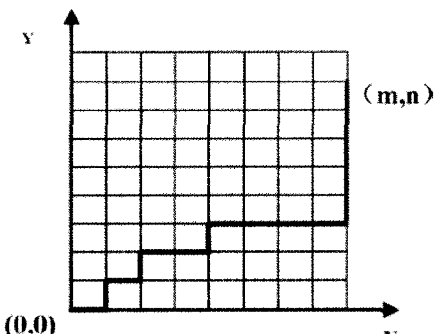
构造格点路径证明组合等式

吴存良

重庆市七中

利用构造法证明组合等式，可以说是智者见智、仁者见仁，新思路、新方法层出不穷。这些方法构思新颖，从不同角度挖掘组合等式的内涵。本文将利用格点的有关知识给出组合等式的又一证明方法，望能给同学们提供再一新思路。

定义：建立直角坐标系XOY（如图一），小方格的边长均为1个单位，从点（0,0）开始，每步只走1个单位，且每步只能选择延X轴或Y轴正方向，最终到达点（m,n）。我们把按这样规定所经过的路线，称为点（0，0）到点（m,n）的递增路径，以下简称路径.如图中已给出了一条点（0,0）到点（m,n）的路径。



（图一）

定理：点（0,0）到点（a,b）的路径数为C^{a}_{a+b}

证明：点（0,0）到点（a,b）的路径，需延水平方向前进a步，延垂直方向前进b步。从这（a+b）中，任取a步延水平方向，其余b步延垂直方向，这样的取法共有C^{a}_{a+b}种，而每种取法对应着点一条点（0,0）到点（a,b）的路径，反之,每条路径也对应着一种取法。故，点（0,0）到点（a,b）的路径数为C^{a}_{a+b}

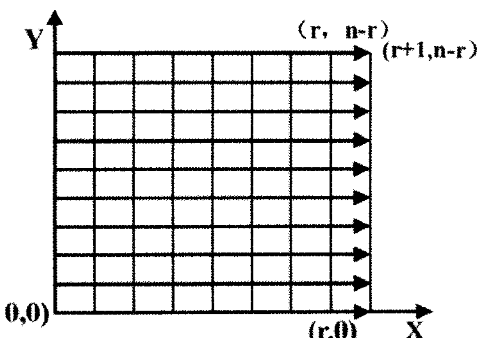
推论：点（m,n）到点（a,b）（其中a＞m，b＞n）的路径数为$C^{a-m}_{a+b-m-n}$

证明：平移原直角坐标系XOY至X´O´Y´,使原点移至点（m,n），则原坐标系的点（m,n）、（a,b）在新坐标系下的坐标分别为（0,0）、（a−m,b−n）。由定理知，在新坐标系下点（0,0）到点（a−m,b−n）路径数为$C^{a-m}_{a+b-m-n}$。显然平移坐系不改变路径数，故原坐标系下的点（m,n）到点（a,b）的路径数为$C^{a-m}_{a+b-m-n}$

应用举例：

例1：求证：$C^{r+1}_{n+1}=C^{r}_{r}+C^{r}_{r+1}+\cdots+C^{r}_{n}$

证明（如图二）：点（0,0）到点（r+1,n−r）的全部路径可分解为所有从点（0,0）出发经点（r,i）再水平开始到点（r+1,n−r）的路径之和（其中i=0,1,2,⋯,n−r）,而显然，从点（0,0）出发经点（r,i）再水平开始到点（r+1,n−r）的路径数与点（0,0）到点（r,i）的路径数相等（其中i=0,1,2,⋯,n−r）。



（图二）

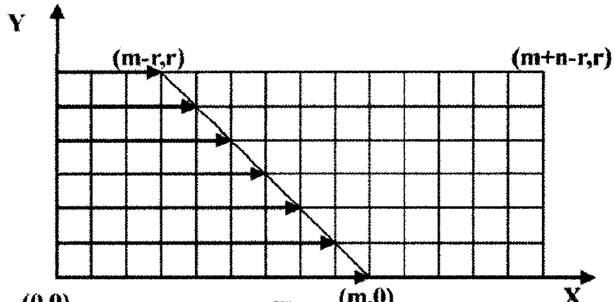
由定理：点（0,0）到点（r+1,n−r）的路径数为C^{r+1}_{n+1}；点（0,0）到点（r,i）的路径数为C^{r}_{r+i}（其中i=0,1,2,⋯,n−r）

综上所述，有$C^{r+1}_{n+1}=C^{r}_{r}+C^{r}_{r+1}+\dots+C^{r}_{n}$

例2：求证：

$C^{r}_{m+n}=C^{0}_{m}C^{r}_{n}+C^{1}_{m}C^{r-1}_{n}+C^{2}_{m}C^{r-2}_{n}+\cdots+C^{r}_{m}C^{0}_{n}$

证明（如图三）：



（图三）

一方面，从点（0,0）到点（m+n−r,r）的全部路径可分解为所有从点（0,0）出发经点(m−k，k)再到点(m+n−r,r)的路径之和（其中k=0,1,2,⋯,r）由定理，从点（0,0）到点(m−k,k)的路径数为C^{m-k}_{m}，也即C^{k}_{m}；从点(m−k,k)到点(m+n−r,r)的路径数为C^{n+k-r}_{n}，也即C^{r-k}_{n}，

因此从点（0,0）出发经点(m−k,k) 再到点(m+n−r,r)的路径数为$C^{k}_{m}C^{r-k}_{n}$（其中k=0,1,2,⋯,r）

故，点（0,0）到点（m+n−r,r）的路径数为

$C^{0}_{m}C^{r}_{n}+C^{1}_{m}C^{r-1}_{n}+C^{2}_{m}C^{r-2}_{n}+\cdots+C^{r}_{m}C^{0}_{n}$

另一方面,由定理直截得出点（0,0）到点（m+n−r,r）的路径数为C^{m+n-r}_{m+n}，也即C^{r}_{m+n}

综上所述，

$C^{r}_{m+n}=C^{0}_{m}C^{r}_{n}+C^{1}_{m}C^{r-1}_{n}+C^{2}_{m}C^{r-2}_{n}+\cdots+C^{r}_{m}C^{0}_{n}$

小结：利用格点路径证明组合等式的一般步骤：

1.构造格点图；

2.根据待证等式选取相关的两点；

3.根据待证等式设计两种计算方法，使得其分别为待证等式两边的结果；

4.得出所证结论。

以下题目留给读者思考

1. 求证：$C^{a}_{a+b}=C^{b}_{a+b}$

2. 求证：$C^{a}_{a+b}=C^{a-1}_{a+b-1}+C^{a}_{a+b-1}$

3. 求证：$C^{r}_{n+r+1}=C^{0}_{n}+C^{1}_{n+1}+\cdots+C^{r}_{n+r}$

4. 求证：$C^{0}_{n}+C^{1}_{n}+C^{2}_{n}+\cdots+C^{n}_{n}=2^{n}$