n个自然数的积与最小公倍数、最大公约数的关系

215151 江苏省吴县中学 葛鸣絢

我们知道, 对于任意两个自然数 a_1、a_2, 它们的最大公约数 (a_1,a_2)、最小公倍数 $[a_1,a_2]$ 和乘积 $a_1\cdot a_2$ 之间满足关系式 $[a_1,a_2]=\dfrac{a_1\cdot a_2}{(a_1,a_2)}$. 那么对于任意 n 个自然数 a_1、a_2、a_3、$\cdots$、a_n, 它们的最大公约数、最小公倍数和乘积之间有怎样的联系呢? 本文给出如下的结论.

定理: 已知 a_1、a_2、a_3、$\cdots$、a_n 是 n 个自然数 $(n\geqslant 2)$, 记 $[a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n]$ 为 a_1、a_2、a_3、$\cdots$、a_n 的最小公倍数, M_{n-k} 为 $a_1^{(k)}$、$a_2^{(k)}$、$a_3^{(k)}$、$\cdots$、$a_n^{(k)}$ 中所有 $n-k$ 个数的最大公约数的乘积, $M_{i,n-k}$ 为 $a_1^{(k)}$、$a_2^{(k)}$、$a_3^{(k)}$、$\cdots$、$a_n^{(k)}$ 中所有含 $a_i^{(k)}$ 的 $n-k$ 个数的最大公约数的乘积, $k=0,1,2,\cdots,n-1$, $i=1,2,3,\cdots,n$. 其中

$$a_i^{(k)}=\begin{cases}a_i, & k=0\\ \dfrac{a_i^{(k-1)}}{M_{i,n-k+1}}, & k=1,2,\cdots,n-1\end{cases}$$

则

$$[a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n]=\frac{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n}{M_n^{n-1}\cdot M_{n-1}^{n-2}\cdot M_{n-2}^{n-3}\cdot\cdots\cdot M_2}. \tag{I}$$

证明: (1)首先证明(I)右边是 a_1、a_2、a_3、$\cdots$、a_n 的公倍数.

根据规定, 易知 $M_{i,n}=M_n$.

因为 $M_{i,n-k}$ 是 $a_1^{(k)}$、$a_2^{(k)}$、$a_3^{(k)}$、$\cdots$、$a_n^{(k)}$ 中所有含 $a_i^{(k)}$ 的 $n-k$ 个数的最大公约数的乘积, 该乘积中含有 $C_{n-1}^{n-k-1}=C_{n-1}^k$ 个最大公约数, 于是 $M_{1,n-k}\cdot M_{2,n-k}\cdot M_{3,n-k}\cdot\cdots M_{n,n-k}$ 是 $n\cdot C_{n-1}^k$ 个最大公约数的乘积; 而 M_{n-k} 是 $a_1^{(k)}$、$a_2^{(k)}$、$a_3^{(k)}$、$\cdots$、$a_n^{(k)}$ 中所有 $n-k$ 个数的最大公约数的乘积, 该乘积中含有 $C_n^{n-k}=C_n^k$ 个最大公约数. 所以根据 n 个 $M_{i,n-k}$ 的循环对称性易推得, $M_{1,n-k}\cdot M_{2,n-k}\cdot M_{3,n-k}\cdot\cdots\cdot M_{n,n-k}$ 等于 $\dfrac{n\cdot C_{n-1}^k}{C_n^k}=n-k$个$M_{n-k}$ 的乘积, 即

$$M_{1,n-k}\cdot M_{2,n-k}\cdot M_{3,n-k}\cdot\cdots\cdot M_{n,n-k}=M_{n-k}^{n-k}, \tag{II}$$

$k=0,1,2,\cdots,n-1$, $i=1,2,3,\cdots,n$.

由于 $a_i=M_n\cdot a_i^{(1)}=M_n\cdot M_{i,n-1}\cdot a_i^{(2)}=\cdots=M_n\cdot M_{i,n-1}\cdot M_{i,n-2}\cdot\cdots\cdot M_{i,2}\cdot a_i^{(n-1)}$, 即

$$a_i=M_n\cdot M_{i,n-1}\cdot M_{i,n-2}\cdot\cdots\cdot M_{i,2}\cdot a_i^{(n-1)}. \tag{III}$$

把(III)式当 $i=1,2,3,\cdots,n$ 对应的 n 个式子相乘, 并将(II) 代入得 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=M_n^n\cdot M_{n-1}^{n-1}\cdot M_{n-2}^{n-2}\cdot\cdots\cdot M_2^2\cdot a_1^{(n-1)}\cdot a_2^{(n-1)}\cdot a_3^{(n-1)}\cdot\cdots\cdot a_n^{(n-1)}$, 变形为

$$\frac{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n}{M_n^{n-1}\cdot M_{n-1}^{n-2}\cdot M_{n-2}^{n-3}\cdot\cdots\cdot M_2}=M_n\cdot M_{n-1}\cdot M_{n-2}\cdot\cdots\cdot M_2\cdot a_1^{(n-1)}\cdot a_2^{(n-1)}\cdot a_3^{(n-1)}\cdot\cdots\cdot a_n^{(n-1)}. \tag{IV}$$

对于任意 i, 将(III)代入(IV)右边部分,

$$\begin{aligned}&M_n\cdot M_{n-1}\cdot M_{n-2}\cdot\cdots\cdot M_2\cdot a_i^{(n-1)}\\ &=M_n\cdot M_{n-1}\cdot M_{n-2}\cdot\cdots\cdot M_2\cdot\frac{a_i}{M_n\cdot M_{i,n-1}\cdot M_{i,n-2}\cdot\cdots\cdot M_{i,2}}\\ &=\frac{M_n}{M_n}\cdot\frac{M_{n-1}}{M_{i,n-1}}\cdot\frac{M_{n-2}}{M_{i,n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{M_2}{M_{i,2}}\cdot a_i,\end{aligned}$$

由于 $M_{i,k}|M_k$, $k=2,3,4,\cdots,n-1$, 故(IV)的右边是 a_i 的整数倍. 即(IV)的左边 $\dfrac{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n}{M_n^{n-1}\cdot M_{n-1}^{n-2}\cdot M_{n-2}^{n-3}\cdot\cdots\cdot M_2}$ 是 a_1、a_2、a_3、$\cdots$、a_n 的公倍数.

(2)再证明 $\dfrac{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n}{M_n^{n-1}\cdot M_{n-1}^{n-2}\cdot M_{n-2}^{n-3}\cdot\cdots\cdot M_2}$ 是 a_1、a_2、a_3、$\cdots$、a_n 最小公倍数.

由于(IV)式的右边$M_n\cdot M_{n-1}\cdot M_{n-2}\cdot\cdots\cdot M_2\cdot a_1^{(n-1)}\cdot a_2^{(n-1)}\cdot a_3^{(n-1)}\cdot\cdots\cdot a_n^{(n-1)}$ 中的各 M_{n-k} 分别是 $a_1^{(k)}$、$a_2^{(k)}$、$a_3^{(k)}$、$\cdots$、$a_n^{(k)}$ 中所有 k 个数的最大公约数的乘积 $(k=0,1,2,\cdots,$

$n-2$), 任意的 $a_i\,(i=1,2,3,\cdots,n)$ 都是由 M_n、M_{n-1}、M_{n-2}、$\cdots$、M_2 中的某几项和 $a_i^{(n-1)}$ 相乘所得, 且 $a_1^{(n-1)}$、$a_2^{(n-1)}$、$a_3^{(n-1)}$、$\cdots$、$a_n^{(n-1)}$ 两两互素, 所以 $M_n\cdot M_{n-1}\cdot M_{n-2}\cdot\cdots\cdot M_2\cdot a_1^{(n-1)}\cdot a_2^{(n-1)}\cdot a_3^{(n-1)}\cdot\cdots\cdot a_n^{(n-1)}$ 是 a_1、a_2、a_3、$\cdots$、a_n 最小公倍数. 即

$$[a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n]=\frac{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n}{M_n^{n-1}\cdot M_{n-1}^{n-2}\cdot M_{n-2}^{n-3}\cdots\cdot M_2}.$$

证毕.

我们注意到, 当 $n=2$ 时, 就是我们熟悉的形式: $[a_1,a_2]=\dfrac{a_1\cdot a_2}{(a_1,a_2)}$.

这个定理不仅给出了求任意 n 个自然数的最小公倍数的一种方法, 更重要的是揭示了任意 n 个自然数的最小公倍数、最大公约数和乘积之间的关系, 下面我们通过两个具体例子验证定理的正确性, 进一步体验三者之间的关系.

例1 设 $a_1=1320$, $a_2=3900$, $a_3=102$, 验证 $[a_1,a_2,a_3]=\dfrac{a_1\cdot a_2\cdot a_3}{M_3^2\cdot M_2}$.

解: a_1、a_2、a_3 的质因数分解式是 $a_1=1320=2^3\cdot3\cdot5\cdot11$, $a_2=3900=2^2\cdot3\cdot5^2\cdot13$, $a_3=102=2\cdot3\cdot17$. 由分解式可得它们的最小公倍数 $[a_1,a_2,a_3]=2^3\cdot3\cdot5^2\cdot11\cdot13\cdot17$.

为验证定理, 先计算得 a_1、a_2、a_3 的最大公约数 $M_{1,3}=M_3=(a_1,a_2,a_3)=2\cdot3$; 再将 a_1、a_2、a_3 分别除以 $M_{1,3}$ 得 $a_1^{(1)}=\dfrac{a_1}{M_{1,3}}=2^2\cdot5\cdot11$, $a_2^{(1)}=\dfrac{a_2}{M_{1,3}}=2\cdot5^2\cdot13$, $a_3^{(1)}=\dfrac{a_3}{M_{1,3}}=17$; 而 $a_1^{(1)}a_2^{(1)}a_3^{(1)}$ 中所有两个数的最大公约数的乘积

$$M_2=\left(a_1^{(1)},a_2^{(1)}\right)\cdot\left(a_1^{(1)},a_3^{(1)}\right)\cdot\left(a_2^{(1)},a_3^{(1)}\right)=2\cdot5;$$

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3{=}2^6\cdot3^3\cdot5^3\cdot11\cdot13\cdot17.$$

所以

$$\frac{a_1\cdot a_2\cdot a_3}{M_3^2\cdot M_2^1}=\frac{2^6\cdot3^3\cdot5^3\cdot11\cdot13\cdot17}{(2\cdot3)^2\cdot(2\cdot5)}=2^3\cdot3\cdot5^2\cdot11\cdot13\cdot17,$$

即

$$[a_1,a_2,a_3]=\frac{a_1\cdot a_2\cdot a_3}{M_3^2\cdot M_2^1}.$$

例2 已知 $a_1=39494910$, $a_2=96915390$, $a_3=217422282$, $a_4=843828370$, 由 a_1、a_2、a_3、a_4 验证定理所示的关系.

解: 将 a_1、a_2、a_3、a_4 进行质因数分解得 $a_1=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot13\cdot17\cdot23\cdot37$, $a_2=2\cdot3\cdot5\cdot11\cdot13\cdot19\cdot29\cdot41$, $a_3=2\cdot3\cdot7\cdot11\cdot17\cdot19\cdot31\cdot47$, $a_4=2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot23\cdot29\cdot31\cdot53$.

容易得到 a_1、a_2、a_3、a_4 的最小公倍数 $[a_1,a_2,a_3,a_4]=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29\cdot31\cdot37\cdot41\cdot47\cdot53$;

a_1、a_2、a_3、a_4 的乘积 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4=2^4\cdot3^3\cdot5^3\cdot7^3\cdot11^3\cdot13^2\cdot17^2\cdot19^2\cdot23^2\cdot29^2\cdot31^2\cdot37\cdot41\cdot47\cdot53$.

而 a_1、a_2、a_3、a_4 的最大公约数 (a_1,a_2,a_3,a_4)=2, 即 $M_4=2$. 将 a_1、a_2、a_3、a_4 除以 M_4, 得

$$a_1^{(1)}=\frac{a_1}{M_4}=3\cdot5\cdot7\cdot13\cdot17\cdot23\cdot37,$$
$$a_2^{(1)}=\frac{a_2}{M_4}=3\cdot5\cdot11\cdot13\cdot19\cdot29\cdot41,$$
$$a_3^{(1)}=\frac{a_3}{M_4}=3\cdot7\cdot11\cdot17\cdot19\cdot31\cdot47,$$
$$a_4^{(1)}=\frac{a_4}{M_4}=5\cdot7\cdot11\cdot23\cdot29\cdot31\cdot53.$$

在 $a_1^{(1)}$、$a_2^{(1)}$、$a_3^{(1)}$、$a_4^{(1)}$ 中, 所有三个数的最大公约数的乘积

$$M_3=\left(a_1^{(1)},a_2^{(1)},a_3^{(1)}\right)\left(a_1^{(1)},a_2^{(1)},a_4^{(1)}\right)\left(a_1^{(1)},a_3^{(1)},a_4^{(1)}\right)\left(a_2^{(1)},a_3^{(1)},a_4^{(1)}\right)=3\cdot5\cdot7\cdot11.$$

在 $a_1^{(1)}$、$a_2^{(1)}$、$a_3^{(1)}$、$a_4^{(1)}$ 中, 所有含 $a_i^{(1)}$ $(i=1,2,3,4)$ 的三个数的最大公约数的乘积依次为

$$M_{1,3}=\left(a_1^{(1)},a_2^{(1)},a_3^{(1)}\right)\left(a_1^{(1)},a_2^{(1)},a_4^{(1)}\right)\left(a_1^{(1)},a_3^{(1)},a_4^{(1)}\right)=3\cdot5\cdot7,$$

$$M_{2,3}=\left(a_1^{(1)},a_2^{(1)},a_3^{(1)}\right)\left(a_1^{(1)},a_2^{(1)},a_4^{(1)}\right)\left(a_2^{(1)},a_3^{(1)},a_4^{(1)}\right)=3\cdot5\cdot11,$$

$$M_{3,3}=\left(a_1^{(1)},a_2^{(1)},a_3^{(1)}\right)\left(a_1^{(1)},a_3^{(1)},a_4^{(1)}\right)\left(a_2^{(1)},a_3^{(1)},a_4^{(1)}\right)=3\cdot7\cdot11,$$

$$M_{4,3}=\left(a_1^{(1)},a_2^{(1)},a_4^{(1)}\right)\left(a_1^{(1)},a_3^{(1)},a_4^{(1)}\right)\left(a_2^{(1)},a_3^{(1)},a_4^{(1)}\right)=5\cdot7\cdot11.$$

(下转第5–49页)

点P必在椭圆C的右准线上; 反之, 若点P在椭圆的右准线上, 过点P作椭圆C的切线l_1、l_2, 切点分别为M、N, 则直线MN必过椭圆C的右焦点F. 可以证明, 这个结论是正确的.

(3) 若过"无穷远点"P作圆$x^2+y^2=r^2$的切线PM、PN, 以PM、PN为直径作"圆", 则据对称性知, 这些圆必过圆$x^2+y^2=r^2$的圆心O. 据此我们推测: 若过椭圆C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$的右准线上一点P作椭圆C的切线, 切点为Q, 以PQ为直径作圆, 则这个圆必过椭圆C右焦点F.

可以证明, 以上的结论也是正确的. 下面的试题是这个结论的一个具体例子.

例4 (2012年高考福建卷理科第19题) 如图6, 椭圆E: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F_1$, 右焦点为$F_2$, 离心率$e=\frac{1}{2}$. 过点$F_1$的直线交椭圆与$A$、$B$两点, 且$\triangle ABF_2$的周长为8.

(Ⅰ) 求椭圆E的方程.

(Ⅱ) 设动直线l: $y=kx+m$与椭圆E有且只有一个公共点P, 且与直线$x=4$相交于点Q. 试探究: 在坐标平面内是否存在定点M, 使得以PQ为直径的圆恒过点M? 若存在, 求出点M的坐标; 若不存在, 说明理由.

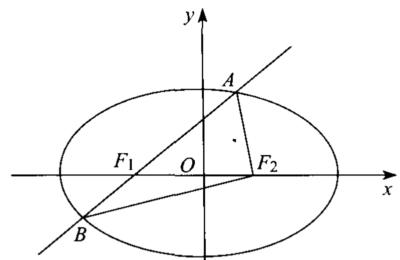

图6

第(Ⅰ)小题中的椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. 对于第(Ⅱ)小题, 因为直线$x=4$为椭圆$E$的右准线, 所以从极限的思想看出, 点$M$必为椭圆$E$的右焦点. 因此, 我们只要由直线$l$的方程、椭圆$E$方程及直线$x=4$求出点$P$和点$Q$的坐标, 再验证$PF_2\perp QF_2$即可. 这样就省去了寻找定点$M$的过程(解题过程略).

从以上的分析中我们可以看到, 依据圆和椭圆的内在联系, 从极限的思想去思考和解决椭圆问题, 一方面可以设计出许多精彩的试题, 另一方面, 可以看清问题的本质. 同时, 在解题过程中, 有时可以迅速确定解题方向, 找到最佳的解题方法.

(上接第5-29页)

将$a_i^{(1)}$各除以$M_{i,3}$得

$$a_1^{(2)}=\frac{a_1^{(1)}}{M_{1,3}}=13\cdot17\cdot23\cdot37,$$

$$a_2^{(2)}=\frac{a_2^{(1)}}{M_{2,3}}=13\cdot19\cdot29\cdot41,$$

$$a_3^{(2)}=\frac{a_3^{(1)}}{M_{3,3}}=17\cdot19\cdot31\cdot47,$$

$$a_4^{(2)}=\frac{a_4^{(1)}}{M_{4,3}}=23\cdot29\cdot31\cdot53;$$

在$a_1^{(2)}$、$a_2^{(2)}$、$a_3^{(2)}$、$a_4^{(2)}$中, 所有两个数的最大公约数的乘积

$$M_2=\left(a_1^{(2)},a_2^{(2)}\right)\left(a_1^{(2)},a_3^{(2)}\right)\left(a_1^{(2)},a_4^{(2)}\right)\left(a_2^{(2)},a_3^{(2)}\right)\left(a_2^{(2)},a_4^{(2)}\right)\left(a_3^{(2)},a_4^{(2)}\right)=13\cdot17\cdot23\cdot19\cdot29\cdot31,$$

所以

$$\frac{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4}{M_4^3\cdot M_3^2\cdot M_2}=(2^4\cdot3^3\cdot5^3\cdot7^3\cdot11^3\cdot13^2\cdot17^2\cdot19^2\cdot23^2\cdot29^2\cdot31^2\cdot37\cdot41\cdot47\cdot53)/[2^3(3\cdot5\cdot7\cdot11)^2(13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29\cdot31)]$$
$$=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29\cdot31\cdot37\cdot41\cdot47\cdot53,$$

即 $[a_1,a_2,a_3,a_4]=\dfrac{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4}{M_4^3\cdot M_3^2\cdot M_2}$.