1996年12月 第23卷 增刊
西安电子科技大学学报
JOURNAL OF XIDIAN UNIVERSITY
Dec. 1996 Vol. 23 Sup.

Cayley 公式的不同风格的典型证明*

许蔓苓
(北京工业大学计算机学院 北京 100044)

摘要 首先就著名的Cayley 公式的不同风格的典型证明进行了简要综述.容斥原理是组合数学的基本计数工具之一,利用这一简单原理给出了有标号图的不同支撑树(标号树)数目的递归关系式,进而导出了Cayley 公式,这是该公式的一个大为简化而易于理解的证明.

关键词:标号树 递归关系 容斥原理
中图分类号:O157.5

众所周知的"图计数"问题是现代图论的一个重要部分.用于标号树计数的Cayley 公式是其中一个主要问题.以下简要介绍19世纪英国数学家Arthur Cayley 在这方面的工作,然后对Prüfer, Clarke, Kirchhoff 和 Moon 关于这一公式的证明给予概述.对这一领域感兴趣的读者可参阅Moon 的文章[1].最后,介绍作者在这方面所做的工作.

1 Cayley 公式简介

用{1, 2, …, n}表示有标号的完全图 K_n 的顶点集,并且用 $\tau(K_n)$ 表示 K_n 的支撑树的数目.Cayley 公式说的是 $\tau(K_n) = n^{n-2}$.

Cayley 给出的证明思想如下:令 $n \geqslant 2$,并且 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 是其和为 $2n-2$ 的正整数.在顶点集{1, 2, …, n}上具有顶点度序列 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 的树的个数是

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_n-1)!}$$

多项式展开如下:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{n-2} = \sum_{\substack{k_1,\cdots,k_n\geqslant 0\\ k_1+\cdots+k_n=n-2}} \binom{n-2}{k_1 \cdots k_n} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}$$

$$= \sum_{\substack{d_1,\cdots,d_n\geqslant 1\\ (d_1-1)+\cdots+(d_n-1)=n-2}} \binom{n-2}{d_1-1 \cdots d_n-1} a_1^{d_1-1} a_2^{d_2-1} \cdots a_n^{d_n-1}$$

特别地,令每一个 a_i 等于1,得到

* 收稿日期:1996-09-13

$$n^{n-2}=(1+1+\cdots+1)^{n-2}=\sum_{\substack{d_1,\cdots,d_n\geqslant 1\\ d_1+\cdots+d_n=2n-2}}\binom{n-2}{d_1-1\cdots d_n-1}$$

为了计算顶点集 $\{1,\cdots,n\}$ 上的树的数目,必须将 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 是正整数并且其和等于 $n-2$ 的具有顶点度序列 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 的所有树的数目全都加在一起,从前面的事实有

顶点集 $\{1,\cdots,n\}$ 上的树的数目

$=\sum\limits_{\substack{d_1,\cdots,d_n\geqslant 1\\ d_1+\cdots+d_n=2n-2}}$ (顶点集 $\{1,\cdots,n\}$ 上的具有给定的度序列 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 树的数目)

$$=\sum_{\substack{d_1,\cdots,d_n\geqslant 1\\ d_1+\cdots+d_n=2n-2}}\binom{n-2}{d_1-1\cdots d_n-1}=n^{n-2}$$

于是 Cayley 公式得到证明.

2 Cayley 公式的其他形式的证明

继 A. Cayley 之后,德国数学家 Heinz Prüfer 给出了该公式的另一证明[2]. 值得注意的是 Prüfer 并不了解 Cayley 的工作以及在当时普遍使用的图论术语. Prüfer 给出的方法是在 K_n 的支撑树(n 阶标号树)集与集合 $s=\{(a_1,\cdots,a_{n-2})\mid a_i\in I\wedge 1\leqslant a_i\leqslant n\}$ 之间构造了一个显而易见的一对一的映射,因为集合 s 恰好有 n^{n-2} 个元素,所以该结果直接得到证明.

L. E. Clarke 给出了该公式的不同风格的证明,他的主要思想如下:令 v 是 K_n 的一个任意顶点,并令 $T(n,k)$ 表示 K_n 上的顶点 v 具有度为 k 的支撑树的数目. 于是 $\tau(K_n)=\sum\limits_{k=1}^{n-1}T(n,k)$ 问题变成证明 $\sum\limits_{k=1}^{n-1}T(n,k)=n^{n-2}$. 令 A 是 K_n 的任意一棵支撑树,满足 $d_A(v)=k-1$,易见 A 在 $T(n,k-1)$ 中被计数. 从 A 中移走一条不与 v 关联的任意一条边 wz 之后,剩下两个子树,其中一棵包含顶点 v,而另一棵包含顶点 w 或 z(让我们说是 w),则另一棵包含顶点 z. 如果用一条边连接顶点 v 和 z,得到一棵支撑树 B,其满足 $d_B(v)=k$(见图 1),显然 B 在 $T(n,k)$ 中被计数. 如果 B 是通过上述方法从 A 得到的,将称一对支撑树 (A,B) 为一个连接,连接 (A,B) 的总数等于 $(n-k)\,T(n,k-1)$.

另一方面,令 B 是 K_n 的任意一棵支撑树,满足 $d_B(v)=k$,并且令 $T_1,\cdots,T_k$ 是从 B 中通过移去顶点 v 以及与 v 关联的所有边而得到的子树;通过从 B 中移去这些边(vw_i,其中 w_i 属于 $T_i,i=1,\cdots,k$)中的一条,并且连接顶点 w_i 与任意一棵其他的子树 T_j 的任意的一个顶点 u,而得到一棵支撑树 A,其满足 $d_A(v)=k-1$(见图 2).

于是,已证明 $(n-k)\,T(n,k-1)=(n-1)\,(k-1)\,T(n,k)$,迭代这一结果,并且利用显而易见的事实 $T(n,n-1)=1$,直接推导得到

$$T(n,k)=\binom{n-2}{k-1}\,(n-1)^{n-k-1}$$

对所有可能的 k 值求和,于是由以下导出 K_n 的支撑树的数目

$$\tau(K_n)=\sum_{k=1}^{n-1}T(n,k)=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}\,(n-1)^{n-k-1}=\{(n-1)+1\}^{n-2}=n^{n-2}$$

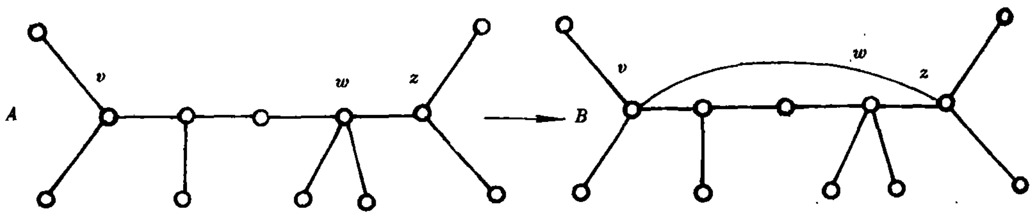

图1 支撑树示意图

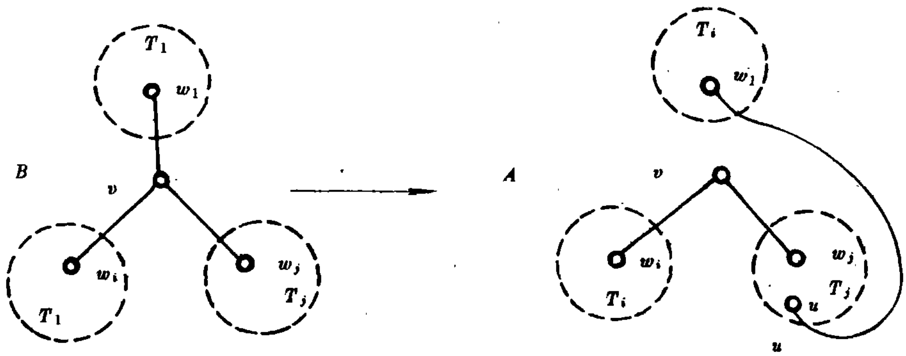

图2 支撑树示意图

这个结果通常称为“矩阵-树”定理，在Kirchhoff的工作[3]中是陈述了的. K_n 的支撑树的数目可作为其一个推论很快被得到.“矩阵-树”定理是：设 G 是一个具有顶点集 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 的连通的简单图，并且 $M=(m_{ij})$ 是 $n\times n$ 矩阵，其中 $m_{ii}=d_G(v_i)$，$m_{ij}=-1$，如果 v_i 和 v_j 是邻接的，否则 $m_{ij}=0$，那么 G 的支撑树的数目等于 M 的任意一元素的代数余子式.

因此 K_n 的支撑树的数目通过把该定理应用到 K_n 而得到，$M(K_n)$ 的每个代数余子式是 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ & & & \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} = n^{n-2}$$

J. W. Moon 给出了Cayley公式另一种形式的组合证明[4]，其主要思想如下：根据等式

$$\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}(p-q)^k=0 \tag{1}$$

其中 k 是小于 p 的正整数.

令 $G(p,q)$ 是具有 p 个编号顶点和 q 条边的连通的简单图，$F(p,q)$ 是其中的不具有端点的图的数目. 根据定义，一个端点即是恰与一个其他的顶点邻接的顶点并且该其他的顶点不再是端点，如果该图是连通的并且具有至少两个顶点，根据筛选法发现

$$F(p, q) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} G(p-i, q-i)(p-i)^i \quad \text{如果 } p > 2 \tag{2}$$

通过假定 $q = p - 1$ 将(2)限定在树上. 此时,因为每个非平凡的树至少有两个端点,所以 $F(p, p-1) = 0$,如果 $p > 1$. 一般结果 $\tau(K_n) = G(n, n-1) = n^{n-2}$,可以通过把(1)中的 k 用 $n-1$ 代替再用归纳法直接得证.

根据包含-排斥原理,在[5]中,作者直接给出了 $\tau(K_n)$ 的递归表达式

$$\tau(K_n) = \binom{n}{1}(n-1)\tau(K_{n-1}) - \binom{n}{2}(n-2)^2\tau(K_{n-2}) +$$
$$\binom{n}{3}(n-3)^3\tau(K_{n-3}) - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n-1}1^{n-1}\tau(K_1) \quad (n \geqslant 3)$$

$\tau(K_2) = 1$,$\tau(K_1) = 1$,并且

$$n^{n-2} = \binom{n}{1}(n-1)^{n-2} - \binom{n}{2}(n-2)^{n-2} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n-1}1^{n-2}$$

所期待的结果 $\tau(K_n) = n^{n-2}$ 由数学归纳法直接得证. 该证明是至今最简单的.

参 考 文 献

1 Moon J W. Various Proofs of Cayley's Formula for Counting Tree. In: Harary F, et. A Seminar on Graph Theory. N Y: Holt, 1967. 70~78

2 Prüfer H. Neuer Beweis Eines Satzes über Permutationen. Archiv der Mathematik und Physik, 1918, 27 (3): 142~144

3 Krichhoff G. Über die Auflösung der Gleichungen, Auf Welche Man Bei der Untersuchung der Linearen Verteilung Galvanische Ströme Gefuhut Wird. Ann Phys Chem, 1847, 72: 497~508

4 Moon J W. Another Proof of Cayley's Formula for Counting Tree. Amer Math Monthly, 1963, 70: 846~847

5 许蔓苓. Cayley 公式的一个简化证明. 中国离散数学学会第六次学术交流会论文集. 1989. 24~26

6 Cayley A. A Theorem on Trees. Quart, J Math Oxford Ser, 1989, 23:376~378(1989)

7 Bryant V. Aspects of Combinatorics A Wide-Ranging Introduction. Great Britain: Combridge Univ Press, 1993. 15~19

8 Wilson R J. Introduction to Graph Theory. Longman Group ltd, 1979. 51~52

(编辑: 郭 华)

Summary on Cayley formulas

Xu Manling

(Institute of Computer, Beijing Industrial Univ., Beijing, 100011)

Abstract

Several different kinds of counting formulas on Cayley formula are presented.

Key Words: tree with labelled vertices recursive relation inclusion-exclusion principle