DOI:10.14135/j.cnki.1006-3080.1988.02.014

第十四卷第二期 一九八八年 | 华东化工学院学报 Journal of East China Institute of Chemical Technology | Vol. 14 No. 2 1988

采用移位切比雪夫多项式求解卷积的新方法

范一平　俞金寿　蒋慰孙

（自动化研究所）

提要：本文首次定义和推导了移位切比雪夫多项式（第一类和第二类）的分离矩阵，它具有简洁的递推关系和三角形结构。应用分离矩阵的性质，得到了一类求解卷积的新方法。数字仿真肯定了此方法的应用价值。分离矩阵还可以推广到脉冲响应函数的辨识、最优伺服机构的设计等控制领域。

关键词：卷积；正交函数；切比雪夫逼近；解

自1975年由Chen和Hsiao[1]将沃尔什函数成功地用于系统分析和最优控制以来，人们对正交函数的性质以及它的应用有了更深刻的研究和认识。各类正交函数（多项式）不断引入控制领域，在系统分析、参数估计和最优控制[2-4]等方面取得了丰硕的成果。采用正交函数分析、设计控制系统主要依赖于正交函数的两条重要性质：①函数展开性质。对任何能量有限函数可用正交函数展开，展式均方收敛于原函数；②运算矩阵性质。此性质保证使积分运算变为代数运算。

卷积是线性控制领域中的基本问题之一，时域品质分析、相关函数求取等都可应用卷积来完成。卷积的求解一般有两种方法：拉氏变换反变换法和数值积分法。本文在深入研究了移位切比雪夫多项式（下简称切氏多项式）递推公式的前提下，首次定义和推导了此类正交多项式的分离矩阵，应用分离矩阵和切氏多项式的运算矩阵性质、乘积性质，产生了应用切氏多项式求解卷积的新方法。卷积解是以切氏多项式为函数的二次型。数值仿真证实了此方法的有效、快速，不失为有吸引力的充分面向计算机的方法。此外，分离矩阵可推广到时滞系统的分析、参数估计和最优控制，脉冲响应函数的识别以及最优伺服机构的设计等方面。

一、切氏多项式的基本性质

第一类切氏多项式在域$[0,t_f]$上定义为：

$$\begin{cases} p_0(t)=1 \\ p_1(t)=1-2t/t_f \\ p_2(t)=8(t/t_f)^2-8(t/t_f)+1 \\ \vdots \qquad \vdots \\ p_{i+1}(t)=(2-4t/t_f)p_i(t)-p_{i-1}(t) \end{cases} \tag{1}$$

本文于1987年2月16日收到。

以上各式在定义域〔$0,t_f$〕上存在正交关系：

$$\int_0^{t_f}(t_f t-t^2)^{-\frac{1}{2}}p_i(t)p_j(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0 & , i\neq j\\ \pi/2, & i=j\neq 0\\ \pi & , i=j=0\end{cases}$$

对任意属于平方可积空间 $\mathbf{L}^2$ 的函数 $f(t)$，可用有限项第一类切氏多项式近似：

$$f(t)=\sum_{i=0}^{\infty}f_i\ p_i(t)\doteq\sum_{i=0}^{m-1}f_i\ p_i(t) \tag{2}$$

（2）式中：m为展式项数，依精度要求选定。

$$\begin{cases}f_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{t_f}(t_f t-t^2)^{-\frac{1}{2}}f(t)p_0(t)\mathrm{d}t\\ f_i=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{t_f}(t_f t-t^2)^{-\frac{1}{2}}f(t)p_i(t)\mathrm{d}t\end{cases} \tag{3}$$

$$i=1,2,\cdots,m-1$$

从（3）式直接计算 f_i 是有困难的，本文采用高斯-切比雪夫求积[2]处理：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{t_f}(t_f t-t^2)^{-\frac{1}{2}}f(t)p_i(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}f(t_j)p_i(t_j) \tag{4}$$

t_j 是m阶第一类切氏多项式的零点。

$$t_j=\frac{t_f}{2}\left[1-\cos\frac{(2j-1)}{2m}\pi\right]\qquad j=1,2,\cdots,m$$

若定义m维切氏向量：

$$P_m(t)=[p_0(t)\ p_1(t)\ \cdots\ p_{m-1}(t)]^T$$

则向量 $P_m(t)$的前向积分可用运算矩阵 H 表示：

$$\int_0^t P_m(t)\,\mathrm{d}t=HP_m(t) \tag{5}$$

$$H=t_f\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{-1}{2(m-1)(m-3)} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{4(m-3)} & 0 & -\frac{1}{4(m-1)}\\ \frac{-1}{2m(m-2)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{4(m-2)} & 0\end{pmatrix}$$

任意两个第一类切氏多项式的乘积可表示成：

$$p_i(t)\ p_j(t)=\frac{1}{2}[p_{i+j}(t)+p_{|i-j|}(t)] \tag{6}$$

域〔$0,t_f$〕上的第二类切氏多项式定义为：

$$
\begin{cases}
p_0(t)=1\\
p_1(t)=2-4t/t_f\\
p_2(t)=16(t/t_f)^2-16(t/t_f)+3\\
\vdots \qquad \vdots\\
p_{i+1}(t)=(2-4t/t_f)p_i(t)-p_{i-1}(t)
\end{cases}
\tag{7}
$$

并有正交关系：

$$
\int_0^{t_f}(t_f t-t^2)^{\frac{1}{2}}p_i(t)p_j(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0\quad, & i\neq j\\ \pi/2\quad, & i=j\end{cases}
$$

类似于第一类切氏多项式，第二类切氏多项式也有相应的函数展开性质、运算矩阵性质和乘积性质[3]。

二、采用移位切比雪夫多项式的卷积求解方法

$f_1(t)$、$f_2(t)\in L^2$，则 $f_1(t)$、$f_2(t)$ 在〔$0,t$〕上的卷积定义为：

$$
g(t)=\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{8}
$$

应用（2）式性质，展开 $f_1(t)$、$f_2(t)$：

$$
\begin{cases}
f_1(t)\approx\sum\limits_{i=0}^{m-1}f_{i1}p_i(t)\\
f_2(t)\approx\sum\limits_{i=0}^{n-1}f_{i2}p_i(t)
\end{cases}
\tag{9}
$$

m、n 的选取视被展函数的性质和卷积求解的精度而定。

（9）式代入（8）式，则

$$
g(t)=\int_0^t\left[\sum_{i=0}^{m-1}f_{i1}p_i(t-\tau)\cdot\sum_{j=0}^{n-1}f_{j2}p_j(\tau)\right]\mathrm{d}\tau \tag{10}
$$

若定义 S_i 为分离矩阵，当 $0\leqslant i\leqslant m-1$，有关系式：

$$
p_i(t-\tau)=P_m^T(t)S_iP_m(\tau) \tag{11}
$$

则
$$
g(t)=P_m^T(t)\sum_{i=0}^{m-1}f_{i1}S_i\int_0^t\sum_{j=0}^{n-1}f_{j2}p_j(\tau)\,P_m(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{12}
$$

应用（6）式的乘积性质：

$$
p_j(\tau)P_m(\tau)=R_jP_{m+n-1}(\tau) \tag{13}
$$

（13）式代入（12）式，并应用运算矩阵性质得：

$$
g(t)=P_m^T(t)\,DP_{m+n-1}(t) \tag{14}
$$

$$
D=\left(\sum_{i=0}^{m-1}f_{i1}S_i\sum_{j=0}^{n-1}f_{j2}R_j\right)H \tag{15}
$$

到此，完成了整个卷积求解新方法的推导过程。从中可知，采用移位切比雪夫多项式求解卷积的条件是分离矩阵必须存在且能借助于一定手段获得。以下给出移位切氏多项式分离矩阵的存在和构造定理。

定理：记 $P_m(t)=[p_0(t)\,p_1(t)\cdots\cdots p_{m-1}(t)]^T$，则移位切比雪夫多项式有分离矩阵存在，$p_k(t-\tau)(0\leqslant k\leqslant m-1)$可以唯一被分解为：

$$p_k(t-\tau)=P_m^T(t)\,S_k P_m(\tau)$$

$S_k=[s_{i,j}^k]_{m\times m}$的一切元素均为常量，并且

$$\begin{cases} s_{i,j}^k\neq 0\,, & i+j-1\leqslant k+1 \\ s_{i,j}^k=0\,, & i+j-1>k+1 \end{cases}$$

S_k 可由以下公式递推获取：

$$S_k=Q_k+2\,S_{k-1}-S_{k-2}$$
$$Q_k=[q_{i,j}^k]_{m\times m}=\alpha\,(S_{k-1})$$

α 为线性算子，对 S_{k-1} 的非零元逐一作如下运算：

(1) $1\leqslant j\leqslant k-1,\ 2\leqslant i\leqslant k-j+1$

$$q_{i+1,j}^k=s_{i,j}^{k-1}$$
$$q_{i-1,j}^k=q_{i-1,j}^k+s_{i,j}^{k-1}$$

(2) $1\leqslant i\leqslant k-1,\ 2\leqslant j\leqslant k-i+1$

$$q_{i,j+1}^k=q_{i,j+1}^k-s_{i,j}^{k-1}$$
$$q_{i,j-1}^k=q_{i,j-1}^k-s_{i,j}^{k-1}$$

(3) $1\leqslant i\leqslant k$

$$q_{2,i}^k=q_{2,i}^k+c\cdot s_{1,i}^{k-1}$$
$$q_{i,2}^k=q_{i,2}^k-c\cdot s_{i,1}^{k-1}$$

S_k 的递推初始值为：

$$S_0=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \vdots\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}_{m\times m}\qquad S_1=\begin{pmatrix}2/c & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & & 0 & & \vdots\\ 0 & & & & \vdots\\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}_{m\times m}$$

当 $c=2$ 时，以上定理构造出第一类切氏多项式的分离矩阵。而 $c=1$ 时，则定理构造出第二类切氏多项式的分离矩阵。根据定理由（11）式定义的分离矩阵具有唯一性，S_k 的非零元素构成 $k+1$ 阶上三角阵，并由 S_{k-1}、S_{k-2} 递推得到。限于篇幅，定理证明放入附录。

例 1：设二阶系统的传递函数为 $G(s)=\dfrac{(s+1)}{[(s+1)^2+1]}$，求输入为单位阶跃信号时，输出在 $[0,1]$ 上的时间响应。

传递函数对应的脉冲响应函数为 $h(t)=e^{-t}\cos t$，输入信号 $x(t)=1$，则系统的输出可用以下卷积表示：

$$y(t)=\int_0^t h(t-\tau)\,x(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t e^{-(t-\tau)}\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

系统输出的精确解为：$y(t)=(e^{-t}\sin t-e^{-t}\cos t+1)/2$，取 $n=1$，$m=4$、5、6 时，卷积的切比雪夫近似解与精确解之比较列于表 1。

例 2：输入信号为余弦函数时，求三阶系统

$G(s)=\dfrac{(3s+1)}{s(s+1)(2s+1)}$ 在 $[0,1]$ 上的输出时间响应。

本例中，$x(t)=\cos t$，$h(t)=1-2e^{-t}+e^{-t/2}$

表 1 移位切比雪夫近似卷积解与精确解之比较（例 1）

Table 1 Comparison of the shifted chebyshev series approximation for example 1 with the exact solution

时 间 time	第一类切比雪夫近似解 Chebyshev (1st) approximation			第二类切比雪夫近似解 Chebyshev (2nd) approximation			精确解 exact solution
	$m=4$ $n=1$	$m=5$ $n=1$	$m=6$ $n=1$	$m=4$ $n=1$	$m=5$ $n=1$	$m=6$ $n=1$	
0.0	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
0.2	.180040	.180117	.180123	.180168	.180124	.180123	.180123
0.4	.321719	.321817	.321815	.321824	.321818	.321815	.321815
0.6	.428494	.428467	.428464	.428533	.428467	.428464	.428464
0.8	.504659	.504634	.504639	.504678	.504640	.504639	.504639
1.0	.555350	.555397	.555397	.555467	.555397	.555397	.555397

m, n – Terms used to expand $f_1(t)$ and $f_2(t)$

则
$$y(t)=\int_0^t [1-2\,e^{-(t-\tau)}+e^{-(t-\tau)/2}]\cos\tau\,d\tau$$
$$=\frac{5}{4}\sin t-\frac{3}{5}\cos t+e^{-t}-\frac{2}{5}e^{-t/2}$$

取 $m=n=4$、5、6 时，切比雪夫近似卷积解与精确卷积解的比较见表 2。

表 2 移位切比雪夫近似卷积解与精确解之比较（例 2）

Table 2 Comparison of the shifted chebyshev series approximation for example 2 with the exact solution

时 间 time	第一类切比雪夫近似解 Chebyshev (1st) approximation			第二类切比雪夫近似解 Chebyshev (2nd) approximation			精确解 exact solution
	$m=4$ $n=4$	$m=5$ $n=5$	$m=6$ $n=6$	$m=4$ $n=4$	$m=5$ $n=5$	$m=6$ $n=6$	
0.0	.000000	.000000	.000000	.000001	.000000	.000000	.000000
0.2	.027649	.027689	.027691	.027708	.027691	.027691	.027691
0.4	.101690	.101727	.101726	.101723	.101727	.101726	.101726
0.6	.209032	.208998	.208997	.209021	.208998	.208997	.208997
0.8	.337087	.337060	.337062	.337062	.337062	.337062	.337062
1.0	.474253	.474263	.474263	.474279	.474263	.474263	.474263

三、结　　论

以上系统地介绍了采用移位切比雪夫多项式求解卷积的新方法并提供了两个仿真实例。从整个算式的推导过程看，除展开 $f_1(t)$、$f_2(t)$ 时引入截断误差之外，其余等式系严格成立。因此，可得出结论：若 $f_1(t)$、$f_2(t)$ 以无误差展开（对多项式可做到这一点），则 $g(t)$ 将维持与精确解严格一致，若 $f_1(t)$、$f_2(t)$ 的展式以足够精度均方逼近 $f_1(t)$、$f_2(t)$，则 $g(t)$ 将以任意小的误差均方逼近精确解，例 1、例 2 充分说明了这一点。本算法还构成简便、快速和充分面向计算机等特性。卷积解是以移位切比雪夫多项式为函数的二次型解析解，这种简便的形式不仅在计算不同时刻的卷积值异常方便，同时为进一步处理其它控制命题提供了前提。

附 录

定理证明：采用归纳法，取 $c=2$，令

$$P_m(x)=[p_0(x)\,p_1(x)\cdots p_{m-1}(x)]^T$$

由（1）式得： $p_0(t-\tau)=p_0(t)=p_0(\tau)=P_m^T(t)S_0P_m(\tau)$

$$p_1(t-\tau)=1-2(t-\tau)/t_f=p_0(t)+p_1(t)-p_1(\tau)=P_m^T(t)S_1P_m(\tau)$$

因此 $$S_0=\begin{pmatrix}1 & 0\cdots\cdots 0\\ 0 & \vdots\\ \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots\\ 0\cdots\cdots\cdots & 0\end{pmatrix}_{m\times m}\qquad S_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\cdots 0\\ 1 & 0 & \vdots\\ 0 & & \vdots\\ \vdots & & \vdots\\ 0\cdots\cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}_{m\times m}$$

当 $l=2$ 时，

$$p_2(t-\tau)=3\,p_0(t)-4\,p_1(\tau)+p_2(\tau)+4\,p_1(t)-4\,p_1(t)p_1(\tau)+p_2(t)$$
$$=P_m^T(t)S_2P_m(\tau)$$

这里 $$S_2=\begin{pmatrix}3 & -4 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 4 & -4 & 0 & & & \vdots\\ 1 & 0 & & & & \vdots\\ 0 & & & & & \vdots\\ \vdots & & & & & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}_{m\times m}$$

用构造定理获得同样 S_2，所以 $l=2$ 时定理得证。

假设 $l=k-1$ $(k\leqslant m-1)$ 时定理成立，则

$$p_{k-1}(t-\tau)=P_m^T(t)S_{k-1}P_m(\tau),\quad p_{k-2}(t-\tau)=P_m^T(t)S_{k-2}P_m(\tau)$$

记 $$S_{k-1}=[s_{i,j}^{k-1}]_{m\times m}$$

则由定理得：

$$\begin{cases} s_{i,j}^{k-1}\neq 0, & i+j-1\leqslant k\\ s_{i,j}^{k-1}=0, & i+j-1>k\end{cases}\tag{16}$$

当 $l=k$ 时，由（1）式得：

$$\begin{aligned}p_k(t-\tau)&=[2-4(t-\tau)/t_f]P_m^T(t)S_{k-1}P_m(\tau)-P_m^T(t)S_{k-2}P_m(\tau)\\&=P_m^T(t)(2-4\,t/t_f)S_{k-1}P_m(\tau)-P_m^T(t)(2-4\,\tau/t_f)S_{k-1}P_m(\tau)\\&\quad+P_m^T(t)(2\,S_{i-1}-S_{i-2})P_m(\tau)\end{aligned}\tag{17}$$

$(2-4\,t/t_f)S_{k-1}$ 中第 i 行第 j 列非零元为 $(i+j-1\leqslant k)$

$(2-4\,t/t_f)s_{i,j}^{k-1}$，它对（17）式右边第一项的贡献为：

$$x_{i,j}^{k-1}=(2-4\,t/t_f)s_{i,j}^{k-1}p_{i-1}(t)p_{j-1}(\tau)$$

当 $i>1$ 时

$$x_{i,j}^{k-1}=s_{i,j}^{k-1}\{[\tau(2-4\,t/t_f)p_{i-1}(t)-p_{i-2}(t)+p_{i-2}(t)]p_{j-1}(\tau)\}$$
$$=s_{i,j}^{k-1}[p_i(t)p_{j-1}(\tau)+p_{i-2}(t)p_{j-1}(\tau)]$$

当 $i=1$ 时， $$x_{1,j}^{k-1}=s_{1,j}^{k-1}[(2-4t/t_f)p_{j-1}(\tau)]=2s_{1,j}^{k-1}p_1(t)p_{j-1}(\tau)$$

同理对（17）式右边第二项有：

$$y_{i,j}^{k-1}=-s_{i,j}^{k-1}[(2-4\tau/t_f)p_{i-1}(t)p_{j-1}(\tau)]$$

$$\begin{cases} y_{i,j}^{k-1}=-s_{i,j}^{k-1}[p_j(\tau)p_{i-1}(t)+p_{j-2}(\tau)p_{i-1}(t)]\ , & j>1 \\ y_{i,1}^{k-1}=-2s_{i,1}^{k-1}p_1(\tau)p_{i-1}(t)\ , & j=1 \end{cases}$$

综合所有 $x_{i,j}^{k-1}$、$y_{i,j}^{k-1}(i+j-1\leqslant k)$ 对（17）式的贡献，就是线性算子 a 在定理中 ①—③ 所完成的运算。因此

$$P_m^T(t)(2-4t/t_f)S_{k-1}P_m(\tau)-P_m^T(t)(2-4\tau/t_f)S_{k-1}P_m(\tau)=P_m^T(t)Q_kP_m(\tau)$$

从而 $$p_k(t-\tau)=P_m^T(t)Q_kP_m(\tau)+P_m^T(t)(2S_{k-1}-S_{k-2})P_m(\tau)$$
$$=P_m^T(t)(Q_k+2S_{k-1}-S_{k-2})P_m(\tau)=P_m^T(t)S_kP_m(\tau)$$

所以 $$S_k=Q_k+2S_{k-1}-S_{k-2}$$

并且从（16）式的性质及运算过程 ①—③ 得：

$$\begin{cases} s_{i,j}^k\neq 0\ , & i+j-1\leqslant k+1 \\ s_{i,j}^k=0\ , & i+j-1>k+1 \end{cases}$$

分离矩阵存在的唯一性可以从（1）式递推关系的唯一性得到证明。取 $c=1$ 时，定理同样可证。定理证毕。

参 考 文 献

〔1〕 Chen, C. F. and C. H. Hsiao: Design of piecewise constant gains for optimal control via Walsh functions, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 20 (6) 1975: 881—897

〔2〕 Shih, D. H. and F. C. Kung: Analysis and parameter estimatiom of non-linear systems via shifted Chebyshev expansions, *Int. J. Systems Sci.*, 17 (2) 1986: 231—240

〔3〕 Lin, C. C. and Y. P. Shih: Analysis and parameter identification of linear systems via Chebyshev polynomials of the second kind, *Int. J. Systemt Sci.*, 16 (6) 1985: 753—760

〔4〕 Horng, I. R. and J. H. Chou: Analysis, parameter estimation and optimal control of time-delay systems via Chebyshev series, *Int. J. Control*, 41 (5) 1985: 1221—1234

New approach to the solution of convolution integral via shifted Chebyshev polynomials

Fan Yiping, Yu Jinshou and Jiang Weisun

(*Research institute of automatic control*)

Abstract

The separative matrices of shifted Chebyshev polynomials of the first and second kinds, which have a nice structure and an elegant recursive formula, are introduced at the first time. By using the property of the separative matrices, a new approach to the convolution integral is presented. Two examples are included to demonstrate the validity and applicability of the approach. In addition, the separative matrices can be applied to the identification of impulse response of linear systems and the optimal design of linear servomachanisms.

Keywords: convolution; orthogonal function; chebyshev approximation; solution