利用反演变换证明多圆问题

潘 铁

(天津市实验中学,300074)

(本讲适合高中)

在所要证明的平面几何问题中有多个圆出现时,不妨利用反演变换,将圆的问题转化为直线问题来研究.

1 知识简介

1.1 反演的定义

已知一圆 C,圆心为 O,半径为 r.如果 P 与 P' 在过圆心 O 的直线上,且 $OP\cdot OP'=r^2$,则称 P 与 P' 关于 O 互为反演.

1.2 反演的性质

定理1 除反演中心外,平面上的每一个点,都有唯一的反演点,且这种关系是对称的,即如果点 P 是 P' 的反演点,那么,P' 也是 P 的反演点.位于反演圆上的点,保持在原处;位于反演圆内的点,变换为圆外部的点;位于反演圆外的点,变换为圆内部的点.

定理2 设 P 为反演圆 $O(r)$ 外的一点.则它的反演点 P' 是 OP 与 P 到圆的切线的切点连线的交点.

定理1、2的证明略.

定理3 任意一条不过反演中心的直线,它的反形是经过反演中心的圆,反之亦然.特别地,过反演中心相交的圆,变为不过反演中心的相交直线.

证明:如图1,过 O 引直线 l 的垂线 OC,C 为垂足,C' 为 C 的反演点.在直线 l 上任取一点 M,M' 为 M 的反演点,则

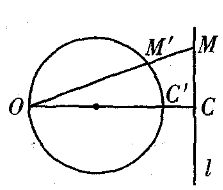

图1

$$OM\cdot OM'=OC\cdot OC'=r^2.$$

于是,M、M'、C'、C 四点共圆,

$\angle OM'C'=90°$.

由 M 的任意性可知,l 的反形是以 OC' 为直径的圆.

定理4 不过反演中心的圆,它的反形是一个圆,反演中心是这两个互为反形的圆的一个位似中心,任一对反演点是逆对应点.

证明:如图2,联结 OC_1 交 $\odot C_1$ 于点 B、A,则 AB 是 $\odot C_1$ 的直径.M 是 $\odot C_1$ 上任意一点.由反演定义知,

$$OA\cdot OA'=OB\cdot OB'=OM\cdot OM'=r^2.$$

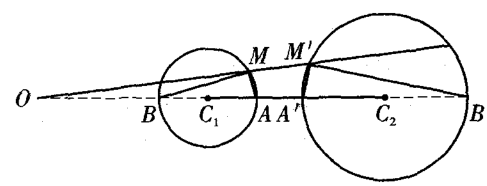

图2

则$\triangle OMB\backsim\triangle OB'M'$,

$\triangle OMA\backsim\triangle OA'M'$.

故$\angle A'M'B'$

$=180°-\angle M'A'B'-\angle M'B'A'$

$=180°-\angle M'MA-\angle OMB$

$=90°$.

由点 M 的任意性可知,$\odot C_1$ 的反形是以 $A'B'$ 为直径的圆.

定理5 两条直线或曲线的夹角在反演变换下是不变的(两条曲线之间的夹角是指它们的切线之间的夹角).

证明:仅就一条曲线和一条直线所成角的特殊情况进行证明.

如图3,设曲线 C 的反形 C' 交 OL 于反演点 P'.

收稿日期:2008-01-18

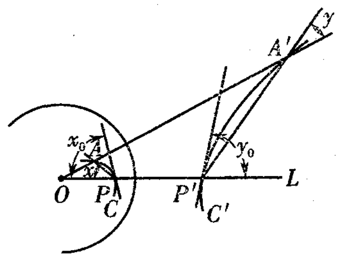

图3

下面证明:直线 OL 与曲线 C 在点 P 的切线之间的夹角 x_0 在数值上等于相应的角 y_0.

为此,选取曲线 C 上靠近 P 的任意一点 A,割线为 AP,A 的反演点 A',作割线 $A'P'$. 易得 $\triangle OPA \backsim \triangle OA'P'$. 故

$\angle OPA = \angle OA'P'$.

当 $A \to P$ 时,$x_0 = y_0$[1].

2 例题分析

2.1 在两圆相切时的应用

两圆相切时,通常以切点为反演中心,相切的两圆变为不过反演中心的两平行直线,过两圆切点的公切线也与之平行.

例1 两圆外切于点 A 且内切另一圆 $\odot T$ 于点 B、C. 令 D 是小圆内公切线割 $\odot T$ 的弦的中点. 证明:当点 B、C、D 不共线时,A 是 $\triangle BCD$ 的内心.

(2002,土耳其数学奥林匹克)

证明:以 A 为反演中心、r(r 为任意实数)为反演半径,作图4的反形得到图5.

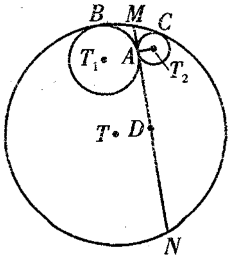

图4

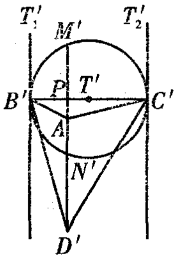

图5

其中,$\odot T_1$、$\odot T_2$ 成为两条平行直线 T_1'、T_2',$\odot T$ 成为与两条平行线相切的 $\odot T'$,切线 MN 反演后成为一条平行于直线 T_1' 的直线,点 D' 在 $\odot T'$ 外.

欲证 A 为 $\triangle BCD$ 的内心,只须证点 A 到 BC、CD、BD 的距离相等,且 A 在 $\triangle BCD$ 的内部,即 $\triangle AB'C'$、$\triangle AB'D'$、$\triangle AC'D'$ 的外接圆半径相等.

由正弦定理可知,只须证

$\angle AB'C' = \angle AD'C'$, $\angle AC'B' = \angle AD'B'$.

设 $M'N'$ 与 $B'C'$ 交于点 P. 由圆幂定理有

$$\left(\frac{AM+AN}{2}\right)^2 - AD^2 = AM \cdot AN,$$

即
$$\frac{1}{4}\left(\frac{AM'+AN'}{AM'\cdot AN'}\right)^2 - \left(\frac{1}{AD'}\right)^2 = \frac{1}{AM'\cdot AN'}.$$

于是,$\left(\frac{AM'-AN'}{2AM'\cdot AN'}\right)^2 = \left(\frac{1}{AD'}\right)^2$.

则 $AD' = \frac{2AM'\cdot AN'}{AM'-AN'} = \frac{AM'\cdot AN'}{AP}$.

所以,$AD' \cdot AP = AM' \cdot AN'$.

故 $AP \cdot D'P = AM' \cdot AN' + AP^2$

$= M'P \cdot N'P = B'P \cdot C'P$.

从而,$\frac{AP}{PB'} = \frac{PC'}{PD'}$,即

$\tan \angle AB'C' = \tan \angle AD'C'$.

又 $\angle AB'C'$、$\angle AD'C' \in (0, \frac{\pi}{2})$,则

$\angle AB'C' = \angle AD'C'$.

同理,$\angle AC'B' = \angle AD'B'$.

例2 在弓形中,内接一对相切的圆,对每一对相切的圆,通过它们的切点引公切线. 证明:所有的切线通过一个点.

证明:如图6,设 P 是两圆 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的切点. 作以 P 为反演中心的反演变换,于是,在点 P 处相切的两圆反形为一对平行直线 $l_1 /\!/ l_2$,而和它们相切的弦和弧,变为 $\overset{\frown}{A'L'B'}$ 和 $\overset{\frown}{A'K'B'}$,且 $\overset{\frown}{A'L'B'} = \overset{\frown}{A'K'B'}$,公切线 KL 变为 $K'L'$,且与 l_1、l_2 平行(如图7).

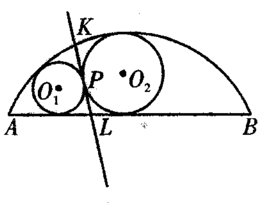

图6

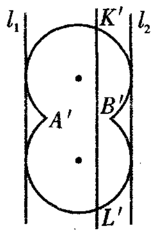

图7

所以，直线 $A'B'$ 垂直平分 $K'L'$．换言之，过点 A、P、B 的弧平分弓形角 A、B 且垂直直线 KL．然而，恰存在一个过点 A、B 的圆，平分 $\angle A$、$\angle B$（它的中心 O 是从点 A、B 分别向 $\angle A$、$\angle B$ 的平分线引的垂线的交点），直线 KL 垂直这个圆，因此，通过它的中心．

于是，条件中所有直线都通过点 O．

2.2 在两圆相交时的应用

两圆相交时，通常以其中一个交点为反演中心，则两圆反形为两条相交的直线，交点为两圆的另一个交点的反演点．

例 3 如图 8，Q 是以 AB 为直径的圆上的一点，$Q \neq A$、B，Q 在 AB 上的投影为 H．以 Q 为圆心、QH 为半径的圆与以 AB 为直径的圆交于点 C、D．证明：CD 平分线段 QH．

（2006，土耳其国家队选拔考试）

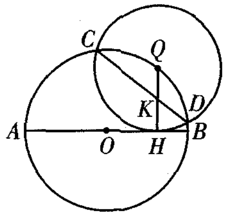

图 8

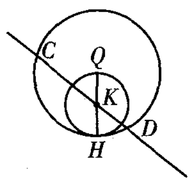

图 9

证明：作以 Q 为反演中心、$\odot Q$ 为反演圆的反演变换．则 $\odot O$ 反演为直线 CD，AB 反演为以 QH 为直径且与 $\odot Q$ 内切的圆（如图 9）．

因为 AB 是 $\odot O$ 的直径，所以，AB 与 $\odot O$ 正交．

由反演的保角性知，CD 与以 QH 为直径的圆正交，故 CD 平分线段 QH．

例 4 如图 10，在等腰 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 90°$，$AB = 1$，D 为 BC 的中点，E、F 为边 BC 上另外两点．M 为 $\triangle ADE$ 的外接圆和 $\triangle ABF$ 的外接圆的另一个交点，N 为直线 AF 与 $\triangle ACE$ 的外接圆的另一个交点，P 为直线 AD 与 $\triangle AMN$ 的外接圆的另一个交点．求 AP 的长．

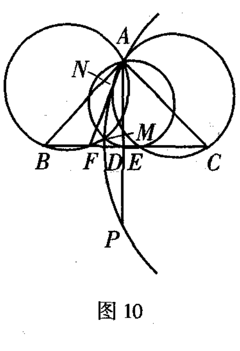

图 10

（2003，中国国家集训队测试题）

证明：以 A 为反演中心、$r = 1$ 为反演半径作反演变换．在反演变换下，用 X' 表示点 X 的像．

由反演变换的性质得

B、F、D、E、C 共线

$\Leftrightarrow A$、B'、F'、D'、E'、C' 共圆；

M 是 $\triangle ADE$ 的外接圆和 $\triangle ABF$ 的外接圆的另一交点

$\Leftrightarrow M'$ 是 $D'E'$ 与 $B'F'$ 的交点；

N 是直线 AF 与 $\triangle ACE$ 的外接圆的另一个交点

$\Leftrightarrow N'$ 是 AF' 与 $C'E'$ 的交点；

P 是直线 AD 与 $\triangle AMN$ 的外接圆的另一个交点

$\Leftrightarrow P'$ 是 AD' 与 $M'N'$ 的交点．

如图 11，设 $B'C'$ 交 AD' 于 O'．对圆内接六边形 $AF'B'C'E'D'$，由帕斯卡定理知，AF' 与 $C'E'$ 的交点、$D'E'$ 与 $B'F'$ 的交点、AD' 与 $B'C'$ 的交点三点共线，即 M'、N'、O' 三点共线．

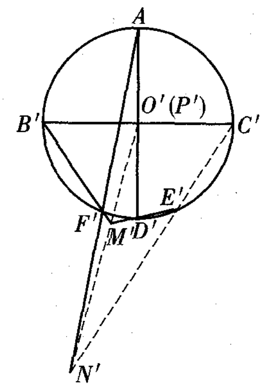

图 11

又 P' 是 $M'N'$ 与 AD' 的交点，则 $P' = O'$，即 P' 在直线 $B'C'$ 上．由反演的性质知，A、B、P、C 四点共圆．于是，

$$AD \cdot DP = BD \cdot DC$$

$$\Rightarrow AD = BD = DC = DP = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以，$AP = \sqrt{2}$．

2.3 巧设反演幂

除了选择恰当的点作反演点外，反演幂选择得是否巧妙，也决定了反演后的图形是

否简洁,证明是否"巧".

例 5 如图 12,四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,对角线 AC 交 BD 于 P.设 $\triangle ABP$、$\triangle BCP$、$\triangle CDP$、$\triangle DAP$ 的外接圆圆心分别为 O_1、O_2、O_3、O_4.求证:OP、O_1O_3、O_2O_4 三线共点.

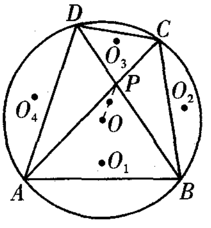

图 12

证明:作以 P 为反演中心、P 关于 $\odot O$ 的幂为反演幂的反演变换.则 $\odot O$ 反演为本身,$\odot O_i$($i=1,2,3,4$)反演为四边形 $ABCD$ 各边所在的直线,过点 P 的直线也反演为本身.

由于直线 PO_2 与 $\odot O_2$ 正交,因此,它们的反形也正交,即 $PO_2 \perp AD$.

又易知 $O_4O \perp AD$,则 $PO_2 // O_4O$.

同理,$PO_4 // O_2O$.

因此,四边形 PO_2OO_4 为平行四边形,PO 与 O_2O_4 互相平分.

同理,PO 与 O_1O_3 互相平分.

故 PO、O_1O_3、O_2O_4 交于 PO 的中点[2].

例 6 如图 13,H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,P 是 $\triangle ABC$ 内任意一点,由 H 向 PA、PB、PC 引垂线 HL、HM、HN,与 BC、CA、BA 的延长线交于 X、Y、Z.求证:X、Y、Z 三点共线.

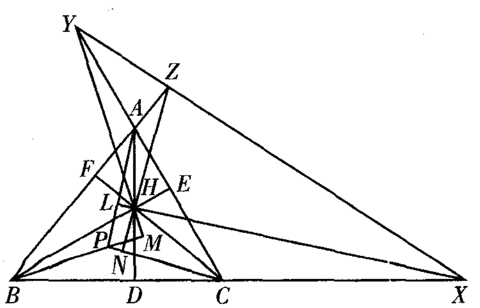

图 13

证明:设 $\triangle ABC$ 的高线分别为 AD、BE、CF,垂足为 D、E、F.于是,

$HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF$.

又 A、L、D、X 四点共圆,则

$HL \cdot HX = HA \cdot HD$.

同理,$HM \cdot HY = HB \cdot HE$,

$HN \cdot HZ = HC \cdot HF$.

作以 H 为反演中心、$k = HL \cdot HX$ 为反演幂的反演变换,则 L 与 X、N 与 Z、M 与 Y 均互为反演点.

又 L、P、N、H,L、P、M、H 分别四点共圆,所以,X、Y、Z 三点共线.

例 7 如图 14,在线段 AB 上取点 C,以线段 AC、BC、AB 为直径作圆,过点 C 引垂直于 AB 的直线,构成曲边 $\triangle ACD$、$\triangle BCD$,其内切圆分别为 $\odot O_1$、$\odot O_2$.求证:这两个圆的半径相等.

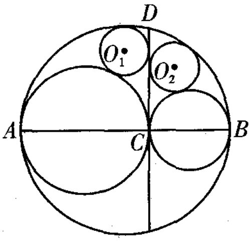

图 14

证明:设 $AC = 2r_1$,$BC = 2r_2$.则

$AB = 2(r_1 + r_2)$.

下面利用反演计算 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径.

作以 C 为反演中心、$k = AC \cdot BC = 4r_1r_2$ 为反演幂的反演变换(如图 15),则 AB、AC、BC 分别反演为 $A'B'$、$A'C$、$B'C$,且 $A'C = 2r_2$,$B'C = 2r_1$,以 AC 为直径的圆反演为直线 $A'E$.同样,以 BC 为直径的圆反演为直线 $B'F$,直线 CD 仍位于原处,且 $A'E$、$B'F$、CD 均垂直于 $A'B'$,以 AB 为直径的圆反演为以 $A'B'$ 为直径的圆.

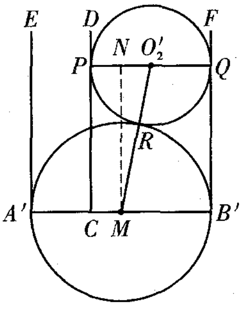

图 15

设 $A'B'$ 的中点为 M,$\odot O_2$ 反演为 $\odot O_2'$,且切 CD 于点 P,切 $B'F$ 于点 Q,切以 $A'B'$ 为直径的圆于点 R.则 $2r_2' = PQ = 2r_1$(设 $\odot O_2$、$\odot O_2'$ 的半径分别为 r、r_2').

因为$\odot O_2$与$\odot O'_2$关于反演中心C位似，所以，$\frac{r}{r'_2}=\frac{k}{CP^2}$.

故 $r=\frac{kr'_2}{CP^2}=\frac{4r_1^2r_2}{MN^2}=\frac{4r_1^2r_2}{MO'^2_2-NO'^2_2}$

$=\frac{4r_1^2r_2}{(r_1+r_1+r_2)^2-r_2^2}=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$.

同理，$\odot O_1$的半径也为$\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$.

因此，这两个圆的半径相等.

练习题

1.在四个圆中，每个圆都和其他的两个圆外切.证明：四个切点位于同一个圆上.

（提示：作以某一切点为中心的反演变换，在该变换下，这些给定的圆变成一对平行直线和两个相切的圆.）

2.给定4个圆$\odot S_1$、$\odot S_2$、$\odot S_3$、$\odot S_4$，设$\odot S_1$和$\odot S_2$、$\odot S_2$和$\odot S_3$、$\odot S_3$和$\odot S_4$、$\odot S_4$和$\odot S_1$分别交于点A_1和A_2、B_1和B_2、C_1和C_2、D_1和D_2.若A_1、B_1、C_1、D_1四点共圆（或共线），证明：A_2、B_2、C_2、D_2四点共圆（或共线）.

（提示：作以A_1为反演中心的反演变换，于是，$\odot S_1$、$\odot S_2$反形为直线$A'_2D'_1$、$A'_2B'_1$，$\odot S_3$、$\odot S_4$反形为$\triangle B'_2C'_1B'_1$、$\triangle D'_2C'_1D'_1$的外接圆，这两个圆交于C'_2.只要证A'_2、B'_2、C'_2、D'_2四点共圆即可.）

3.如图16，在线段AB上取点C，以线段AC、BC、AB为直径分别作圆，$\odot O$与这三个圆都相切.证明：$\odot O$的直径等于它的圆心到直线AB的距离.

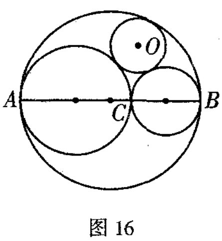

图16

（提示：以点C为反演中心作反演变换.以AC、BC、AB为直径的圆分别反演成以直线$A'D$、$B'E$、$A'B'$为直径的圆，且直线$A'D$、$B'E$与$A'B'$垂直，$\odot O$反演成$\odot O'$，且与直线$A'D$、$B'E$及以$A'B'$为直径的圆都相切.由于$\odot O$、$\odot O'$关于点C位似，所以，$\odot O$的直径与圆心到AB的距离的比等于$\odot O'$的直径与圆心到$A'B'$的距离的比.易知后者的比值为1.）

4.凸五边形$ABCDE$的边延长构成一个五角星形$AHBKCLDMEN$，作星形周围五个三角形的外接圆.证明：这些外接圆异于A、B、C、D、E的另五个交点位于同一个圆上.

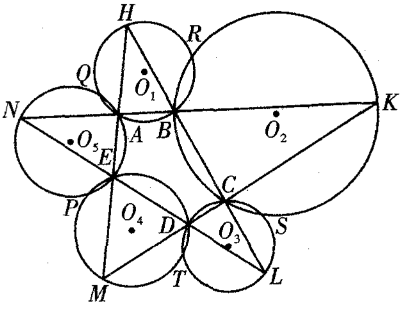

图17

（提示：如图17，设P、Q、R、S、T是在条件中所说的$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$、$\odot O_4$、$\odot O_5$的交点.下证P、Q、R、S四点共圆.作$\triangle NKD$的外接圆$\odot O'$，得$\odot O_4$、$\odot O_5$和$\odot O'$交于一点P，$\odot O_2$、$\odot O_3$和$\odot O'$同样交于另一点S，所以，$\odot O'$过点P、S，$\odot O'$、$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_5$的八个交点中的四个交点共线.因此，剩下的四个点P、Q、R、S共圆[3].）

5.双心四边形是指既有内切圆又有外接圆的四边形.求证：这样的四边形的双心与对角线交点共线.

（第30届IMO预选题）

（提示：以内心为反演中心、内切圆为反演圆作图形的反形.）

参考文献：

[1]　[美]R.A.约翰逊著.近代欧氏几何学[M].单　墫译.上海教育出版社，1997年.

[2]　沈文选著.平面几何证明方法全书[M].哈尔滨工业大学出版社，2005年.

[3]　[俄]B.B.博拉索洛夫著.平面几何问题集及其解答[M].周春荔，张同君译.长春：东北师范大学出版社，1988年.