再谈牛顿恒等式及其应用

刘久松

(山东省临沂地区劳动技校 276005)

文 [1] 介绍了与一元二次方程有关的牛顿恒等式在解题中的应用，读后颇受启发．作为续篇，本文再谈谈与一元 n 次方程有关的牛顿恒等式及其应用，供大家参考．

定理 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是方程 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的 n 个根，记 $S_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k\ (k\in N)$，则有

(1) 当 $k\le n$ 时

$$S_k+a_1S_{k-1}+a_2S_{k-2}+\cdots+a_{k-1}S_1+a_k\cdot k=0;$$

(2) 当 $k>n$ 时

$$S_k+a_1S_{k-1}+a_2S_{k-2}+\cdots+a_nS_{k-n}=0.$$

证明 首先引进符号 $\sum$．例如以 $\sum x_{i_1}^{k-1}x_{i_2}$ 记 $x_1^{k-1}x_2+x_1^{k-1}x_3+\cdots+x_1^{k-1}x_n+x_2^{k-1}x_1+x_2^{k-1}x_3+\cdots+x_2^{k-1}x_n+\cdots+x_n^{k-1}x_1+x_n^{k-1}x_2+\cdots+x_n^{k-1}x_{n-1}$．

(1) 当 $k\le n$ 时，有

$$S_{k-1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=S_k+\sum x_{i_1}^{k-1}x_{i_2},$$

$$S_{k-2}(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)$$
$$=\sum x_{i_1}^{k-1}x_{i_2}+\sum x_{i_1}^{k-2}x_{i_2}x_{i_3},$$

$$S_{k-3}(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n)$$
$$=\sum x_{i_1}^{k-2}x_{i_2}x_{i_3}+\sum x_{i_1}^{k-3}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{k-i}(x_1x_2\cdots x_i+\cdots+x_{n-i+1}x_{n-i+2}\cdots x_n)$$
$$=\sum x_{i_1}^{k-i+1}x_{i_2}\cdots x_{i_i}+\sum x_{i_1}^{k-i}x_{i_2}\cdots x_{i_{i+1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_1(x_1x_2\cdots x_{k-1}+\cdots+x_{n-k+2}x_{n-k+3}\cdots x_n)$$
$$=\sum x_{i_1}^2x_{i_2}\cdots x_{i_{k-1}}+k\sum x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}.$$

上述各式记为 $(*)$．以 $-1,+1,-1,\cdots,(-1)^i,\cdots,(-1)^{k-1}$ 依次乘各式，然后相加，得

$$-S_{k-1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)+S_{k-2}(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)-\cdots+(-1)^{k-1}S_1(x_1x_2\cdots x_{k-1}+\cdots+x_{n-k+2}x_{n-k+3}\cdots x_n)$$
$$=-S_k+(-1)^{k-1}k\sum x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}.$$

由根与系数的关系，得

$$S_k+a_1S_{k-1}+a_2S_{k-2}+\cdots+a_{k-1}S_1+a_k\cdot k=0.$$

(2) 当 $k>n$ 时，$(*)$ 中最后一式应为

$$S_{k-n}(x_1x_2\cdots x_n)=\sum x_{i_1}^{k-n+1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}.$$

同理可得

$$S_k+a_1S_{k-1}+a_2S_{k-2}+\cdots+a_nS_{k-n}=0.$$

利用上述定理 (即牛顿恒等式)，从 $k=1$ 开始，可依次把 S_k 表为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的多项式，由此可使某些问题得到统一的处理，并且思路自然、流畅，方法新颖、简捷．

例 1 若 a、b、c 满足条件 $a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=2$，$a^3+b^3+c^3=3$，则 $abc=$____，$a^4+b^4+c^4=$____．(1991 年江苏省初中数学竞赛题)

解 设 a,b,c 是方程 $t^3+a_1t^2+a_2t+a_3=0$ 的三个根，由定理，得

$S_1=-a_1=1$，即 $a_1=-1$，

$S_2=-a_1S_1-2a_2=1-2a_2=2$，即 $a_2=-\dfrac{1}{2}$，

$S_3=-a_1S_2-a_2S_1-3a_3=\dfrac{5}{2}-3a_3=3$，

即 $a_3=-\dfrac{1}{6}$，亦即 $abc=\dfrac{1}{6}$．

$S_4=-a_1S_3-a_2S_2-a_3S_1=3+1+\dfrac{1}{6}=\dfrac{25}{6}$，

即 $a^4+b^4+c^4=\dfrac{25}{6}$．

按此继续进行下去，还可求得 $S_5,S_6,S_7,\cdots$ 等值．

例 2 若 $a+b+c=0, a^3+b^3+c^3=0$, 则 $a^{19}+b^{19}+c^{19}=$____. (1988 年北京市初二数学竞赛题)

解 设 a,b,c 是方程 $t^3+a_1t^2+a_2t+a_3=0$ 的三个根，由定理，得

$S_1=-a_1=0$, 即 $a_1=0$,

$S_3=-a_1S_2-a_2S_1-3a_3=-3a_3=0$,

即 $a_3=0$, 故 $S_k=-a_2S_{k-2}$, 从而

$S_{19}=-a_2S_{17}=a_2^2S_{15}=\cdots=-a_2^9S_1=0$,

即 $a^{19}+b^{19}+c^{19}=0$.

一般地，有 $a^{2n-1}+b^{2n-1}+c^{2n-1}=0\ (n\in N)$.

例 3 设 $x+y+z=0$, 求证：

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\cdot\frac{x^5+y^5+z^5}{5}=\frac{x^7+y^7+z^7}{7}.$$

(1975 年上海市数学竞赛决赛试题)

证明 设 x,y,z 是方程 $t^3+a_1t^2+a_2t+a_3=0$ 的三个根，由定理，得

$S_1=-a_1=0$, 即 $a_1=0$,

$S_2=-a_1S_1-2a_2=-2a_2$,

$S_3=-a_1S_2-a_2S_1-3a_3=-3a_3$,

$S_4=-a_1S_3-a_2S_2-a_3S_1=2a_2^2$,

$S_5=-a_1S_4-a_2S_3-a_3S_2=5a_2a_3$,

$S_7=-a_1S_6-a_2S_5-a_3S_4=-7a_2^2a_3$.

于是 $\frac{S_2}{2}\cdot\frac{S_5}{5}=-a_2^2a_3=\frac{S_7}{7}$, 即

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\cdot\frac{x^5+y^5+z^5}{5}=\frac{x^7+y^7+z^7}{7}.$$

由上述证明过程可知

(1) 若 $x+y+z=0$, 则

1° $\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\cdot\frac{x^3+y^3+z^3}{3}=\frac{x^5+y^5+z^5}{5}$.

2° $\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\cdot\frac{x^4+y^4+z^4}{2}=\frac{x^7+y^7+z^7}{7}$.

(2) 若非零实数 a,b,c 满足条件 $a+b+c=0$, 则

$$\frac{(a^7+b^7+c^7)^2}{(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)(a^5+b^5+c^5)}=\frac{49}{60}.$$

(《数学通讯》1988 年第 8 期问题征解 15 题)

类似地可以证明

(3) 对于任意复数 x,y,z, 有

$$\frac{(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5}{5}=\frac{(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3}{3}\cdot\frac{(x+y+z)^2+x^2+y^2+z^2}{2}.$$

(《数学教学》1993 年第 5 期问题 314)

例 4 试确定方程组

$$\begin{cases}x+y+z=3\\x^2+y^2+z^2=3\\x^5+y^5+z^5=3\end{cases}$$

的所有解. (第二届美国数学奥林匹克试题)

解 设 x,y,z 是方程 $t^3+a_1t^2+a_2t+a_3=0$ 的三个根，由定理，得

$S_1=-a_1=3$, 即 $a_1=-3$,

$S_2=-a_1S_1-2a_2=9-2a_2=3$, 即 $a_2=3$,

$S_3=-a_1S_2-a_2S_1-3a_3=-3a_3$,

$S_4=-a_1S_3-a_2S_2-a_3S_1=-9-12a_3$,

$S_5=-a_1S_4-a_2S_3-a_3S_2=-27-30a_3=3$,

即 $a_3=-1$.

因此 x,y,z 是方程 $t^3-3t^2+3t-1=0$, 即 $(t-1)^3=0$ 的三个根，故 $x=y=z=1$.

例 5 设实数 x,y,z,w 满足

$$x+y+z+w=x^7+y^7+z^7+w^7=0,$$

求 $w(w+x)(w+y)(w+z)$ 的值. (第 26 届 IMO 备选题)

解 设 x,y,z,w 是方程 $t^4+a_1t^3+a_2t^2+a_3t+a_4=0$ 的四个根，由定理，得

$S_1=-a_1=0$, 即 $a_1=0$,

$S_2=-2a_2, S_3=-3a_3, S_4=2a_2^2-4a_4$,

$S_5=5a_2a_3, S_7=7a_3(a_4-a_2^2)$,

$\therefore\ a_4-a_2^2=0$ 或 $a_3=0$.

(1) 若 $a_4-a_2^2=0$, 则 $S_4=-2a_2^2\le 0$.

但 $S_4=x^4+y^4+z^4+w^4\ge 0$,

因此 $S_4=0$, 即 $x=y=z=w=0$.

故 $w(w+x)(w+y)(w+z)=0$.

(2) 若 $a_3=0$, 则

$$\begin{aligned}f(t)&=(t-x)(t-y)(t-z)(t-w)\\&=t^4+a_2t^2+a_4.\end{aligned}$$

因此多项式 $f(t)$ 的四个根必由两对正负相反的数构成，所以 $(w+x)(w+y)(w+z)=0$, 从而 $w(w+x)(w+y)(w+z)=0$.

例 6 设四个整数 a_1,a_2,a_3,a_4 适合 $\sum_{i=1}^{4}a_i^3=0$, 证明：对每一个奇数 $k>0$, 有 $6|\sum_{i=1}^{4}a_i^k$. (《数学通报》 1988 年 4 月号问题 530)

证明 设 a_1,a_2,a_3,a_4 是方程 $t^4+At^3+Bt^2+Ct+D=0$ 的四个根，由定理，得

$S_1=-A, S_2=A^2-2B, S_3=-A^3+3AB-3C$,

$S_{k+4}=-AS_{k+3}-BS_{k+2}-CS_{k+1}-DS_k$.

$\because$ t^3 与 t $(t\in N)$ 的奇偶性相同，

又 $S_3=a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3=0$ 是偶数，

$\therefore$ $A=-(a_1+a_2+a_3+a_4)$ 是偶数，从而 $2|A$.

又由 $S_3=0$ 知 $A^3=3AB-3C$, $\therefore$ $3|A^3$, 故质数 $3|A$.

由 $(2,3)=1$, 得 $6|A$, 结合 $A^3=3AB-C$, 得 $6|C$.

下面用数学归纳法证明 $6|S_{2n-1}$, $n=1,2,\cdots$.

当 $n=1$ 时，$6|S_1$.

假设 $n\le k$ 时命题成立. 对 $n=k+1$,

$S_{2(k+1)-1}=-AS_{2k}-BS_{2k-1}-CS_{2k-2}-DS_{2k-3}$.

由 $6|A,6|C$ 结合归纳假设 $6|S_{2k-1},6|S_{2k-3}$ 和上面等式可知 $6|S_{2(k+1)-1}$.

故对所有的 $n,6|S_{2n-1}$, $n=1,2,\cdots$. 因此原命题得证.

参考文献

1 周万林. 牛顿恒等式的多种应用. 数学通报，1992,2.

2 张禾瑞、郝钢新. 高等代数 (第三版). 高等教育出版社，1983 年.

3 周伯壎. 高等代数. 人民教育出版社，1978 年.

平面几何问题三角化的一条有效途径
—一个常见命题的推广及应用

谢永龙

(贵州六枝郎岱二中 553405)

1 来源

命题 若 P 为 $\angle XOY=120°$ 平分线上一点，过点 P 的直线截 OX 、OY 于点 A 、B. 则 $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{OP}$.

这是一道以往的教材中常能见到的普通习题. 考虑到命题结论的简单变形中含有 "$OA\cdot OB$" 这种面积成份，下面运用三角证法.

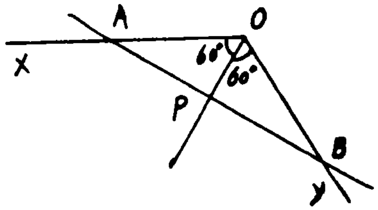

图 1

证明 如图 1, 显然有

$$S_{\triangle POA}+S_{\triangle POB}=S_{\triangle AOB} \tag{1}$$

应用三角形的面积公式可得

$$\frac{1}{2}OP\cdot OA\sin 60°+\frac{1}{2}OP\cdot OB\sin 60° =\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin 120° \tag{2}$$

两边都除以 $\frac{1}{2}OP\cdot OA\cdot OB$, 整理得

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{OP}$$

故知命题成立.

通过比较各种证法，我们发现，这里的三角证法显得新颖、直观，颇让人乐于接受.