多个整数的最小公倍数的矩阵求法

张建奎
(潍坊职业学院信息工程学系, 261041, 山东潍坊 // 42 岁, 女, 副教授)

摘要　给出了一个求多个整数的最小公倍数的矩阵方法. 该方法计算量小, 简便易行, 可通过编程上机进行计算, 在最小公倍数计算中有实际意义.

关键词　整数矩阵;　整数初等变换;　整数初等矩阵
中图分类号　O 151.21

文献[1] 给出了两个整数的最大公因数与最小公倍数的统一求法. 本文得到了一个进一步的结果.

在以下讨论中, Z 表示整数环, $M_n(Z)$表示 Z 上的 n 阶矩阵.

1　预备知识

对于整数, 下列结论成立:[2~5]

1)　设 d 是两个整数 a, b 的最大公因数, 则 $\exists s, t\in Z$ 使 $sa+tb=d$;

2)　设 d, m 分别是两个整数 a, b 的最大公因数与最小公倍数, 则 $ab=\pm dm$;

3)　若 A 为一个整数矩阵, 则

ⅰ)　在 Z 上对 A 施行一次初等变换, 相当于对 A 左乘一个相应的整数初等矩阵;

ⅱ)　在 Z 上对 A 施行一次初等变换, 相当于对 A 右乘一个相应的整数初等矩阵;

ⅲ)　$A\in M_n(Z)$, 则 A 可逆$\Leftrightarrow |A|=1$ 或 -1;

ⅳ)　Z 上每一个可逆矩阵都可表示为一系列的整数初等矩阵的乘积.

2　主要结果

引理 1[1]　设 $a, b\in Z$, d 是 a, b 的一个最大公因数, m 是 a, b 的一个最小公倍数. 令 $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & b \end{pmatrix}$, 则存在可逆矩阵 $P\in M_2(Z)$, 使得 $PA=\begin{pmatrix} d & * \\ 0 & m \end{pmatrix}$.

定理 1　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n\in Z$, m_i 是 a_i 的最小公倍数($i=1, 2, \cdots, n$), 而 d_k 是 m_k 与 a_{k+1} 的一个最大公因数($k<n$), 令

$$A_n=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & a_n \end{bmatrix}$$

则存在可逆矩阵 $B_n\in M_n(Z)$, 使得

$$B_nA_n=\begin{bmatrix} d_1 & & & & * \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_{n-1} & \\ 0 & & & & m_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

为上三角矩阵.

证　当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全为 0 时, 结论显然成立; 当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不全为 0 时, 对 n 应用第一数学归纳法; 当 $n=1, 2$ 时, 由引理 1 知结论成立.

假设 $n>2$, 且结论对 $n-1$ 成立, 下证结论对 n 成立. 设

收稿日期: 2005-12-06

$$A_n=\begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ \alpha & a_n \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha=(0, \cdots, 0, a_n)$，由假设，存在可逆矩阵 $B_{n-1}\in M_{n-1}(Z)$，使得

$$B_{n-1}A_{n-1}=\begin{bmatrix} d_1 & & & & * \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_{n-2} & \\ 0 & & & & m_{n-1} \end{bmatrix}.$$

令 $S_n=\begin{pmatrix} S_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，易知 S_n 可逆，而且

$$S_nA_n=\begin{pmatrix} B_{n-1}A_{n-1} & 0 \\ \alpha & a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & * & * & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & * & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{n-2} & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D_1 & K \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}.$$

由于 d_m 是 m_{n-1} 与 a_n 的最大公因数，m_n 是 m_{n-1} 与 a_n 的最小公倍数，由引理 1，存在可逆矩阵 C_2，使

$$C_2D_2=\begin{pmatrix} d_{n-1} & * \\ 0 & m_n \end{pmatrix}.$$

令

$$C_n=\begin{pmatrix} E_{n-2} & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix},$$

则

$$C_nS_nA_n=\begin{pmatrix} E_{n-2}D_1 & E_{n-2}K \\ 0 & C_2D_2 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 & & & & * \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_{n-1} & \\ 0 & & & & m_n \end{bmatrix}.$$

定理 2　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n\in Z$，

$$A_n=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & a_n \end{bmatrix},$$

若有可逆矩阵 $C_n\in M_n(Z)$，使得

$$C_nA_n=\begin{bmatrix} g_1 & & & & * \\ & g_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & g_{n-1} & \\ 0 & & & & g_n \end{bmatrix}, \tag{2}$$

则 g_k 是 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的一个最小公倍数与 a_{k+1} 的一个最大公因数 $(k< n)$，g_n 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个最小公倍数.

证　当 $a_1, a_2, \cdots a_i$ 全为 0 时，结论显然成立.

当 $a_1, a_2, \cdots, a_i$ 不全为 0 时，设 m_i 是 $a_1, a_2, \cdots, a_i$ 的一个最小公倍数 $(i=1, 2, \cdots, n)$，d_k 是 m_k 与 a_{k+1} 的一个最大公因数 $(k< n)$. 若 C_n 是适合(2)式的可逆矩阵，则由(1)式得

$$A_n = B_n^{-1}\begin{bmatrix} d_1 & & & & * \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_{n-1} & \\ 0 & & & & m_n \end{bmatrix},$$

由(2)式得

$$C_nB_n^{-1}\begin{bmatrix} d_1 & & & & * \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_{n-1} & \\ 0 & & & & m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & & & & * \\ & g_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & g_{n-1} & \\ 0 & & & & g_n \end{bmatrix}. \tag{3}$$

设 $C_nB_n^{-1}=(r_{ij})$, 由(3)式, 因为 $d_1\neq 0$, 所以 $r_{21}=r_{31}=\cdots=r_{n1}=0$. 再由(3)式, 因为 $d_2\neq 0$ 所以 $r_{32}=r_{42}=\cdots=r_{n2}=0$.

依此类推可得: 当 $i>j$ 时, 有 $r_{ij}=0$, 即 $C_nB_n^{-1}=(r_{ij})$ 是上三角矩阵. 由 B_n, C_n 可逆得 $r_{11}, r_{22}, \cdots, r_{nn}=|C_nB_n^{-1}|=|B_n|^{-1}|C_n|=\pm 1$. 由 r_{ii} 为整数得 $r_{ii}=\pm 1$, $i=1, 2, \cdots, n$. 由(3)式得, $g_i=\pm d_i$, $i=1, 2, \cdots, n-1$, $g_n=m_n$.

由定理1得结论成立.

3 应用举例

对定理1和定理2的结果, 应用结论3)、4)可以得到一个求多个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最小公倍数的一个矩阵方法:

以 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 构造矩阵 A_n, 对 A_n 施行初等行变换化为上三角形矩阵(2). 则 g_n 即为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个最小公倍数.

例1 设 $a=4851$, $b=12\,705$, $c=35\,343$, 求 a, b, c 的最小公倍数 $[a, b, c]$.

解 令

$$A=\begin{pmatrix} 4\,851 & 0 & 0 \\ 12\,705 & 12\,705 & 0 \\ 0 & 35\,343 & 35\,343 \end{pmatrix}$$

则

$$A \xrightarrow{T_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 4\,851 & 0 & 0 \\ 3\,003 & 12\,705 & 0 \\ 0 & 35\,343 & 35\,343 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 1\,848 & -12\,705 & 0 \\ 3\,003 & 12\,705 & 0 \\ 0 & 35\,343 & 35\,343 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{T_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1\,848 & -12\,705 & 0 \\ 1\,155 & 25\,410 & 0 \\ 0 & 35\,343 & 35\,343 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 693 & -38\,115 & 0 \\ 1\,155 & 25\,410 & 0 \\ 0 & 35\,343 & 35\,343 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{T_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 693 & -38\,115 & 0 \\ 462 & 63\,525 & 0 \\ 0 & 35\,343 & 35\,343 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 231 & -101\,640 & 0 \\ 462 & 63\,525 & 0 \\ 0 & 35\,343 & 35\,343 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{T_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 231 & -101\,640 & 0 \\ 0 & 266\,805 & 0 \\ 0 & 35\,343 & 35\,343 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{23}(-7)} \begin{pmatrix} 231 & -101\,640 & 0 \\ 0 & 19\,404 & -247\,401 \\ 0 & 35\,343 & 35\,343 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{T_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 231 & -101\,640 & 0 \\ 0 & 19\,404 & -247\,401 \\ 0 & 15\,939 & 282\,744 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{23}(-1)} \begin{pmatrix} 231 & -101\,640 & 0 \\ 0 & 3\,465 & -530\,145 \\ 0 & 15\,939 & 282\,744 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{T_{32}(-4)} \begin{pmatrix} 231 & -101\,640 & 0 \\ 0 & 3\,465 & -530\,145 \\ 0 & 2\,079 & 2\,403\,324 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{23}(-1)} \begin{pmatrix} 231 & -101\,640 & 0 \\ 0 & 1\,386 & -2\,933\,469 \\ 0 & 2\,079 & 2\,403\,324 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{T_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 231 & -101\,640 & 0 \\ 0 & 1\,386 & -2\,933\,469 \\ 0 & 693 & 5\,336\,793 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{23}(-2)} \begin{pmatrix} 231 & -101\,640 & 0 \\ 0 & 0 & -13\,607\,055 \\ 0 & 693 & 5\,136\,793 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 231 & -101\,640 & 0 \\ 0 & 693 & -5\,136\,793 \\ 0 & 0 & 13\,607\,355 \end{pmatrix},$$

所以，$[a, b, c] = 13\ 607\ 355$.

4 参考文献

[1] 王新民. 最大公因数与最小公倍数的矩阵求法[J]. 潍坊学院学报，2002，2(6)：42~44
[2] 张建奎，王新民. 关于最小公倍式的矩阵求法[J]. 山东师范大学学报(自然科学版)，2003，18(4)：87~88
[3] 柯　召. 数论讲义[M]. 北京：高等教育出版社，1986. 21~63
[4] 倪国熙. 常用的矩阵理论和方法[M]. 上海：上海科学技术出版社，1984. 19~51
[5] 张远达. 行列式论与矩阵论[M]. 北京：商务印书馆，1984. 31~75

THE MATRIX METHOD FOR THE LEAST COMMON MULTIPLE OF INTEGERS

Zhang Jiankui

(Department of Information, Weifang Vocational College, 261041, Weifang, Shandong, China)

Abstract　A matrix method for the least common multiple of several integers is given. It is significant for solving the problems in the integer ring $\boldsymbol{Z}$.

Key words　integer matrix；　integer elementary transformation；　integer elementary matrix

关于学报论文的插图

1）图要精选，具有自明性，切忌与表及文字表述重复.

2）图要精心设计和绘制，要大小适中，线条均匀，主辅线分明. 图中文字与符号均应植字，不用手写，缩尺后字的大小以处于 6 号至新 5 号之间为宜.

3）坐标图标目中的量和单位符号应齐全，并分别置于纵、横坐标轴的外侧，一般居中排. 横坐标的标目自左至右；纵坐标的标目自下而上，顶左底右，坐标图右侧的纵坐标标目的标注方法同左侧.

4）图中的术语、符号、单位等应同表及文字表述所用的一致.

5）图若卧排，应顶左底右，即双页图顶向切口，单页顶向订口.

6）图在文中的布局要合理，一般随文编排，先见文字后见图. 图旁空白较大时，可串排文字.

7）插页图版可编页码，且须在图版上方标识文章的题名和所在页码.

8）图应有以阿拉伯数字连续编号的图序(如仅有 1 个图，图序可定名为“图 1”)和简明的图题. 图序和图题间空 1 个字长，一般居中排于图的下方.