第13卷 第6期　　吉首大学学报(自然科学)　　Vol. 13 No. 6
1992年12月　　Journal of Jishou University (Natural Science)　　12. 1992

一对数论对偶公式的另证和推广

彭明海
(数学系)

在文[1]中,介绍了下面两个有用的公式:设 $a,b,c\in N$,有

$$1^\circ \quad [(a,b),(a,c)]=(a,[b,c])$$

$$2^\circ \quad ([a,b],[a,c])=[a,(b,c)]$$

其中,"$[x,y]$"表示整数 x 与 y 的最小公倍数,"(x,y)"表示整数 x 与 y 的最大公约数。

一般的证法是:将 a,b,c 写成质数幂的积再根据最小公倍数、最大公约数同这些幂指数的关系进行论证。

本文仅利用大家熟知的最大公约数与最小公倍数的基本性质,很自然地证明了 1°,2° 成立。然后将它们作有趣的推广。推广后的公式在数论中是有用的。

证明 1°

$$\because \quad 左=\frac{(a,b)(a,c)}{((a,b),(a,c))}=\frac{(a,b)(a,c)}{(a,b,c)}$$

$$右=(a,\frac{bc}{(b,c)})$$

$$\therefore (a,b,c)(b,c)\cdot 左=(a,b)(a,c)(b,c)$$

$$(a,b,c)(b,c)\cdot 右=(a,b,c)(ab,ac,bc)$$

$\therefore$ 要证左=右　只需证:$(a,b)(a,c)(b,c)=(a,b,c)(ab,ac,bc)$

$$\begin{aligned}而(a,b)(a,c)(b,c)&=((a,b)a,(a,b)c)(b,c)\\&=(a^2(b,c),ab(b,c),ac(b,c),bc(b,c))\\&=(ab(a,b,c),ac(a,b,c),bc(a,b,c))\\&=(a,b,c)(ab,ac,bc)\end{aligned}$$

我们利用 1° 证明 2°:据 1° 知

$$\begin{aligned}([a,b],[a,c])&=[([a,b],a),([a,b],c)]\\&=[[a,(a,b),(a,c)],(b,c)]\\&=[a,(b,c)]\end{aligned}$$

实际上 1° 与 2° 是等价的,以上据 1° 证明了 2°,我们也可以据 2° 证明 1°。$\because$ 据 2° 知

$$\begin{aligned}[(a,b),(a,c)]&=([(a,b),a],[(a,b),c])\\&=(([a,a],[b,a]),([a,c],[b,c]))\\&=(a,[a,b],[a,c],[b,c])\end{aligned}$$

$$=(a,[b,c])$$

这就是我们之所以将 1^0 与 2^0 叫做对偶公式的原因。

下面我们对 1^0 推广如下：

3^0 设 $a,b_1,b_2,\cdots,b_n\in N,(n\geqslant 2)$ 则有 $(a,[b_1,b_2,\cdots,b_n])=[(a,b_1),(a,b_2),\cdots,(a,b_n)]$

我们用数学归纳法证明 3^0：当 $n=2$ 时，据 1^0 知 3^0 成立。假定 n 时命题成立，视 $n+1$ 的情形：

$$\begin{aligned}\because (a,[b_1,b_2,\cdots,b_{n+1}]) &= (a,[[b_1,b_2,\cdots,b_n],b_{n+1}])\\ &= [(a,[b_1,b_2,\cdots,b_n]),(a,b_{n+1})]\\ &= [[(a,b_1),(a,b_2),\cdots,(a,b_n)],(a,b_{n+1})]\\ &= [(a,b_1),(a,b_2),\cdots,(a,b_n),(a,b_{n+1})]\end{aligned}$$

$\therefore n+1$ 时 3^0 成立，归纳证毕。

4^0 设 $a_1,a_2,b_1,b_2,\cdots,b_n\in N(n\geqslant 2)$ 则

$$([a_1,a_2],[(b_1,b_2,\cdots,b_n])=[(a_1,b_1),(a_1,b_2),\cdots,(a_1,b_n),(a_2,b_1),\cdots,(a_2,b_n)]$$

证明：据 3^0 知

$$\begin{aligned}&([a_1,a_2],[b_1,b_2,\cdots,b_n])\\ &=[([a_1,a_2],b_1),([a_1,a_2],b_2),\cdots,([a_1,a_2],b_n)]\\ &=[[(a_1,b_1),(a_2,b_1)],[(a_1,b_2),(a_2,b_2)],\cdots,[(a_1,b_n),(a_2,b_n)]]\\ &=[(a_1,b_1),(a_1,b_2),\cdots,(a_1,b_n),(a_2,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_2,b_n)]\end{aligned}$$

5^0 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m;b_1,b_2,\cdots,b_n\in N$，则

$$([a_1,a_2,\cdots,a_m],[b_1,b_2,\cdots,b_n])=[(a_1,b_1),(a_1,b_2),\cdots,(a_1,b_n),(a_2,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_2,b_n),\cdots,(a_m,b_1),(a_m,b_2),\cdots,(a_m,b_n)]$$

据 4^0，可用数学归纳法证明 5^0，这里证明从略。

我们用符号 $\overline{\prod\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 2}}}(a_j,b_j)$ 表示 $2\times 3=6$ 个最大公约数的排列缩写。

即

$$\overline{\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 2}}}(a_j,b_j)\triangleq(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3),\ \overline{\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 2}}}[a_j,b_j]\text{ 同义。}$$

6^0 设 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1s1};a_{21},a_{22},\cdots,a_{2s2},\cdots a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{ksk}\in N$，其中 $s_1,s_2,\cdots,s_k\in N$，则有

$$\begin{aligned}&([a_{11},a_{12},\cdots,a_{1s1}],[a_{21},a_{22},\cdots,a_{2s2}],\cdots,[a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{ksk}])\\ &=\overline{\prod_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant s_1\\ 1\leqslant i_2\leqslant s_2}}}(a_{1i1},a_{2i2},\cdots,a_{kik})]\end{aligned}$$

据 5^0 可用数学归纳法证明 6^0 成立。这也略去证明（$\because$ 当 k＝2 时，6^0 即 5^0）

我们可类似地对公式 2^0 作如下的推广：

7^0 $[a,(b_1,b_2,\cdots,b_n)]=([a,b_1],[a,b_2],\cdots,[a,b_n])$

其中 $a,b_1,b_2,\cdots,b_n\in N$

8^0 $[(a_1,a_2),(b_1,b_2,\cdots,b_n)]=([a_1,b_1],[a_1,b_2],\cdots,[a_1,b_n],[a_2,b_1],\cdots,[a_2,b_n])$

其中 $a_1,a_2,b_1,b_2,\cdots,b_n\in N$

9^0 $[(a_1,a_2,\cdots,a_m),(b_1,b_2,\cdots,b_n)]=([a_1,b_1],\cdots,[a_1,b_n],[a_2,b_1],\cdots,[a_m,b_n])$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_m;b_1,b_2,\cdots,b_n\in N$,

10^0 $[(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1s1}),(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2s2}),\cdots,(a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{ksk})]$

$$=(\overline{\prod_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant s_1\\1\leqslant i_2\leqslant s_2}}}[a_{1i1},a_{2i2},\cdots,a_{kik}])$$

11^0 $[(a_1,a_2),[b_1,b_2]]=([a_1,b_1,b_2],[a_2,b_1,b_2])$

在 11^0 中当 $b_1=b_2$ 时,就是公式 2^0。

12^0 $([a_1,a_2],(b_1,b_2))=[(a_1,b_1,b_2),(a_2,b_1,b_2)]$

在 12^0 中当 $b_1=b_2$ 时就是公式 1^0

从形式上看,11^0 与 12^0 也是对偶的。从中易发现一些规律。

根据以上各条性质,运用数学归纳法易得出:

设 $a_1,a_2,b_1,b_2,\cdots,b_n\in N$ 时,有

13^0 $[(a_1,a_2),[b_1,b_2,\cdots,b_n]]=([a_1,b_1,b_2,\cdots,b_n],[a_2,b_1,b_2,\cdots,b_n])$

14^0 $([a_1,a_2],(b_1,b_2,\cdots,b_n))=[(a_1,b_1,b_2,\cdots,b_n),(a_2,b_1,b_2,\cdots,b_n)]$

对 13^0,14^0 还可推广为:$a_1,a_2,\cdots,a_m,b_1,b_2,\cdots,b_m\in N$,有

15^0 $[(a_1,a_2,\cdots,a_m),[b_1,b_2,\cdots,b_n]]=([a_1,b_1,b_2,\cdots,b_n],[a_2,b_1,b_2,\cdots,b_n]$
$\cdots,[a_m,b_1,b_2,\cdots,b_n])$

16^0 $([a_1,a_2,\cdots,a_m),(b_1,b_2,\cdots,b_m))=[(a_1,b_1,b_2,\cdots,b_n),(a_2,b_1,\cdots,b_n),$
$(a_m,b_1,b_2,\cdots,b_n)]$

当然,对 15^0 和 16^0 还可推广,这里限于篇幅不再推导了,也留给读者去作。

参考文献

[1] 曾荣,王玉,基础数论典型题解 300 例,

[2] 华罗庚,数论导引。