}$,$\alpha\wedge\beta=\min(a,b)$,$\alpha\vee\beta=\max(\alpha,\beta)$. 因为

$$\min(\alpha,\max(\beta,\gamma))=\max(\min(\alpha,\beta),\min(\alpha,\gamma))$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{N}$,那么 $(\mathbb{N},\leqslant)$是一个分配格。$\alpha\in\mathbb{N}$,α 的维数 $h(\alpha)=\alpha$. 将定理2 及定理3 应用到分配格 $(\mathbb{N},\leqslant)$上去,得到下面的(6)－(9).

设 $\alpha_i\in\mathbb{N}(i=1,2,\cdots,k)$, 则有

$$\max(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i-\min(\alpha_{k-1},\alpha_k)-\min(\alpha_{k-2},\max(\alpha_{k-1},\alpha_k))-\cdots-\min(\alpha_1,\max(\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_k))\tag{6}$$

$$\min(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i-\max(\alpha_{k-1},\alpha_k)-\max(\alpha_{k-2},\min(\alpha_{k-1},\alpha_k))-\cdots-\max(\alpha_1,\min(\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_k))\tag{7}$$

$$\max(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i-\sum_{i\neq j}\min(\alpha_i,\alpha_j)+\sum_{\substack{i\neq j\\ j\neq l\\ l\neq i}}\min(\alpha_i,\alpha_j,\alpha_l)-\cdots+(-1)^{k+1}\min(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)\tag{8}$$

$$\min(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i-\sum_{i\neq j}\min(\alpha_i,\alpha_j)+\sum_{\substack{i\neq j\\ j\neq l\\ l\neq i}}\max(\alpha_i,\alpha_j,\alpha_l)-\cdots+(-1)^{k+1}\max(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)\tag{9}$$

设 $\mathbb{Z}^+$表示正整数集,$a_i\in\mathbb{Z}^+(i=1,2,\cdots,k)$, 用$(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 与$[a_1,a_2,\cdots,a_k]$ 分别表示 a_1,a_2,$\cdots$,a_k的最大公因数与最小公倍数,那么应用正整数的质因数标准分解式及(6)－(9),我们可以得出下面的定理6 与定理7.

定理6　如果 $a_i\in\mathbb{Z}^+(i=1,2,\cdots,k)$, 则有

$$[a_1,a_2,\cdots,a_k]=a_1a_2\cdots a_k(a_{k-1},a_k)^{-1}(a_{k-2},[a_{k-1},a_k])^{-1}\cdots(a_1,[a_2,a_k,\cdots,a_k])^{-1}$$

$$(a_1,a_2,\cdots,a_k)=a_1a_2\cdots a_k[a_{k-1},a_k]^{-1}[a_{k-2},(a_{k-1},a_k)]^{-1}\cdots[a_1,(a_2,a_k,\cdots,a_k)]^{-1}$$

定理 7　如果 $a_i\in\mathbb{Z}^+(i=1,2,\cdots,k)$，则有

$$[a_1,a_2,\cdots,a_k]=\prod_{i=1}^{k}a_i\cdot\prod_{i\neq j}(a_i,a_j)^{-1}\cdot\prod_{\substack{i\neq j\\ j\neq l\\ l\neq i}}(a_i,a_j,a_l)\cdots(a_1,a_2,\cdots,a_k)^{(-1)^{k+1}}$$

$$(a_1,a_2,\cdots,a_k)=\prod_{i=1}^{k}a_i\cdot\prod_{i\neq j}[a_i,a_j]^{-1}\cdot\prod_{\substack{i\neq j\\ j\neq l\\ l\neq i}}[a_i,a_j,a_l]\cdots[a_1,a_2,\cdots,a_k]^{(-1)^{k+1}}$$

定理 7 就是文[3]中 P_{10} 的定理 3 及定理 4.

需要注意的是，定理 6 及定理 7 的结果可以推广到唯一分解环上去。

4　线性子空间的和空间与交空间的维数的计算公式

设 V 是数域 P 上的有限维线性空间，L 是 V 的所有线性子空间组成的集合，那么 L 对集合的包含关系构成一个模格，但不是一个分配格。设 $V_1,V_2\in L$，那么

$$V_1\vee V_2=V_1+V_2,\ V_1\wedge V_2=V_1\cap V_2$$

V_1 的维数 $h(V_1)=\dim V_1$（线性子空间 V_1 的维数）。将定理 2 应用到这个格 $(L,\leqslant)$ 上，我们有

定理 8　如果 $V_i\leqslant V,i=1,2,\cdots,k$，则有

$$\dim(V_1+V_2+\cdots+V_k)=\sum_{i=1}^{k}\dim V_i-\dim(V_{k-1}\cap V_k)-\dim(V_{k-2}\cap(V_{k-1}+V_k))-\cdots-\dim(V_1\cap(V_2+V_3+\cdots+V_k)).$$

$$\dim(V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_k)=\sum_{i=1}^{k}\dim V_i-\dim(V_{k-1}+V_k)-\dim(V_{k-2}+(V_{k-1}\cap V_k))-\cdots-\dim(V_1+(V_2\cap V_3\cap\cdots\cap V_k)).$$

文[4]中的 1473 条是定理 8 的第一个等式。

5　有限群中正规子群的积与交的计算公式

设 G 是有限群，L 是 G 的所有正规子群组成的集合，那么在包含关系下，$(L,\subseteq)$ 是一个格。

定理 9　有限群 G 的正规子群格是一个模格。

证　设 H,N_1,N_2 是 G 的正规子群，$H\supseteq N_1$，显然

$$N_1(H\cap N_2)\subseteq H\cap(N_1N_2)$$

另一方面，$\forall x\in H\cap(N_1N_2)$，$x\in H$，$x=n_1n_2$，$n_1\in N_1$，$n_2\in N_2$. $n_2=n_1^{-1}x\in H\cap N_2$，所以 $x=n_1n_2\in N_1(H\cap N_2)$，因此 $N_1(H\cap N_2)=H\cap(N_1N_2)$，$G$ 的正规子群格是一个模格。

定理 10　如果 N_i 是有限群 G 的正规子群，$i=1,2,\cdots,k$，则有

$$|N_1N_2\cdots N_k|=\frac{|N_1||N_2|\cdots|N_k|}{|N_{k-1}\cap N_k||N_{k-2}\cap(N_{k-1}N_k)|\cdots|N_1\cap(N_2N_3\cdots N_k)|}$$

$$|N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_k|=\frac{|N_1||N_2|\cdots|N_k|}{|N_{k-1}N_k||N_{k-2}(N_{k-1}\cap N_k)|\cdots|N_1(N_2\cap N_3\cap\cdots\cap N_k)|}$$

证　因为 N_i 是 G 的正规子群，$i=1,2,\cdots,k$，那么 N_i 中的若干个的乘积还是 G 的正规子群。由群中众所周知的计数公式

$$|HK|=\frac{|H||K|}{|H\cap K|}$$

其中 H,K 是 G 的有限子群（见[5]），对 k 用数学归纳法，就可以证明定理 10.

参考文献：

[1] 胡长流,宋振明.格论基础[M].开封:河南大学出版社,1990.

[2] Daniel I A,Cohen. 组合论基本方法[M].林和诚 译,长沙:湖南教育出版社,1987.

[3] 华罗庚. 数论导引[M].北京:科学出版社,1975.

[4] 樊 恽,钱吉林,岑嘉评. 代数学词典[M]. 武汉:华中师范大学出版社,1994.

[5] 徐明曜. 有限群导引(上)[M]. 北京:科学出版社,2001.

A counting formula in modular lattices and its applications in algebra

CHEN Yin-lan , ZUO Ke-zheng

(College of Mathematics and Statistics, Hubei Normal University, Huangshi 435002, China)

Abstract In this paper the calculation formulae of dimension in modular lattices and distributive lattices are given. By them we get some important counting formulae in other algebra fields: including – excluding principle in Combinatorics; calculation formulae on the grestest common divisor and the least common multiple of several integers in Number Theory; calculation dimension formulae on the sum and the meet of subspaces in Linear Algebra; the calculation formulae of dimension on the product and the meet of finite normal subgroups in Group Theory. Then these counting problems are unified.

Key words: dimension formulae; modular lattices; including – excluding principle; the grestest common divisor; the least common multiple; the least common multiple; normal subgroups