构造格点计数模型　证明一类组合等式

黄俊峰　袁方程

(湖北省大冶市第一中学，435100)

利用构造法证明组合等式，可以说是智者见智、仁者见仁，新思路、新方法层出不穷．这些方法构思新颖，从不同角度挖掘组合等式的内涵．本文将利用格点的有关知识给出组合等式的又一证明方法，望能给同学们提供一新思路．

在平面直角坐标系 xOy(如图 1)中，坐标为非负整数的点构成一个个边长为 1个单位小方格，从点 $(0,0)$ 开始，每步只走 1个单位，且每步只能选择沿 x轴或 y轴正方向，最终到达点 (m,n)．我们把按这样规定所经过的路线称为点 $(0,0)$到点 (m,n)的递增路径，以下简称路径．如图中已给出了一条点 $(0,0)$到点 (m,n)的路径．显然，由组合知识可得下面的基本结论：

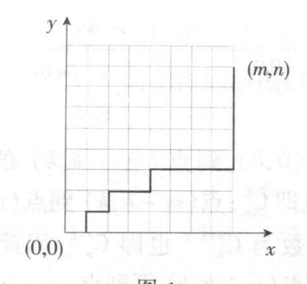

图 1

结论　点 $(0,0)$到点 (a,b)的路径数为 C_{a+b}^{a}.

证明　点 $(0,0)$到点 (a,b)的路径，需水平方向前进 a步，沿垂直方向前进 b步，从这 $a+b$步中，任取 a步沿水平方向，其中 b步沿垂直方向，这样的取法共有 C_{a+b}^{a}种，而每种取法对应着点 $(0,0)$到点 (a,b)的一条路径，反之，一条路径也对应着一种取法．故点 $(0,0)$到点 (a,b)的路径数为 C_{a+b}^{a}.

进一步有点 (m,n)到点 (a,b)(其中 $a>m$, $b>n$)的路径数为 $C_{a+b-m-n}^{a-m}$.

下面用以上结论给出几个组合等式的证明．

例 1　求证：$C_{a+b}^{a}=C_{a+b}^{b}$.

证明　点 $(0,0)$到点 (a,b)的路径数为 C_{a+b}^{a}，点 $(0,0)$到点 (b,a)的路径数为 C_{a+b}^{b}；又由对称性知：点 $(0,0)$到点 (a,b)的路径数与点 $(0,0)$到点 (b,a)的路径数相等．故 $C_{a+b}^{a}=C_{a+b}^{b}$.

例 2　求证：$C_{a+b}^{a}=C_{a+b-1}^{a-1}+C_{a+b-1}^{a}$.

证明　如图 2，现考查点 $(0,0)$到点 (a,b)的路径：

一方面，点 $(0,0)$到 (a,b)的路径数为 C_{a+b}^{a}.

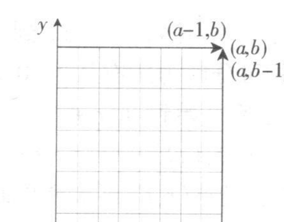

图 2

另一方面，点 $(0,0)$到点 (a,b)的路径可分解为点 $(0,0)$经点 $(a-1,b)$再到 (a,b)和点 $(0,0)$经点 $(a,b-1)$再到 (a,b)两种情形．显然由图可看出，点 $(0,0)$经点 $(a-1,b)$再到 (a,b)的路径数与点 $(0,0)$到点 $(a-1,b)$的路径数相等；点 $(0,0)$经 $(a,b-1)$再到 (a,b)的路径数与点 $(0,0)$到点 $(a,b-1)$的路径数相等，它们分别为 C_{a+b-1}^{a-1}和 C_{a+b-1}^{a}．故 $C_{a+b}^{a}=$

$C_{a+b-1}^{a-1}+C_{a+b-1}^{a}$.

这一等式的简化形式为 $C_n^m=C_{n-1}^{m-1}+C_{n-1}^{m}$.

例3 求证:

$$C_{n+r+1}^{r}=C_n^0+C_{n+1}^{1}+\cdots+C_{n+r}^{r}.$$

证明 如图3,点$(0,0)$到点$(r,n+1)$的路径数可分解为所有从点$(i,0)$垂直开始到点$(r,n+1)$的路径数之和(其中$i=0,1,2,\cdots,r$),而显然从点$(i,0)$垂直开始到点$(r,n+1)$的路径数与点$(i,1)$到点$(r,n+1)$的路径数相等(其中$i=0,1,2,\cdots,r$).点$(0,0)$到点$(r,n+1)$的路径数为C_{n+r+1}^{r},点$(i,1)$到点$(r,n+1)$的路径数为C_{n+r-i}^{r-i}(其中$i=0,1,2,\cdots,r$).

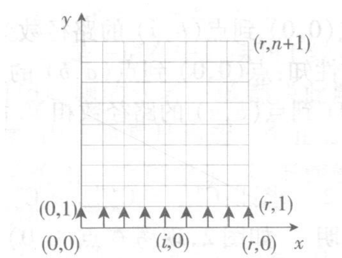

图3

综上所述,$C_{n+r+1}^{r}=C_n^0+C_{n+1}^{1}+\cdots+C_{n+r}^{r}$.

例4 求证:$C_{n+1}^{r+1}=C_r^r+C_{r+1}^{r}+\cdots+C_n^r$.

证明 如图4,点$(0,0)$到点$(r+1,n-r)$的路径可分解为所有从点$(0,0)$出发经点(r,i)再水平开始到点$(r+1,n-r)$的路径之和(其中$i=0,1,2,\cdots\cdots,n-r$),而显然,从点$(0,0)$出发经点(r,i)再水平开始到点$(r+1,n-r)$的路径数与点$(0,0)$到点(r,i)的路径数相等(其中$i=0,1,2,\cdots,n-r$).

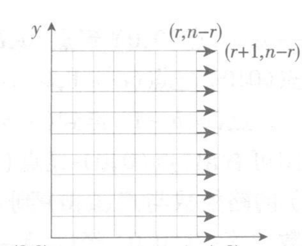

图4

而点$(0,0)$到点$(r+1,n-r)$的路径数为C_{n+1}^{r+1};点$(0,0)$到点(r,i)的路径数为C_{r+i}^{r}(其中$i=0,1,2,\cdots,n-r$).

综上所述,有$C_{n+1}^{r+1}=C_r^r+C_{r+1}^{r}+\cdots+C_n^r$.

例5 求证:$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$.

证明 所有从$(0,0)$点开始的n步路径一定终止在某个点$(k,n-k)$(其中$k=0,1,2,\cdots,n$),点$(0,0)$到点$(k,n-k)$的路径数为C_n^k(其中$k=0,1,2,\cdots,n$).

另一方面,n步路径中的每一步都有垂直、水平两种选择,故按乘法规则共有2^n种法.

综上所述,$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$.

例6 求证:$C_{m+n}^{r}=C_m^0C_n^r+C_m^1C_n^{r-1}+C_m^2C_n^{r-2}+\cdots+C_m^rC_n^0$.

证明 如图5,一方面,点$(0,0)$到点$(m+n-r,r)$的路径可分解为所有从点$(0,0)$出发经点$(m-k,k)$再到点$(m+n-r,r)$的路径之和(其中$k=0,1,2,\cdots,r$).

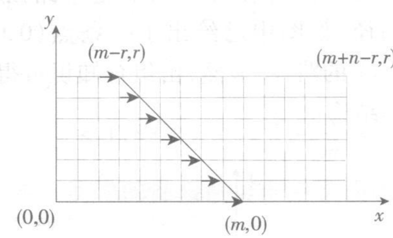

图5

点$(0,0)$到点$(m-k,k)$的路径数为C_m^{m-k},也即C_m^k;点$(m-k,k)$到点$(m+n-r,r)$的路径数为C_n^{n+k-r},也即C_n^{r-k},因此从点$(0,0)$出发经点$(m-k,k)$再到点$(m+n-r,r)$的路径数为$C_m^kC_n^{r-k}$(其中$k=0,1,2,\cdots,r$).故点$(0,0)$到点$(m+n-r,r)$的路径数为$C_m^0C_n^r+C_m^1C_n^{r-1}+C_m^2C_n^{r-2}+\cdots+C_m^rC_n^0$.

另一方面,点$(0,0)$到点$(m+n-r,r)$的路径数为C_{m+n}^{r}.

综上所述,$C_{m+n}^{r}=C_m^0C_n^r+C_m^1C_n^{r-1}+C_m^2C_n^{r-2}+\cdots+C_m^rC_n^0$.