生成树的计数

郑艺容[1,2]，周 雪[2]

（1. 厦门理工学院应用数学学院，福建 厦门 361024；
2. 福州大学离散数学中心，福建 福州 350003）

［摘 要］从组合数学的角度研究生成树的计数. 先利用容斥原理，得到3个组合恒等式，再从组合数学的角度出发，并利用数学归纳法给出了Cayley's公式的又一简便证明. 该计数方法将图的计数问题与组合数学中的经典问题联系起来，更好地揭示了生成树计数的本质.

［关键词］Cayley's公式；生成树；容斥原理；数学归纳法

［中图分类号］O157 ［文献标志码］A ［文章编号］1673－4432（2015）01－0095－03

计算图的不同生成树的个数是图的计数问题中的一个重要研究课题. 1857年，Cayley[1]在研究给定碳原子数 n 的饱和碳氢化合物（C_nH_{2n+2}）的同分异构体的数目时，提出“树”的概念，即不含圈的连通图. 如果连通图 G 的一个子图 T 是一棵树，且包含 G 的所有顶点，则该子图 T 称为 G 的生成树（Spanning Tree）. 设 G 是一个图，$t(G)$ 表示 G 中不同生成树的个数. Cayley于1889年给出计算 n 阶完全图的不同生成树个数的公式，即著名的Cayley's公式.

定理1[2] （Cayley's公式）n 阶完全图的不同生成树的个数

$$t_n = t(K_n) = n^{n-2}.$$

Cayley's公式有很多不同的证明方法，参见文献［2－5］. 本文又给出Cayley's公式的又一简单证明.

1 预备知识

首先介绍一些基本概念和结论. 容斥原理是组合数学中一个非常重要的定理，其内容如下：

定理2[6]（容斥原理） 设 A 是有限集，$A_i \subseteq A(i = 1,2,\cdots,n,n \geqslant 2)$，则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i}^{n} |A_i| - \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \cdots + (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + \cdots +$$
$$(-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.$$

设 $N = \{1,2,\cdots,n\}$，$M = \{1,2,\cdots,m\}$，A 表示 N 上所有 p 维数组构成的集合，其中 $p < m \leqslant n$. 因为 $p < m$，那么对 A 中的任意一个 p 维数组 s，存在 M 中的元素 $i \notin s$. 令 $A_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 表示 A 中不含有 i 的 p 维数组构成的集合，易知 $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$.

引理1 $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| = (n-k)^p$，$1 \leqslant k \leqslant m$.

定理3 设 $n,m,p \in \mathbf{N}^+$，$p < m \leqslant n$，则以下组合恒等式成立

$$n^p = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \binom{m}{k} (n-k)^p.$$

［收稿日期］2014－09－24 ［修回日期］2015－02－02
［基金项目］国家自然科学基金项目（NSFC11301440）；福建省教育厅科技项目（JB13155）；厦门理工学院科研基金项目（XKJJ201106）
［作者简介］郑艺容（1979－），男，讲师，硕士，研究方向为组合图论. E-mail：yrzheng@xmut.edu.cn

证明 A，$A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 定义如上．首先，由乘法原理可知 $|A|=n^p$．

又 $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m$，根据容斥原理、对称性及引理 1 可得：

$$|A|=|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m|=\sum_{i}^{m}|A_i|-\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant m}|A_{i_1}\cap A_{i_2}|+\cdots+$$

$$(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m}|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}|+\cdots+(-1)^{m-1}|A_1\cap\cdots\cap A_m|=\binom{m}{1}|A_1|-$$

$$\binom{m}{2}|A_1\cap A_2|+\cdots+(-1)^{k-1}\binom{m}{k}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k|+(-1)^{m-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|=$$

$$\binom{m}{1}(n-1)^p-\binom{m}{2}(n-2)^p+\cdots+(-1)^{k-1}\binom{m}{k}(n-k)^p+(-1)^{m-1}(n-m)^p=$$

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m}{k}(n-k)^p.$$

特别地，当 $p=n-2$ 时可得以下推论：

推论 1 $n^{n-2}=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m}{k}(n-k)^{n-2}$，$(n\geqslant 3)$．

2 生成树计数公式的再证明

以下给出 Cayley's 公式的另一简单证明．设 T 表示所有 n 阶生成树构成的集合，t_n 表示所有 n 阶生成树的个数，即 $t_n=|T|$．T_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 表示顶点 i 为树叶的所有 n 阶生成树构成的集合.

引理 2 集合 $T_1\cap T_2\cap\cdots\cap T_k$ 满足：$|T_1\cap T_2\cap\cdots\cap T_k|=(n-k)^k t_{n-k}$．

证明 由上述定义可知：$T_1\cap T_2\cap\cdots\cap T_k$ 那么表示顶点 $1,2,\cdots,k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 均为树叶的 n 阶生成树构成的集合，这样的任意一棵树可经过下述两个步骤得到.

(i) 由顶点 $k+1,k+2,\cdots,n$ 导出的子图 T 是一棵树，易知恰好有 t_{n-k} 个这样的 T；

(ii) 把顶点 $1,2,\cdots,k$ 添加到 T 中得到树 T，使得顶点 $i(1,2,\cdots,k)$ 为 T 的树叶，即顶点 i 恰好与顶点 $k+1,k+2,\cdots,n$ 中的某一个顶点相邻，这样的方式共有 $(n-k)^k$ 种，根据乘法计数原理可得：$|T_1\cap T_2\cap\cdots\cap T_k|=(n-k)^k t_{n-k}$．

引理 3 n 阶不同生成树的个数 t_n 满足：$t_n=1(n=1,2)$；$t_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)^k t_{n-k}(n\geqslant 3)$.

证明 T 表示所有 n 阶生成树构成的集合，T_i $(i=1,2,\cdots n)$ 表示所有 n 阶生成树中顶点 i 为树叶的生成树构成的集合，由于每棵非平凡树至少有两片树叶，故 $T=T_1\cup T_2\cup\cdots\cup T_n$，由容斥原理、对称性及引理 2 可知：

$$t_n=|T|=|T_1\cup T_2\cup\cdots\cup T_n|=\sum_{1\leqslant i_1\leqslant n}|T_{i_1}|-\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}|T_{i_1}\cap T_{i_2}|+\cdots+$$

$$(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}|T_{i_1}\cap T_{i_2}\cap\cdots\cap T_{i_k}|+\cdots+(-1)^{n-1}|T_1\cap T_2\cap\cdots\cap T_n|=\binom{n}{1}|T_1|-$$

$$\binom{n}{2}|T_1\cap T_2|+\cdots(-1)^{k-1}\binom{n}{k}|T_1\cap T_2\cap\cdots\cap T_k|+\cdots+(-1)^{n-1}|T_1\cap T_2\cap\cdots\cap T_n|=$$

$$\binom{n}{1}(n-1)^1 t_{n-1}-\binom{n}{2}(n-2)^2 t_{n-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)^k t_{n-k}+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}(n-n)^k t_{n-n}=$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)^k t_{n-k}(n\geqslant 3).$$

以下给出 Cayley's 公式的另一证明.

定理 4　所有不同 n 阶生成树的个数 $t_n = n^{n-2}$（ Cayley's 公式）

证明　用数学归纳法

（i）易知 $t_1 = t_2 = 1$，$t_3 = 3$ 结论显然成立.

（ⅱ）假设定理对小于 n 的正整数都成立.

（ⅲ）以下证明对 n 结论成立. 根据引理 3

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)^k t_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)^k (n-k)^{n-k-2} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)^{n-2} = n^{n-2}.$$

注 3　第 1，第 2，第 3 个等号成立分别根据 引理 3，归纳假设第 2 步，推论 1.

3　小结

Cayley's 公式是图计数中的经典公式，已有很多不同的证明方法，本文利用由容斥原理得到的组合恒等式并借助数学归纳法给出 Cayley's 公式的又一简单证明. 接下来可进一步研究 Cayley's 公式的不同证明方法，特别是能将图的其它经典问题与图的计数问题联系起来证明 Cayley's 公式，更好地揭示图论中的一些本质联系.

［参考文献］

［1］ CAYLEY A. On the theory of the analytical forms called trees ［J］. Philophical Magazine，1857，13(4)：172-176.

［2］ CAYLEY A. A theorem on trees ［J］. Quart J Math，1989，23：376-378.

［3］ SHOR P W. A new proof of Cayley's formula for counting labeled trees ［J］. J Combin Theory：Series A，1995，71：154-158.

［4］ ARIANNEJAD M，EMAMI M. A new proof of Cayley's formula for counting labeled spanning trees ［J］. Electronic Notes in Discr Math，2014，45：99-102.

［5］ GODSIL C，ROYLE G. Algebraic graph theory ［M］. New York：Springer-Verlag，2001.

［6］ 曹汝成. 组合数学 ［M］. 广州：华南理工大学出版社，2000.

Counting Spanning Trees

ZHENG Yi-rong[1,2]，ZHOU Xue[2]

(1. School of Applied Mathematics, Xiamen University of Technology, Xiamen 361024, China;

2. Center for Discrete Mathematics, Fuzhou University, Fuzhou 350003, China)

Abstract: In this paper, we explored the possibility of counting spanning tree in a combinatorial approach. We got three combinatorial identifies applying the inclusion-exclusion principle. Based on these identifies and mathematics induction, we gave an easy proof for the Cayley's formula using a combinatorial argument. The approach combines the problem of graphical enumeration with classical problems in combinatorial mathematics and reveals the essence of the problem of counting spanning trees with better effect.

Key words: Cayley's formula; spanning trees; inclusion-exclusion; induction

（责任编辑　晓　军）