云南大学学报(自然科学版),2018,40(3):405~414　　DOI: 10.7540/j.ynu.20170470
Journal of Yunnan University

容斥原理及在环形错排计数中的应用*

唐善刚
(西华师范大学 数学与信息学院,四川 南充 637009)

摘要: 应用组合分析方法研究赋权有限集上的容斥原理,得到容斥原理的一些新命题,拓广并统一了已有文献的研究结果,将其用于恒等群、循环群与二面体群作用下的环形错排的计数,得到在恒等群、循环群与二面体群作用下的环形错排的显式计数公式与组合恒等式,拓展了已有文献的相关结果.

关键词: 容斥原理; 恒等群; 循环群; 二面体群; 环形错排; 组合恒等式
中图分类号: O 157.1　　文献标志码: A　　文章编号: 0258-7971(2018)03-0405-10

定义 1[1] A 是非空有限集,G 是加群,设 w 是 A 到 G 的映射,对任意 $a\in A$,称 $w(a)$ 为 a 的权,A 称之为 w 下的赋权有限集,对 $X\subseteq A$,令 $W(X)=\sum\limits_{a\in X}w(a)$,称 $W(X)$ 为 X 的权,并约定 $W(\varnothing)=0$.

设 m 为正整数,n_i 是正整数$(1\leqslant i\leqslant m)$,且$\sum\limits_{i=1}^{m}n_i=n$.令 $N_i=\{1,2,\cdots,n_i\}(1\leqslant i\leqslant m)$,$p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{in_i}(1\leqslant i\leqslant m)$ 是与 A 的元素有关的 n 个性质(或称为命题),令 $P_i=\{p_{ij}\mid j\in N_i\}(1\leqslant i\leqslant m)$,设 $S_i\subseteq T_i\subseteq N_i(1\leqslant i\leqslant m)$,$I_i\subseteq N_i(1\leqslant i\leqslant m)$,非负整数 $k\leqslant m$,$s_i,t_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 为非负整数且 $s_i\leqslant t_i\leqslant n_i(1\leqslant i\leqslant m)$.设 A_{I_i} 表示 A 中具有 P_i 中的性质 $p_{it}(t\in I_i)$ 的那些元素组成的集合,特别地,当 I_i 为空集时,约定 $A_{I_i}=A$;设 $A_{(I_i)}$ 表示 A 中恰好具有 P_i 中的性质 $p_{it}(t\in I_i)$ 的那些元素组成的集合;设 $A_{(S_i,T_i)}$ 表示 A 中至少具有 P_i 中的性质 $p_{it}(t\in S_i)$,但又至多具有 P_i 中的性质 $p_{it}(t\in T_i)$ 的那些元素组成的集合;设 $A_{(s_i,t_i)}$ 表示 A 中至少具有 P_i 中的 s_i 个性质,但又至多具有 P_i 中的 t_i 个性质的那些元素组成的集合.当 $0\leqslant l<k$ 时,约定 $\bigcap\limits_{i=k}^{l}A_{I_i}=A$,$\bigcap\limits_{i=k}^{l}A_{(I_i)}=A$,$\bigcap\limits_{i=k}^{l}A_{(S_i,T_i)}=A$,$\bigcap\limits_{i=k}^{l}A_{(s_i,t_i)}=A$.在本文中,当 B,C 为集合时,$B-C$ 表示 B 与 C 的差集.

对任意非负整数 $r_i\leqslant n_i(1\leqslant i\leqslant m)$,$I_i\subseteq N_i(k+1\leqslant i\leqslant m)$,文献[2]定义了权和式 $W_{r_1,\cdots,r_k(r_{k+1},\cdots,r_m)}$,文献[3]定义了权和式 $W_{r_1,\cdots,r_k,I_{k+1},\cdots,I_l(I_{l+1},\cdots,I_m)}$,设非负整数 $l_1\leqslant k,l_2\leqslant m-k$,本文将 $W_{r_1,\cdots,r_k(r_{k+1},\cdots,r_m)}$,$W_{r_1,\cdots,r_k,I_{k+1},\cdots,I_l(I_{l+1},\cdots,I_m)}$ 的定义统一延拓到权和式 $W_{r_1,\cdots,r_{l_1}(r_{l_1+1},\cdots,r_k),I_{k+1},\cdots,I_{k+l_2}(I_{k+l_2+1},\cdots,I_m)}$ 的定义,并以此来获得新的容斥原理.用下面的式(1)的右边来定义权和式 $W_{r_1,\cdots,r_{l_1}(r_{l_1+1},\cdots,r_k),I_{k+1},\cdots,I_{k+l_2}(I_{k+l_2+1},\cdots,I_m)}$ 为:

$$W_{r_1,\cdots,r_{l_1}(r_{l_1+1},\cdots,r_k),I_{k+1},\cdots,I_{k+l_2}(I_{k+l_2+1},\cdots,I_m)}=\sum_{\substack{I_i\subseteq N_i\\ |I_i|=r_i\\ 1\leqslant i\leqslant k}}W\left(\bigcap_{j=1}^{l_1}A_{I_j}\cap\bigcap_{j=1+l_1}^{k}A_{(I_j)}\cap\bigcap_{j=k+1}^{k+l_2}A_{I_j}\cap\bigcap_{j=k+l_2+1}^{m}A_{(I_j)}\right),\tag{1}$$

其中 $|I_i|$ 表示集合 I_i 的元素的个数$(1\leqslant i\leqslant k)$.

容斥原理是组合计数问题的重要计数方法[1-7],对由式(1)定义的 $W_{r_1,\cdots,r_{l_1}(r_{l_1+1},\cdots,r_k),I_{k+1},\cdots,I_{k+l_2}(I_{k+l_2+1},\cdots,I_m)}$ 应用组合分析方法,本文得到一个新的容斥原理,即 $W\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_{(s_i,t_i)}\cap\bigcap\limits_{i=k+1}^{m}A_{(S_i,T_i)}\right)$ 的显式计算公式,它是对

* 收稿日期: 2017-08-14
基金项目: 四川省教育厅自然科学重点项目(17ZA0383);国家自然科学基金(11401480).
作者简介: 唐善刚(1978-),男,四川人,副教授,主要从事计数组合方面的研究.E-mail: tangshangang2001@163.com.

文献[1-7]中的容斥原理 $W(r_1,\cdots,r_m)$,$W(A_{r_1,\cdots,r_k(I_{k+1},\cdots,I_m)})$,$W(A_{(r_1,\cdots,r_k,I_{k+1},\cdots,I_m)})$,$W(A_{\leqslant r_1,\cdots,r_k(I_{k+1},\cdots,I_m)})$与 $W(A_{r_{k+1},\cdots,r_m(r_1,\cdots,r_k)})$ 的拓广与统一.

本文要用到文献[5]中的一个组合恒等式,即下面的引理 1.

引理 1[5] 对于非负整数 d,s,t,且 $s\leqslant t$,令

$$\sum_{r=s}^{t}(-1)^{d-r}\binom{d}{r}=\xi_{(s,t,d)}.$$

则有

$$\xi_{(s,t,d)}=(-1)^{d-t}\binom{d-1}{t}+(-1)^{d-s}\binom{d-1}{s-1},$$

其中约定:$\binom{-1}{-1}=0;\binom{x}{y}=0,y>x\geqslant 0;\binom{-1}{x}=(-1)^x,x\geqslant 0;\binom{x}{0}=1,x\geqslant 0;\binom{x}{y}=0,x\geqslant 0>y.$

1 $W\left(\bigcap_{i=1}^{k}A_{(s_i,t_i)}\cap\bigcap_{i=k+1}^{m}A_{(S_i,T_i)}\right)$ 的显式计算公式

定理 1(容斥原理) l_1,l_2 为非负整数,且 $l_1\leqslant k,l_2\leqslant m-k,0\leqslant s_i\leqslant t_i\leqslant n_i(1\leqslant i\leqslant k)$,$S_i\subseteq T_i\subseteq N_i(k+1\leqslant i\leqslant m)$,则有

$$W\left(\bigcap_{i=1}^{k}A_{(s_i,t_i)}\cap\bigcap_{i=k+1}^{m}A_{(S_i,T_i)}\right)=\sum_{\substack{s_i\leqslant r_i\leqslant t_i\\ l_1+1\leqslant i\leqslant k}}\sum_{\substack{s_i\subseteq I_i\subseteq T_i\\ k+l_2+1\leqslant i\leqslant m}}\sum_{\substack{0\leqslant h_i\leqslant n_i\\ 1\leqslant i\leqslant l_1}}\sum_{\substack{S_i\subseteq Y_i\subseteq(N_i-T_i)\cup S_i\\ k+1\leqslant i\leqslant k+l_2}}(-1)^{\sum_{i=k+1}^{k+l_2}(|Y_i|-|S_i|)}\cdot$$
$$\prod_{i=1}^{l_1}\xi_{(s_i,t_i,l_{h_i})}W_{h_1,\cdots,h_{l_1}(r_{l_1+1},\cdots,r_k),Y_{k+1},\cdots,Y_{k+l_2}(I_{k+l_2+1},\cdots,I_m)}.\tag{2}$$

当 $l_1=k$ 时,此即为

$$W\left(\bigcap_{i=1}^{k}A_{(s_i,t_i)}\cap\bigcap_{i=k+1}^{m}A_{(S_i,T_i)}\right)=\sum_{\substack{S_i\subseteq I_i\subseteq T_i\\ k+l_2+1\leqslant i\leqslant m}}\sum_{\substack{0\leqslant h_i\leqslant n_i\\ 1\leqslant i\leqslant k}}\sum_{\substack{S_i\subseteq Y_i\subseteq(N_i-T_i)\cup S_i\\ k+1\leqslant i\leqslant k+l_2}}(-1)^{\sum_{i=k+1}^{k+l_2}(|Y_i|-|S_i|)}\cdot$$
$$\prod_{i=1}^{k}\xi_{(s_i,t_i,h_i)}W_{h_1,\cdots,h_k,Y_{k+1},\cdots,Y_{k+l_2}(I_{k+l_2+1},\cdots,I_m)}.\tag{3}$$

当 $l_2=m-k$ 时,此即为

$$W\left(\bigcap_{i=1}^{k}A_{(s_i,t_i)}\cap\bigcap_{i=k+1}^{m}A_{(S_i,T_i)}\right)=\sum_{\substack{s_i\leqslant r_i\leqslant t_i\\ l_1+1\leqslant i\leqslant k}}\sum_{\substack{0\leqslant h_i\leqslant n_i\\ 1\leqslant i\leqslant l_1}}\sum_{\substack{S_i\subseteq Y_i\subseteq(N_i-T_i)\cup S_i\\ k+1\leqslant i\leqslant m}}(-1)^{\sum_{i=k+1}^{m}(|Y_i|-|S_i|)}\cdot$$
$$\prod_{i=1}^{l_1}\xi_{(s_i,t_i,h_i)}W_{h_1,\cdots,h_{l_1}(r_{l_1+1},\cdots,r_k),Y_{k+1},\cdots,Y_m}.\tag{4}$$

当 $l_1=k,l_2=m-k$ 时,此即为

$$W\left(\bigcap_{i=1}^{k}A_{(s_i,t_i)}\cap\bigcap_{i=k+1}^{m}A_{(S_i,T_i)}\right)=\sum_{\substack{0\leqslant h_i\leqslant n_i\\ 1\leqslant i\leqslant k}}\sum_{\substack{S_i\subseteq Y_i\subseteq(N_i-T_i)\cup S_i\\ k+1\leqslant i\leqslant m}}(-1)^{\sum_{i=k+1}^{m}(|Y_i|-|S_i|)}\cdot$$
$$\prod_{i=1}^{k}\xi_{(s_i,t_i,h_i)}W_{h_1,\cdots,h_k,Y_{k+1},\cdots,Y_m}.\tag{5}$$

证明 根据集合的交、并运算,即得

$$\bigcap_{i=1}^{k}A_{(s_i,t_i)}\cap\bigcap_{i=k+1}^{m}A_{(S_i,T_i)}=\bigcup_{\substack{I_i\subseteq N_i\\ s_i\leqslant|I_i|\leqslant t_i\\ 1\leqslant i\leqslant k}}\bigcup_{\substack{S_i\subseteq I_i\subseteq T_i\\ k+1\leqslant i\leqslant m}}\bigcap_{i=1}^{m}A_{(I_i)},$$

以及

$$W\left(\bigcap_{i=1}^{k}A_{(s_i,t_i)}\cap\bigcap_{i=k+1}^{m}A_{(S_i,T_i)}\right)=\sum_{\substack{s_i\leqslant r_i\leqslant t_i\\ 1\leqslant i\leqslant k}}\sum_{\substack{I_i\subseteq N_i\\ |I_i|=r_i\\ 1\leqslant i\leqslant k}}\sum_{\substack{S_i\subseteq I_i\subseteq T_i\\ k+1\leqslant i\leqslant m}}W\left(\bigcap_{i=1}^{m}A_{(I_i)}\right).\tag{6}$$

设非负整数 $h_i \leqslant n_i(1 \leqslant i \leqslant l_1)$，$I_i \subseteq N_i(1 \leqslant i \leqslant m)$ 且 $|I_i| = h_i(1 \leqslant i \leqslant l_1)$，$|I_i| = r_i(l_1 + 1 \leqslant i \leqslant k)$，$Y_i \subseteq I_i(k + 1 \leqslant i \leqslant k + l_2)$，对任意 $a \in \bigcap_{i=1}^{m} A_{(I_i)}$，根据式(1) 便知，$w(a)$ 在 $W_{r_1,\cdots,r_{l_1}(r_{l_1+1},\cdots,r_k),Y_{k+1},\cdots,Y_{k+l_2}(I_{k+l_2+1},\cdots,I_m)}$ 中恰好被重复计算 $\prod_{i=1}^{l_1}\binom{h_i}{r_i}$ 次，再根据定义 1 便知，$W\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_{(I_i)}\right)$ 在 $W_{r_1,\cdots,r_{l_1}(r_{l_1+1},\cdots,r_k),Y_{k+1},\cdots,Y_{k+l_2}(I_{k+l_2+1},\cdots,I_m)}$ 中恰好被重复计算 $\prod_{i=1}^{l_1}\binom{h_i}{r_i}$ 次，据此，便得下面的式(7)：

$$W_{r_1,\cdots,r_{l_1}(r_{l_1+1},\cdots,r_k),Y_{k+1},\cdots,Y_{k+l_2}(I_{k+l_2+1},\cdots,I_m)} = \sum_{\substack{Y_i\subseteq I_i\subseteq N_i\\ k+1\leqslant i\leqslant k+l_2}} \sum_{\substack{0\leqslant h_i\leqslant n_i\\ 1\leqslant i\leqslant l_1}} \sum_{\substack{I_i\subseteq N_i\\ |I_i| = h_i\\ 1\leqslant i\leqslant l_1}} \sum_{\substack{I_i\subseteq N_i\\ |I_i| = r_i\\ l_1+1\leqslant i\leqslant k}} \prod_{i=1}^{l_1}\binom{h_i}{r_i} W\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_{(I_i)}\right). \tag{7}$$

由于式(7) 符合偏序关系为集合的包含关系与数的普通大小关系下的笛卡尔直积型的 Mobius - Rota 反演原理的条件[6-7]，从而对式(7) 应用 Mobius - Rota 反演原理[6-7]，即得下面的式(8)：

$$\sum_{\substack{I_i\subseteq N_i\\ |I_i| = r_i\\ 1\leqslant i\leqslant k}} W\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_{(I_i)}\right) = \sum_{\substack{I_i\subseteq Y_i\subseteq N_i\\ k+1\leqslant i\leqslant k+l_2}} \sum_{\substack{0\leqslant h_i\leqslant n_i\\ 1\leqslant i\leqslant l_1}} (-1)^{\sum_{i=k+1}^{k+l_2}(|Y_i|-|I_i|)} (-1)^{\sum_{i=1}^{l_1}(h_i-r_i)} \cdot$$
$$\prod_{i=1}^{l_1}\binom{h_i}{r_i} W_{h_1,\cdots,h_{l_1}(r_{l_1+1},\cdots,r_k),Y_{k+1},\cdots,Y_{k+l_2}(I_{k+l_2+1},\cdots,I_m)}. \tag{8}$$

将式(8) 代入式(6)，便得下面的式(9)：

$$W\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{(s_i,t_i)} \cap \bigcap_{i=k+1}^{m} A_{(S_i,T_i)}\right) = \sum_{\substack{S_i\subseteq I_i\subseteq T_i\\ k+1\leqslant i\leqslant m}} \sum_{\substack{I_i\subseteq Y_i\subseteq N_i\\ k+1\leqslant i\leqslant k+l_2}} \sum_{\substack{s_i\leqslant r_i\leqslant t_i\\ 1\leqslant i\leqslant k}} \sum_{\substack{0\leqslant h_i\leqslant n_i\\ 1\leqslant i\leqslant l_1}} (-1)^{\sum_{i=k+1}^{k+l_2}(|Y_i|-|I_i|)} (-1)^{\sum_{i=1}^{l_1}(h_i-r_i)} \cdot$$
$$\prod_{i=1}^{l_1}\binom{h_i}{r_i} W_{h_1,\cdots,h_{l_1}(r_{l_1+1},\cdots,r_k),Y_{k+1},\cdots,Y_{k+l_2}(I_{k+l_2+1},\cdots,I_m)}. \tag{9}$$

由引理 1，即得下面的式(10) 与式(11)：

$$\sum_{\substack{s_i\leqslant r_i\leqslant t_i\\ 1\leqslant i\leqslant l_1}} (-1)^{\sum_{i=1}^{l_1}(h_i-r_i)} \prod_{i=1}^{l_1}\binom{h_i}{r_i} = \prod_{i=1}^{l_1}\xi_{(s_i,t_i,h_i)}, \tag{10}$$

$$\sum_{\substack{S_i\subseteq I_i\subseteq T_i\\ k+1\leqslant i\leqslant k+l_2}} \sum_{\substack{I_i\subseteq Y_i\subseteq N_i\\ k+1\leqslant i\leqslant k+l_2}} (-1)^{\sum_{i=k+1}^{k+l_2}(|Y_i|-|I_i|)} =$$
$$\sum_{\substack{S_i\subseteq Y_i\subseteq N_i\\ k+1\leqslant i\leqslant k+l_2}} \sum_{\substack{S_i\subseteq I_i\subseteq |Y_i\cap T_i|\\ k+1\leqslant i\leqslant k+l_2}} (-1)^{\sum_{i=k+1}^{k+l_2}(|Y_i\cap T_i|-|I_i|)} (-1)^{\sum_{i=k+1}^{k+l_2}|Y_i-T_i|} =$$
$$\sum_{\substack{S_i\subseteq Y_i\subseteq N_i\\ k+1\leqslant i\leqslant k+l_2}} \sum_{\substack{|S_i|\leqslant c_i\leqslant Y_i\cap T_i\\ k+1\leqslant i\leqslant k+l_2}} (-1)^{\sum_{i=k+1}^{k+l_2}|Y_i-T_i|} (-1)^{\sum_{i=k+1}^{k+l_2}(|Y_i\cap T_i|-c_i)} \binom{|Y_i \cap T_i|-|S_i|}{c_i-|S_i|} =$$
$$\sum_{\substack{S_i\subseteq Y_i\subseteq N_i\\ k+1\leqslant i\leqslant k+l_2}} (-1)^{\sum_{i=k+1}^{k+l_2}|Y_i-T_i|} \prod_{i=k+1}^{k+l_2}\binom{|Y_i\cap T_i|-|S_i|-1}{|Y_i\cap T_i|-|S_i|} =$$
$$\sum_{\substack{S_i\subseteq Y_i\subseteq(N_i-T_i)\cup S_i\\ k+1\leqslant i\leqslant k+l_2}} (-1)^{\sum_{i=k+1}^{k+l_2}|Y_i-S_i|} = \sum_{\substack{S_i\subseteq Y_i\subseteq(N_i-T_i)\cup S_i\\ k+1\leqslant i\leqslant k+l_2}} (-1)^{\sum_{i=k+1}^{k+l_2}(|Y_i|-|S_i|)}. \tag{11}$$

最后，将式(11) 中的最后一个等式与式(10) 代入式(9)，化简便得

$$W\left(\bigcap_{i=1}^{k}A_{(s_i,t_i)}\cap\bigcap_{i=k+1}^{m}A_{(S_i,T_i)}\right)=\sum_{\substack{s_i\leqslant r_i\leqslant t_i\\ l_1+1\leqslant i\leqslant k}}\sum_{\substack{S_i\subseteq I_i\subseteq T_i\\ k+l_2+1\leqslant i\leqslant m}}\sum_{\substack{0\leqslant h_i\leqslant n_i\\ 1\leqslant i\leqslant l_1}}\sum_{\substack{S_i\subseteq Y_i\subseteq(N_i-T_i)\cup S_i\\ k+1\leqslant i\leqslant k+l_2}}(-1)^{\sum_{i=k+1}^{k+l_2}(|Y_i|-|S_i|)}\cdot$$

$$\prod_{i=1}^{l_1}\xi_{(s_i,t_i,h_i)}W_{h_1,\cdots,h_{l_1}(r_{l_1+1},\cdots,r_k),Y_{k+1},\cdots,Y_{k+l_2}(I_{k+l_2+1},\cdots,I_m)}.$$

也即式(2)成立,证毕.

特别地,在式(2)中当 $k=m$ 时,必有 $l_2=0$,便有下面的推论1.

推论1(容斥原理) 非负整数 $l\leqslant m$,s_i,t_i 是非负整数,且 $s_i\leqslant t_i\leqslant n_i(1\leqslant i\leqslant m)$,则有

$$W\left(\bigcap_{i=1}^{m}A_{(s_i,t_i)}\right)=\sum_{\substack{s_i\leqslant r_i\leqslant t_i\\ l+1\leqslant i\leqslant m}}\sum_{\substack{0\leqslant h_i\leqslant n_i\\ 1\leqslant i\leqslant l}}\prod_{i=1}^{l}\xi_{(s_i,t_i,h_i)}W_{h_1,\cdots,h_l(r_{l+1},\cdots,r_m)}. \tag{12}$$

当 $l=m$ 时,此即为

$$W\left(\bigcap_{i=1}^{m}A_{(s_i,t_i)}\right)=\sum_{\substack{0\leqslant h_i\leqslant n_i\\ 1\leqslant i\leqslant m}}\prod_{i=1}^{m}\xi_{(s_i,t_i,h_i)}W_{h_1,\cdots,h_m}. \tag{13}$$

特别地,在式(2)中当 $k=0$ 时,必有 $l_1=0$,便有下面的推论2.

推论2(容斥原理) 非负整数 $l\leqslant m$,$S_i\subseteq T_i\subseteq N_i(1\leqslant i\leqslant m)$,则有

$$W\left(\bigcap_{i=1}^{m}A_{(S_i,T_i)}\right)=\sum_{\substack{S_i\subseteq I_i\subseteq T_i\\ l+1\leqslant i\leqslant m}}\sum_{\substack{S_i\subseteq Y_i\subseteq(N_i-T_i)\cup S_i\\ 1\leqslant i\leqslant l}}(-1)^{\sum_{i=1}^{l}(|Y_i|-|S_i|)}W_{Y_1,\cdots,Y_l(I_{l+1},\cdots,I_m)}. \tag{14}$$

当 $l=m$ 时,此即为

$$W\left(\bigcap_{i=1}^{m}A_{(S_i,T_i)}\right)=\sum_{\substack{S_i\subseteq Y_i\subseteq(N_i-T_i)\cup S_i\\ 1\leqslant i\leqslant m}}(-1)^{\sum_{i=1}^{m}(|Y_i|-|S_i|)}W_{Y_1,\cdots,Y_m}. \tag{15}$$

注1 式(13)中当 $s_i=t_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 时,即得文献[1]的定理1;式(4)中当 $t_i=n_i(1\leqslant i\leqslant k)$,$S_i=T_i(k+1\leqslant i\leqslant m)$ 时,即得文献[3]的定理3;文献[4]的定理2仅仅是式(13)在 $t_i<n_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 情形下的结果,但文献[4]并未得到 $s_i\leqslant t_i\leqslant n_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 情形下的结果,式(13)改进了文献[4]的定理2的不足,式(12)则是对文献[4]的定理2的拓广,式(2)从理论上拓广并统一了文献[1-5]的所有容斥原理,而式(5),(13)与(15)则是组合计数问题的常用计数工具.

2 群作用下的环形错排的计数

下面仅就式(13)给出其在群作用下的环形错排的计数中的一个应用.

文献[8-9]给出了计算错排问题的计数方法与计数公式,但未能从群作用于集合的等价类的计数方法来讨论一般情形下的环形错排的计数.已知 $b_1,\cdots b_n$ 是两两互异的元素,且 b_i 的个数为 $m_i(1\leqslant i\leqslant n)$,设由 m_i 个 $b_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 组成的多重集合 $S=\{m_i\cdot b_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$,将 S 配置在带有标号的正多边形的顶点上,并对 b_i 的贯数[10]与贯长[10]进行限制$(1\leqslant i\leqslant n)$,文献[10]得到恒等群作用下 S 的带有贯数与贯长限制的环形排列的计数公式,文献[11]得到循环群与二面体群作用下 S 的带有贯数与贯长限制的环形排列的计数公式,而文献[12-13]的结果仅仅是文献[10-11]的特例情形.但当 b_i 的个数为 $\infty(1\leqslant i\leqslant n)$ 时,显然对 b_i 的贯数与贯长进行限制$(1\leqslant i\leqslant n)$已无任何意义,考虑 $S=\{\infty\cdot b_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ 将配置在带有标号的正多边形的顶点上,在恒等群、循环群与二面体群作用下的的环形错排[14]的计数问题还未见有文献研究,本文主要应用容斥原理的式(13)以及确定边色数的新上界[15]的方法研究恒等群、循环群与二面体群作用下的环形错排的计数问题,并得到一系列组合恒等式.

环形错排计数问题 已知 m,n,k 是正整数.现有 n 种两两不同的颜色,记之为 $b_1,\cdots,b_n$,令多重集合 $B=\{\infty\cdot b_1,\cdots,\infty\cdot b_n\}$.对$\{1,\cdots,n\}$作 m 部划分,设$\{1,\cdots,n\}=\bigcup_{i=1}^{m}A_i$,且 $|A_i|=n_i\geqslant 0$,$\sum_{i=1}^{m}n_i=n$.令 B_i

$=\{\infty\cdot b_j\mid j\in A_i\}(1\leqslant i\leqslant m).r_i,s_i$ 是非负整数,且 $r_i\leqslant s_i\leqslant n_i(1\leqslant i\leqslant m)$,求用 B 中的颜色去着色正 k 边形的 k 个顶点,并使得相邻顶点不同色且 B_i 中至少有 r_i 种颜色未被使用,至多有 s_i 种颜色未被使用$(1\leqslant i\leqslant m)$ 的着色方式数 $Q_k^n(r_1,s_1;\cdots;r_m,s_m)$ 的计数公式.

2.1　有关概念与引理　将正 k 边形的 k 个顶点按照逆时针方向依次标号为 $v_1,\cdots,v_k$. $\mathbf{Z}$ 表示整数集,对任意 $i\in\mathbf{Z}$,用 θ_i 表示正 k 边形的 k 个顶点的集合 $\{v_1,\cdots,v_k\}$ 上的如下置换:

$$\theta_i: v_j\to v_{j+i}, 1\leqslant j\leqslant k,$$

其中顶点 v_{j+i} 的下标 $j+i$ 约定为是 $j+i$ 除以 k 的最小正剩余数.

对任意 $i\in\mathbf{Z}$,用 η_i 表示顶点集 $\{v_1,\cdots,v_k\}$ 上的如下置换:

$$\eta_i: v_j\to v_{i-j}, 1\leqslant j\leqslant k,$$

其中顶点 v_{i-j} 的下标 $i-j$ 约定为是 $i-j$ 除以 k 的最小正剩余数.

设 $G_0=\{\theta_0\}$,则 G_0 是恒等群;设 $G_1=\{\theta_i\mid i\in\mathbf{Z}\}$,则 G_1 是循环群,且 $|G_1|=k$;设 $G_2=\{\theta_i\mid i\in\mathbf{Z}\}\cup\{\eta_i\mid i\in\mathbf{Z}\}$,则 G_2 是非循环群(称之为二面体群),且 $|G_2|=2k$.令 M 表示用 B 中的颜色去着色带有标号的正 k 边形的顶点 $v_1,\cdots,n_k$ 且使得相邻顶点不同色的各种着色方式的集合.

对于 $b_i\in B,\alpha\in M$,界定命题 $P_{b_i}(\alpha)$ 为:

P_{b_i}: b_i 在 α 中没有出现.

据此,设 $M_{b_i}=\{\alpha\in M\mid P_{b_i}(\alpha)\}$, $1\leqslant i\leqslant n$.

定义 2　设 $\alpha\in M$,不妨设在 α 中顶点 v_j 涂上的颜色为 $b_{\alpha_j}(1\leqslant j\leqslant k)$,定义如下的映射:

$$f_l: G_l\times M\to M,(\theta_i,\alpha)\to\beta,$$

其中在 β 中顶点 v_j 涂上的颜色为 $b_{i+\alpha_j}(1\leqslant j\leqslant k,i\in\mathbf{Z})$,这里 $l=0,1$.

定义 3　设 $\alpha\in M$,不妨设在 α 中顶点 v_j 涂上的颜色为 $b_{\alpha_j}(1\leqslant j\leqslant k)$,定义如下的映射:

$$f_2: G_2\times M\to M,(\theta_i,\alpha)\to\beta,(\eta_i,\alpha)\to\gamma,(\theta_i,\alpha)\to\beta,$$

其中 γ 中顶点 v_j 涂上的颜色为 $b_{i-\alpha_j}(1\leqslant j\leqslant k,i\in\mathbf{Z})$, β 中顶点 v_j 涂上的颜色为 $b_{i+\alpha_j}(1\leqslant j\leqslant k,i\in\mathbf{Z})$.

注 2　在定义 2 与定义 3 中的 $b_{i+\alpha_j}$ 的下标 $i+\alpha_j$ 约定为是 $i+\alpha_j$ 除以 k 的最小正剩余数, $b_{i-\alpha_j}$ 的下标 $i-\alpha_j$ 约定为是 $i-\alpha_j$ 除以 k 的最小正剩余数.易知, f_l 为群 G_l 在 M 上的作用[16],这里 $l=0,1,2$.

定义 4　设 $\lambda,\mu\in M$,定义 λ 与 μ 之间的二元关系 R_{f_l} 为:

若存在 $\delta\in G_l$,使得 $\lambda=f_l((\delta,\mu))$,记为 $\lambda R_{f_l}\mu$,

这里 $l=0,1,2$.

注 3　易知, R_{f_l} 为 M 上元素间的等价关系, $l=0,1,2$.

设 $I_i\subseteq A_i(1\leqslant i\leqslant m)$,设 $\bigcap\limits_{i=1}^{m}\bigcap\limits_{j\in I_i}M_{b_j}$ 被 R_{f_l} 划分成的等价类(轨道)的个数为 $H^l\left(\bigcap\limits_{i=1}^{m}\bigcap\limits_{j\in I_i}M_{b_j}\right)$, $l=0,1,2$.根据 Burnside 引理[16],即得下面的 3 个引理.

引理 2　$$H^0\left(\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}\right)=\psi_{\bigcap\limits_{i=1}^{m}\bigcap\limits_{j\in I_i}M_{b_j}}(\theta_0),\tag{16}$$

其中

$$\psi_{\bigcap\limits_{i=1}^{m}\bigcap\limits_{j\in I_i}M_{b_j}}(\theta_0)=\left|\left\{\alpha\in\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}\mid f_0((\theta_0,\alpha))=\alpha\right\}\right|.$$

引理 3　$$H^1\left(\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}\right)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\psi_{\bigcap\limits_{i=1}^{m}\bigcap\limits_{j\in I_i}M_{b_j}}(\theta_i),\tag{17}$$

其中

$$\psi_{\bigcap\limits_{i=1}^{m}\bigcap\limits_{j\in I_i}M_{b_j}}(\theta_i)=\left|\left\{\alpha\in\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}\mid f_1((\theta_i,\alpha))=\alpha\right\}\right|.$$

引理4 $H^2\left(\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}\right)=\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{k}\psi_{\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}}(\theta_i)+\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{k}\psi_{\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}}(\eta_i)$, (18)

其中

$$\psi_{\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}}(\eta_i)=\left|\left\{\alpha\in\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}\mid f_2((\eta_i,\alpha))=\alpha\right\}\right|,$$

$$\psi_{\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}}(\theta_i)=\left|\left\{\alpha\in\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}\mid f_1((\theta_i,\alpha))=\alpha\right\}\right|.$$

注4 当 $I_i=\varnothing$ 时,约定 $\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}=M$.

2.2 $\psi_{\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}}(\theta_i)$ 的计算公式 对任意 $\theta_i\in G_1$,根据置换的轮换分解[16],θ_i 恰好分解为 $\gcd(i,k)$ 个两两不相交的 $\frac{k}{\gcd(i,k)}$ - 轮换的乘积,由初等数论的知识,不难证明 θ_i 的两两不相交的 $\frac{k}{\gcd(i,k)}$ - 轮换分解为:

$$\theta_i=\prod_{j=1}^{\gcd(i,k)}\left(v_j,v_{j+i},v_{j+2i},\cdots,v_{j+\left(\frac{k}{\gcd(i,k)}-1\right)i}\right), \tag{19}$$

其中 $\gcd(i,k)$ 表示 i 与 k 的最大公约数;对任意 $x\in\mathbf{Z}$,v_{j+xi} 的下标 $j+xi$ 约定为是 $j+xi$ 除以 k 的最小正剩余数;$\bigcup_{j=1}^{\gcd(i,k)}\{v_{j+xi}\mid x\in\mathbf{Z}\}=\{v_1,\cdots,v_k\}$.

对任意非负整数 $t_i\leqslant n_i$,设 $I_i\subseteq A_i$ 且 $|I_i|=t_i(1\leqslant i\leqslant m)$,由式(19),$\psi_{\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}}(\theta_i)$ 等于 $\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}$ 中使得顶点 $v_{j+xi}(x\in\mathbf{Z})$ 着同一种颜色 $(1\leqslant j\leqslant\gcd(i,k))$ 的着色方式数.据此,有下面的结论.

① 若 $\gcd(i,k)=1$,即 θ_i 是一个 k - 轮换,则 $\psi_{\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}}(\theta_i)=0$.

② 若 $1<\gcd(i,k)<k$,则 $\psi_{\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}}(\theta_0)=\left(n-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)\left(n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)^{\gcd(i,k)-1}$.

③ 若 $\gcd(i,k)=k$,设 $\psi_{\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}}(\theta_i)=a_{n,k}$,不难得到 $a_{n,k}$ 的递推关系式为

$$\left(n-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)\left(n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)^{k-1}=a_{n,k}+a_{n,k-1},a_{n,1}=0,k\geqslant 2.$$

解上述递归关系式,得到

$$a_{n,k}=(-1)^k\left(n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)+\left(n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)^k,k\geqslant 1.$$

2.3 $\psi_{\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}}(\eta_i)$ 的计算公式 对任意 $\eta_i\in G_2$,由置换的轮换分解[16],不妨设 η_i 的两两不相交的轮换分解为:

$$\eta_i=\prod_{j\in\mathbf{Z}}(v_j,v_{i-j}). \tag{20}$$

根据式(20),$\psi_{\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}}(\eta_i)$ 等于 $\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}$ 中使得正 k 边形的顶点 $v_j,v_{i-j}(j\in\mathbf{Z})$ 着同一种颜色的着色方式数.在式(20)中,$v_j=v_{i-j}$ 当且仅当 $2j\equiv i(\bmod k)$,即 $v_j=v_{i-j}$ 当且仅当 $\gcd(2,k)$ 整除 i,于是 $\gcd(2,k)$ 整除 i 时,式(20)中恰好有 $\gcd(2,k)$ 个 1 - 轮换;当 $\gcd(2,k)$ 不整除 i 时,即 k 是偶数,i 是奇数时,式(20)中恰好有 $\frac{k}{2}$ 个 2 - 轮换;在式(20)中,$v_{j+1}=v_{i-j+1}$ 或 $v_{j+1}=v_{i-j}$ 当且仅当 $\gcd(2,k)$ 整除 $i+1$.据此,对任意非负整数 $t_i\leqslant n_i$,设 $I_i\subseteq A_i$ 且 $|I_i|=t_i(1\leqslant i\leqslant m)$,有下面的结论.

④ 若 $\gcd(2,k)=1$，则对任意 $i\in\mathbf{Z}$，$\psi_{\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}}(\eta_i)=0$.

⑤ 若 $\gcd(2,k)=2$，则对任意奇数 i，$\psi_{\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}}(\eta_i)=0$.

⑥ 若 $\gcd(2,k)=2$，则对任意偶数 i，由于式(20)中恰好有$\frac{k}{2}-1$个 2－轮换、式(20)中恰好有 2 个 1－轮换，于是 $\psi_{\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}}(\eta_i)=\left(n-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)\left(n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)^{\frac{k}{2}}$.

2.4　主要结果

将上述 $\psi_{\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}}(\eta_i)$ 与 $\psi_{\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}}(\theta_i)$ 的计算公式分别代入式(16)～(18)，化简即得下面的定理.

定理 2　对任意非负整数 $t_i\leqslant n_i$，$I_i\subseteq A_i$ 且 $|I_i|=t_i(1\leqslant i\leqslant m)$，有

$$H^0\left(\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}\right)=(-1)^k\left(n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)+\left(n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)^k, \tag{21}$$

其中 $k\geqslant 1$.

定理 3　对任意非负整数 $t_i\leqslant n_i$，$I_i\subseteq A_i$ 且 $|I_i|=t_i(1\leqslant i\leqslant m)$，则有

$$H^1\left(\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}\right)=\frac{1}{k}\left[(-1)^k\left(n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)+\left(n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)^k\right]+\frac{1}{k}\left(n-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)\sum_{\substack{d|k\\1<d<k}}\left(n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)^{d-1}\varphi\left(\frac{k}{d}\right), \tag{22}$$

其中 $k\geqslant 1$，$\varphi(s)$ 是 s 的欧拉函数，即 $\varphi(s)=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant s\\ \gcd(s,i)=1}}1$，$d\mid k$ 表示 d 整除 k.

定理 4　对任意非负整数 $t_i\leqslant n_i$，$I_i\subseteq A_i$ 且 $|I_i|=t_i(1\leqslant i\leqslant m)$，有

$$H^2\left(\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}\right)=\frac{1}{2k}\left[\left(n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)^k-\left(n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)\right]+\frac{1}{2k}\left(n-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)\sum_{\substack{d|k\\1<d<k}}\varphi\left(\frac{k}{d}\right)\left(n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)^{d-1}, \tag{23}$$

其中 $k\geqslant 1$，且 $k\equiv 1(\bmod 2)$.

$$H^2\left(\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}\right)=\frac{1}{4}\left(n-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)\left(n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)^{\frac{k}{2}}+\frac{1}{2k}\left[\left(n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)+\left(n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)^k\right]+\frac{1}{2k}\left(n-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)\sum_{\substack{d|k\\1<d<k}}\varphi\left(\frac{k}{d}\right)\left(n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)^{d-1}, \tag{24}$$

其中 $k\geqslant 1$，且 $k\equiv 0(\bmod 2)$.

对任意非负整数 $t_i\leqslant n_i(1\leqslant i\leqslant m)$，令

$$H^l_{t_1,\cdots,t_m}=\sum_{\substack{I_i\subseteq A_i\\|I_i|=t_i\\1\leqslant i\leqslant m}}H^l\left(\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j\in I_i}M_{b_j}\right),\ l=0,1,2. \tag{25}$$

将式(25)代入式(13)，即有

定理 5　G_l 作用于 M 下的 $Q_k^n(r_1,s_1;\cdots;r_m,s_m)$ 与 $H^l_{t_1,\cdots,t_m}$ 满足的关系式为

$$Q_k^n(r_1,s_1;\cdots;r_m,s_m)=\sum_{\substack{0\leqslant t_i\leqslant n_i\\1\leqslant i\leqslant m}}\prod_{i=1}^{m}\xi_{(r_i,s_i,t_i)}H^l_{t_1,\cdots,t_m}, \tag{26}$$

其中 $l=0,1,2$.

于是,由式(21)~(26),便得下述3个定理.

定理6 G_0 作用于 M 下的 $Q_k^n(r_1,s_1;\cdots;r_m,s_m)$ 的显式计数公式为下面的式(27).

$$Q_k^n(r_1,s_1;\cdots;r_m,s_m)=\sum_{\substack{0\leqslant t_i\leqslant n_i\\1\leqslant i\leqslant m}}\prod_{i=1}^m\binom{n_i}{t_i}\prod_{i=1}^m\xi_{(r_i,s_i,t_i)}\left[(-1)^k\left(n-1-\sum_{i=1}^m t_i\right)+\left(n-1-\sum_{i=1}^m t_i\right)^k\right],\tag{27}$$

其中 $k\geqslant 1$.

定理7 G_1 作用于 M 下的 $Q_k^n(r_1,s_1;\cdots;r_m,s_m)$ 的显式计数公式为下面的式(28).

$$\begin{aligned}Q_k^n(r_1,s_1;\cdots;r_m,s_m)=&\frac{1}{k}\sum_{\substack{0\leqslant t_i\leqslant n_i\\1\leqslant i\leqslant m}}\prod_{i=1}^m\binom{n_i}{t_i}\prod_{i=1}^m\xi_{(r_i,s_i,t_i)}\cdot\\&\left[(-1)^k\left(n-1-\sum_{i=1}^m t_i\right)+\left(n-1-\sum_{i=1}^m t_i\right)^k+\right.\\&\left.\left(n-\sum_{i=1}^m t_i\right)\sum_{\substack{d\mid k\\1<d<k}}\left(n-1-\sum_{i=1}^m t_i\right)^{d-1}\varphi\left(\frac{k}{d}\right)\right],\end{aligned}\tag{28}$$

其中 $k\geqslant 1$.

定理8 G_2 作用于 M 下的 $Q_k^n(r_1,s_1;\cdots;r_m,s_m)$ 的显式计数公式为下面的式(29)与式(30).

$$\begin{aligned}Q_k^n(r_1,s_1;\cdots;r_m,s_m)=&\frac{1}{2k}\sum_{\substack{0\leqslant t_i\leqslant n_i\\1\leqslant i\leqslant m}}\prod_{i=1}^m\binom{n_i}{t_i}\prod_{i=1}^m\xi_{(r_i,s_i,t_i)}\left[\left(n-1-\sum_{i=1}^m t_i\right)^k-\left(n-1-\sum_{i=1}^m t_i\right)+\right.\\&\left.\left(n-\sum_{i=1}^m t_i\right)\sum_{\substack{d\mid k\\1<d<k}}\left(n-1-\sum_{i=1}^m t_i\right)^{d-1}\varphi\left(\frac{k}{d}\right)\right],\end{aligned}\tag{29}$$

其中 $k\geqslant 1$,且 $k\equiv 1(\mathrm{mod}2)$.

$$\begin{aligned}Q_k^n(r_1,s_1;\cdots;r_m,s_m)=&\frac{1}{4k}\sum_{\substack{0\leqslant t_i\leqslant n_i\\1\leqslant i\leqslant m}}\prod_{i=1}^m\binom{n_i}{t_i}\prod_{i=1}^m\xi_{(r_i,s_i,t_i)}\left[\left(n-\sum_{i=1}^m t_i\right)\left(n-1-\sum_{i=1}^m t_i\right)^{\frac{k}{2}}+\right.\\&2\left(n-1-\sum_{i=1}^m t_i\right)+2\left(n-1-\sum_{i=1}^m t_i\right)^k+\\&\left.2\left(n-\sum_{i=1}^m t_i\right)\sum_{\substack{d\mid k\\1<d<k}}\varphi\left(\frac{k}{d}\right)\left(n-1-\sum_{i=1}^m t_i\right)^{d-1}\right],\end{aligned}\tag{30}$$

其中 $k\geqslant 1$,且 $k\equiv 0(\mathrm{mod}2)$.

特别地,当 $s_i=0(1\leqslant i\leqslant m)$,$n>k$ 时,$Q_k^n(r_1,s_1;\cdots;r_m,s_m)=0$,从而有下面的3个组合恒等式.

推论3

$$\sum_{\substack{0\leqslant t_i\leqslant n_i\\1\leqslant i\leqslant m}}(-1)^{\sum_{i=1}^m t_i}\prod_{i=1}^m\binom{n_i}{t_i}\left[(-1)^k\left(n-1-\sum_{i=1}^m t_i\right)+\left(n-1-\sum_{i=1}^m t_i\right)^k\right]=0,\tag{31}$$

其中 n_i 为非负整数$(1\leqslant i\leqslant m)$,且$\sum_{i=1}^m n_i=n>k\geqslant 1$.

推论4

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{0\leqslant t_i\leqslant n_i\\1\leqslant i\leqslant m}}(-1)^{\sum_{i=1}^m t_i}\prod_{i=1}^m\binom{n_i}{t_i}&\left[(-1)^k\left(n-1-\sum_{i=1}^m t_i\right)+\left(n-1-\sum_{i=1}^m t_i\right)^k+\right.\\&\left.\left(n-\sum_{i=1}^m t_i\right)\sum_{\substack{d\mid k\\1<d<k}}\left(n-1-\sum_{i=1}^m t_i\right)^{d-1}\varphi\left(\frac{k}{d}\right)\right]=0,\end{aligned}\tag{32}$$

其中 n_i 为非负整数$(1\leqslant i\leqslant m)$,且$\sum_{i=1}^m n_i=n>k\geqslant 1$.

推论 5

$$\sum_{\substack{0\leqslant t_i\leqslant n_i\\1\leqslant i\leqslant m}}(-1)^{\sum_{i=1}^{m}t_i}\prod_{i=1}^{m}\binom{n_i}{t_i}\left[\left(n-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)\left(n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)^{\frac{k}{2}}+2\left(n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)+2\left(n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)^{k}+2\left(n-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)\sum_{\substack{d\mid k\\1<d<k}}\varphi\left(\frac{k}{d}\right)\left(n-1-\sum_{i=1}^{m}t_i\right)^{d-1}\right]=0, \tag{33}$$

其中 $k\equiv0(\bmod 2)$,n_i 为非负整数$(1\leqslant i\leqslant m)$,且$\sum_{i=1}^{m}n_i=n>k\geqslant1$.

特别地,当式(31)～(33)中的 $m=1$ 时,有如下的3个组合恒等式.

推论 6

$$\sum_{t=0}^{n}(-1)^{t}\binom{n}{t}\left[(-1)^{k}(n-1-t)+(n-1-t)^{k}\right]=0, \tag{34}$$

其中 $n>k\geqslant1$.

推论 7

$$\sum_{t=0}^{n}(-1)^{t}\binom{n}{t}\left[(-1)^{k}(n-1-t)+(n-1-t)^{k}+(n-t)\sum_{\substack{d\mid k\\1<d<k}}(n-1-t)^{d-1}\varphi\left(\frac{k}{d}\right)\right]=0, \tag{35}$$

其中 $n>k\geqslant1$.

推论 8

$$\sum_{t=0}^{n}(-1)^{t}\binom{n}{t}\left[(n-t)(n-1-t)^{\frac{k}{2}}+2(n-1-t)+2(n-1-t)^{k}+2(n-t)\sum_{\substack{d\mid k\\1<d<k}}(n-1-t)^{d-1}\varphi\left(\frac{k}{d}\right)\right]=0, \tag{36}$$

其中 $k\equiv0(\bmod 2)$,$n>k\geqslant1$.

参考文献:

[1] 魏万迪.广容斥原理及其应用[J].科学通报,1980,25(7):296-299.
WEI W D.A generalized principle of inclusion-exclusion and its applications[J].Chinese Science Bulletin,1980,25(7):296-299.

[2] 万宏辉.容斥原理的拓广及其应用[J].科学通报,1984,29(16):972-975.
WAN H H.A generalized principle of inclusion-exclusion and its applications[J].Chinese Science Bulletin,1984,29(16):972-975.

[3] 唐善刚.容斥原理的拓展及其应用(Ⅱ)[J].山东大学学报:理学版,2011,46(12):70-75.
TANG S G.A generalization of principle of inclusion-exclusion and its application(Ⅱ)[J].Journal of Shandong University:Natural Science,2011,46(12):70-75.

[4] 曹汝成.广义容斥原理及其应用[J].数学研究与评论,1988,8(4):526-530.
CAO R C.A generalized principle of inclusion-exclusion and its applications[J].Journal of Mathematical Research and Exposition,1988,8(4):526-530.

[5] 唐善刚.广义容斥原理及其应用[J].山东大学学报:理学版,2009,44(1):83-90.
TANG S G.Generalized principle of inclusion-exclusion and its application[J].Journal of Shandong University:Natural Science,2009,44(1):83-90.

[6] BENDER E A,GOLDMAN J R.On the applications of Mobius inversion in combinatorial analysis[J].American Mathematical Monthly,1975,82(8):789-803.

[7] RICHARD P S.Enumerative combinatorics:volume 1[M].Cambridge:Cambridge University Press,1997.

[8] 周国平.由错排问题引出的两个排列数公式[J].杭州师范学院学报:自然科学版,2003,2(1):77-79.
ZHOU G P.Question of alternate permutation to educe two formula of permutation figure[J].Journal of Hangzhou Teachers College:Natural Science Edition,2003,2(1):77-79.
[9] 房亮,冯增哲.错排问题的一种有效解法[J].山东科技大学学报:自然科学版,2005,24(2):84-87.
FANG L,FENG Z Z.An effective method for error permutation problems[J].Journal of Shandong University of Science and Technology:Natural Science,2005,24(2):84-87.
[10] 初文昌.限量排列与连贯的计数[J].应用数学学报,1986,9(1):10-16.
CHU W C.On the counting of permutations and runs with restricted size[J].Acta Mathematicae Applicatae Sinica,1986,9(1):10-16.
[11] 初文昌.环型排列与连贯的计数[J].数学的实践与认识,1988,18(2):35-43.
CHU W C.On the counting of circular permutations and runs with restricted size[J].Mathematics in Practice and Theory,1988,18(2):35-43.
[12] 张忠辅,蔡茂诚,林诒勋.关于连贯的计数问题[J].应用数学学报,1982,5(3):285-290.
ZHANG Z F,CAO M C,LIN Y X.On the count of runs[J].Acta Mathematicae Applicatae Sinica,1982,5(3):285-290.
[13] 张忠辅,蔡茂诚.连贯数的一个性质[J].数学学报,1984,27(3):314-318.
ZHANG Z F,CAO M C.A property of count for runs[J].Acta Mathematica Sinica,1984,27(3):314-318.
[14] 初文昌.关于连贯与错排计数问题的评注[J].数学研究与评论,1984,4(1):147-148.
CHU W C.Remarks for enumeration of runs and circular alternating permutations[J].Journal of Mathematical Research and Exposition,1984,4(1):147-148.
[15] 张埂,苗连英,丁伟,等.不含4圈的平面图的无圈边色数的新上界[J].云南大学学报:自然科学版,2011,33(6):634-638.
ZHANG G,MIAO L Y,DING W,et al.An upper bound of acyclic edge coloring of planar graphs without 4 cycles[J].Journal of Yunnan University:Natural Science Edition,2011,33(6):634-638.
[16] 韩士安,林磊.近世代数[M].北京:科学出版社,2004.
HAN S A,LIN L.Abstract algebra[M].Beijing:Science Press,2004.

Principle of inclusion-exclusion and its applications for combinatorial enumeration of circular alternating permutation

TANG Shan-gang
(College of Mathematics and Information,China West Normal University,Nanchong 637009,China)

Abstract: Principle of inclusion-exclusion on a weighted finite is studied by using combinatorial analysis method.Some new theorems for weighted principle of inclusion-exclusion are given and unify those of the previous studies.By using the new principle of inclusion-exclusion,enumerations for circular alternating permutation under identical transformation group and cycle group and dihedral group actions are studied.Some explicit enumerating formulas and combinatorial identities are obtained under identical transformation group and cycle group and dihedral group actions on circular alternating permutation.These results extend those of existing ones in some literatures.

Key words: principle of inclusion-exclusion; identical transformation group; cycle group; dihedral group; circular alternating permutation; combinatorial identities