

# 包含切比雪夫多项式的循环矩阵行列式的计算

师白娟

(西北大学数学学院, 陕西 西安 710127)

**摘要:** 行首加  $r$  尾  $r$  右循环矩阵和行尾加  $r$  首  $r$  左循环矩阵是两种特殊类型的矩阵, 这篇论文中就是利用多项式因式分解的逆变换这一重要的技巧以及这类循环矩阵漂亮的结构和切比雪夫多项式的特殊的结构, 分别讨论了第一类、第二类切比雪夫多项式的关于行首加  $r$  尾  $r$  右循环矩阵和行尾加  $r$  首  $r$  左循环矩阵的行列式, 从而给出了行首加  $r$  尾  $r$  右循环矩阵和行尾加  $r$  首  $r$  左循环矩阵的行列式显式表达式. 这些显式表达式与切比雪夫多项式以及参数  $r$  有关. 这一问题的应用背景主要在循环编码, 图像处理等信息理论方面.

**关键词:** 行首加  $r$  尾  $r$  右循环矩阵; 行尾加  $r$  首  $r$  左循环矩阵;

第一类切比雪夫多项式; 第二类切比雪夫多项式; 行列式

**中图分类号:** O177.91 **文献标识码:** A **文章编号:** 1008-5513(2016)03-0305-13

**DOI:** 10.3969/j.issn.1008-5513.2016.03.009

## 1 引言

循环矩阵类在许多学科中有很重要的应用<sup>[1-11]</sup>, 例如图像处理, 通信, 信号处理, 编码, 预处理等. P. Davis 和江兆林教授已经为其研究奠定了深厚的基础. 近几年内循环矩阵的探究已经延伸到很多方面, 成为了活跃的研究课题. 循环矩阵是其另外的自然延伸, 有广泛的应用, 特别是在广义循环码方面.  $x^n - rx - r$ -循环矩阵被称为行首加  $r$  尾  $r$  右循环矩阵, 简记为 RFP $r$ L $r$ R 循环矩阵, 比一般的  $f(x)$ -循环矩阵有更好的结构和性质, 所以求解 RFP $r$ L $r$ R 循环线性系统有更好的快速算法.

在这篇论文中, 主要考虑切比雪夫多项式的关于行首加  $r$  尾  $r$  右循环矩阵和行尾加  $r$  首  $r$  左循环矩阵的行列式. 由切比雪夫多项式的特征给出了行列式的显式表达式, 这里所运用的技巧正是多项式因式分解的逆变换. 首先, 我们介绍了行首加  $r$  尾  $r$  右循环矩阵和行尾加  $r$  首  $r$  左循环矩阵的定义和切比雪夫多项式的特征性质; 然后, 我们呈现出主要的结果和详细过程.

收稿日期: 2016-02-26.

基金项目: 国家自然科学基金 (11371291).

作者简介: 师白娟 (1992-), 硕士生, 研究方向: 数论.

## 2 预备知识

**定义 2.1** 对任意  $n \geq 0$ , 著名的第一、二类切比雪夫多项式  $T_n(x)$  和  $U_n(x)$  的定义如下:

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}, \quad U_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k},$$

其中  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  表示  $\leq \frac{n}{2}$  的最大的整数.

显然  $T_n(x)$  和  $U_n(x)$  是二阶线性递推多项式, 并且满足递推公式:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x;$$

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

$$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x, U_2(x) = 4x^2 - 1, U_3(x) = 8x^3 - 4x;$$

$\{T_n(x)\}$  和  $\{U_n(x)\}$  的通项公式是

$$T_n(x) = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}, \quad U_n(x) = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta},$$

$$\alpha = x + \sqrt{x^2 - 1}, \quad \beta = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

**定义 2.2** 一个第一行是  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  的行首加  $r$  尾  $r$  右循环矩阵 (RFPrLrR) 是这样的形式:

$$A = \text{RFPrLrRCirc}_r \text{fr}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ ra_n & a_1 + ra_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & ra_n + ra_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ ra_3 & \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ ra_2 & ra_3 + ra_2 & \dots & ra_n + ra_{n-1} & a_1 + ra_n \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

矩阵  $A$  取决于第一行元素  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  及参数  $r$ , 其构成规则为: 将第  $i (i = 0, 1, 2, \dots)$  行的行尾先乘参数  $r$ , 行首加  $r$  尾, 得到的序列所有元素向右移一位即为第  $i+1$  行. 易知, 行首加  $r$  尾  $r$  右循环矩阵 (RFPrLrR) 是  $x^n - rx - r$ - 循环矩阵 [3], 并且这类矩阵既不是 FLS  $r$ -

循环矩阵<sup>[6]</sup>的延伸也不是它的特殊情形, 而是一种新的特殊的矩阵. 在这篇文章中, 设  $r$  是一个参数, 并且使得在指定领域内, 多项式  $g(x) = x^n - rx - r$  没有重根. 我们定义  $\Theta_{(r,r)}$  作为基本行首加  $r$  尾  $r$  右循环矩阵 (RFP $r$ L $r$ R). 那就是,

$$\Theta_{(r,r)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ r & r & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

很容易我们可以知道多项式  $g(x) = x^n - rx - r$  既是极小多项式也是矩阵  $\Theta_{(r,r)}$  的特征多项式.

此外,  $\Theta_{(r,r)}^n = rI_n + r\Theta_{(r,r)}$ . 考虑到基本行首加  $r$  尾  $r$  右循环矩阵  $\Theta_{(r,r)}$  的幂的结构, 易知

$$A = \text{RFP}r\text{L}r\text{RCirc}_r\text{fr}(a_1, a_1, \cdots, a_n) = \sum_{j=1}^n a_j \Theta_{(r,r)}^{j-1}. \quad (1)$$

这样,  $A$  是一个行首加  $r$  尾  $r$  右循环矩阵 (RFP $r$ L $r$ R) 当且仅当对某一多项式  $f(x)$ ,

$$A = f(\Theta_{(r,r)}), \text{ 事实上, 多项式 } f(x) = \sum_{j=1}^n a_j x^{j-1}.$$

**定义 2.3** 一个第一行是  $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$  的行尾加  $r$  首  $r$  左循环矩阵 (RLP $r$ F $r$ L) 是这样的形式:

$$B = \text{RLP}r\text{F}r\text{LCirc}_r\text{fr}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \\ = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n + ra_1 & ra_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n + ra_1 & \cdots & \cdots & ra_{n-2} \\ a_n + ra_1 & ra_1 + ra_2 & \cdots & ra_{n-2} + ra_{n-1} & ra_{n-1} \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

矩阵  $B$  取决于第一行元素  $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$  及参数  $r$ , 其构成规则为: 将第  $i$  ( $i = 0, 1, 2, \cdots$ ) 行的第一个元素先乘参数  $r$ , 行尾加  $r$  首, 得到的序列所有元素向左移一位即为第  $i+1$  行.

**引理 2.1** 设  $A = \text{RFP}r\text{L}r\text{RCirc}_r\text{fr}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ , 那么  $A$  特征值是

$$f(\omega_i) = \sum_{j=1}^n (a_j \omega_i^{j-1}),$$

此外,  $\det A = \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_j \omega_i^{j-1})$ , 这里  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ) 是方程

$$x^n - rx - r = 0 \quad (2)$$

的根.

**证明** 由定义2.2 和方程 (1), 可以知道  $A$  是 RFP $r$ L $r$ R 循环矩阵当且仅当  $A$  与  $\Theta_{(r,r)}$  可交换, 那就是说,

$$A\Theta_{(r,r)} = \Theta_{(r,r)}A. \quad (3)$$

我们需证明下面两个特征:

$$(i) V_{\Theta_{(r,r)}}^{-1}AV_{\Theta_{(r,r)}} = \text{diag}(f(\omega_1), f(\omega_2), \dots, f(\omega_n)),$$

$$(ii) A \text{ 的特征值是 } \lambda_i = \sum_{j=1}^n a_j \omega_i^{j-1}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

这里  $f(x) = \sum_{j=1}^n a_j x^{j-1}$ ,  $\omega_i (1 \leq i \leq n)$  是  $g(x) = x^n - rx - r$  的不同的  $n$  个根, 并且  $V_{\Theta_{(r,r)}} = V(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  表示  $\omega_i$  的范德蒙矩阵.

(1) 设

$$V_{\Theta_{(r,r)}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \dots & \omega_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \dots & \omega_n^{n-1} \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad (4)$$

$\omega_i (1 \leq i \leq n)$  是  $g(x) = x^n - rx - r$  的不同的  $n$  个根.

$$\text{因为 } \det V_{\Theta_{(r,r)}} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\omega_i - \omega_j) \neq 0,$$

所以  $V_{\Theta_{(r,r)}}$  是一个非奇异的矩阵. 另一方面,

$$AV_{\Theta_{(r,r)}} = \begin{pmatrix} f(\omega_1) & f(\omega_2) & \dots & f(\omega_n) \\ \omega_1 f(\omega_1) & \omega_2 f(\omega_2) & \dots & \omega_n f(\omega_n) \\ \omega_1^2 f(\omega_1) & \omega_2^2 f(\omega_2) & \dots & \omega_n^2 f(\omega_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{n-1} f(\omega_1) & \omega_2^{n-1} f(\omega_2) & \dots & \omega_n^{n-1} f(\omega_n) \end{pmatrix} = V_{\Theta_{(r,r)}} \Omega, \quad (5)$$

这里

$$\Omega = \text{diag}(f(\omega_1), f(\omega_2), \dots, f(\omega_n)).$$

这样

$$V_{\Theta_{(r,r)}}^{-1}AV_{\Theta_{(r,r)}} = \text{diag}(f(\omega_1), f(\omega_2), \dots, f(\omega_n)).$$

(2) 由 (1) 的结论, 可以知道  $A$  的特征值是

$$\lambda_i = f(\omega_i) = \sum_{j=1}^n a_j (\omega_i)^{j-1}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

因此由矩阵  $A$  与它的特征值的关系可以得到

$$\det A = \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_j \omega_i^{j-1}).$$

这样就证明了引理 2.1.

### 引理 2.2

$$\prod_{i=1}^n (c + \omega_i b + \omega_i^2 a) = c^n - r(ca^{n-1}\Delta_{n-1} + a^n\Delta_n) + r^2(ca^{n-1} + a^n - ba^{n-1}).$$

其中

$$\Delta_n = \delta_1^n + \delta_2^n, \omega_i (i = 1, 2, \dots, n)$$

是方程 (2) 的根,  $a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$ .

### 证明

$$\prod_{i=1}^n (c + \omega_i b + \omega_i^2 a) = a^n \prod_{i=1}^n (\omega_i - \delta_1)(\omega_i - \delta_2) = a^n \prod_{i=1}^n (\delta_1 - \omega_i)(\delta_2 - \omega_i),$$

$\delta_i$  是  $c + \omega_i b + \omega_i^2 a = 0$ . 由韦达定理有:

$$\delta_1 + \delta_2 = -\frac{b}{a}, \quad \delta_1 \delta_2 = \frac{c}{a}.$$

因为  $\omega_i (i = 1, 2, \dots, n)$  满足方程 (2), 有  $x^n - rx - r = \prod_{i=1}^n (x - \omega_i)$ ,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (c + \omega_i b + \omega_i^2 a) &= a^n (\delta_1^n - r\delta_1 - r) (\delta_2^n - r\delta_2 - r) \\ &= c^n - r(ca^{n-1}\Delta_{n-1} + a^n\Delta_n) + r^2(ca^{n-1} + a^n - ba^{n-1}), \end{aligned}$$

其中  $\Delta_n = \delta_1^n + \delta_2^n, \Delta_{n-1} = \delta_1^{n-1} + \delta_2^{n-1}$ .

**引理 2.3** 设  $\hat{A} = \text{RLPrFrLcirc}_r \text{fr}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$  是一个 RLPrFrL 循环矩阵,  $\hat{B} = \text{RFPrLrRcirc}_r \text{fr}(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$  是一个 RFPrLrR 循环矩阵. 那么  $\hat{A} = \hat{B}\hat{I}_n$ , 这里

$$\hat{I}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

**证明** 很容易验证:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & ra_1 + a_n & ra_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & ra_1 + a_n & \cdots & ra_{n-2} + a_{n-3} & ra_{n-2} \\ ra_1 + T_n & ra_2 + ra_1 & \cdots & ra_{n-1} + ra_{n-2} & ra_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ ra_1 & a_n + ra_1 & \cdots & a_3 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ra_{n-2} & ra_{n-3} + ra_{n-2} & \cdots & a_n + ra_1 & a_{n-1} \\ ra_{n-1} & ra_{n-2} + ra_{n-1} & \cdots & ra_1 + ra_2 & a_n + ra_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot n \times n$$

其中

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ ra_1 & a_n + ra_1 & \cdots & a_3 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ra_{n-2} & ra_{n-3} + ra_{n-2} & \cdots & a_n + ra_1 & a_{n-1} \\ ra_{n-1} & ra_{n-2} + ra_{n-1} & \cdots & ra_1 + ra_2 & a_n + ra_1 \end{pmatrix}.$$

进一步, 可得

$$\det \hat{A} = \det \hat{B} \det \hat{I}.$$

### 3 主要结果

先考虑第一类切比雪夫多项式  $T_n$  的关于行首加  $r$  尾  $r$  右循环矩阵, 行尾加  $r$  首  $r$  左循环矩阵的行列式, 主要结论如下:

**定理 3.1** 如果  $C = \text{RFPRLRCirc}_r(T_1, T_2, \dots, T_n)$ , 那么

$$\det C = \frac{(x - rT_{n+1}(x))^n - r^n(x - rT_{n+1}(x))T_n^{n-1}(x)\Delta_{n-1}}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(x+1)} - \frac{r^{n+1}T_n^n(x)\Delta_n - r^{n+1}(x+1)T_n^{n-1}(x)}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(x+1)},$$

其中  $\Delta_n = \delta_1^n + \delta_2^n$ .

**推论 3.1** 如果  $D = \text{RFP}r\text{LrRCirc}_r\text{fr}(T_n, T_{n-1}, \dots, T_1)$ , 那么

$$\det D = \frac{(T_n(x) - r)^n - x^{n-1}r^n(T_n(x) - r)\Delta_{n-1}}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(1+x)} - \frac{x^n r^{n+1}\Delta_n - x^{n-1}r^{n+1}(T_n(x) + T_{n+1}(x))}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(1+x)},$$

其中  $\Delta_n = \delta_1^n + \delta_2^n$ .

**定理 3.2** 如果  $E = \text{RLPrFrLCirc}_r\text{fr}(T_1, T_2, \dots, T_n)$ , 那么可以得到

$$\det E = \left[ \frac{(T_n(x) - r)^n - x^{n-1}r^n(T_n(x) - r)\Delta_{n-1}}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(1+x)} - \frac{x^n r^{n+1}\Delta_n - x^{n-1}r^{n+1}(T_n(x) + T_{n+1}(x))}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(1+x)} \right] (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

其中  $\Delta_n = \delta_1^n + \delta_2^n$ .

本文再考虑第二类切比雪夫多项式  $U_n$  的关于行首加  $r$  尾  $r$  右循环矩阵和行尾加  $r$  首  $r$  左循环矩阵的行列式, 相关结论如下:

**定理 3.3** 如果  $F = \text{RFP}r\text{LrRCirc}_r\text{fr}(U_1, U_2, \dots, U_n)$ , 那么

$$\det F = \frac{(2x - rU_{n+1}(x))^n - r^n(2x - rU_{n+1}(x))U_n^{n-1}(x)\Delta_{n-1}}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(x+1)} - \frac{r^{n+1}U_n^n(x)\Delta_n - r^{n+1}(2x+1)U_n^{n-1}(x)}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(x+1)},$$

其中  $\Delta_n = \delta_1^n + \delta_2^n$ .

**推论 3.3** 如果  $G = \text{RFP}r\text{LrRCirc}_r\text{fr}(U_n, U_{n-1}, \dots, U_1)$ , 那么

$$\det G = \frac{(U_n(x) - r)^n - 2^{n-1}r^n x^{n-1}(U_n(x) - r)}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(x+1)} - \frac{2^n x^n r^{n+1}\Delta_n - 2^{n-1}x^{n-1}r^{n+1}(U_n(x) + U_{n+1}(x))}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(x+1)},$$

其中  $\Delta_n = \delta_1^n + \delta_2^n$ .

**定理 3.4** 如果  $H = \text{RLPrFrLCirc}_r\text{fr}(U_1, U_2, \dots, U_n)$ , 那么可以得到

$$\det H = \left[ \frac{(U_n(x) - r)^n - 2^{n-1}r^n x^{n-1}(U_n(x) - r)}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(x+1)} - \frac{2^n x^n r^{n+1}\Delta_n - 2^{n-1}x^{n-1}r^{n+1}(U_n(x) + U_{n+1}(x))}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(x+1)} \right] (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

其中  $\Delta_n = \delta_1^n + \delta_2^n$ .

先考虑对第一类切比雪夫多项式  $T_n$  的关于行首加  $r$  尾  $r$  右循环矩阵和行尾加  $r$  首  $r$  左循环矩阵的行列式的解法.

#### 4 定理 3.1 的证明

**证明** 矩阵  $C = \text{RFP}r\text{LrRCirc}_r\text{fr}(T_1, T_2, \dots, T_n)$  表示为:

$$C = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & \dots & T_{n-1} & T_n \\ rT_n & T_1 + rT_n & \dots & T_{n-2} & T_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ rT_3 & T_4 + rT_3 & \dots & T_1 + rT_n & T_2 \\ rT_2 & rT_3 + rT_2 & \dots & T_n + rT_{n-1} & T_1 + rT_n \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

利用引理 2.1, 矩阵  $C$  的行列式是

$$\begin{aligned} \det C &= \prod_{i=1}^n (T_1 + T_2 \omega_i + \dots + T_n \omega_i^{n-1}) \\ &= \prod_{i=1}^n \left( \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \omega_i + \dots + \frac{\alpha^n + \beta^n}{2} \omega_i^{n-1} \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta + \alpha^2 \omega_i + \beta^2 \omega_i + \dots + \alpha^n \omega_i^{n-1} + \beta^n \omega_i^{n-1}) \\ &= \frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\alpha(1 - \alpha^n \omega_i^n)}{1 - \alpha \omega_i} + \frac{\beta(1 - \beta^n \omega_i^n)}{1 - \beta \omega_i} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{(x - rT_{n+1}) - (1 - rT_n + rT_{n+1})\omega_i + rT_n \omega_i^2}{1 - 2x\omega_i + \omega_i^2}. \end{aligned}$$

再通过引理 2.2, 可以得到

$$\det C = \frac{(x - rT_{n+1}(x))^n - r^n(x - rT_{n+1}(x))T_n^{n-1}(x)\Delta_{n-1}}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(x+1)} - \frac{r^{n+1}T_n^n(x)\Delta_n - r^{n+1}(x+1)T_n^{n-1}(x)}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(x+1)},$$

其中  $\Delta_n = \delta_1^n + \delta_2^n$ .

同理可以得到推论 3.1. 对  $D = \text{RFP}r\text{LrRCirc}_r\text{fr}(T_n, T_{n-1}, \dots, T_1)$

$$D = \begin{pmatrix} T_n & T_{n-1} & \dots & T_2 & T_1 \\ rT_1 & T_n + rT_1 & \dots & T_3 & T_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ rT_{n-2} & rT_{n-3} + rT_{n-2} & \dots & T_n + rT_1 & T_{n-1} \\ rT_{n-1} & rT_{n-2} + rT_{n-1} & \dots & rT_1 + rT_2 & T_n + rT_1 \end{pmatrix}$$



与定理 3.1 的证明类似可得

$$\det D = \frac{(T_n(x) - r)^n - x^{n-1}r^n(T_n(x) - r)\Delta_{n-1}}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(1+x)} - \frac{x^n r^{n+1} \Delta_n - x^{n-1} r^{n+1} (T_n(x) + T_{n+1}(x))}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(1+x)},$$

其中

$$\Delta_n = \delta_1^n + \delta_2^n.$$

## 5 定理 3.2 的证明

**证明** 矩阵

$$E = \text{RLPrFrLCirc}_r \text{fr}(T_1, T_2, \dots, T_n)$$

可以表示为:

$$E = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & \dots & T_{n-1} & T_n \\ T_2 & T_3 & \dots & rT_1 + T_n & rT_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ T_{n-1} & rT_1 + T_n & \dots & rT_{n-2} + T_{n-3} & rT_{n-2} \\ rT_1 + T_n & rT_2 + rT_1 & \dots & rT_{n-1} + rT_{n-2} & rT_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} T_n & T_{n-1} & \dots & T_2 & T_1 \\ rT_1 & T_n + rT_1 & \dots & T_3 & T_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ rT_{n-2} & rT_{n-3} + rT_{n-2} & \dots & T_n + rT_1 & T_{n-1} \\ rT_{n-1} & rT_{n-2} + rT_{n-1} & \dots & rT_1 + rT_2 & T_n + rT_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{I}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

并且

$$\det E = \det D \det \hat{I}_n,$$

这里

$$D = \text{RFP}r\text{L}r\text{RCirc}_r\text{fr}(T_n, T_{n-1}, \dots, T_1),$$

并且它的行列式由推论 3.1 知,

$$\det D = \frac{(T_n(x) - r)^n - x^{n-1}r^n(T_n(x) - r)\Delta_{n-1}}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(1+x)} - \frac{x^n r^{n+1} \Delta_n - x^{n-1} r^{n+1} (T_n(x) + T_{n+1}(x))}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(1+x)}.$$

$$\det \hat{I}_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

因此,

$$\det E = \det D \det \Gamma$$

$$= \left[ \frac{(T_n(x) - r)^n - x^{n-1}r^n(T_n(x) - r)\Delta_{n-1}}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(1+x)} - \frac{x^n r^{n+1} \Delta_n - x^{n-1} r^{n+1} (T_n(x) + T_{n+1}(x))}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(1+x)} \right] (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

其中

$$\Delta_n = \delta_1^n + \delta_2^n.$$

现在考虑第二类切比雪夫多项式  $U_n$  的关于行首加  $r$  尾  $r$  右循环矩阵和行尾加  $r$  首  $r$  左循环矩阵的行列式的解法.

## 6 定理 3.3 的证明

**证明** 矩阵

$$F = \text{RFP}r\text{L}r\text{RCirc}_r\text{fr}(U_1, U_2, \dots, U_n)$$

可以表示为

$$F = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_{n-1} & U_n \\ rU_n & U_1 + rU_n & \dots & U_{n-2} & U_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ rU_3 & U_4 + rU_3 & \dots & U_1 + rU_n & U_2 \\ rU_2 & rU_3 + rU_2 & \dots & U_n + rU_{n-1} & U_1 + rU_n \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

利用引理 2.1,  $F$  的行列式是

$$\begin{aligned}\det F &= \prod_{i=1}^n (U_1 + U_2 \omega_i + \cdots + U_n \omega_i^{n-1}) \\ &= \prod_{i=1}^n \left( \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} \omega_i + \cdots + \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \omega_i^{n-1} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\frac{\alpha^2(1-\alpha^n \omega_i^n)}{1-\alpha \omega_i} - \frac{\beta^2(1-\beta^n \omega_i^n)}{1-\beta \omega_i}}{\alpha - \beta} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{(2x - rU_{n+1}(x)) - (rU_{n+1}(x) - rU_n(x) + 1)\omega_i + rU_n(x)\omega_i^2}{1 - 2x\omega_i + \omega_i^2}.\end{aligned}$$

再由引理 2.2, 可以得到

$$\begin{aligned}\det F &= \frac{(2x - rU_{n+1}(x))^n - r^n U_n^{n-1}(x)(2x - rU_{n+1}(x))\Delta_{n-1}}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(x+1)} - \\ &\quad \frac{r^{n+1}U_n^n(x)\Delta_n - r^{n+1}(2x+1)U_n^{n-1}(x)}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(x+1)},\end{aligned}$$

其中

$$\Delta_n = \delta_1^n + \delta_2^n.$$

这样就证明了定理 3.3. 同理, 可以得到推论 3.3. 对矩阵

$$G = \text{RFP}r\text{LrRCirc}_r\text{fr}(U_n, U_{n-1}, \cdots, U_1),$$

$$G = \begin{pmatrix} U_n & U_{n-1} & \cdots & U_2 & U_1 \\ rU_1 & U_n + rU_1 & \cdots & U_3 & U_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ rU_{n-2} & rU_{n-3} + rU_{n-2} & \cdots & U_n + rU_1 & U_{n-1} \\ rU_{n-1} & rU_{n-2} + rU_{n-1} & \cdots & rU_1 + rU_2 & U_n + rU_1 \end{pmatrix}.$$

利用定理 3.3, 可以得到

$$\begin{aligned}\det G &= \frac{(U_n(x) - r)^n - 2^{n-1}r^n x^{n-1}(U_n(x) - r)}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(x+1)} - \\ &\quad \frac{2^n x^n r^{n+1} \Delta_n - 2^{n-1} x^{n-1} r^{n+1}(U_n(x) + U_{n+1}(x))}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(x+1)},\end{aligned}$$

其中  $\Delta_n = \delta_1^n + \delta_2^n$ .

## 7 定理 3.4 的证明

**证明** 矩阵  $H = \text{RLPrFrLCirc}_r \text{fr}(U_1, U_2, \dots, U_n)$  可以表示为:

$$H = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_{n-1} & U_n \\ U_2 & U_3 & \dots & rU_1 + U_n & rU_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ U_{n-1} & rU_1 + U_n & \dots & rU_{n-2} + U_{n-3} & rU_{n-2} \\ rU_1 + U_n & rU_2 + rU_1 & \dots & rU_{n-1} + rU_{n-2} & rU_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} U_n & U_{n-1} & \dots & U_2 & U_1 \\ rU_1 & U_n + rU_1 & \dots & U_3 & U_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ rU_{n-2} & rU_{n-3} + rU_{n-2} & \dots & U_n + rU_1 & U_{n-1} \\ rU_{n-1} & rU_{n-2} + rU_{n-1} & \dots & rU_1 + rU_2 & U_n + rU_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

并且  $\det H = \det G \det \hat{I}_n$ , 这里  $G = \text{RFPRLrRCirc}_r \text{fr}(U_n, U_{n-1}, \dots, U_1)$ , 它的行列式在推论 3.3 中可知,

$$\det G = \frac{(U_n(x) - r)^n - 2^{n-1} r^n x^{n-1} (U_n(x) - r)}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(x+1)} - \frac{2^n x^n r^{n+1} \Delta_n - 2^{n-1} x^{n-1} r^{n+1} (U_n(x) + U_{n+1}(x))}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(x+1)},$$

$$\det \hat{I}_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

因此, 如果

$$H = \text{RLPrFrLCirc}_r \text{fr}(U_1, U_2, \dots, U_n),$$

可以得到

$$\det H = \left[ \frac{(U_n(x) - r)^n - 2^{n-1} r^n x^{n-1} (U_n(x) - r)}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(x+1)} - \frac{2^n x^n r^{n+1} \Delta_n - 2^{n-1} x^{n-1} r^{n+1} (U_n(x) + U_{n+1}(x))}{1 - r(\Delta_{n-1} + \Delta_n) + 2r^2(x+1)} \right] (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

这样就证明了文章的所有结论. 基于这篇文章, 不难给出  $(p, q)$ -Chebyshev 多项式关于此类循环矩阵的行列式的显示表达式, 当  $p = 1, q = -1$  时, 即是切比雪夫多项式. 还可以给出广义 Fibonacci 多项式  $f(x, y)$  的关于此类矩阵的行列式, 当  $y = 1$  时, 即是 Fibonacci 多项式; 当  $x = y = 1$  时, 即是 Fibonacci 数列. 对 Fibonacci 多项式, 当  $x = 2$  时, 即是 Pell 数列.

## 参考文献

- [1] Davis P. Circulant Matrices [M]. New York: Wiley, 1979.
- [2] 江兆林, 周志伟. 循环矩阵 [M]. 成都: 成都科技大学出版社, 1999.
- [3] David C. Regular representations of semisimple algebras, separable field extensions, group characters, generalized circulants, and generalized cyclic codes [J]. Linear Algebra Application, 1995,218:147-183.
- [4] Jiang Zhaolin, Xu Zongben. Efficient algorithm for finding the inverse and group inverse of FLS  $r$ -circulant matrix [J]. Applied Mathematics and Computation, 2005,18(1/2):45-57.
- [5] Tian Zhiping. Fast Algorithms for Solving the Inverse Problem of  $Ax = b$  [J]. International Journal of Algebra, 2011,9:121-124.
- [6] Jiang Zhaolin. Fast Algorithms for Solving FLS  $r$ -Circulant Linear Systems [J]. 2012,2012:141-144.
- [7] Li Juan, Jiang Zhaolin, Shen Nuo. Explicit determinants of the Fibonacci RFPLR circulant and Lucas RFPLL circulant matrix [J]. Algebra Number Theory Application, 2013,28(2):167-179.
- [8] Jiang Zhaolin, Li Juan, Shen Nuo. On the explicit determinants of the RFPLR and RFPLL circulant matrices involving Pell numbers in information theory [J]. Information Computing and Applications, 2012,308:364-370.
- [9] Tian Zhiping. Fast algorithm for solving the first plus last circulant linear system [J]. Shandong University Natural, 2011,46(12):96-103.
- [10] Jiang Zhaolin, Shen Nuo, Li Juan. On the explicit determinants of the RFMLR and RLMFL circulant matrices involving Jacobsthal numbers in communication [J]. Wseas Transactions on Mathematics, 2013,12:42-53.
- [11] Tian Zhiping. Fast algorithms for solving the inverse problem of  $AX = b$  in four different families of patterned matrices [J]. Applied Mathematics and Computation, 2011,52:1-12.
- [12] Jaiswal. On determinants involving generalized Fibonacci numbers [J]. Fibonacci Quarterly, 1969,7:319-330.
- [13] Zhang Wenpeng. On Chebyshev polynomials and Fibonacci numbers [J]. Fibonacci Quarterly, 2001,35(3):424-428.

## Determinants of $\text{RFPrLrR}$ circulant matrices of the Chebyshev polynomials

Shi Baijuan

(College of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China)

**Abstract:** In this paper, two new kind of circulant matrices, i.e., the  $\text{RFPrLrR}$  circulant matrix and the  $\text{RLPrFrL}$  circulant matrix over the complex field  $\mathbb{C}$  are considered respectively. The determinants of  $\text{RFPrLrR}$  circulant matrices and  $\text{RLPrFrL}$  circulant matrices of the Chebyshev polynomials are given by using the inverse factorization of polynomial. The calculation problem of a class determinant involving Chebyshev Polynomials are solved by using the combinatorial method and algebraic manipulations.

**Key words:** Chebyshev polynomials,  $\text{RFPrLrR}$  circulant matrix,  $\text{RLPrFrL}$  circulant matrix, determinant

**2010 MSC:** 60B12