反演变换的应用

任 悦
（天津师范大学数学科学学院 2015 级硕士研究生，300387）

中图分类号：O123.1 文献标识码：A 文章编号：1005－6416(2017)05－0006－05

（本讲适合高中）

反演变换是将几何图形按照某种法则转变成另一种几何图形的过程，其对于平面几何的研究有着重要的意义[1]. 在数学竞赛中，当涉及到多圆、多线的位置关系时，可考虑利用反演变换将题目转化得更加直观明了，便于求解.

1 知识介绍

1.1 定义

设在平面内给定点 O 和常数 $k(k\neq0)$，对于平面内任意一点 A，可确定点 A'，使得 A' 为直线 OA 上一点，且有向线段 OA 与 OA' 满足 $OA\cdot OA'=k$，称这种变换是以 O 为反演中心、k 为反演幂的反演变换（简称反演），称 A' 与 A 关于点 O 互为反演点.

1.2 性质

(1) 反演变换中相互对应的两个图形互为反演图形.

(2) 反演中心不存在反演点.

(3) 通过反演中心的任何直线均为该反演变换下的不变图形.

(4) 反演变换将任一条不通过反演中心 O 的直线变成一个通过反演中心 O 的圆，且该圆在点 O 的切线平行于此直线.

(5) 反演变换将任一个通过反演中心 O 的圆周变成一条不通过反演中心 O 的直线，且此直线平行于该圆过点 O 的切线.

(6) 反演变换将任一个不通过反演中心的圆周变成一个不通过反演中心的圆周.

(7) 反演变换具有保角性.

2 应用

一些多圆问题可直接利用反演变换转化，适当选取反演幂，结合反演变换的性质及圆的相关性质定理（如圆幂定理等）来求解.

例 1 已知平面上给定 $\odot O$ 及不在 $\odot O$ 上的一点 P，过 P 的两条动直线 l、l' 与 $\odot O$ 分别交于点 X 和 Y、X' 和 Y'. 证明：$\triangle PXY'$ 的外接圆、$\triangle PX'Y$ 的外接圆的连心线过一定点.[2]

（2013，罗马尼亚国家队选拔考试）

【分析】 由于 P 为两三角形的外接圆的公共点，且过 P 的两条直线均与 $\odot O$ 相交，则以点 P 为反演中心作反演变换. 利用圆幂定理推得结论.

证明 如图 1，设 $\triangle PXY'$ 的外接圆、$\triangle PX'Y$ 的外接圆分别为 $\odot O_1$、$\odot O_2$，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的第二个交点为 Q，$\odot O$ 的半径为 r，直线 PQ 与 $\odot O$ 交于点 P_1、P_2，XY' 与 $X'Y$ 交于点 R.

以点 P 为反演中心、OP^2-r^2 为反演幂作反演变换 h.

在 $\odot O$ 中，由割线定理得

$PX\cdot PY=PX'\cdot PY'=PP_2\cdot PP_1=OP^2-r^2$.

则 $X\xrightarrow{h}Y$，$X'\xrightarrow{h}Y'$.

故 $\odot O_1\xrightarrow{h}$ 直线 $X'Y$，$\odot O_2\xrightarrow{h}$ 直线 XY'.

又 Q 为 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的交点（异于点

收稿日期：2017－03－02

P)，则 $Q \xrightarrow{h}$ 直线 XY' 与 $X'Y$ 的交点 R.

从而，$PQ \cdot PR = OP^2 - r^2$.

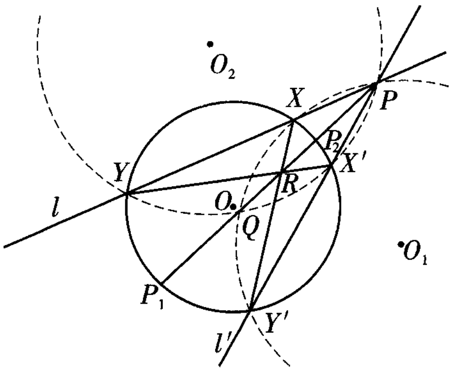

图 1

又⊙O 与⊙O_1、⊙O_1 与⊙O_2、⊙O_2 与⊙O 的根轴分别为 XY'、PQ、$X'Y$，据蒙日定理，知 XY'、PQ、$X'Y$ 三线共点，即点 R 在 PQ 上.

故 $PQ^2 - RQ^2 = (PQ - RQ)(PQ + RQ)$

$= PR(PQ + RQ)$

$= PR \cdot PQ + PR \cdot RQ$

$= OP^2 - r^2 + PR \cdot RQ$.　　①

在⊙O_2 中，由相交弦定理得

$PR \cdot RQ = RX' \cdot RY = r^2 - OR^2$.

代入式①得

$PQ^2 - RQ^2 = OP^2 - OR^2$.

由等差幂线定理得

$PR \perp OQ$，即 $PQ \perp OQ$.

由于 PQ 为 O_1O_2 的中垂线，于是，

$PQ \perp O_1O_2$.

从而，$OQ /\!/ O_1O_2$，且 O_1O_2 所在的直线与 $\triangle OPQ$ 的中位线重合.

因此，O_1O_2 过 OP 的中点（定点）.

例 2　在锐角$\triangle ABC$ 中，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D，E 为 CD 上任意一点，过 D 分别作 AC、AE、BE、BC 的垂线，垂足依次为 P、Q、R、S. 证明：P、Q、R、S 四点共圆或共线. [3]

（2010，德国数学竞赛）

【分析】题中出现许多垂线，可得许多四点共圆. 由反演变换的性质，知只有直线或圆能通过反演变换变为圆. 要证结论成立，应适当选取反演中心，可转为证明 P、Q、R、S 四点在反演变换下的像共圆. 由于 D 是多个圆的公共点，故以点 D 为反演中心进行变换，进而求解.

证明　如图 2.

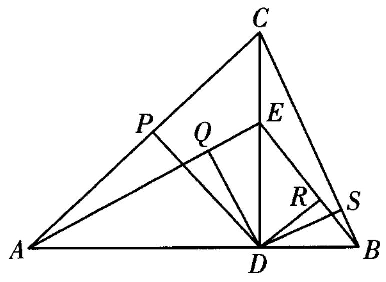

图 2

由 $AP \perp PD$，$AQ \perp QD$，知 A、P、Q、D 四点共圆，且以 AD 为直径，记该圆为 Γ_{AD}.

类似地，D、R、S、B 四点共圆，且以 BD 为直径，记该圆为 Γ_{BD}；C、P、D、S 四点共圆，且以 CD 为直径，记该圆为 Γ_{CD}；E、Q、D、R 四点共圆，且以 DE 为直径，记该圆为 Γ_{DE}.

又圆 Γ_{AD} 与圆 Γ_{BD} 的连心线为 AB，$AB \perp CD$

$\Rightarrow$ 圆 Γ_{AD} 与圆 Γ_{BD} 切于点 D，且以 CD 为公切线.

类似地，圆 Γ_{CD} 与圆 Γ_{DE} 切于点 D，且以 AB 为公切线.

以 D 为反演中心、r^2 为反演幂作反演变换 h.

由于圆 Γ_{AD}、Γ_{BD}、Γ_{CD}、Γ_{DE} 均过点 D，于是，对其作反演变换后均变为直线.

设 $\Gamma_{AD} \xrightarrow{h} l_{AD}$，$\Gamma_{BD} \xrightarrow{h} l_{BD}$，

$\Gamma_{CD} \xrightarrow{h} l_{CD}$，$\Gamma_{DE} \xrightarrow{h} l_{DE}$，

$R \xrightarrow{h} R'$，$S \xrightarrow{h} S'$，$P \xrightarrow{h} P'$，$Q \xrightarrow{h} Q'$.

由反演变换性质知

$l_{AD} /\!/ l_{BD} /\!/ CD$，$l_{DE} /\!/ l_{CD} /\!/ AB$.

由 P 为圆 Γ_{AD} 与圆 Γ_{CD} 的交点，知 P' 为 l_{AD} 与 l_{CD} 的交点.

类似地，Q'、R'、S' 分别为 l_{AD} 与 l_{DE}、l_{DE} 与 l_{BD}、l_{BD} 与 l_{CD} 的交点.

则四边形 $P'Q'R'S'$ 为矩形

$\Rightarrow$ 四边形 $P'Q'R'S'$ 有外接圆

$\Rightarrow$ P'、Q'、R'、S' 四点共圆.

由反演变换的性质，知 P、Q、R、S 四点共圆或共线（不讨论重合点的情形）.

当多圆问题与三角形的内心结合时，可考虑利用三角形内心的相关性质，先作反演变换再作对称变换，这样可减少反演变换下的新生成点的个数，对题目进一步简化求解.

例 3 已知非等腰 $\triangle ABC$ 的内心为 I，过 I 作 AI 的垂线与 AC、AB 分别交于点 B'、C'，点 B_1、C_1 分别在射线 BC、CB 上，使得 $AB=BB_1$，$AC=CC_1$. 若 $\triangle AB_1C'$ 的外接圆与 $\triangle AC_1B'$ 的外接圆的第二个交点为 T，证明：$\triangle ATI$ 的外心在直线 BC 上.[4]

（第 31 届伊朗国家队选拔考试）

【分析】 由于 A 为三圆的公共点，故可利用 A 为反演中心作反演变换. 为了减少反演变换后生成点的个数，可进一步作对称变换.

证明 记 $\triangle ABC$ 的三个内角为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$. 如图 3，不妨设 $\angle A > \angle C$.

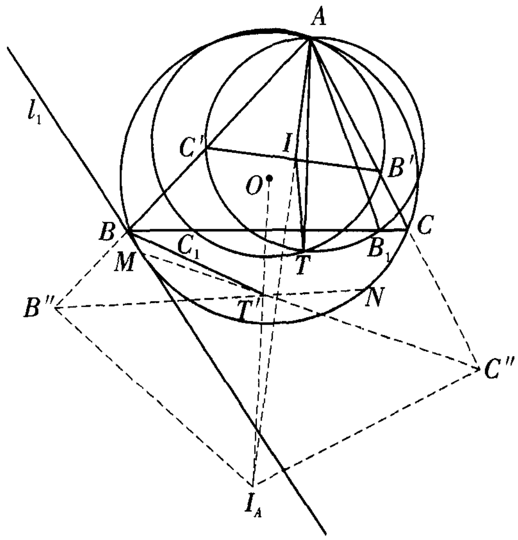

图 3

设复合变换 h：先以 A 为反演中心、$AB\cdot AC$ 为反演幂作反演变换，再以 AI 为对称轴作对称变换.

则 $B \xrightarrow{h} C$，$C \xrightarrow{h} B$，

$\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O \xrightarrow{h}$ 直线 BC.

设 $B' \xrightarrow{h} B''$，$C' \xrightarrow{h} C''$，I_A 为 $\triangle ABC$ 的顶点 A 所对旁切圆的圆心，$\odot I_A$ 为顶点 A 所对的旁切圆.

则 $I \xrightarrow{h} I_A$.

由 $AI \perp B'C'$，知 $AB' = AC'$.

故 $AB'\cdot AC'' = AC'\cdot AC''$

$= AB\cdot AC = AI\cdot AI_A$

$\Rightarrow$ B'、C''、I_A、I 四点共圆

$\Rightarrow \angle I_AC''B' = \angle AIB' = 90°$

$\Rightarrow$ C'' 为 $\odot I_A$ 与 AC 的切点.

类似地，B'' 为 $\odot I_A$ 与 AB 的切点.

设 $\odot O$ 的弧 $\overparen{ABC}$ 的中点为 M.

由 $\angle CAB_1 = \angle A - \angle BAB_1$

$= \angle A - \dfrac{180° - \angle B}{2} = \dfrac{\angle A - \angle C}{2}$，

$\angle BAM = \angle A - \angle CAM$

$= \angle A - \dfrac{\angle A + \angle C}{2} = \dfrac{\angle A - \angle C}{2}$，

则 $\angle CAB_1 = \angle BAM$.

因为点 B_1 在直线 BC 上，点 M 在 $\odot O$ 上，所以，$B_1 \xrightarrow{h} M$.

类似地，设 $\odot O$ 的弧 $\overparen{ACB}$ 的中点为 N. 则 $C_1 \xrightarrow{h} N$.

故 $\triangle AB_1C'$ 的外接圆 $\xrightarrow{h}$ 直线 MC''，

$\triangle AC_1B'$ 的外接圆 $\xrightarrow{h}$ 直线 NB''.

设 MC'' 与 NB'' 交于点 T'.

则 $T \xrightarrow{h} T'$.

过点 M 作 $\odot O$ 的切线 l_1，有 $l_1 /\!/ AC$. 于是，直线 MC'' 过 $\odot O$ 与 $\odot I_A$ 的内位似中心.

类似地，直线 NB'' 也过 $\odot O$ 与 $\odot I_A$ 的内位似中心.

因此，T' 为 $\odot O$ 与 $\odot I_A$ 的内位似中心.

从而，O、T'、I_A 三点共线.

于是，直线 I_AT' 与 $\odot O$ 直交.

又 $\triangle AIT$ 的外接圆 $\Gamma_0 \xrightarrow{h} I_AT'$，故圆 Γ_0 与 BC 直交

$\Rightarrow BC$ 过圆 Γ_0 的圆心

$\Rightarrow \triangle ATI$ 的外心在直线 BC 上.

例 4 已知 D 为 $\triangle ABC$ 边 BC 上的动点，$\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的内心分别为 I、I_1、I_2，$\triangle IAI_1$ 的外接圆、$\triangle IAI_2$ 的外接圆与 $\triangle ABC$ 的外接圆分别交于点 M、N. 证明：直线 MN 过一个定点.[4]

（第 31 届伊朗国家队选拔考试）

【分析】利用反演变换，使得变换后 MN 的像过一定点. 由于 A 为所有圆的公共点，故以 A 为反演中心，此时问题转化为 $\triangle AM'N'$ 的外接圆过某一定点.

证明 设 I_A 为 $\triangle ABC$ 的顶点 A 所对旁切圆的圆心. 设复合变换 h：先以 A 为反演中心、$AB\cdot AC$ 为反演幂作反演变换，再以 AI 为对称轴作对称变换.

则 $B\xrightarrow{h}C$，$C\xrightarrow{h}B$，$\odot O\xrightarrow{h}$直线 BC，$I\xrightarrow{h}I_A$.

如图 4，设 $\triangle IAI_1$ 的外接圆、$\triangle IAI_2$ 的外接圆分别为 $\odot O_1$、$\odot O_2$.

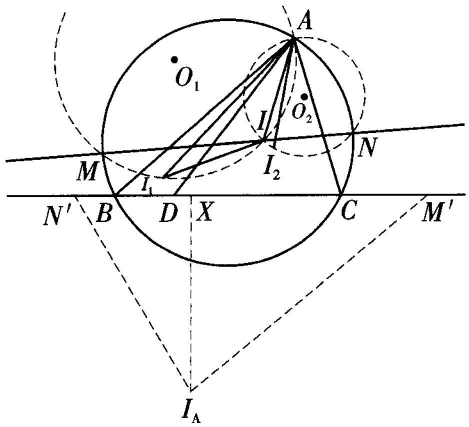

图 4

由 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 交于 A、I 两点，知 O_1O_2 为 AI 的中垂线. 则

$$\begin{aligned}&\angle AO_1O_2+\angle AO_2O_1=\angle AI_1I+\angle AI_2I\\&=\angle ABI_1+\angle BAI_1+\angle ACI_2+\angle CAI_2\\&=\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C+\frac{1}{2}\angle BAD+\frac{1}{2}\angle CAD\\&=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle B+\angle C)=90^\circ.\end{aligned}$$

故 $\angle O_1AO_2=90^\circ$，即 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 直交.

设 $M\xrightarrow{h}M'$、$N\xrightarrow{h}N'$.

由点 M、N 在 $\odot O$ 上，知点 M'、N' 在直线 BC 上.

故 $\odot O_1\xrightarrow{h}I_AM'$，$\odot O_2\xrightarrow{h}I_AN'$.

因为 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 直交，所以，由反演变换的性质，知 $I_AM'\perp I_AN'$.

设点 I_A 在 BC 上的投影为 X. 则 X 为定点.

在 $\triangle I_AM'N'$ 中，由射影定理得

$XM'\cdot XN'=XI_A^2$（定值）.

又 $MN\xrightarrow{h}\triangle AM'N'$ 的外接圆 Γ，于是，AX 为动圆 Γ 的公共根轴.

设 AX 与圆 Γ 交于点 Y.

由 $XA\cdot XY=XM'\cdot XN'=XI_A^2$，知 Y 为定点.

设 $Y_0\xrightarrow{h}Y$. 则 Y_0 也为定点，且 Y_0 在直线 MN 上，即直线 MN 过一定点（Y_0）.

当题目中仅出现多圆时，不妨利用多圆的根心，结合圆的相关性质定理考虑先作反演变换再作中心对称来求解.

例 5 如图 5，Γ_1、Γ_2、Γ_3 为三个圆，圆 Γ_1 与圆 Γ_2 交于点 A_1、A_2，圆 Γ_2 与圆 Γ_3 交于点 B_1、B_2，圆 Γ_1 与圆 Γ_3 交于点 C_1、C_2，O_1、O_2 分别为 $\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$ 的外心，S 为圆 Γ_1、Γ_2、Γ_3 的根心. 证明：S、O_1、O_2 三点共线.

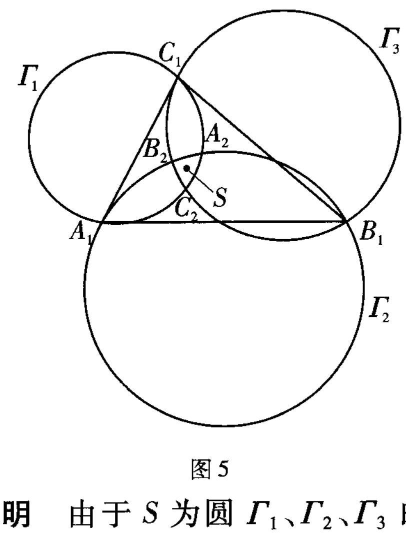

图 5

证明 由于 S 为圆 Γ_1、Γ_2、Γ_3 的根心，故 S 关于三圆等幂. 设 p 为 S 关于这三个圆的幂. 令复合变换 h：以 S 为反演中心、p 为反演幂作反演变换.

设 A_1' 为点 A_1 的反演点，圆 Γ_2 的半径为 r，圆心为 O. 则

$SA_1 \cdot SA_1' = p = OS^2 - r^2 = SA_1 \cdot SA_2$.

故 $SA_1' = SA_2$.

由 A_1'、S、A_1、A_2 四点共线，知 $A_1 \xrightarrow{h} A_2$.

类似地，$B_1 \xrightarrow{h} B_2$，$C_1 \xrightarrow{h} C_2$.

因此，$\triangle A_1B_1C_1$ 的外接圆 $\xrightarrow{h} \triangle A_2B_2C_2$ 的外接圆.

故 S、O_1、O_2 三点共线.

练 习 题

1. 已知 D、E 为 $\triangle ABC$ 中 AB 所在直线上的两点，满足 $AD = AC$，$BE = BC$，$\angle A$ 与 $\angle B$ 的平分线分别与对边交于点 P、Q，与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 M、N. 设 $\triangle MBE$、$\triangle AND$ 的外心分别为 U、V，AU 与 BV 交于点 X（X 不同于点 C）. 证明：$CX \perp PQ$. [5]

（2008，塞尔维亚数学奥林匹克）

提示 先以 A 为反演中心、$AB \cdot AC$ 为反演幂作反演变换；再由三角形相似及全等得出各点在反演变换下的像；最后，由垂心和外心在三角形的两条等角线上可得结论.

2. 已知四边形 $ABCD$ 既有外接圆（圆心为 O）又有内切圆，DA 与 CB 交于点 E，BA 与 CD 交于点 F，AC 与 BD 交于点 S，点 E'、F' 分别在边 AB、AD 上，满足

$$\angle BEE' = \angle AEE', \angle AFF' = \angle DFF',$$

M 为 $\odot O$ 弧 $\overparen{BAD}$ 的中点，点 X、Y 分别在直线 OE'、OF' 上，且 $\frac{XA}{XB} = \frac{EA}{EB}, \frac{YA}{YD} = \frac{FA}{FD}$. 证明：以 OS 为直径的圆、$\triangle OAM$ 的外接圆及 $\triangle OXY$ 的外接圆共轴. [6]

（第 32 届伊朗国家队选拔考试）

提示 以 O 为反演中心、四边形 $ABCD$ 的外接圆半径为反演幂作反演变换，则由圆幂定理可得到反演后的像. 此时，要证三圆共根轴，只需证明三线共点.

3. 如图 7，圆 Γ 与圆 Γ_1 交于点 A、B，圆 Γ_1 在点 A 处的切线与圆 Γ 交于点 C（不同于点 A），圆 Γ 在点 A 处的切线与圆 Γ_1 交于点 C_1（不同于点 A），且点 A、B 落在直线 CC_1 的两侧，圆 Γ_2 与圆 Γ、Γ_1 均外切，与直线 CC_1 相切，且与点 B 在直线 CC_1 的同侧. 证明：过点 A 所作的圆 Γ_2 的一条切线被圆 Γ、Γ_1 所截得的线段等长. [7]

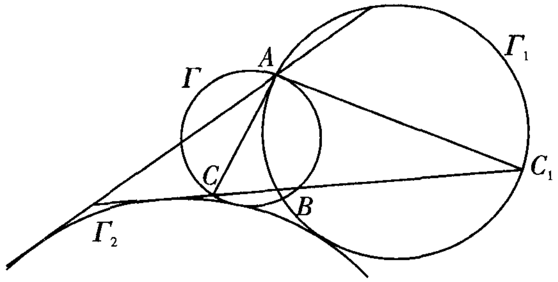

图 7

（第 66 届罗马尼亚国家队选拔考试）

提示 以 A 为反演中心作反演变换，由圆幂定理及九点圆的性质可证结论.

4. 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ，内切圆为 Γ'，外接圆半径为 R. 圆 Γ_A' 与 Γ 内切于点 A，且与圆 Γ' 外切，圆 Γ_A 与 Γ 内切于点 A，且与圆 Γ' 内切. 记圆 Γ_A'、Γ_A 的圆心分别为 P_A、Q_A. 类似地定义点 P_B、Q_B、P_C、Q_C. 证明：

$$8P_AQ_A \cdot P_BQ_B \cdot P_CQ_C \leqslant R^3.$$ [8]

（第 36 届美国数学奥林匹克）

提示 先利用均值不等式及面积公式，再以 A 为反演中心作反演变换，最后由圆幂定理推导可得结论.

参考文献：

[1] 赵生初，许正川，卢秀敏. 图形变换与中国初中几何课程的自然融合[J]. 数学教育学报，2012(4).

[2] 2013 罗马尼亚国家队选拔考试[J]. 中等数学，2014(增刊二).

[3] 2010 德国数学竞赛[J]. 中等数学，2012(增刊二).

[4] 第 31 届伊朗国家队选拔考试[J]. 中等数学，2015(增刊二).

[5] 2008 塞尔维亚数学奥林匹克[J]. 2009(增刊).

[6] 第 32 届伊朗国家队选拔考试[J]. 中等数学，2016(增刊二).

[7] 第 66 届罗马尼亚国家队选拔考试[J]. 中等数学，2016(增刊二).

[8] 第 36 届美国数学奥林匹克[J]. 中等数学，2008(增刊).