文章编号:1007-2985(2001)04-0011-03

容斥原理与色多项式

夏方礼[1],徐立新[2],邓汉元[3]

(1.益阳师专数学系,湖南 益阳 413049;2.邵阳高专数学系,湖南 邵阳 422004;
3.湖南师范大学数学系,湖南 长沙 410081)

摘 要:为了更直接、简单地显示容斥原理和色多项式的关系,利用自由阿贝尔群探讨组合中的计数问题,将容斥原理的群的形式直接用于计算简单图 G 的色多项式,导出了色多项式的公式.

关键词:容斥原理;色多项式;自由阿贝群

中图分类号:O157.6 **文献标识码**:A

给出有组合意义的对象的一个有限集 S,计数理论的基本目的是研究 S 中元素的个数 $|S|$. 最理想的解答就是得到一个闭公式.但经常只得到一个生成函数或递归关系,或一个用其它对象表示的式子. 最熟悉的计数技法有筛法、容斥原理和 Möbius 反演等.用这些技法产生的公式总是含有减号,且企图要求一个代数结构使这些符号尽可能地接近于组合事实,而不是简单地作为整数上的运算. Ray 和 Schmitt[1] 给出了这样一个简单有效的结构,它建立在自由阿贝尔群中,然后又扩展到自由模和 Hopf 代数上. Ray 和 Schmitt 所给的方法,就是把集合 S 的元素显示成一个表,这样计数问题的解就可通过计算表中的元素得出.

设 S 是一个有限集,S 上的自由阿贝尔群 $Z\{S\}$ 是所有形如 $\sum n_ix_i(n_i \in Z, x_i \in S)$ 的有限线性组合形式的元素之集.

特别地,$\sum\limits_{x\in S} x \in Z\{S\}$,它是由 S 中所有元素组成的无序表,记为 $\mathscr{L}\{S\}$,注意 $Z\{\phi\} = \{0\}$.

通过一个从 $Z\{S\}$ 到 Z 的自然同态 $\theta: Z\{S\} \to Z, \sum n_ix_i \to \sum n_i$,就可求出 $|S|$,显然,$\theta(\mathscr{L}(S)) = |S|$. 利用这一技巧,可重新得到容斥原理的公式.

取 $S = T^V$(从 V 到 T 的所有映射之集),将这一方法直接用于计算图 G 的色多项式,比 Ray 和 Schmitt[1] 的过程更直接、简单,且更清楚地显示出容斥原理和色多项式的关系.

1 容斥原理的群形式

组合计数中有一类问题要求计算某个集合 S 中不满足某些性质(或某些限制条件)的元素个数. 在这类问题中,S 的满足某些性质的元素部分往往容易计算出来. 容斥原理[2] 就是解决这类计数问题的有力工具,它给出了用满足某些性质的那些元素个数来表示不满足这些性质的元素个数的一个公式.

利用自由阿贝尔群 $Z\{S\}$ 可以把容斥原理的计数公式表述为 $Z\{S\}$ 中的 2 个元素相等.

收稿日期:2001-09-07
基金项目:国家自然科学基金资助项目(19801013)
作者简介:夏方礼(1964-),男,湖南省益阳市人,益阳师专数学系讲师,主要从事组合优化方向研究.

设 S 是一个有限集，W_1，W_2，…，W_n 是 S 的子集(或 S 的分别具有第 1，2，…，n 个性质的元素组成的子集)，$N = \{1, 2, \cdots, n\}$. 对于任意 $J \subseteq N$，$W_J = \{x \mid x \in S, \forall i \in J$ 有 $x \in W_i$，而 $\forall i \notin J$ 有 $x \notin W_i\}$，即 S 中恰好属于下标在 J 中的那些子集 W_i 的元素所成的子集. $|W_J|$ 通常就是所要求计算的对象.

引理 1[1] 在自由阿贝群 $Z\{S\}$ 中，

$$\ell(W_J) = \sum_{J \subseteq K} (-1)^{|K-J|} \ell(\bigcap_{i \in K} W_i).$$

文献[1]中的证明方法仍是一般资料上所用的"贡献法".

直接利用 $Z\{S\}$ 到 Z 的同态 θ 可得到经典的容斥原理的计数公式：

$$|W_J| = \sum_{J \subseteq K} (-1)^{|K-J|} |\bigcap_{i \in K} W_i|.$$

2 色多项式

Ray 和 Schmitt[1] 先在 $Z\{K(G)\}$ 中定义 Ultimate 色多项式 $\omega(G;X) = \alpha^{-1}(0)$(实际上，它就是容斥原理(引理 1)在 $Z\{K(G)\}$ 上的特殊形式)，然后再用 Mobius 反演证得色多项式 $\ell(c(G;T))$ 就是 $\omega(G;X)$ 在赋值映射 e_T 下的象 $e_T(\omega(G;X))$[1]. 笔者直接利用容斥原理(即引理 1)来计算简单图 $G = (V,E)$ 的色多项式.

设 $G = (V,E)$ 是一个简单图，$T = \{x_1, x_2, \cdots, x_t\}$ 是 t 种颜色的集合. G 的一个至多 t 种颜色的着色(或 G 的用色集 T 的一种着色)是从顶点集 V 到色集 T 中的一个映射 f，使得 G 中任意边 2 个端点在 f 下取不同值. 即由 f 所诱导出的 V 的划分 $\Pi(f)$ 中每个块都是 G 的独立点集. $f \in T^V$，$\Pi(f) \in \Pi(V)$，其中 T^V 表示从 V 到 T 的所有映射之集，$\Pi(V)$ 表示由 V 的划分所组成的偏序集，序关系 $\sqsubseteq$ 是由细分确定的，它的最大元是 $\{V\}$，最小元是 V 的离散划分. 令 $c(G;T) = \{f \mid f$ 是 G 的用 T 的一种着色$\}$，则 $\theta(\ell(G;T))$ 就是 G 的用 T 着色的方案数，即 G 的色多项式 $\chi(G;t)$[3].

$\forall e = uv \in E, u, v \in V$，令 $W_e = \{f \mid f \in T^V$，且 $f(u) = f(v)\}$(即 W_e 表示 T^V 中具有性质"在边 e 的端点取同值"的元素之集).

$K(G) = \{\sigma \mid \sigma$ 是 V 的划分，且每个块的导出子图是一个连通图$\}$，$K(G) \subseteq \Pi(V)$.

引理 2 偏序集 $K(G) \cong (2^E, \subseteq)$.

证明 令 α：$K(G) \to 2^E$，$\forall \sigma \in K(G)$，$\alpha(\sigma) = E(\sigma) = \{e \mid e \in E, e$ 是 σ 的某个块导出的子图中的边$\}$(即 σ 的所有块导出的子图的边之并). 令 α'：$2^E \to K(G)$，$\forall A \in 2^E$(即 $A \subseteq E$)，$\alpha'(A) = \sigma(A)$，其中 $\sigma(A)$ 表示以生成子图 (V,A) 的连通分支为块的划分. 显然 $\alpha \circ \alpha' = I_{2^E}$，$\alpha' \circ \alpha = I_{K(G)}$. 即 α 是一个双射.

若 $\sigma \sqsubseteq \rho, \sigma, \rho \in K(G)$，即 σ 是 ρ 的细分，则有 $E(\sigma) \subseteq E(\rho)$，即 $\alpha(\sigma) \sqsubseteq \alpha(\rho)$，所以，$\alpha$ 是保序的，$K(G) \cong (2^E, \subseteq)$.

下文有时就把 $K(G)$ 与 2^E 等同起来，即把 $K(G)$ 中的元素 σ 与 2^E 中的元素 $E(\sigma)$ 等同起来.

给定 $\sigma \in K(G)$，T^σ 表示从 σ 到 T 的映射之集. 对于每个 $f \in T^\sigma$，设 φ_σ 是 V 到 σ 的自然映射，则 f 与 φ_σ 的合成 $f \circ \varphi_\sigma$ 就是 V 到 T 的映射(对于给定的 σ, φ_σ 是固定的)，且若 $f_1, f_2 \in T^\sigma$，$f_1 \neq f_2$，就有 $f_1 \circ \varphi_\sigma \neq f_2 \circ \varphi_\sigma$，即 $f \to f \circ \varphi_\sigma$ 是 T^σ 到 T^V 的一个单射. 所以 T^σ 可以看成 T^V 的子集，可把 T^σ 的元素 f 等同于 T^V 的元素 $f \circ \varphi_\sigma$. 这样就有：

引理 3 $\forall \sigma \in K(G)$，$T^\sigma = \bigcap_{e \in E(\sigma)} W_e$.

证明 $\forall f \in T^\sigma (f = f \circ \varphi_\sigma)$，令 $\sigma = \{V_1, V_2, \cdots, V_k\}$，则 $E(\sigma) = \bigcup_{i=1}^{k} E(G[V_i])$，其中 $G[V_i]$ 表示由 V_i 导出的 G 的子图. $\forall e \in E(G)$，$\exists i, 1 \leq i \leq k$，使 $e \in E(G[V_i])$，即有 $u, v \in V_i$，使 $e = uv$. 而 $f \in T^\sigma$，所以 $f(u) = f(v)$，从而 $f \in W_e$，$f \in \bigcap_{e \in E(\sigma)} W_e$. 反之，若 $f \in \bigcap_{e \in E(\sigma)} W_e$，则 f 在 $e \in E(\sigma)$ 的 2 个端点上取相同的值，因而 f 在生成子图 $(V, E(\sigma))$ 的每个连通分支的顶点上取相同的值. 即 f 在 σ 的每个块上取相同的值，所以 $f \in T^\sigma$. 故 $T^\sigma = \bigcap_{e \in E(\sigma)} W_e$.

定理1 $\ell(W_\sigma)=\sum_{\sigma\sqsupseteq\rho}(-1)^{|E(\rho)-E(\sigma)|}\ell(\bigcap_{e\in\rho}W_e)$.

证明 取 $S=T^V$,$N=E$. $\forall e\in E$,$W_e\subseteq S$,由引理2,$W_\sigma=W_{E(\sigma)}$,由引理1,在 $Z|S|=Z|T^V|$ 中,有

$$\ell(W_\sigma)=\ell(W_{E(\sigma)})=\sum_{\sigma\sqsupseteq\rho}(-1)^{|E(\rho)-E(\sigma)|}\ell(\bigcap_{e\in E(\rho)}W_e).$$

推论1[4] 设 $G=(V,E)$ 是一个简单图,则 G 的色多项式

$$\chi(G;t)=\sum_{I\subseteq E}(-1)^{|I|}t^{\lambda(I)},$$

其中 $\lambda(I)$ 是生成子图 (V,I) 的连通分支数.

证明 由着色的定义知,$\ell(c(G;T))=\ell(W_\phi)$. 由定理1知

$$\ell(c(G;T))=\sum_{\rho\in 2^E}(-1)^{|E(\rho)|}\ell(\bigcap_{e\in E(\rho)}W_e)=\sum_{I\subseteq E}(-1)^{|I|}\ell(\bigcap_{e\in I}W_e).$$

再由引理3知

$$\ell(c(G;T))=\sum_{I\subseteq E}(-1)^{|I|}\ell(T^{\alpha'(I)}),$$

其中 $\alpha'(I)$ 表示以生成子图 (V,I) 的连通分支为块的划分. 所以

$$\chi(G;t)=\theta(\ell(c(G;T)))=\sum_{I\subseteq E}(-1)^{|I|}\theta(\ell(T^{\alpha'(I)})),$$

其中 $T^{\alpha'(I)}$ 是从划分 $\alpha'(I)$ 到 T 的映射之集. 所以 $\theta(\ell(T^{\alpha'(I)}))=|T|^{|\alpha'(I)|}=t^{\lambda(I)}$. 故

$$\chi(G;t)=\sum_{I\subseteq E}(-1)^{|I|}t^{\lambda(I)}.$$

参考文献:

[1] RAY N, SCHMITT W. Ultimate Chromatic Polynomials[J]. Discrete Math., 1994, 125:329 - 341.
[2] 邵嘉裕. 组合数学[M]. 上海:同济大学出版社, 1991.
[3] F.哈拉里. 图论[M]. 上海:上海科学技术出版社, 1980.
[4] LOVÁSZ L. Combinatorial Problems and Exercises[M]. North - Holland Publishing Company, 1979.

The Principle of Inclusion and Exclusion and Chromatic Polynomials

XIA Fang-li[1], XU Li-xin[2], DENG Han-yuan[3]

(1. Yiyang Teachers' college, Yiyang 413049, Hunan China; 2. Shaoyang College, Shaoyang 422004, Hunan China; 3. Department of Mathematics, Hunan Normal University, Changsha 410081, Hunan China)

Abstract: To show the relation between the principle of inclusion and exclusion and chromatic polynomial, the author discusses the enumeration of combinatorial problems by using free Abelian group, applies the group - form of principle of inclusion and exclusion to enumerating the chromatic polynomial of a simple graph, and deduces the chromatic polynomial expression.

Key words: principle of inclusion and exclusion; chromatic polynomial; free Abelian group