Fuzzy 数的排序

李　茂

（基础科学部）

摘要　至今已有六种n个Fuzzy数的排序方法，但是都存在着某种缺陷。本文定义一种新的序值并用以确定n个Fuzzy数的顺序，从而弥补了上述各方法的不足。而且，本文还研究了更一般的情况。这为Fuzzy数在Fuzzy决策及Fuzzy专家系统中的应用提供了新的有效方法。

关键词　Fuzzy数，最大集，最小集，左序值，右序值，全序值，全序集

一、引　言

自1976年Jain以来，许多人讨论了Fuzzy数（简记F数）的排序问题，先后给出六种不同的方法。但是，这些方法或缺少简便的计算公式，或有自身逻辑不相容之处，或导致反直观的结果，或与Fuzzy集的有关理论相违背。鉴于F数在决策科学、专家系统及控制论中的重要作用，本文在上述各方法的基础上，从应用的角度进一步探讨F数的排序问题。

二、预备知识

定义1　实轴E_1上的正则凸Fuzzy集叫做F数，记作$\underset{\sim}{n}_i$，其隶属函数为$f_i(x)$，且$f(a_i)=1$。此时，称a_i为F数$\underset{\sim}{n}_i$的主值。

E_1上全体F数的集合记作$N(\widetilde{E}_1)$。

由于在应用中遇到的F数通常具有三角形、梯形、正态曲线等比较规则的隶属函数，所以本文前四节中仅以三角形隶属函数的F数为研究对象，然后再将有关结果加以推广。

定义2　设$N=\{\underset{\sim}{n}_i \mid \underset{\sim}{n}_i\in N(E_1),\ i=1,2,\cdots,n\}$，$S=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathrm{Supp}\underset{\sim}{n}_i$是$E_1$上的有界集。若Fuzzy集$\widetilde{M}$的隶属函数$f_M(x)$定义为

$$f_M(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{x-x_{min}}{x_{max}-x_{min}}\right]^k, & x_{min}\le x\le x_{max},\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

收稿日期：1987年12月16日

则称M为N的最大集；若Fuzzy集m的隶属函数$f_m(x)$定义为

$$f_m(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{x-x_{max}}{x_{min}-x_{max}}\right]^k, & x_{min}\leq x\leq x_{max},\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

则称m为N的最小集，其中$x_{min}=\wedge S$，$x_{max}=\vee S$，k为某个正参数，当开偶次方时仅取算术根，$\vee=sup$，$\wedge=inf$.

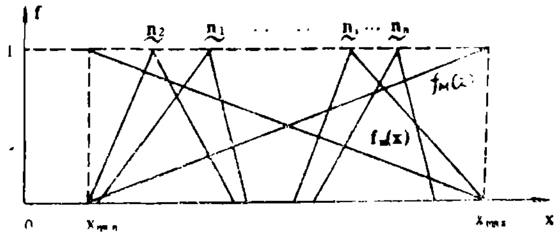

图　1

当k＝1时，$f_M(x)$及$f_m(x)$如图1所示。

命题1　对任意有限集$N\subset N(E_1)$，有

1）$f_M(x)$，$f_m(x)$是E_1上的连续函数；

2）$f_M(x)$是单调增加的，$f_m(x)$是单调减少的

证　显然。

二、F数的序值

定义3　设$\tilde{n}_i\in N(E_1)$，$\tilde{n}_i$的左序值$V_l(i,\lambda)$定义为

$V_l(i,\lambda)=(1-\lambda)[1-\vee(f_m(x)\wedge f_i(x))]+\lambda[1-f_m(n_i)]$；$\tilde{n}_i$的右序值$V_r(i,\lambda)$定义为

$$V_r(i,\lambda)=(1-\lambda)[\vee(f_M(x)\wedge f_i(x))]+\lambda f_M(n_i),$$

其中，$\lambda\in[0,1]$，$i=1,2,\cdots\cdots,n$。

λ反映了表达式中前后两部分在确定左、右序值中的重要程度，在某一过程中通常选取某个确定值，所以，下文一般省略λ。当λ＝0时，是〔3〕中所讨论的情况。当λ＝1时，只按主值讨论，与分明实数情况相同。

命题2　对任意$\tilde{n}_i\in N$，有$0\leq V_l(i)\leq 1$，$0\leq V_r(i)\leq 1$.

证　只证第一式。

由定义1，2及命题1，有

$$f_m(x)\wedge f_i(x)=\begin{cases}f_i(x), & a_i\leq x\leq b_i,\\ f_m(x), & b_i\leq x\leq c_i,\\ f_i(x), & c_i\leq x\leq d_i,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

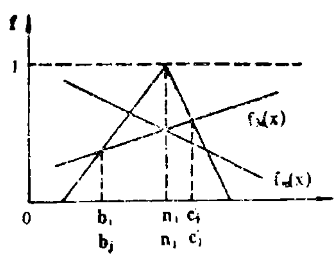

图　2

其中，a_i，b_i，c_i，d_i如图2所示，且$a_i<b_i<n_i<c_i<d_i$。所以$\vee[f_m(x)\wedge f_i(x)]=f_i(b_i)$

又 $0<f_i(b_i)<1$，$0<f_m(n_i)<1$，故

$$V_l(i)=(1-\lambda)[1-f_i(b_i)]+\lambda[1-f_m(n_i)]\geq 0,$$

$$V_l(i)=(1-\lambda)[1-f_i(b_i)]+\lambda[1-f_m(n_i)]$$

$$\leq(1-\lambda)+\lambda=1$$

因此，$0\leq V_l(i)\leq 1$。

定义4 设有限集$N\subset N(E_1)$，$\underset{\sim}{n}_i\in N$. $\underset{\sim}{n}_i$的全序值$V_t(i,\mu,\lambda)$定义为

$$V_t(i,\mu,\lambda)=(1-\mu)V_l(i,\lambda)+\mu V_r(i,\lambda)$$

其中 $\mu\in(0,1)$，$i=1,2,\cdots,n$。

由于在某过程中通常取固定的μ，λ，故下文简记为$V_t(i)$。

命题3 对有限集$N\subset N(E_1)$，$\underset{\sim}{n}_i\in N$，有$0\leq V_t(i)\leq 1$。

证 与命题2类似。

定义5 设，$\underset{\sim}{n}_i$，$\underset{\sim}{n}_j\in N, N\subset N(E_1),\lambda\in[0,1]$.若$V_l(i)<V_l(j)$，则称$\underset{\sim}{n}_i$左小于$\underset{\sim}{n}_j$，记作$\underset{\sim}{n}_i<_l\underset{\sim}{n}_j$；若$V_r(i)<V_r(j)$，则称$\underset{\sim}{n}_i$右小于$\underset{\sim}{n}_j$，记作$\underset{\sim}{n}_i<_r\underset{\sim}{n}_j$；若$\mu\in(0,1)$，$\lambda\in[0,1]$有$V_t(i)<V_t(j)$，则称$\underset{\sim}{n}_i$小于$\underset{\sim}{n}_j$，记作$\underset{\sim}{n}_i<\underset{\sim}{n}_j$。

当$k=1$，$\lambda=\frac{1}{2}$，时，$\underset{\sim}{n}_i<_l\underset{\sim}{n}_j$的四种情况如图3所示。此时，对$\underset{\sim}{n}_i<_r\underset{\sim}{n}_j$也有完全类似的四种情况，图示略。

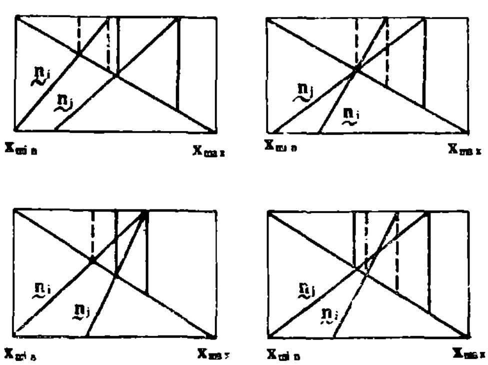

图 3

命题4 若对任意$\lambda\in[0,1]$均有$\underset{\sim}{n}_i<_l\underset{\sim}{n}_j$,不可能有$n_j<n_i$且$b_j<b_i$，符号意义见图2。

证 用反证法。

假定$n_i<n_j$且$b_i<b_j$对任$\lambda\in[0,1]$成立，由$f_m(x)$的单减性有

$f_m(n_i)>f_m(n_j)$且$f_m(b_j)>f_m(b_i)$，

则 $1-f_m(n_i)<1-f_m(n_j)$

及 $1-\vee(f_m(x)\wedge f_j(x))<1-\vee(f_m(x)\wedge f_i(x))$。

令$(1-f_m(nj))-(1-f_m(n_i))=\xi_1$,

$(1-\vee(f_m(x)\wedge f_j(x))-(1-\vee(f_m(x)\wedge f_j(x))=\xi_2$,

显然$\xi_1>0$，$\xi_2>0$。取λ_0，使$0<\lambda_0<\dfrac{\xi_2}{\xi_1+\xi_2}<1$，则有

$$\begin{aligned}V_l(i)-V_l(j)=&(1-\lambda_0)[1-\vee(f_m(x)\wedge f_i(x)]\\&+\lambda_0(1-f_m(n_i))-(1-\lambda_0)[1\\&-\vee(f_m(x)\wedge f_j(x)]-\lambda_0(1-f_m(n_j))\\=&(1-\lambda_0)\{[1-\vee(f_m(x)\wedge f_i(x))]\\&-[1-\vee(f_m(x)\wedge f_j(x)]\\&+\lambda_0[1-f_m(n_i))-(1-f_m(n_j))]\end{aligned}$$

$$= (1-\lambda_0)\xi_2+\lambda_0(-\xi_1)$$
$$> \left(1-\frac{\xi_2}{\xi_1+\xi_2}\right)\xi_2-\frac{\xi_1\xi_2}{\xi_1+\xi_2}$$
$$=0.$$

故$V_t(i)>V_t(j)$，即$\underset{\sim}{n}_j<_t\underset{\sim}{n}_i$。这与已知矛盾，因此命题4得证。

同理可得命题5。

命题5 若对任意$\lambda\in[0,1]$均有$\underset{\sim}{n}_i<_r\underset{\sim}{n}_j$，则不可能有$n_j<n_i$且$b_i<b_j$，符号的意义同上。

上述二命题说明，若对任意的λ有$\underset{\sim}{n}_i<_l\underset{\sim}{n}_j$（$\underset{\sim}{n}_i<_r\underset{\sim}{n}_j$），则图3中的情况（4）（对应$\underset{\sim}{n}_i<_r\underset{\sim}{n}_j$的相应情况）不可能存在。

定义6 设$\underset{\sim}{n}_i$，$\underset{\sim}{n}_j\in N\subset\mathcal{N}(E_1)$，N为有限集，又$\lambda\in[0,1]$。若$V_l(i)=V_l(j)$，则称$\underset{\sim}{n}_i$与$\underset{\sim}{n}_j$左相等，记作$\underset{\sim}{n}_i\approx_l\underset{\sim}{n}_j$；若$V_r(i)=V_r(j)$，则称$\underset{\sim}{n}_i$与$\underset{\sim}{n}_j$右相等，记作$\underset{\sim}{n}_i\approx_r\underset{\sim}{n}_j$；若$V_t(i)=V_t(j)$，则称$\underset{\sim}{n}_i$与$\underset{\sim}{n}_j$全相等，记作$\underset{\sim}{n}_i\approx\underset{\sim}{n}_j$。

命题6 若对某个$\lambda\in[0,1]$有$\underset{\sim}{n}_i<_l\underset{\sim}{n}_j$且$\underset{\sim}{n}_i<_r\underset{\sim}{n}_j$，则对该$\lambda$及任意$\mu\in(0,1)$有$\underset{\sim}{n}_i<\underset{\sim}{n}_j$；反之亦对。

证 设对某λ有$\underset{\sim}{n}_i<_l\underset{\sim}{n}_j$且$\underset{\sim}{n}_i<_r\underset{\sim}{n}_j$，则有

$$V_l(i)<V_l(j)\text{且}V_r(i)<V_r(j).$$

所以，对任意$\mu\in(0,1)$有

$$\begin{aligned}V_t(j)-V_t(i)&=(1-\mu)V_l(j)+\mu V_r(j)-(1-\mu)V_l(i)+\mu V_r(i)\\&=(1-\mu)(V_l(j)-V_l(i))+\mu(V_r(j)-V_r(i))>0\end{aligned}$$

即$\underset{\sim}{n}_i<\underset{\sim}{n}_j$。注意上述过程有可逆性，故命题得证。

命题7 设有限集$N\subset\mathcal{N}(E_1)$，$\underset{\sim}{n}_i$，$\underset{\sim}{n}_j\in N$。下面三种说法等价：

（1）对某$\lambda\in[0,1]$ $\underset{\sim}{n}_i\approx_l\underset{\sim}{n}_j$且$\underset{\sim}{n}_i\approx_r\underset{\sim}{n}_j$；

（2）对任意$\mu\in(0,1)$有$\underset{\sim}{n}_i\approx\underset{\sim}{n}_j$；

（3）$\underset{\sim}{n}_i=\underset{\sim}{n}_j$，"$=$"表示Fuzzy集相等。

证 （1）⇒（2） 因为对某λ有$\underset{\sim}{n}_i\approx_l\underset{\sim}{n}_j$且$\underset{\sim}{n}_i\approx_r\underset{\sim}{n}_j$，则有$V_l(i)=V_l(j)$且$V_r(i)=V_r(j)$，对任意$\mu$有

$$\begin{aligned}V_t(i)&=(1-\mu)V_l(i)+\mu V_r(i)\\&=(1-\mu)V_l(j)+\mu V_r(j)\\&=V_t(j).\end{aligned}$$

（2）⇒（1）

由上述过程的可逆性得证。

（1）⇒（3）

由（1）有对某λ，$V_l(i)=V_l(j)$且$V_r(i)=V_r(j)$，

即 $$\begin{aligned}V_l(i)-V_l(j)=&(1-\lambda)[1-\vee(f_m(x)\wedge f_i(x))]+\lambda(1-f_m(n_i))\\&-(1-\lambda)[1-\vee(f_m(x)\wedge f_j(x))]-\lambda(1-f_m(n_j))\end{aligned}$$

$$=(1-\lambda)\left[\vee\left(f_m(x)\wedge f_j(x)\right)-\vee\left(f_m(x)\wedge f_i(x)\right)\right]+\lambda\left(f_m(n_j)-f_m(n_i)\right)$$

$$=(1-\lambda)\left[f_m(b_j)-f_m(b_i)\right]+\lambda\left(f_m(n_j)-f_m(n_i)\right),$$

即 $f_m(b_j)-f_m(b_i)=0$，　$f_m(n_j)-f_m(n_i)=0$。又$f_m(x)$是单调减函数，必有$b_j=b_i$，　$n_j=n_i$，所以，点$(b_j,\ f_m(b_j))$与点$(b_i,\ f_m(b_i))$重合，$(n_j,\ 1)$与$(n_i,\ 1)$重合。同法可推得$(c'_j,\ f_m(c'_j))$与$(c'_i,\ f_m(c'_i))$重合，见图4。

又$f_i(x)$与$f_j(x)$均为三角形隶属函数，故

$$f_i(x)=f_j(x)\quad,\qquad x\in E_1\quad。$$

(3) ⇒ (1)

显然。

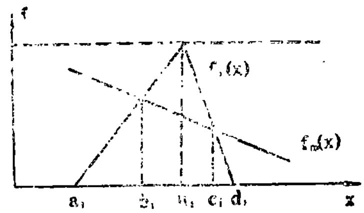

图　4

命题7是本文理论的重要完善，使“≈”与“=”在一定条件下统一起来，弥补了〔3〕中的不完善之处；即〔3〕中认为图5所示的两F数是相等的。

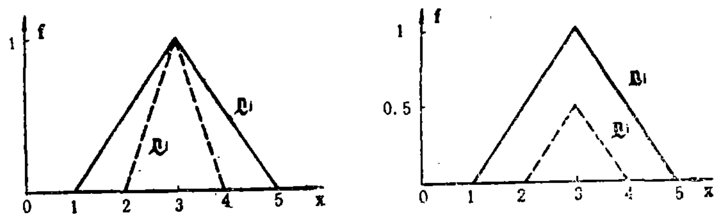

图　5

三、有关性质

命题8　对任有限集$N\subset\mathcal{N}(E_1)$，$\underset{\sim}{n}_i\in N$，

(1) $S=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathrm{supp}\,\underset{\sim}{n}_i$是$E_1$上的有界集；

(2) N的最大集M与最小集m对任给正数k是唯一的。

证 (1) 因为$\underset{\sim}{n}_i$是三角形隶属函数的F数，则隶属函数$f_i(x)$为

$$f_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a_i}{n_i-a_i}, & a_i\le x\le n_i,\\[2mm] \dfrac{x-d_i}{n_i-d_i}, & n_i\le x\le d_i,\\[2mm] 0, & \text{其它}。\end{cases}$$

则 $\operatorname{supp}\underset{\sim}{n}_i=[a_i, b_i]\subset E_1$。取 $x_{min}=\bigwedge_{i=1}^{n} a_i$，$x_{max}=\bigvee_{i=1}^{n} d_i$，必有 $x_{min}\le\bigcup_{i=1}^{n}\operatorname{supp}\underset{\sim}{n}_i\le x_{max}$，故 $S=\bigcup_{i=1}^{n}\operatorname{supp}\underset{\sim}{n}_i$ 是 E_1 上的有界集。

（2）由（1）及Zorn引理，对于某 N，x_{min} 及 X_{max} 是唯一确定的。再根据定义2，对于给定的正数k，$f_M(x)$ 及 $f_m(x)$ 是唯一确定的。所以，集合 M 与 m 均为唯一的。

命题9　对 $\underset{\sim}{n}_i\in N(E_1)$，及指定的λ和μ，必有唯一确定的左序值，右序值与全序值。

证　由定义1，n_i 有唯一的主值 n_i，又由 $f_M(x)$ 及 $f_m(x)$ 的特性，$\vee(f_m(x)\wedge f_i(x))$ 及 $f_m(\underset{\sim}{n}_i)$ 均唯一。所以，对于指定的λ，左序值可由定义3唯一确定。

同理可证得右序值的唯一性。

根据左、右序值的唯一性，对指定的μ可由定义4证得全序值的唯一性。

命题10　设 $N=\{\underset{\sim}{n}_i \mid \underset{\sim}{n}_i\in N(E_1), i=1, 2, \cdots, n\}$，用"≤"表示"<"或"≈"，则（N，≤）是全序集。

证　对于指定的λ及μ，由定义3—6有

（1）$\underset{\sim}{n}_i\le\underset{\sim}{n}_i$　　，　$i=1, 2, \cdots, n$；

（2）若 $\underset{\sim}{n}_i\le\underset{\sim}{n}_j$ 且 $\underset{\sim}{n}_j\le\underset{\sim}{n}_i$，则 $\underset{\sim}{n}_i\approx\underset{\sim}{n}_j$；

（3）若 $\underset{\sim}{n}_i\le\underset{\sim}{n}_j$ 且 $\underset{\sim}{n}_j\le\underset{\sim}{n}_k$，则 $\underset{\sim}{n}_i\le\underset{\sim}{n}_k$；

即(N,≤) 构成偏序集。又对 $\underset{\sim}{n}_i$，$\underset{\sim}{n}_j\in$ N有或 $V_t(i)\le V_t(j)$ 或 $V_t(j)\le V_t(i)$，即

（4）或 $\underset{\sim}{n}_i\le\underset{\sim}{n}_j$，或 $\underset{\sim}{n}_j\le\underset{\sim}{n}_i$。

因此，对任意指定的λ，μ及事先选取的k，（N，≤）是全序集。

命题11　有限集N⊂$N(E_1)$ 中必有最大元素（关于序≤）。

此命题是命题10的直接推论。

四、进一步的探讨

4.1 非正则的情况

设 $\underset{\sim}{n}_i\in N(E_1)$，隶属函数为

$$
f_i(x)=\begin{cases} w_i\dfrac{x-a_i}{n_i-a_i}, & a_i\le x\le n_i,\\[2mm] w_i\dfrac{x-d_i}{n_i-d_i}, & n_i\le x\le d_i,\\[2mm] 0, & \text{其它}, \end{cases}
$$

其中 $w_i\in(0, 1]$，$i=1, 2, \cdots, n$，见图6。这是比较一般的情况，有如下最大集和最小集定义：

定义7 设$\underset{\sim}{n}_i$具有图6所示的隶属函数，$i=1,2,\cdots,n$。$\{\underset{\sim}{n}_i\}$的最大集和最小集的隶属函数可定义如下：

$$f_M(x)=\begin{cases} w\left[\dfrac{x-x_{min}}{x_{max}-x_{min}}\right]^k, & x_{min}\leq x\leq x_{max} \\ 0, & 其它; \end{cases}$$

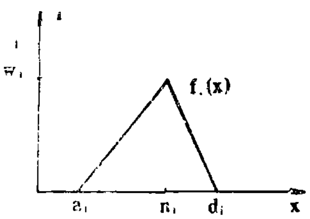

图 6

$$fm(x)=\begin{cases} w\left[\dfrac{x-x_{max}}{x_{min}-x_{max}}\right]^k, & x_{min}\leq x\leq x_{max}. \\ 0, & 其它, \end{cases}$$

其中　$w=\bigwedge_{i=1}^{n} w_i$，k为正参数，开偶次方时取算术根。在这种情况下，仍可一至三的方法进行排序，有关命题仍成立。

4.2 有限支集上的无穷多个F数

命题12　设$N=\{\underset{\sim}{n}_i \mid \underset{\sim}{n}_i\in N(E_1),\ i\in I\}$且$S=\bigcup_{i=I}\mathrm{Supp}\underset{\sim}{n}_i$是$E_1$上的有界集合，则

（1）$\forall \underset{\sim}{n}_i\in N$及指定的λ和μ，有唯一的全序值$V_i(i)$；

（2）对于任意指定的k，λ和μ，（N，≤）是全序集，“≤”的意义同命题10。

证　类似于命题9，10的证明，略。

（3）　$f_M(x)$与$f_m(x)$中k的意义

当k＝1时，$f_M(x)$与$f_m(x)$均为线性函数。在这种情况下的排序反映出决策者的折衷的倾向，这时的决策属于折衷类型的。

类似地，当$0<k<1$时，属于保守型的决策；当$k>1$时，属于冒险型决策。当k＝1，k＝1/2，k＝2时$f_M(x)$的图形如图7所示。

由上述分析可知，在实际应用中可根据需要选取不同的k值。

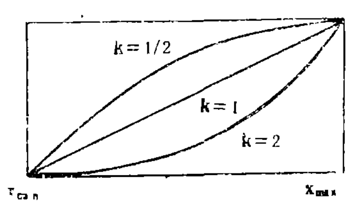

图 7

五、推　广

5.1 对F数的推广

（1）具有梯形隶属函数的F数

定义8　若$\underset{\sim}{n}_i \in N$（$E_1$），$i\in I$，隶属函数为

$$f_i(x)=\begin{cases} w_i\dfrac{x-a_i}{n_i-a_i}, & a_i\leq x\leq b_i, \\ w_i & b_i\leq x\leq c_i, \\ w_i\dfrac{x-d_i}{n_i-d_i}, & c_i\leq x\leq d_i, \\ 0, & \text{其 它}, \end{cases}$$

则称 $\dfrac{b_i+c_i}{2}$ 为$\underset{\sim}{n}_i$的主值，记为n_i，$w_i\in$（0，1〕。如图8所示。

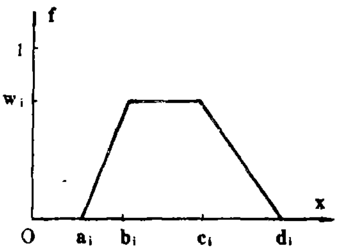

图　　8

此时，可按定义7得到最大集M与最小集m，进而可定义左序值、右序值及全序值，从而进行排序。

（2）$L-R$ 型F数

$L-R$型 F数的定义见文〔2〕第53～54页。本文只讨论参照函数L（x），R（x）在〔0，∞）内单调减少且连续的情况。即，$L-R$型F数$\underset{\sim}{n}_i$的隶属函数f_i（x）为

$$f_i(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{n_i-x}{\alpha_i}\right), & x\leq n_i, & \alpha_i>0, \\ R\left(\dfrac{x-n_i}{\beta_i}\right), & x\geq n_i, & \beta_i>0, \end{cases}$$

其中n_i为$\underset{\sim}{n}_i$的主值，α_i与β_i为常数，详见文〔2〕

命题13　设$L-R$型F数$\underset{\sim}{n}_i$，$N=\{\underset{\sim}{n}_i \mid i=1, 2, \cdots, n\}$，$S=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathrm{supp}\underset{\sim}{n}_i\subset E_1$是有界的，则

（1）对给定的k，λ及μ，全序值$V_t(i)$唯一确定的；

（2）（N，≤）是全序集，≤同命题10。

证　与命题10类似，略。

命题13中S有界的条件可改为任意S，即S无界，$S=(-\infty, +\infty)$或$S=(-\infty, b〕$或$S=〔a, +\infty)$。下面只讨论$S=(-\infty, +\infty)$的情况，后两种情况只是它的特例。

为了定义最大集M与最小集m，取α，使

$$\alpha=\bigvee_{i=1}^{n}\left[\left(\lim_{x\to+\infty}f_i(x)\right)\vee\left(\lim_{x\to-\infty}f_i(x)\right)\right]+\varepsilon,$$

其中$\varepsilon\geq 0$。作S的α水平截集S_α，则S_α必有界集合。令$x_{min}=\wedge S_\alpha$，$x_{min}=\vee S_\alpha$，则可定义$f_M(x)$及$f\ (x)$：

$$f_M(x)=\begin{cases}(1-\alpha)\left[\dfrac{x-x_{min}}{x_{max}-x_{min}}\right]^k+\alpha\ , & x_{min}\le x\le x_{max},\\ \alpha\ , & \text{其　它}\ ,\end{cases}$$

$$f_m(x)=\begin{cases}(1-\alpha)\left[\dfrac{x-x_{max}}{x_{min}-x_{max}}\right]^k+\alpha\ , & x_{min}\le x\le x_{max},\\ \alpha\ , & \text{其　它}\ ;\end{cases}$$

此时的M与m，可称为N的广义最大集与广义最小集。

命题14 对于无限支集S上的n个$L-R$型F数$\underset{\sim}{n}_i$，可用广义最大集M及广义最小集m进行排序，并且

（1）在上述意义下有唯一的左序值，右序值及全序值；

（2）（$\{\underset{\sim}{n}_i\}$，$\le$）构成全序集。

证 只证明左序值$V_1(i)$的唯一性。

对$\underset{\sim}{n}_i$，有

$$f_i(x)=\begin{cases}L\left(\dfrac{n_i-x}{\alpha_i}\right)\ , & x\le n_i,\quad \alpha_i>0\ ,\\ R\left(\dfrac{x-n_i}{\beta_i}\right)\ , & x\ge n_i,\quad \beta_i>0\ ,\end{cases}$$

各符号意义如上所述。

又，$f_m(x)$为单调减函数，设$f_m(x)\cap f_i(x)=\{(\xi_1, f_m(\xi_1)),(\xi_2, f_m(\xi_2))\}$，由$f_i(x)$的性质有

$$f_m(x)\wedge f_i(x)=\begin{cases}L\left(\dfrac{n_i-x}{\alpha_i}\right)\ , & x_{min}\le x\le \xi_1\ ,\\ f_m(x) & \xi_1\le x\le \xi_2\ ,\\ R\left(\dfrac{x-n_i}{\beta_i}\right)\ , & \xi_2\le x\le x_{max}\ ,\\ \alpha\ , & \text{其　它}\ ,\end{cases}$$

且$\xi_1<n_i<\xi_2$。再根α的取值，可选取较小的ε使$\alpha<f_m(\xi_1)$，则$\vee(f_m(x)\wedge f_i(x))=f_m(\xi_1)$。又$f_m(n_i)$也是唯一的，则在给定的k，$\lambda$情况下，$V_1(i)$是唯一的。

5.2 对最大集M与最小集m的推广

下面给出最大集M与最小集m的一般定义。

定义9 设函数f_M: $E_1 \rightarrow [0, 1]$，且满足

（1）f_M单调增加；

（2）f_M连续；

（3）$f_M(-\infty)=0$， $f_M(+\infty)=1$。

则由f_M作隶属函数的Fuzzy集M就叫E_1上的最大集；若$f_m(x)=f_M(\eta-x)$，则由f_m作隶属函数的Fuzzy集m就叫E_1上的最小集，其中η为常数，可据需要选取。

关于用定义9的F数排序问题，本文暂不讨论。

5.3 关于F数的相等

在应用中普遍感到，用Fuzzy集的相等来定义F数的相等有些过于严格，但放宽条件后又不应出现逻辑上的不相容性。本文提出的等序值F数只是数相等的一种定义方式，还有等水平，等主值等定义方式。这些定义的合理性已得到了实践的验证，但所产生的一系列理论问题尚待研究。

参 考 文 献

〔1〕R.Jain, A procedure for multi—aspect decision making using fuzzy sets, Internat. J. Systems Sci. 8 (1977)

〔2〕D. Dubois and H. Prade, Fuzzy sets and sysems, theory and applications, Academic Press, New York, 1980

〔3〕Shan—Huo Chen Ranking fuzzy numbers with maximizing set and minimizing set, Fuzzy Sets and Systems, 17 (1985)

Ranking of Fuzzy Numders

Li Mao

Abstract

Up to now, there are six methods for ranking n fuzzy numbers in order, but these methods contain certain defects. In this paper, a new ordering value is defined and is used to determine the order of n fuzzy numbers, hence it is remedies the defects existing in above mentioned methods. And also in this paper, more genral cases are discussed. This is a new effective method for application of fuzzy numbers to fuzzy decision and fuzzy expert system.

Key words Fuzzy number, Maximizing set, Minimizing set, Left ordering value, Right ordering value, Total ordering value, Total ordering value, Total ordering set