单 位 代 码	10445
学　　　号	2011020751
分　类　号	O151.2
研究生类别	全日制

山东師範大學

硕 士 学 位 论 文

论 文 题 目　　关于某些三对角矩阵的研究

学科专业名称　　应用数学

申 请 人 姓 名　　沈诺

导　师　姓　名　　王洪伟 教授　王江鲁 教授

论文提交时间　　2014 年 3 月 24 日

山东师范大学研究生学院制

目 录

中文摘要

三对角矩阵是一类重要的特殊矩阵, 它在工程学, 医学和信号处理中有着广泛的应用. 特别是在求解差分方程、微分方程以及延滞微分方程时, 常常需要计算三对角矩阵的幂和逆. 正是由于三对角矩阵的应用广泛, 近几年来, 三对角矩阵的性质引起了人们相当大的研究兴趣. 本文主要研究两类复三对角矩阵的相关问题, 如矩阵的行列式、特征值问题、幂的显示表达式等. 本文的主要内容安排如下:

第一章首先介绍了三对角矩阵的应用背景、国内外的研究现状. 其次, 给出了切比雪夫多项式的定义、性质以及矩阵论中的相关知识, 为本文三对角矩阵性质的研究做好铺垫. 最后介绍了本文的主要工作以及创新点和难点.

第二章提出了一种计算复三对角矩阵的行列式、特征多项式、特征值和特征向量的新方法. 这种方法既不同于Yueh和Willms所用的半无限序列的符号演算方法, 也不同于Kouachi采用的基于递推序列的方法, 而是将切比雪夫多项式和三对角矩阵的行列式联系起来, 利用切比雪夫多项式的性质来计算三对角矩阵的行列式、特征多项式、特征值和特征向量. 这一章考虑了两类三对角矩阵, 第一类是首末上下对角元变化的复三对角矩阵, 第二类是首末主对角元变化而对应的上下对角元乘积为定值的复三对角矩阵. 通过计算这两类矩阵的行列式、特征多项式、特征值和特征向量, 本文将新方法完整地呈现了出来.

第三章主要考虑了第二类复三对角矩阵. 首先通过构造变换矩阵的逆矩阵, 给出了第二类复三对角矩阵的谱分解, 并对构造结果进行了证明. 然后根据谱分解计算了第二类复三对角矩阵任意整数次幂和逆的显示表达式. 最后, 给出了第二类复三对角矩阵的酉对角化条件以及所构成的三对角矩阵族的一些性质并给予了证明.

第四章总结性地介绍了本文的主要思想方法和工作, 给出了一些建议性的想法.

关键词: 三对角矩阵; 行列式; 特征值问题; 谱分解; 幂

分类号: O151.2

Abstract

Tridiagonal matrices are an important kind of special matrices with a wide range of applications in engineering, medicine and signal processing. In particular, solving difference equation, differential equation and delay differential equation, we often need to compute powers and inverse of tridiagonal matrices. Recently, people are interested in studying some properties of tridiagonal matrices because of their wide application. In this paper, we mainly study related problems of two kinds of complex tridiagonal matrices, such as determinant, eigenvalue problem, explicit powers and so on. The main content of this thesis is arranged as follows:

In the first chapter, we first introduce research background of tridiagonal matrices, the present research situation of the topic at home and abroad. Then we give the definitions and properties of Chebyshev polynomials and some results in matrix theory, which are preliminaries for the study of the properties of tridiagonal matrices. Finally, we state the main work of this paper, innovative points and difficult points.

In the second chapter, a new method for computing determinant, characteristic polynomial, eigenvalues and eigenvectors of complex tridiagonal matrices is proposed. This method is not only different from the method of symbolic calculus of semi-infinite sequences used by Yueh and Willms but also differ from the technique based on theory of recurrence sequences adopted by Kouachi. The technique of this method is connecting Chebyshev polynomials with the determinant of tridiagonal matrices and computing determinant, characteristic polynomial, eigenvalues and eigenvectors of complex tridiagonal matrices on the basis of properties of Chebyshev polynomials. We consider two kinds of tridiagonal matrices in this chapter. The first one is a kind of complex tridiagonal matrices with the first and last superdiagonal entries and subdiagonal entries being variable. The second one is a kind of complex tridiagonal matrices with the first and last main diagonal entries being variable and the constant products of subdiagonal entries and the corresponding superdiagonal entries. Through calculating determinant, characteristic polynomial, eigenvalues and eigenvectors of these two kinds of tridiagonal matrices, we present the complete process of this new method.

In the third chapter, we mainly consider the second kind of tridiagonal matrices. Firstly, we present and prove the spectral decomposition of the second kind of tridiagonal matrices through constructing the inverse matrix of the transformation matrix. Secondly, we compute the arbitrary integer powers and explicit inverse of the second kind of tridiagonal matrices according to the spectral decomposition. Finally, we give the condition under which the second kind of tridiagonal matrices can be unitarily diagonalizable and prove some conclusions about families of the second kind of tridiagonal matrices.

In the fourth chapter, we summarize the main ideas and content of this paper and give some constructive opinions.

Keywords: Tridiagonal matrices; Determinant; Eigenvalue problem; Spectral decomposition; Powers

Classification: O151.2

主要符号对照表

$\mathbb{Z}$	整数集
$\mathbb{N}$	自然数集 $\{1,2,\ldots,n\}$
$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{C}$	复数域
$\mathrm{Re}(x)$	复数 x 的实部
$\mathbb{C}^n$	复 n 维列向量空间
$\boldsymbol{M}_n$	$n\times n$ 复矩阵的集合
$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等	矩阵; $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\boldsymbol{M}_n$
$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 等	列向量; $\boldsymbol{a}=[a_i]\in\mathbb{C}^n$
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n$ 的转置矩阵
$\boldsymbol{A}^*$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Hermite 伴随, $\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$
$\boldsymbol{A}^{-1}$	非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵
$\det\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式
$\mathbf{I}$	单位矩阵
$\mathbf{0}$	零向量
$\boldsymbol{e}$	分量均为 1 的向量 $(1,1,\ldots,1)$
$\mathrm{diag}(d_0,d_1,\ldots,d_{n-1})$	以 $d_0,d_1,\ldots,d_{n-1}$ 为对角元的对角矩阵

第一章　引言

§1.1　研究背景

三对角矩阵是一类很重要的特殊矩阵, 它常常出现在数学、医学以及工程的诸多领域[37, 38]. 特别在解差分方程、常微分方程边值问题、解热传导方程以及船体数学放样中建立的三次样条函数等实际问题中, 经常会遇到三对角矩阵. 近年来, 不仅在数值分析领域涌现出了大量有关三对角矩阵的逆元素表示式、逆元素界的估计以及三对角方程组并行算法等研究结果, 而且在矩阵分析领域对于三对角矩阵的特征值问题、幂的元素表示以及逆元素表示式等课题的研究也有了大量成果. 下面给出三对角矩阵的基本定义：

定义 1.1.1 ([39]). 矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \boldsymbol{M}_n$ 称为三对角矩阵, 如果当 $|i-j| > 1$ 时, 有 $a_{ij} = 0$ 成立, 即 $\boldsymbol{A}$ 有下列形式

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_1 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-2} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix}.$$

平行于主对角线的诸对角线从右上方至左下方我们依次称为 $\boldsymbol{A}$ 的上对角线、主对角线和下对角线. 上、主、下对角线上的元素我们分别称为 $\boldsymbol{A}$ 的上对角元、主对角元和下对角元. 为下文叙述方便, 我们将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 记为 $\mathrm{tri}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$, 其中 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是分别以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的下、主、上对角元为分量的向量, 即

$$\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}] \in \mathbb{C}^{n-1}, \boldsymbol{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n] \in \mathbb{C}^n, \boldsymbol{c} = [c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}] \in \mathbb{C}^{n-1}.$$

对于三对角矩阵的特征值问题, Wen-Chyuan Yueh 在文献 [3] 中解决了 $\mathrm{tri}[a\boldsymbol{e}, \boldsymbol{b}, c\boldsymbol{e}]$的特征值问题, 其中 $\boldsymbol{b} = [-\alpha + b, b, \ldots, b, -\beta + b]$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{e}$ 是分量皆为1的向量. 他利用半无限序列的符号演算将其特征值表示为 $\lambda = b + 2\sqrt{ac}\cos\theta$, 而特征向量是关于 θ 的一个函数, 其中 θ 是

$$ac\sin((n+1)\theta) + (\alpha+\beta)\sqrt{ac}\sin(n\theta) + \alpha\beta\sin((n-1)\theta) = 0\,(\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

的一个解.

Said Kouachi 在文 [4] 中运用基于递推序列的方法将 Wen-Chyuan Yueh 研究的三对

角矩阵推广到其上对角元和对应的下对角元的乘积满足条件

$$a_ic_i = \begin{cases} d_1^2, \text{当}\, i \,\text{是奇数时}, \\ d_2^2, \text{当}\, i \,\text{是偶数时}. \end{cases}$$

Allan R. Willms 在文 [5] 中指出了 Said Kouachi 在文 [4] 中出现的运算错误并运用与学者 Wen-Chyuan Yueh 相同的方法给出了三对角矩阵 $\mathrm{tri}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ 的特征值和特征向量, 其中, $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}]$, $\boldsymbol{b} = [-\alpha + b, b, \ldots, b, -\beta + b]$, $\boldsymbol{c} = [c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}]$, 且 $\sqrt{a_ic_i} = d \neq 0$. 显然, Willms 所考虑的三对角矩阵是 Wen-Chyuan Yueh 所研究的矩阵的推广, 却是 Kouachi 所研究的特殊情况.

另外, 我们在处理数值分析中的某些问题时, 经常需要处理一些线性方程组, 其系数矩阵是三对角矩阵. 例如, 考虑齐次差分方程组 $\boldsymbol{u}(l+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}(l)$, $l \in \mathbb{Z}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异矩阵, 它的解是 $\boldsymbol{u}(l) = \boldsymbol{A}^l\boldsymbol{c}$, $l \in \mathbb{Z}$, 其中 $\boldsymbol{c}$ 是任意一个常数向量. 因此为了得到上述齐次线性方程组的解, 我们需要求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意整数次幂 $\boldsymbol{A}^l$. 正因为三对角矩阵的幂和逆在求解某些差分方程、微分方程时具有至关重要的作用, 所以许多学者都置身于三对角矩阵的幂逆的研究之中.

Jonas Rimas 对三对角矩阵的任意 $l(l \in \mathbb{N})$ 次幂的元素表达式的研究做了大量的工作. 他研究的三对角矩阵包括文献 [6, 7, 8, 9] 中的 $\mathrm{tri}[\boldsymbol{e}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}]$, 文献 [10, 11, 12, 13] 中的 $\mathrm{tri}[-\boldsymbol{e}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}]$, 文献 [14, 15, 16] 中的 $\mathrm{tri}[\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{a_2}]$, 文献 [17, 18] 中的 $\mathrm{tri}[\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{e}]$, 文献 [19, 20] 中的 $\mathrm{tri}[\boldsymbol{a_4}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{a_5}]$, 文献 [21] 中的 $\mathrm{tri}[\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a_6}, \boldsymbol{e}]$, 文献 [22, 23] 中的 $\mathrm{tri}[\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a_7}, \boldsymbol{e}]$, 文献 [24] 中的 $\mathrm{tri}[\boldsymbol{a_8}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{a_2}]$, 文献 [25] 中的 $\mathrm{tri}[\boldsymbol{a_9}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{a_2}]$ 以及文献 [26, 27] 中的 $\mathrm{tri}[\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{a_5}]$, 其中, $\boldsymbol{a_1} = [1, \ldots, 1, 2]$, $\boldsymbol{a_2} = [0, 1, \ldots, 1]$, $\boldsymbol{a_3} = [1, 0, \ldots, 0, 1]$, $\boldsymbol{a_4} = [-1, \ldots, -1, -2]$, $\boldsymbol{a_5} = [2, 1, \ldots, 1]$, $\boldsymbol{a_6} = [-1, 0, \ldots, 0]$, $\boldsymbol{a_7} = [-1, 0, \ldots, 0, 1]$, $\boldsymbol{a_8} = [-1, \ldots, -1, 0]$, $\boldsymbol{a_9} = [1, \ldots, 1, 0]$.

H. Kıyak et al. 在文献 [28] 中给出了矩阵 $\mathrm{tri}[\boldsymbol{a_{10}}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{a_{10}}]$ ($\boldsymbol{a_{10}} = [-1, 1, \ldots, (-1)^{n-1}]$) 的正整数次幂公式.

Ahmet Öteleş 在文献 [29] 中探讨了矩阵 $\mathrm{tri}[b\boldsymbol{e}, [a+b, a, \ldots, a, a+b], b\boldsymbol{e}]$ 的正整数次幂的显示表达式.

Jesús Gutiérrez-Gutiérrez 在文献 [30] 中研究了 Hermite 三对角矩阵 $\mathrm{tri}[a\boldsymbol{e}, b\boldsymbol{e}, a\boldsymbol{e}]$ ($b \in \mathbb{R}, a \neq 0$) 的任意整数次幂. 然后他又在文献 [31] 中讨论了 Toeplitz (沿着平行于主对角线的诸对角线从上至下, 矩阵的各元取定值) 复三对角矩阵 $\mathrm{tri}[a\boldsymbol{e}, b\boldsymbol{e}, c\boldsymbol{e}]$ $(ac \neq 0)$ 的任意整数次幂.

N. Shen et al. 将 Jesús Gutiérrez-Gutiérrez 研究的 Toeplitz 复三对角矩阵 $\mathrm{tri}[a\boldsymbol{e}, b\boldsymbol{e}, c\boldsymbol{e}]$ $(ac \neq 0)$ 推广到两类拟 Toeplitz 三对角矩阵 $\mathrm{tri}[a\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a_{11}}, c\boldsymbol{e}]$ 和 $\mathrm{tri}[a\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a_{12}}, c\boldsymbol{e}]$, 其中 $\boldsymbol{a_{11}} = [\sqrt{ac} + b, b, \ldots, b, -\sqrt{ac} + b]$, $\boldsymbol{a_{12}} = [-\sqrt{ac} + b, b, \ldots, b, \sqrt{ac} + b]$. 他们在文献 [35] 中讨论了这两类三对角矩阵的特征值、特征向量和任意正整数次幂等一系列问题.

Z. L. Jiang et al. 考虑了另外两类拟 Toeplitz 三对角矩阵 $\mathrm{tri}[a\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a_{13}}, c\boldsymbol{e}]$ 和 $\mathrm{tri}[a\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a_{14}}, c\boldsymbol{e}]$, 其中 $\boldsymbol{a_{13}} = [\sqrt{ac} + b, b, \ldots, b, \sqrt{ac} + b]$, $\boldsymbol{a_{14}} = [-\sqrt{ac} + b, b, \ldots, b, -\sqrt{ac} + b]$. 他们在文

献[36]中解决了这两类三对角矩阵的特征值、特征向量以及任意正整数次幂等诸多问题.

此外, Jonas Rimas还在文献[32]中给出了奇数阶三对角2-Toeplitz矩阵的任意整数幂. Jiteng Jia et al. 在文献[33] 中给出了三对角k-Toeplitz矩阵的逆. Mohamed Elouafi et al. 在文献[34]中从拓扑的角度给出了一般三对角矩阵的幂.

§1.2 预备知识

本节给出切比雪夫多项式的定义和性质, 三角函数和的四个等式, 以及矩阵论中的相关结论, 它们在本文后面要用到.

首先, 我们介绍第一类、第二类切比雪夫多项式$T_n(x)$, $U_n(x)$以及一对相关的雅可比多项式$V_n(x)$, $W_n(x)$, 也就是我们所说的第三类、第四类切比雪夫多项式的定义和性质[40, 41].

定义 1.2.1 ([40]). *第一、二、三、四类切比雪夫多项式$T_n(x)$, $U_n(x)$, $V_n(x)$和$W_n(x)$分别定义如下:*

$$T_n(x) = \cos n\theta, \qquad U_n(x) = \sin{(n+1)}\,\theta \sin\theta,$$
$$V_n(x) = \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}, \quad W_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta},$$

其中$x = \cos\theta$, n是切比雪夫多项式的次数.

引理 1.2.1 ([40]). *第一类切比雪夫多项式$T_n(x)$的n个零点是*

$$x_i = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}(i = 1, 2, \ldots, n);$$

第二类切比雪夫多项式$U_n(x)$的n个零点是

$$x_i = \cos\frac{i\pi}{n+1}(i = 1, 2, \ldots, n);$$

第三类切比雪夫多项式$V_n(x)$的n个零点是

$$x_i = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n+1}(i = 1, 2, \ldots, n);$$

第四类切比雪夫多项式$W_n(x)$的n个零点是

$$x_i = \cos\frac{2i\pi}{2n+1}(i = 1, 2, \ldots, n).$$

引理 1.2.2 ([40]). *定义1.2.1中的四类切比雪夫多项式均满足递推关系式*

$$X_n(x) = 2xX_{n-1}(x) - X_{n-2}(x),$$

其中, 首项均为$X_0(x) = 1$, 第二项分别为$X_1(x) = x$, $2x$, $2x-1$, $2x+1$. 另外, 由上述递推关系可以推出以下三个关系式

$$2T_n(x) = U_n(x) - U_{n-2}(x),$$

$$V_n(x) = U_n(x) - U_{n-1}(x),$$
$$W_n(x) = U_n(x) + U_{n-1}(x).$$

根据 Laplace 展开式和引理 1.2.2 中 $U_n(x)$ 的三项递推公式, 将下列行列式按他们的最后一行展开, 我们发现 $U_n(x)$ 可以用三对角矩阵的行列式表示 [40], 即

$$U_0(x) = 1,$$

$$U_1(x) = 2x,$$

$$U_2(x) = \begin{vmatrix} 2x & z_1 \\ y_1 & 2x \end{vmatrix} = 2xU_1(x) - U_0(x),$$

$$\vdots$$

$$U_n(x) = \begin{vmatrix} 2x & z_1 & & & \\ y_1 & 2x & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2x & z_{n-1} \\ & & & y_{n-1} & 2x \end{vmatrix} = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x),$$

其中 $y_i z_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

其次, 我们证明关于三角函数和的四个等式, 它们将在第三章的证明过程中用到.

引理 1.2.3. 下列四个等式对所有的 $n \in \mathbb{N}$ 均成立:

$$(1) \sum_{h=1}^{n} \cos\frac{hk\pi}{n+1} = \begin{cases} -1, \text{ 当 } k \text{ 是偶数时}, \\ 0, \quad \text{当 } k \text{ 是奇数时}, \end{cases} \text{其中 } k = 1, 2, \ldots, 2n+1. \tag{1.2.1}$$

$$(2) \sum_{h=1}^{n} \cos\frac{2hk\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}, \text{其中 } k = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{1.2.2}$$

$$(3) \sum_{h=1}^{n} \cos\frac{(2h-1)k\pi}{2n+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{2}, \text{其中 } k = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{1.2.3}$$

$$(4) \sum_{h=1}^{n} \cos\frac{(2h-1)k\pi}{2n} = 0, \text{其中 } k = 1, 2, \ldots, 2n-1. \tag{1.2.4}$$

证明. (1) 若 k 是偶数, 令 $\phi = \exp\left(i\frac{k\pi}{n+1}\right)$, 则 $\phi^{n+1} = 1$ 且有

$$\phi^{n+1} - 1 = (\phi - 1)(\phi^n + \phi^{n-1} + \cdots + \phi + 1) = 0.$$

因为 $0 < k < 2n+2, \phi \neq 1$, 所以

$$\phi^n + \phi^{n-1} + \cdots + \phi = -1.$$

从而

$$\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{hk\pi}{n+1}=\mathrm{Re}(\phi^n+\phi^{n-1}+\cdots+\phi)=-1.$$

若 k 是奇数, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{hk\pi}{n+1}&=\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{(n+1-h)k\pi}{n+1}\\&=\sum_{h=1}^{n}\cos\left(k\pi-\frac{hk\pi}{n+1}\right)=-\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{hk\pi}{n+1}.\end{aligned}$$

由上面等式, 我们知当 k 是奇数时,

$$\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{kh\pi}{n+1}=0.$$

(2) 令 $\omega=\exp\left(i\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$, 则 $\omega^{2n+1}=1$ 且

$$\omega^{2n+1}-1=(\omega-1)\big(\omega^{2n}+\omega^{2n-1}+\cdots+\omega+1\big)=0.$$

因为 $0<k<2n+1, \omega\neq 1$, 所以

$$\omega^{2n}+\omega^{2n-1}+\cdots+\omega+1=0.$$

从而

$$\sum_{h=1}^{2n}\cos\frac{2hk\pi}{2n+1}=\mathrm{Re}(\omega^{2n}+\omega^{2n-1}+\cdots+\omega)=-1.$$

又因为

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{2n}\cos\frac{2hk\pi}{2n+1}&=\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{2hk\pi}{2n+1}+\sum_{h=n+1}^{2n}\cos\frac{2hk\pi}{2n+1}\\&=\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{2hk\pi}{2n+1}+\sum_{h=n+1}^{2n}\cos\frac{(2n+1-h)2k\pi}{2n+1}\\&=\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{2hk\pi}{2n+1}+\sum_{h=n}^{1}\cos\frac{2hk\pi}{2n+1}\\&=2\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{2hk\pi}{2n+1}=-1,\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{2hk\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}.$$

(3) 根据等式 (1.2.2), 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{(2h-1)k\pi}{2n+1}&=\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{[2(n+1-h)-1]k\pi}{2n+1}\\&=\sum_{h=1}^{n}\cos\left(k\pi-\frac{2hk\pi}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

$$= (-1)^k \sum_{h=1}^{n} \cos\frac{2kh\pi}{2n+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{2}.$$

(4) 若 k 是奇数, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{n} \cos\frac{(2h-1)k\pi}{2n} &= \sum_{h=1}^{n} \cos\frac{[2(n+1-h)-1]k\pi}{2n} \\ &= -\sum_{h=1}^{n} \cos\frac{(2h-1)k\pi}{2n}.\end{aligned}$$

从而, 我们有

$$\sum_{h=1}^{n} \cos\frac{(2h-1)k\pi}{2n} = 0.$$

若 k 是偶数, 令 $\varphi = \exp\left(i\frac{k\pi}{2n}\right)$, 则 $\varphi^{2n} = 1$ 且

$$\varphi^{2n} - 1 = (\varphi - 1)(\varphi^{2n-1} + \varphi^{2n-2} + \cdots + \varphi + 1) = 0.$$

因为 $0 < k < 2n, \varphi \neq 1$, 所以

$$\varphi^{2n-1} + \varphi^{2n-2} + \cdots + \varphi + 1 = 0.$$

从而,

$$\sum_{h=1}^{n} \cos\frac{(2h-1)k\pi}{2n} + \sum_{h=1}^{n-1} \cos\frac{2hk\pi}{2n} = \mathrm{Re}(\varphi^{2n-1} + \varphi^{2n-2} + \cdots + \varphi) = -1.$$

又因为由等式 (1.2.1) 我们知

$$\sum_{h=1}^{n-1} \cos\frac{2hk\pi}{2n} = \sum_{h=1}^{n-1} \cos\frac{hk\pi}{n} = -1,$$

因此,

$$\sum_{h=1}^{n} \cos\frac{(2h-1)k\pi}{2n} = 0.$$

上述四个等式证毕. □

最后, 我们引入一个矩阵分析中关于矩阵谱分解的结论.

引理 1.2.4 ([39]). 如果矩阵 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}_n$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(n)}$, 以它们为列向量作非奇异矩阵 $\boldsymbol{S}$, 那么 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1}$, 其中

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

而 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

§1.3 本文的主要工作

本文主要研究了两类复三对角矩阵的一些性质, 包括行列式、特征多项式、特征值、特征向量以及幂逆等. 首先, 利用Laplace展开和第二类切比雪夫多项式的行列式表示计算了所研究的两类三对角矩阵的行列式和特征多项式, 并用切比雪夫多项式表示了结果. 其次, 利用切比雪夫多项式的零点来计算特征多项式的根从而得到了三对角矩阵的特征值, 并通过构造对角矩阵, 将非对称线性方程组的求解问题转化为对称线性方程组的求解进而得到特征向量. 再次, 我们构造变换矩阵的逆矩阵, 完成了其中一类三对角矩阵的谱分解, 并根据谱分解, 求出了该类三对角矩阵的任意整数次幂的元素表示和显示逆. 最后, 我们给出了其中一类三对角矩阵的酉对角化条件和这类三对角矩阵族的一些性质. 本文将切比雪夫多项式和三对角矩阵巧妙地联系在一起, 利用切比雪夫多项式的性质来研究三对角矩阵的行列式、特征多项式、特征值、特征向量, 这是本文的创新点之一. 通过构造变换矩阵求解三对角矩阵的特征向量和谱分解, 这是本文的创新点之二. 两次变换矩阵的构造是本文的难点.

第二章　行列式和特征值问题

在本章中, 我们将探讨两类三对角矩阵的行列式以及特征值问题的求解. 一类是首末上下对角元变化的n阶复三对角矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} b & c_1 & & & & \\ a_1 & b & c & & & \\ & a & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & c & \\ & & & a & b & c_{n-1} \\ & & & & a_{n-1} & b \end{bmatrix},$$

其中$a_1, a_{n-1}, c_1, c_{n-1}$是变量, a, b, c是常量且满足$ac \neq 0$.

另一类是首末主对角元变化而上对角元和对应的下对角元的乘积为定值的n阶复三对角矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -\alpha+b & c_1 & & & \\ a_1 & b & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & b & c_{n-1} \\ & & & a_{n-1} & -\beta+b \end{bmatrix},$$

其中α, β为变量, $b, a_i, c_i (i=1,2,\ldots,n-1)$为常量且满足$\sqrt{a_i c_i}=d \neq 0$.

§2.1　行列式和特征多项式

基于Laplace展开式和第二类切比雪夫多项式的行列式表示, 我们用切比雪夫多项式来表示矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的行列式和特征多项式. 对于一些特殊情况, 运用引理1.2.2中切比雪夫多项式的递推关系式以及四类切比雪夫多项式之间的关系, 我们可以给出更加简洁的表达.

设$\boldsymbol{B}_n \in \boldsymbol{M}_n$ (n是矩阵$\boldsymbol{B}_n$的阶数)是一个三对角矩阵, 且其上对角元与对应的下对

角元的乘积为定值, 即

$$\boldsymbol{B}_n = \begin{bmatrix} b & c_1 & & & \\ a_1 & b & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & b & c_{n-1} \\ & & & a_{n-1} & b \end{bmatrix}, \text{其中} \sqrt{a_i c_i} = d \neq 0\,(i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

从矩阵 $\boldsymbol{B}_n$ 的行列式的每一行提出公因子 d, 我们将推导出矩阵 $\boldsymbol{B}_n$ 的行列式和第二类切比雪夫多项式之间的一个等式

$$\det \boldsymbol{B}_n = d^n \begin{vmatrix} \frac{b}{d} & \sqrt{\frac{c_1}{a_1}} & & & \\ \sqrt{\frac{a_1}{c_1}} & \frac{b}{d} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \frac{b}{d} & \sqrt{\frac{c_{n-1}}{a_{n-1}}} \\ & & & \sqrt{\frac{a_{n-1}}{c_{n-1}}} & \frac{b}{d} \end{vmatrix} = d^n U_n\left(\frac{b}{2d}\right). \tag{2.1.1}$$

根据Laplace展开式, 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式先按第一列展开, 再按最后一列展开, 我们将得到

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{A} = {} & b^2(\sqrt{ac})^{n-2} U_{n-2}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right) - b(a_1c_1 + a_{n-1}c_{n-1})(\sqrt{ac})^{n-3} U_{n-3}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right) \\ & + a_1c_1a_{n-1}c_{n-1}(\sqrt{ac})^{n-4} U_{n-4}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right). \end{aligned}$$

由于 $a_1, a_{n-1}, c_1, c_{n-1}$ 是变量, 因此可以将 $\det \boldsymbol{A}$ 看作变量 $a_1, a_{n-1}, c_1, c_{n-1}$ 的函数. 根据上面表达式的特点, 我们不妨将 a_1c_1 和 $a_{n-1}c_{n-1}$ 分别看作一个整体, 则不难发现 $\det \boldsymbol{A}$ 关于 a_1c_1 和 $a_{n-1}c_{n-1}$ 对称. 当 a_1c_1, $a_{n-1}c_{n-1}$ 取一些具体值时, 我们将得到 $\det \boldsymbol{A}$ 更加简洁的表达式.

定理 2.1.1. *关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, 我们有以下结论:*

(1) 若 $a_1c_1 = a_{n-1}c_{n-1} = ac$, 则 $\det \boldsymbol{A} = (\sqrt{ac})^n U_n\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)$;

(2) 若 $a_1c_1 = a_{n-1}c_{n-1} = 0$, 则 $\det \boldsymbol{A} = b^2(\sqrt{ac})^{n-2} U_{n-2}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)$;

(3) 若 $a_1c_1 = a_{n-1}c_{n-1} = 2ac$, 则 $\det \boldsymbol{A} = (b^2 - 4ac)\,(\sqrt{ac})^{n-2} U_{n-2}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)$;

(4) 若 $a_1c_1 = 0, a_{n-1}c_{n-1} = ac$, 则 $\det \boldsymbol{A} = b(\sqrt{ac})^{n-1} U_{n-1}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)$;

(5) 若 $a_1c_1 = 0, a_{n-1}c_{n-1} = 2ac$, 则 $\det \boldsymbol{A} = 2b(\sqrt{ac})^{n-1} T_{n-1}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)$;

(6) 若 $a_1c_1=0, a_{n-1}c_{n-1}=b\sqrt{ac}$, 则 $\det \boldsymbol{A}=b^2(\sqrt{ac})^{n-2}V_{n-2}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)$;

(7) 若 $a_1c_1=0, a_{n-1}c_{n-1}=-b\sqrt{ac}$, 则 $\det \boldsymbol{A}=b^2(\sqrt{ac})^{n-2}W_{n-2}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)$.

在上述情况中, 当 a_1c_1 与 $a_{n-1}c_{n-1}$ 的取值互换时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式的值不变.

证明. 利用 $U_r\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)$ 的标准三项递推公式, 我们得到以下结果:

(1) 若 $a_1c_1=a_{n-1}c_{n-1}=ac$, 我们有

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{A}&=(\sqrt{ac})^n\left[\frac{b^2}{ac}U_{n-2}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)-\frac{2b}{\sqrt{ac}}U_{n-3}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)+U_{n-4}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)\right]\\&=(\sqrt{ac})^nU_n\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right).\end{aligned}$$

(2) 若 $a_1c_1=a_{n-1}c_{n-1}=0$, 我们有

$$\det \boldsymbol{A}=b^2(\sqrt{ac})^{n-2}U_{n-2}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right).$$

(3) 若 $a_1c_1=a_{n-1}c_{n-1}=2ac$, 我们有

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{A}&=(\sqrt{ac})^n\left[\frac{b^2}{ac}U_{n-2}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)-\frac{4b}{\sqrt{ac}}U_{n-3}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)+4U_{n-4}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)\right]\\&=\left(b^2-4ac\right)(\sqrt{ac})^{n-2}U_{n-2}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right).\end{aligned}$$

(4) 若 $a_1c_1=0$, $a_{n-1}c_{n-1}=ac$, 我们有

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{A}&=(\sqrt{ac})^n\left[\frac{b^2}{ac}U_{n-2}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)-\frac{b}{\sqrt{ac}}U_{n-3}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)\right]\\&=b(\sqrt{ac})^{n-1}U_{n-1}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right).\end{aligned}$$

利用引理1.2.2中切比雪夫多项式之间的关系式, 我们将能得到以下公式:

(5) 若 $a_1c_1=0$, $a_{n-1}c_{n-1}=2ac$, 根据引理1.2.2中第一类和第二类切比雪夫多项式之间的关系式, 我们有

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{A}&=(\sqrt{ac})^n\left[\frac{b}{\sqrt{ac}}U_{n-1}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)-\frac{b}{\sqrt{ac}}U_{n-3}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)\right]\\&=2b(\sqrt{ac})^{n-1}T_{n-1}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right).\end{aligned}$$

(6) 若 $a_1c_1=0$, $a_{n-1}c_{n-1}=b\sqrt{ac}$, 根据引理1.2.2中第二类和第三类切比雪夫多项式之间关系式, 我们可以推导出

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{A}&=(\sqrt{ac})^n\left[\frac{b^2}{ac}U_{n-2}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)-\frac{b^2}{ac}U_{n-3}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)\right]\\&=b^2(\sqrt{ac})^{n-2}V_{n-2}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right).\end{aligned}$$

(7)若 $a_1c_1=0$, $a_{n-1}c_{n-1}=-b\sqrt{ac}$, 由引理1.2.2中第二类和第四类切比雪夫多项式之间的关系, 我们得到

$$\det \boldsymbol{A}=(\sqrt{ac})^n\left[\frac{b^2}{ac}U_{n-2}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)+\frac{b^2}{ac}U_{n-3}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)\right]$$

$$= b^2(\sqrt{ac})^{n-2}W_{n-2}\left(\frac{b}{2\sqrt{ac}}\right).$$

另外, 由于 $\det \boldsymbol{A}$ 关于 a_1c_1 和 $a_{n-1}c_{n-1}$ 对称, 所以在上述情况中, 互换 a_1c_1 和 $a_{n-1}c_{n-1}$ 的取值, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式的值不变. □

基于Laplace展开式, 将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行列式先按第一列展开, 再按最后一列展开, 我们得到矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行列式的一般公式

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{B} &= (b-\alpha)(b-\beta)d^{n-2}U_{n-2}\left(\frac{b}{2d}\right) - [(b-\alpha)a_{n-1}c_{n-1} + (b-\beta)a_1c_1]d^{n-3}U_{n-3}\left(\frac{b}{2d}\right) \\ &\quad + a_1c_1a_{n-1}c_{n-1}d^{n-4}U_{n-4}\left(\frac{b}{2d}\right) \\ &= d^n\left[U_n\left(\frac{b}{2d}\right) - \frac{\alpha+\beta}{d}U_{n-1}\left(\frac{b}{2d}\right) + \frac{\alpha\beta}{d^2}U_{n-2}\left(\frac{b}{2d}\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

因为 α, β 为变量, 所以我们可以将 $\det \boldsymbol{B}$ 看作变量 α, β 的函数. 当 α, β 取一些特殊值时, 我们能得到 $\det \boldsymbol{B}$ 更加简洁的表达式.

定理 2.1.2. *关于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行列式, 我们有以下结论:*

(1) *若 $\alpha = \beta = 0$, 则 $\det \boldsymbol{B} = d^nU_n\left(\frac{b}{2d}\right)$;*

(2) *若 $\alpha = 0, \beta = d$, 则 $\det \boldsymbol{B} = d^nV_n\left(\frac{b}{2d}\right)$;*

(3) *若 $\alpha = 0, \beta = -d$, 则 $\det \boldsymbol{B} = d^nW_n\left(\frac{b}{2d}\right)$;*

(4) *若 $\alpha = d, \beta = -d$, 则 $\det \boldsymbol{B} = 2d^nT_n\left(\frac{b}{2d}\right)$;*

(5) *若 $\alpha\beta = d^2$, 则 $\det \boldsymbol{B} = (b-\alpha-\beta)d^{n-1}U_{n-1}\left(\frac{b}{2d}\right)$.*

在上述各种情况中, 当 α 与 β 的取值互换时, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行列式的值不变.

证明. (1) 若 $\alpha = \beta = 0$, 化简 (2.1.2) 得

$$\det \boldsymbol{B} = d^nU_n\left(\frac{b}{2d}\right).$$

(2) 若 $\alpha = 0, \beta = d$, 则根据第二类切比雪夫多项式与第三类切比雪夫多项式之间的关系, 我们有

$$\det \boldsymbol{B} = d^n\left[U_n\left(\frac{b}{2d}\right) - U_{n-1}\left(\frac{b}{2d}\right)\right] = d^nV_n\left(\frac{b}{2d}\right).$$

(3) 若 $\alpha = 0, \beta = -d$, 则根据第二类切比雪夫多项式和第四类切比雪夫多项式之间的关系, 我们有

$$\det \boldsymbol{B} = d^n\left[U_n\left(\frac{b}{2d}\right) + U_{n-1}\left(\frac{b}{2d}\right)\right] = d^nW_n\left(\frac{b}{2d}\right).$$

(4) 若 $\alpha = d, \beta = -d$, 则根据第一类切比雪夫多项式和第二类切比雪夫多项式之间的关系, 我们有

$$\det \boldsymbol{B} = d^n\left[U_n\left(\frac{b}{2d}\right) - U_{n-2}\left(\frac{b}{2d}\right)\right] = 2d^nT_n\left(\frac{b}{2d}\right).$$

(5) 若 $\alpha\beta = d^2$, 化简 (2.1.2) 得

$$\det \boldsymbol{B} = (b-\alpha-\beta)d^{n-1}U_{n-1}\left(\frac{b}{2d}\right).$$

观察矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行列式的一般公式 (2.1.2), 我们发现 $\det \boldsymbol{B}$ 关于 α 和 β 对称. 因此, 互换 α 与 β 的取值时, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行列式的值不变. □

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \boldsymbol{A})$, 其中 $\mathbf{I}$ 为单位矩阵. 类似于求行列式的过程, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式计算如下:

$$\begin{aligned} p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-b & -c_1 & & & & \\ -a_1 & \lambda-b & -c & & & \\ & -a & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -c & \\ & & & -a & \lambda-b & -c_{n-1} \\ & & & & -a_{n-1} & \lambda-b \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-b)^2(\sqrt{ac})^{n-2}U_{n-2}\left(\frac{\lambda-b}{2\sqrt{ac}}\right) + a_1c_1a_{n-1}c_{n-1}(\sqrt{ac})^{n-4}U_{n-4}\left(\frac{\lambda-b}{2\sqrt{ac}}\right) \\ &\quad - (\lambda-b)(a_1c_1+a_{n-1}c_{n-1})(\sqrt{ac})^{n-3}U_{n-3}\left(\frac{\lambda-b}{2\sqrt{ac}}\right). \end{aligned}$$

观察矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的一般形式, 我们发现 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式关于 a_1c_1 和 $a_{n-1}c_{n-1}$ 对称. 当 a_1c_1 和 $a_{n-1}c_{n-1}$ 取一些特殊值时, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式有更加简洁的表达.

定理 2.1.3. *关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式, 我们有以下结论:*

(1) 若 $a_1c_1 = a_{n-1}c_{n-1} = ac$, 则

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (\sqrt{ac})^n U_n\left(\frac{\lambda-b}{2\sqrt{ac}}\right);$$

(2) 若 $a_1c_1 = a_{n-1}c_{n-1} = 0$, 则

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (\lambda-b)^2(\sqrt{ac})^{n-2}U_{n-2}\left(\frac{\lambda-b}{2\sqrt{ac}}\right);$$

(3) 若 $a_1c_1 = a_{n-1}c_{n-1} = 2ac$, 则

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \left[(\lambda-b)^2 - 4ac\right](\sqrt{ac})^{n-2}U_{n-2}\left(\frac{\lambda-b}{2\sqrt{ac}}\right);$$

(4) 若 $a_1c_1 = 0, a_{n-1}c_{n-1} = ac$, 则

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (\lambda-b)(\sqrt{ac})^{n-1}U_{n-1}\left(\frac{\lambda-b}{2\sqrt{ac}}\right);$$

(5) 若 $a_1c_1 = 0, a_{n-1}c_{n-1} = 2ac$, 则

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = 2(\lambda-b)(\sqrt{ac})^{n-1}T_{n-1}\left(\frac{\lambda-b}{2\sqrt{ac}}\right);$$

(6) 若 $a_1c_1=0, a_{n-1}c_{n-1}=b\sqrt{ac}$, 则

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda-b)(\sqrt{ac})^{n-2}\left[\lambda U_{n-2}\left(\frac{\lambda-b}{2\sqrt{ac}}\right)-bW_{n-2}\left(\frac{\lambda-b}{2\sqrt{ac}}\right)\right];$$

(7) 若 $a_1c_1=0, a_{n-1}c_{n-1}=-b\sqrt{ac}$, 则

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda-b)(\sqrt{ac})^{n-2}\left[\lambda U_{n-2}\left(\frac{\lambda-b}{2\sqrt{ac}}\right)-bV_{n-2}\left(\frac{\lambda-b}{2\sqrt{ac}}\right)\right].$$

注意, 当 a_1c_1 与 $a_{n-1}c_{n-1}$ 的取值互换时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式不变, 在此不再赘述.

证明. 上述结论的证明过程类似于定理2.1.1中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式的证明过程. □

根据特征多项式的定义, 我们知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式为 $p_{\boldsymbol{B}}(\lambda)=\det(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{B})$, 其中 $\mathbf{I}$ 是单位矩阵. 将行列式 $\det(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{B})$ 按第一列和最后一列展开, 我们得到

$$\begin{aligned}p_{\boldsymbol{B}}(\lambda)&=\begin{vmatrix}\lambda-b+\alpha & -c_1 & & & \\ -a_1 & \lambda-b & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda-b & -c_{n-1} \\ & & & -a_{n-1} & \lambda-b+\beta\end{vmatrix}\\
&=(\lambda-b+\alpha)(\lambda-b+\beta)d^{n-2}U_{n-2}\left(\frac{\lambda-b}{2d}\right)-[(\lambda-b+\alpha)a_{n-1}c_{n-1}\\
&\quad+(\lambda-b+\beta)a_1c_1]d^{n-3}U_{n-3}\left(\frac{\lambda-b}{2d}\right)+a_1c_1a_{n-1}c_{n-1}d^{n-4}U_{n-4}\left(\frac{\lambda-b}{2d}\right)\\
&=d^n\left[U_n\left(\frac{\lambda-b}{2d}\right)+\frac{\alpha+\beta}{d}U_{n-1}\left(\frac{\lambda-b}{2d}\right)+\frac{\alpha\beta}{d^2}U_{n-2}\left(\frac{\lambda-b}{2d}\right)\right].\end{aligned}$$

当 α 和 β 取一些特殊值时, 可以得到 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式更加简洁的表达式. 由于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式关于 α 和 β 对称, 因此当互换 α 和 β 的取值时, 特征多项式不发生变化.

定理 2.1.4. 关于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式, 我们有以下结论:

(1) 若 $\alpha=\beta=0$, 则 $p_{\boldsymbol{B}}(\lambda)=d^nU_n\left(\frac{\lambda-b}{2d}\right)$;

(2) 若 $\alpha=0, \beta=d$, 则 $p_{\boldsymbol{B}}(\lambda)=d^nW_n\left(\frac{\lambda-b}{2d}\right)$;

(3) 若 $\alpha=0, \beta=-d$, 则 $p_{\boldsymbol{B}}(\lambda)=d^nV_n\left(\frac{\lambda-b}{2d}\right)$;

(4) 若 $\alpha=d, \beta=-d$, 则 $p_{\boldsymbol{B}}(\lambda)=2d^nT_n\left(\frac{\lambda-b}{2d}\right)$;

(5) 若 $\alpha\beta=d^2$, 则 $p_{\boldsymbol{B}}(\lambda)=(\lambda-b+\alpha+\beta)d^{n-1}U_{n-1}\left(\frac{\lambda-b}{2d}\right)$.

注意, 当 α 与 β 的取值互换时, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式不变.

证明. 上述结论的证明过程类似于定理2.1.2中矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行列式的证明过程, 不再赘述. □

§2.2 特征值

在前一节中, 我们利用切比雪夫多项式表示了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式. 由于我们知道切比雪夫多项式的零点, 因此特征多项式的零点也可以求出, 即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.

定理 2.2.1. 关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ 有如下结论:

(1) 若 $a_1c_1=a_{n-1}c_{n-1}=ac$, 则

$$\lambda_i=b+2\sqrt{ac}\cos\frac{i\pi}{n+1}\,(i=1,2,\ldots,n).$$

(2) 若 $a_1c_1=a_{n-1}c_{n-1}=0$, 则当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为偶数阶矩阵时,

$$\lambda_i=b+2\sqrt{ac}\cos\frac{i\pi}{n-1}\,(i=1,2,\ldots,n-2),\lambda_{n-1}=\lambda_n=b;$$

当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为奇数阶矩阵时,

$$\lambda_i=b+2\sqrt{ac}\cos\frac{i\pi}{n-1}\,(i=1,2,\ldots,\tfrac{n-3}{2},\tfrac{n+1}{2},\ldots,n-2),\lambda_{\frac{n-1}{2}}=\lambda_{n-1}=\lambda_n=b.$$

(3) 若 $a_1c_1=a_{n-1}c_{n-1}=2ac$, 则

$$\lambda_i=b+2\sqrt{ac}\cos\frac{(i-1)\pi}{n-1}\,(\ i=1,2,\ldots,n).$$

(4) 若 $a_1c_1=0,a_{n-1}c_{n-1}=ac$, 则当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为偶数阶矩阵时,

$$\lambda_i=b+2\sqrt{ac}\cos\frac{i\pi}{n}\,(i=1,2,\ldots,\tfrac{n-2}{2},\tfrac{n+2}{2},\ldots,n-1),\lambda_{\frac{n}{2}}=\lambda_n=b;$$

当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为奇数阶矩阵时,

$$\lambda_i=b+2\sqrt{ac}\cos\frac{i\pi}{n}\,(i=1,2,\ldots,n-1),\lambda_n=b.$$

(5) 若 $a_1c_1=0,a_{n-1}c_{n-1}=2ac$, 则当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为偶数阶矩阵时,

$$\lambda_i=b+2\sqrt{ac}\cos\frac{(2i-1)\pi}{2(n-1)}\,(i=1,2,\ldots,\tfrac{n-2}{2},\tfrac{n+2}{2},\ldots,n-1),\lambda_{\frac{n}{2}}=\lambda_n=b;$$

当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为奇数阶矩阵时,

$$\lambda_i=b+2\sqrt{ac}\cos\frac{(2i-1)\pi}{2(n-1)}\,(i=1,2,\ldots,n-1),\lambda_n=b.$$

注意, 当 a_1c_1 与 $a_{n-1}c_{n-1}$ 的取值互换时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值不变.

证明. (1) 若 $a_1c_1=a_{n-1}c_{n-1}=ac$, 则由定理 2.1.3 知特征多项式为

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\sqrt{ac})^nU_n\left(\frac{\lambda-b}{2\sqrt{ac}}\right).$$

因为第二类切比雪夫多项式 $U_n(x)$ 的零点是 $x_i=\cos\frac{i\pi}{n+1}\,(i=1,2,\ldots,n)$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_i=b+2\sqrt{ac}\cos\frac{i\pi}{n+1}\,(i=1,2,\ldots,n).$$

(2) 若 $a_1c_1 = a_{n-1}c_{n-1} = 0$, 则特征多项式为

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (\lambda - b)^2(\sqrt{ac})^{n-2}U_{n-2}\left(\frac{\lambda - b}{2\sqrt{ac}}\right).$$

因为第二类切比雪夫多项式 $U_{n-2}(x)$ 的零点是 $x_i = \cos\frac{i\pi}{n-1}\,(i = 1, 2, \ldots, n-2)$, 所以我们有:

如果 n 是偶数, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_i = b + 2\sqrt{ac}\cos\frac{i\pi}{n-1}\,(i = 1, 2, \ldots, n-2), \lambda_{n-1} = \lambda_n = b.$$

如果 n 是奇数, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_i = b + 2\sqrt{ac}\cos\frac{i\pi}{n-1}\,(i = 1, 2, \ldots, \tfrac{n-3}{2}, \tfrac{n+1}{2}, \ldots, n-2), \lambda_{\frac{n-1}{2}} = \lambda_{n-1} = \lambda_n = b.$$

(3) 若 $a_1c_1 = a_{n-1}c_{n-1} = 2ac$, 则特征多项式为

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \left[(\lambda - b)^2 - 4ac\right](\sqrt{ac})^{n-2}U_{n-2}\left(\frac{\lambda - b}{2\sqrt{ac}}\right),$$

其根是 $\lambda_i = b + 2\sqrt{ac}\cos\frac{(i-1)\pi}{n-1}\,(i = 1, 2, \ldots, n)$. 从而, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_i = b + 2\sqrt{ac}\cos\frac{(i-1)\pi}{n-1}\,(i = 1, 2, \ldots, n).$$

(4) 若 $a_1c_1 = 0, a_{n-1}c_{n-1} = ac$, 则特征多项式为

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (\lambda - b)(\sqrt{ac})^{n-1}U_{n-1}\left(\frac{\lambda - b}{2\sqrt{ac}}\right).$$

因为第二类切比雪夫多项式 $U_{n-1}(x)$ 的零点是 $x_i = \cos\frac{i\pi}{n}\,(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, 所以我们有:

如果 n 是偶数, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_i = b + 2\sqrt{ac}\cos\frac{i\pi}{n}\,(i = 1, 2, \ldots, \tfrac{n-2}{2}, \tfrac{n+2}{2}, \ldots, n-1), \lambda_{\frac{n}{2}} = \lambda_n = b;$$

如果 n 是奇数, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_i = b + 2\sqrt{ac}\cos\frac{i\pi}{n}\,(i = 1, 2, \ldots, n-1), \lambda_n = b.$$

(5)若 $a_1c_1 = 0, a_{n-1}c_{n-1} = 2ac$, 则特征多项式为

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = 2(\lambda - b)(\sqrt{ac})^{n-1}T_{n-1}\left(\frac{\lambda - b}{2\sqrt{ac}}\right).$$

因为第一类切比雪夫多项式 $T_{n-1}(x)$ 的零点是 $\cos\frac{(2i-1)\pi}{2(n-1)}\,(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, 所以我们有:

如果 n 是偶数, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_i = b + 2\sqrt{ac}\cos\frac{(2i-1)\pi}{2(n-1)}\,(i = 1, 2, \ldots, \tfrac{n-2}{2}, \tfrac{n+2}{2}, \ldots, n-1), \lambda_{\frac{n}{2}} = \lambda_n = b;$$

如果 n 是奇数, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_i = b + 2\sqrt{ac}\cos\frac{(2i-1)\pi}{2(n-1)}\,(i = 1, 2, \ldots, n-1), \lambda_n = b.$$

另外, 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式关于 a_1c_1 与 $a_{n-1}c_{n-1}$ 对称, 所以互换 a_1c_1 与 $a_{n-1}c_{n-1}$ 的取值时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式不变, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也不变. □

定理 2.2.2. 关于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 $\lambda_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ 有如下结论:

(1) 若 $\alpha=\beta=0$, 则

$$\lambda_i=b+2d\cos\frac{i\pi}{n+1}\,(i=1,2,\ldots,n);$$

(2) 若 $\alpha=0,\beta=d$, 则

$$\lambda_i=b+2d\cos\frac{2i\pi}{2n+1}\,(i=1,2,\ldots,n);$$

(3) 若 $\alpha=0,\beta=-d$, 则

$$\lambda_i=b+2d\cos\frac{(2i-1)\pi}{2n+1}\,(i=1,2,\ldots,n);$$

(4) 若 $\alpha=d,\beta=-d$, 则

$$\lambda_i=b+2d\cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}\,(i=1,2,\ldots,n);$$

(5) 若 $\alpha\beta=d^2$, 则

$$\lambda_i=b+2d\cos\frac{i\pi}{n}\,(i=1,2,\ldots,n-1),\lambda_n=b-(\alpha+\beta).$$

注意, 当 α 与 β 的取值互换时, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值不变.

证明. (1) 若 $\alpha=\beta=0$, 则由定理2.1.4知 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式为 $p_{\boldsymbol{B}}(\lambda)=d^nU_n\left(\frac{\lambda-b}{2d}\right)$. 因为第二类切比雪夫多项式 $U_n(x)$ 的零点是 $x_i=\cos\frac{i\pi}{n+1}\,(i=1,2,\ldots,n)$, 所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是

$$\lambda_i=b+2d\cos\frac{i\pi}{n+1}\,(i=1,2,\ldots,n).$$

(2) 若 $\alpha=0,\beta=d$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式为 $p_{\boldsymbol{B}}(\lambda)=d^nW_n\left(\frac{\lambda-b}{2d}\right)$. 因为第四类切比雪夫多项式 $W_n(x)$ 的零点是 $x_i=\cos\frac{2i\pi}{2n+1}\,(i=1,2,\ldots,n)$, 所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是

$$\lambda_i=b+2d\cos\frac{2i\pi}{2n+1}\,(i=1,2,\ldots,n).$$

(3) 若 $\alpha=0,\beta=-d$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式为 $p_{\boldsymbol{B}}(\lambda)=d^nV_n\left(\frac{\lambda-b}{2d}\right)$. 因为第三类切比雪夫多项式 $V_n(x)$ 的零点是 $x_i=\cos\frac{(2i-1)\pi}{2n+1}\,(i=1,2,\ldots,n)$, 所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是

$$\lambda_i=b+2d\cos\frac{(2i-1)\pi}{2n+1}\,(i=1,2,\ldots,n).$$

(4) 若 $\alpha=d,\beta=-d$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式为 $p_{\boldsymbol{B}}(\lambda)=2d^nT_n\left(\frac{\lambda-b}{2d}\right)$. 因为第一类切比雪夫多项式 $T_n(x)$ 的零点是 $x_i=\cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}\,(i=1,2,\ldots,n)$, 所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是

$$\lambda_i=b+2d\cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}\,(i=1,2,\ldots,n).$$

(5) 若 $\alpha\beta=d^2$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式为 $p_{\boldsymbol{B}}(\lambda)=(\lambda-b+\alpha+\beta)d^{n-1}U_{n-1}\left(\frac{\lambda-b}{2d}\right)$. 因为第二类切比雪夫多项式 $U_{n-1}(x)$ 的零点是 $x_i=\cos\frac{i\pi}{n}\,(i=1,2,\ldots,n-1)$, 所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是

$$\lambda_i=b+2d\cos\frac{i\pi}{n}\,(i=1,2,\ldots,n-1),\lambda_n=b-(\alpha+\beta).$$

另外, 由于 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式关于 α 与 β 对称, 因此互换 α 与 β 的取值时, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式不变, 从而 $\boldsymbol{B}$ 的特征值也不变. □

§2.3 特征向量

众所周知, 一个矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征向量可以通过解方程组

$$(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{M})\boldsymbol{v}=0,\ \boldsymbol{v}\neq 0 \tag{2.3.1}$$

而得到[39]. 设 $\boldsymbol{D}=\operatorname{diag}(d_0,d_1,\ldots,d_{n-1})$ 是一个以 $d_0,d_1,\ldots,d_{n-1}$ 为对角元的对角矩阵. 假设 $\boldsymbol{u}$ 是方程组

$$(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{M})\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}=0 \tag{2.3.2}$$

的解, 那么 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$ 即为方程组 (2.3.1) 的一个解, 同时也是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的一个特征向量.

对于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 而言, 方程组 (2.3.1) 中的系数矩阵 $\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A}$ 和 $\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{B}$ 是不对称的. 如果我们能将非对称的系数矩阵转化成对称矩阵, 然后再求解方程组, 过程就会简单得多. 本节通过构造方程组 (2.3.2) 中的变换矩阵 $\boldsymbol{D}$, 将方程组中的非对称系数矩阵转化为对称矩阵, 然后求出方程组的解, 即为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量. 为以下内容叙述方便, 我们记 $\alpha_i=\cos\frac{i\pi}{n+1}$, $\beta_i=\cos\frac{i\pi}{n-1}$, $\gamma_i=\cos\frac{(i-1)\pi}{n-1}$, $\delta_i=\cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}$, $\zeta_i=\cos\frac{i\pi}{n}$, $\eta_i=\cos\frac{(2i-1)\pi}{2(n-1)}$, $\theta_i=\cos\frac{2i\pi}{2n+1}$, $\xi_i=\cos\frac{(2i-1)\pi}{2n+1}$.

对于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量的求解, 由于需要讨论的情况众多, 因此不再以定理的形式给出结果, 而是直接详略得当地给出计算过程.

(1) 若 $a_1c_1=a_{n-1}c_{n-1}=ac$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_i=b+2\sqrt{ac}\alpha_i\,(i=1,2,\ldots,n)$. 设 $\boldsymbol{D}=\operatorname{diag}(d_0,d_1,\ldots,d_{n-1})$, 其中 $d_0=1$, $d_1=\sqrt{\frac{a_1}{c_1}}$, $d_i=\sqrt{\frac{a}{c}}d_{i-1}(i=2,3,\ldots,n-2)$, $d_{n-1}=\sqrt{\frac{a_{n-1}}{c_{n-1}}}d_{n-2}$.

化简系数矩阵 $(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{D}$, 方程组 (2.3.2) 变为

$$\begin{bmatrix} 2\alpha_i & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2\alpha_i \end{bmatrix}\boldsymbol{u}=0.$$

解方程组, 我们得到对应于特征值 λ_i 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=\left[d_0U_0\left(\alpha_i\right),d_1U_1\left(\alpha_i\right),\ldots,d_{n-1}U_{n-1}\left(\alpha_i\right)\right]\ (i=1,2,\ldots,n).$$

(2) 若 $a_1c_1=a_{n-1}c_{n-1}=0$, 则由定理 2.2.1 可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 对于特征向量的求解,

我们需要讨论九种情况, 即

$$(a)\ a_1 \neq 0, a_{n-1} \neq 0, c_1 = c_{n-1} = 0; \quad (b)\ a_1 \neq 0, c_{n-1} \neq 0, c_1 = a_{n-1} = 0;$$

$$(c)\ a_1 \neq 0, c_1 = a_{n-1} = c_{n-1} = 0; \quad (d)\ c_1 \neq 0, a_{n-1} \neq 0, a_1 = c_{n-1} = 0;$$

$$(e)\ c_1 \neq 0, c_{n-1} \neq 0, a_1 = a_{n-1} = 0; \quad (f)\ c_1 \neq 0, a_1 = a_{n-1} = c_{n-1} = 0;$$

$$(g)\ a_{n-1} \neq 0, a_1 = c_1 = c_{n-1} = 0; \quad (h)\ c_{n-1} \neq 0, a_1 = c_1 = a_{n-1} = 0;$$

$$(i)\ a_1 = c_1 = a_{n-1} = c_{n-1} = 0.$$

由于计算过程类似, 在这里, 我们只给出 (a) 的详细计算过程, 另外八种情况, 只给出构造的变换矩阵 $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_0, d_1, \ldots, d_{n-1})$ 和特征向量, 不再赘述计算细节.

(a) $a_1 \neq 0, a_{n-1} \neq 0, c_1 = c_{n-1} = 0$.

设 $d_0 = 1$, $d_1 = \frac{a_1}{\sqrt{ac}}$, $d_i = \sqrt{\frac{a}{c}} d_{i-1}\,(i = 2, 3, \ldots, n-2)$, $d_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{\sqrt{ac}} d_{n-2}$.

如果 n 是偶数, 特征值 $\lambda_i = b + 2\sqrt{ac}\beta_i\,(i = 1, 2, \ldots, n-2)$ 对应的方程组 $(\lambda\mathbf{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{D}\boldsymbol{u} = 0$ 可以简化为

$$\begin{bmatrix} 2\beta_i & 0 & & & & \\ -1 & 2\beta_i & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2\beta_i & -1 & \\ & & & -1 & 2\beta_i & 0 \\ & & & & -1 & 2\beta_i \end{bmatrix} \boldsymbol{u} = 0,$$

解方程组得对应的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)} = [0, 2d_1\beta_i U_0(\beta_i), \ldots, 2d_{n-2}\beta_i U_{n-3}(\beta_i), d_{n-1}U_{n-3}(\beta_i)]\,(i = 1, 2, \ldots, n-2).$$

特征值 $\lambda_{n-1} = \lambda_n = b$ 对应的方程组 $(\lambda\mathbf{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{D}\boldsymbol{u} = 0$ 可以简化为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} = 0,$$

解方程组得对应的特征向量是 $\boldsymbol{v}^{(n-1)} = \boldsymbol{v}^{(n)} = [0, 0, \ldots, 0, d_{n-1}]$.

如果 n 是奇数, 计算过程与 n 是偶数时类似, 我们得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[0,2d_1\beta_iU_0(\beta_i),\ldots,2d_{n-2}\beta_iU_{n-3}(\beta_i),d_{n-1}U_{n-3}(\beta_i)]$$

$$(i=1,2,\ldots,\tfrac{n-3}{2},\tfrac{n+1}{2},\ldots,n-2),$$

$$\boldsymbol{v}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}=\boldsymbol{v}^{(n-1)}=\boldsymbol{v}^{(n)}=[0,0,\ldots,0,d_{n-1}].$$

(b) $a_1\neq0,c_{n-1}\neq0,c_1=a_{n-1}=0.$

设 $d_0=1$, $d_1=\frac{a_1}{\sqrt{ac}}$, $d_i=\sqrt{\frac{a}{c}}d_{i-1}\,(i=2,3,\ldots,n-2)$, $d_{n-1}=\frac{\sqrt{ac}}{c_{n-1}}d_{n-2}$. 经计算, 如果 n 是偶数, 那么 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[0,d_1U_0(\beta_i),\ldots,d_{n-2}U_{n-3}(\beta_i),0]\,(i=1,2,\ldots,n-2),$$

$$\boldsymbol{v}^{(n-1)}=[d_0,0,-d_2,0,\ldots,(-1)^{\frac{n-2}{2}}d_{n-2},0],$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)}=[0,d_1,0,-d_3,\ldots,0,(-1)^{\frac{n-2}{2}}d_{n-1}].$$

如果 n 是奇数, 那么 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[0,d_1U_0(\beta_i),\ldots,d_{n-2}U_{n-3}(\beta_i),0]\,(i=1,2,\ldots,\tfrac{n-3}{2},\tfrac{n+1}{2},\ldots,n-2),$$

$$\boldsymbol{v}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}=\boldsymbol{v}^{(n-1)}=[d_0,0,-d_2,0,d_4,\ldots,0,(-1)^{\frac{n-1}{2}}d_{n-1}],$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)}=[0,d_1,0,-d_3,0,\ldots,(-1)^{\frac{n-3}{2}}d_{n-2},0].$$

(c) $a_1\neq0,c_1=a_{n-1}=c_{n-1}=0.$

设 $d_0=1$, $d_1=\frac{a_1}{\sqrt{ac}}$, $d_i=\sqrt{\frac{a}{c}}d_{i-1}\,(i=2,3,\ldots,n-1)$. 如果 n 是偶数, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[0,d_1U_0(\beta_i),\ldots,d_{n-2}U_{n-3}(\beta_i),0]\,(i=1,2,\ldots,n-2),$$

$$\boldsymbol{v}^{(n-1)}=[0,0,\ldots,0,d_{n-1}],$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)}=[d_0,0,-d_2,0,\ldots,(-1)^{\frac{n-2}{2}}d_{n-2},0].$$

如果 n 是奇数, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[0,d_1U_0(\beta_i),\ldots,d_{n-2}U_{n-3}(\beta_i),0]\,(i=1,2,\ldots,\tfrac{n-3}{2},\tfrac{n+1}{2},\ldots,n-2),$$

$$\boldsymbol{v}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}=\boldsymbol{v}^{(n-1)}=[0,0,\ldots,0,d_{n-1}],$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)}=[0,d_1,0,-d_3,\ldots,(-1)^{\frac{n-3}{2}}d_{n-2},0].$$

(d) $c_1\neq0,a_{n-1}\neq0,a_1=c_{n-1}=0.$

设 $d_0=1$, $d_1=\frac{\sqrt{ac}}{c_1}$, $d_i=\sqrt{\frac{a}{c}}d_{i-1}\,(i=2,3,\ldots,n-2)$, $d_{n-1}=\frac{a_{n-1}}{\sqrt{ac}}d_{n-2}$. 经计算, 如果 n 是偶数, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[1,2d_1\beta_iU_0(\beta_i),\ldots,2d_{n-2}\beta_iU_{n-3}(\beta_i),d_{n-1}U_{n-3}(\beta_i)]\,(i=1,2,\ldots,n-2),$$

$$\boldsymbol{v}^{(n-1)}=[1,0,0,\ldots,0,0],$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)}=[0,0,0,\ldots,0,d_{n-1}].$$

如果n是奇数, 那么矩阵$\boldsymbol{A}$的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[1,2d_1\beta_iU_0\left(\beta_i\right),\ldots,2d_{n-2}\beta_iU_{n-3}\left(\beta_i\right),d_{n-1}U_{n-3}\left(\beta_i\right)]$$

$$(i=1,2,\ldots,\tfrac{n-3}{2},\tfrac{n+1}{2},\ldots,n-2),$$

$$\boldsymbol{v}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}=\boldsymbol{v}^{(n-1)}=[1,0,0,\ldots,0,0],$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)}=[0,0,0,\ldots,0,d_{n-1}].$$

(e) $c_1\neq 0,c_{n-1}\neq 0,a_1=a_{n-1}=0.$

设$d_0=1$, $d_1=\frac{\sqrt{ac}}{c_1}$, $d_i=\sqrt{\frac{a}{c}}d_{i-1}\,(i=2,3,\ldots,n-2)$, $d_{n-1}=\frac{\sqrt{ac}}{c_{n-1}}d_{n-2}$. 经计算, 如果$n$是偶数, 那么矩阵$\boldsymbol{A}$的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[1,2d_1\beta_iU_0\left(\beta_i\right),\ldots,2d_{n-2}\beta_iU_{n-3}\left(\beta_i\right),0]\,(i=1,2,\ldots,n-2),$$

$$\boldsymbol{v}^{(n-1)}=\boldsymbol{v}^{(n)}=[1,0,0,\ldots,0,0].$$

如果n是奇数, 那么矩阵$\boldsymbol{A}$的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[1,2d_1\beta_iU_0\left(\beta_i\right),\ldots,2d_{n-2}\beta_iU_{n-3}\left(\beta_i\right),0]\,(i=1,2,\ldots,\tfrac{n-3}{2},\tfrac{n+1}{2},\ldots,n-2),$$

$$\boldsymbol{v}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}=\boldsymbol{v}^{(n-1)}=\boldsymbol{v}^{(n)}=[1,0,0,\ldots,0,0].$$

(f) $c_1\neq 0,a_1=a_{n-1}=c_{n-1}=0.$

设$d_0=1$, $d_1=\frac{\sqrt{ac}}{c_1}$, $d_i=\sqrt{\frac{a}{c}}d_{i-1}\,(i=2,3,\ldots,n-1)$. 经计算, 如果$n$是偶数, 那么矩阵$\boldsymbol{A}$的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[1,2d_1\beta_iU_0\left(\beta_i\right),\ldots,2d_{n-2}\beta_iU_{n-3}\left(\beta_i\right),0]\,(i=1,2,\ldots,n-2),$$

$$\boldsymbol{v}^{(n-1)}=[1,0,0,\ldots,0,0],$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)}=[0,0,0,\ldots,0,d_{n-1}].$$

如果n是奇数, 那么矩阵$\boldsymbol{A}$的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[1,2d_1\beta_iU_0\left(\beta_i\right),\ldots,2d_{n-2}\beta_iU_{n-3}\left(\beta_i\right),0]\,(i=1,2,\ldots,\tfrac{n-3}{2},\tfrac{n+1}{2},\ldots,n-2),$$

$$\boldsymbol{v}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}=\boldsymbol{v}^{(n-1)}=[1,0,0,\ldots,0,0],$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)}=[0,0,0,\ldots,0,d_{n-1}].$$

(g) $a_{n-1}\neq 0,a_1=c_1=c_{n-1}=0.$

设$d_0=d_1=1$, $d_i=\sqrt{\frac{a}{c}}d_{i-1}\,(i=2,3,\ldots,n-2)$, $d_{n-1}=\frac{a_{n-1}}{\sqrt{ac}}d_{n-2}$. 经计算, 如果$n$是偶数, 那么矩阵$\boldsymbol{A}$的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[0,2d_1\beta_iU_0\left(\beta_i\right),\ldots,2d_{n-2}\beta_iU_{n-3}\left(\beta_i\right),d_{n-1}U_{n-3}\left(\beta_i\right)]\,(i=1,2,\ldots,n-2),$$

$$\boldsymbol{v}^{(n-1)}=[1,0,\ldots,0,0],$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)}=[0,0,\ldots,0,d_{n-1}].$$

如果n是奇数, 那么矩阵$\boldsymbol{A}$的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[0,2d_1\beta_iU_0\left(\beta_i\right),\ldots,2d_{n-2}\beta_iU_{n-3}\left(\beta_i\right),d_{n-1}U_{n-3}\left(\beta_i\right)]$$

$$(i=1,2,\ldots,\tfrac{n-3}{2},\tfrac{n+1}{2},\ldots,n-2),$$

$$\boldsymbol{v}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}=\boldsymbol{v}^{(n-1)}=[1,0,\ldots,0,0],$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)}=[0,0,\ldots,0,d_{n-1}].$$

(h) $c_{n-1}\neq 0, a_1=c_1=a_{n-1}=0.$

设$d_0=d_1=1$, $d_i=\sqrt{\frac{a}{c}}d_{i-1}\,(i=2,3,\ldots,n-2)$, $d_{n-1}=\frac{\sqrt{ac}}{c_{n-1}}d_{n-2}$. 如果$n$是偶数, 那么矩阵$\boldsymbol{A}$的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[0,d_1U_0\left(\beta_i\right),\ldots,d_{n-2}U_{n-3}\left(\beta_i\right),0]\,(i=1,2,\ldots,n-2),$$

$$\boldsymbol{v}^{(n-1)}=[1,0,\ldots,0],$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)}=[0,d_1,0,-d_3,\ldots,0,(-1)^{\frac{n-2}{2}}d_{n-1}].$$

如果n是奇数, 那么矩阵$\boldsymbol{A}$的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[0,d_1U_0\left(\beta_i\right),\ldots,d_{n-2}U_{n-3}\left(\beta_i\right),0]\,(i=1,2,\ldots,\tfrac{n-3}{2},\tfrac{n+1}{2},\ldots,n-2),$$

$$\boldsymbol{v}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}=\boldsymbol{v}^{(n-1)}=[1,0,\ldots,0],$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)}=[0,d_1,0,-d_3,\ldots,(-1)^{\frac{n-3}{2}}d_{n-2},0].$$

(i) $a_1=c_1=a_{n-1}=c_{n-1}=0.$

设$d_0=d_1=1$, $d_i=\sqrt{\frac{a}{c}}d_{i-1}\,(i=2,3,\ldots,n-1)$. 经计算, 如果$n$是偶数, 那么矩阵$\boldsymbol{A}$的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[0,d_1U_0\left(\beta_i\right),\ldots,d_{n-2}U_{n-3}\left(\beta_i\right),0]\,(i=1,2,\ldots,n-2),$$

$$\boldsymbol{v}^{(n-1)}=[1,0,0,\ldots,0,0],$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)}=[0,0,0,\ldots,0,d_{n-1}].$$

如果n是奇数, 那么矩阵$\boldsymbol{A}$的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[0,d_1U_0\left(\beta_i\right),\ldots,d_{n-2}U_{n-3}\left(\beta_i\right),0]\,(i=1,2,\ldots,\tfrac{n-3}{2},\tfrac{n+1}{2},\ldots,n-2),$$

$$\boldsymbol{v}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}=[0,d_1,0,-d_3,\ldots,(-1)^{\frac{n-3}{2}}d_{n-2},0],$$

$$\boldsymbol{v}^{(n-1)}=[1,0,0,\ldots,0,0],\boldsymbol{v}^{(n)}=[0,0,0,\ldots,0,d_{n-1}].$$

(3) 若 $a_1c_1 = a_{n-1}c_{n-1} = 2ac$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i = b + 2\sqrt{ac}\gamma_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$. 设 $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(d_0, d_1, \ldots, d_{n-1})$, 其中 $d_0 = 1$, $d_1 = \sqrt{\frac{2a_1}{c_1}}$, $d_i = \sqrt{\frac{a}{c}}d_{i-1}\,(i = 2, 3, \ldots, n-2)$, $d_{n-1} = \sqrt{\frac{a_{n-1}}{2c_{n-1}}}d_{n-2}$.

化简系数矩阵 $(\lambda\mathbf{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{D}$, 方程组 (2.3.2) 变为

$$\begin{bmatrix} \gamma_i & -1 & & & \\ -1 & 2\gamma_i & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2\gamma_i & -1 \\ & & & -1 & \gamma_i \end{bmatrix}\boldsymbol{u} = 0.$$

求解方程组, 我们得到属于特征值 λ_i 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)} = \left[d_0T_0\left(\gamma_i\right), d_1T_1\left(\gamma_i\right), \ldots, d_{n-1}T_{n-1}\left(\gamma_i\right)\right]\ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

(4) 若 $a_1c_1 = 0, a_{n-1}c_{n-1} = ac$, 则由定理 2.2.1 可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 对于特征向量的计算, 我们需要考虑三种情况, 即(a) $a_1 \neq 0, c_1 = 0$; (b) $c_1 \neq 0, a_1 = 0$; (c) $a_1 = c_1 = 0$.

设 $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(d_0, d_1, \ldots, d_{n-1})$ 是一个对角矩阵. 在这三种情况中, 我们详细地叙述求解特征向量的过程.

(a) $a_1 \neq 0, c_1 = 0$.

设 $d_0 = 1$, $d_1 = \frac{a_1}{\sqrt{ac}}$, $d_i = \sqrt{\frac{a}{c}}d_{i-1}\,(i = 2, 3, \ldots, n-2)$, $d_{n-1} = \sqrt{\frac{a_{n-1}}{c_{n-1}}}d_{n-2}$.

如果 n 是奇数, 特征值 $\lambda_i = b+2\sqrt{ac}\zeta_i\,(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ 对应的方程组 $(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{D}\boldsymbol{u} = 0$ 可以化简为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ -1 & 2\zeta_i & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2\zeta_i & -1 \\ & & & -1 & 2\zeta_i \end{bmatrix}\boldsymbol{u} = 0.$$

通过求解方程组, 我们得到对应的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)} = \left[0, d_1U_0\left(\zeta_i\right), d_2U_1\left(\zeta_i\right), \ldots, d_{n-1}U_{n-2}\left(\zeta_i\right)\right]\ (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

特征值 $\lambda_n=b$ 对应的方程组 $(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}=0$ 可以化简为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}=0. \tag{2.3.3}$$

解方程组, 求得对应的特征向量是 $\boldsymbol{v}^{(n)}=[d_0,0,-d_2,0,d_4,\ldots,0,(-1)^{\frac{n-1}{2}}d_{n-1}]$.

如果 n 是偶数, 类似于 n 是奇数时的求解过程, 我们得到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[0,d_1U_0\left(\zeta_i\right),\ldots,d_{n-1}U_{n-2}\left(\zeta_i\right)]\,(i=1,2,\ldots,\tfrac{n-2}{2},\tfrac{n+2}{2},\ldots,n-1),$$

$$\boldsymbol{v}^{\left(\frac{n}{2}\right)}=\boldsymbol{v}^{(n)}=[0,d_1,0,-d_3,\ldots,0,(-1)^{\frac{n-2}{2}}d_{n-1}].$$

(b) $c_1\neq 0, a_1=0$.

设 $d_0=1$, $d_1=\frac{\sqrt{ac}}{c_1}$, $d_i=\sqrt{\frac{a}{c}}d_{i-1}\,(i=2,3,\ldots,n-2)$, $d_{n-1}=\sqrt{\frac{a_{n-1}}{c_{n-1}}}d_{n-2}$.

如果 n 是奇数, 那么特征值 $\lambda_i=b+2\sqrt{ac}\zeta_i\,(i=1,2,\ldots,n-1)$ 对应的方程组 $(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}=0$ 可以化简为

$$\begin{bmatrix} 2\zeta_i & -1 & & & \\ 0 & 2\zeta_i & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2\zeta_i & -1 \\ & & & -1 & 2\zeta_i \end{bmatrix}\boldsymbol{u}=0.$$

求解方程组, 我们得到对应的特征向量

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[1,2d_1\zeta_iU_0\left(\zeta_i\right),2d_2\zeta_iU_1\left(\zeta_i\right),\ldots,2d_{n-1}\zeta_iU_{n-2}\left(\zeta_i\right)]\ (i=1,2,\ldots,n-1).$$

特征值 $\lambda_n=b$ 对应的方程组 $(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}=0$ 可以化简为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}=0, \tag{2.3.4}$$

解方程组, 求得特征向量 $\boldsymbol{v}^{(n)}=[1,0,0,\ldots,0,0]$.

如果n是偶数, 那么矩阵$\boldsymbol{A}$的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[1,2d_1\zeta_iU_0\left(\zeta_i\right),\ldots,2d_{n-1}\zeta_iU_{n-2}\left(\zeta_i\right)]\,(i=1,2,\ldots,\tfrac{n-2}{2},\tfrac{n+2}{2},\ldots,n-1),$$

$$\boldsymbol{v}^{\left(\frac{n}{2}\right)}=\boldsymbol{v}^{(n)}=[1,0,0,\ldots,0,0].$$

(c) $a_1=0,c_1=0$.

设$d_0=d_1=1$, $d_i=\sqrt{\frac{a}{c}}d_{i-1}\,(i=2,3,\ldots,n-2)$, $d_{n-1}=\sqrt{\frac{a_{n-1}}{c_{n-1}}}d_{n-2}$.

如果n是奇数, 那么特征值$\lambda_i=b+2\sqrt{ac}\zeta_i\,(i=1,2,\ldots,n-1)$对应的方程组$(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}=0$ 可以化简为

$$\begin{bmatrix}1&0&&&\\0&2\zeta_i&-1&&\\&-1&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&2\zeta_i&-1\\&&&-1&2\zeta_i\end{bmatrix}\boldsymbol{u}=0.$$

解方程组, 我们得到对应的特征向量

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[0,d_1U_0\left(\zeta_i\right),d_2U_1\left(\zeta_i\right),\ldots,d_{n-1}U_{n-2}\left(\zeta_i\right)]\,(i=1,2,\ldots,n-1).$$

特征值$\lambda_n=b$对应的方程组$(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}=0$可以化简为

$$\begin{bmatrix}0&0&&&\\0&0&1&&\\&1&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&0&1\\&&&1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}=0. \tag{2.3.5}$$

解方程组, 求得特征向量$\boldsymbol{v}^{(n)}=[1,0,0,\ldots,0,0]$.

如果n是偶数, 计算特征向量的过程类似于n是奇数时的求解过程, 得到矩阵$\boldsymbol{A}$的特征向量

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[0,d_1U_0\left(\zeta_i\right),\ldots,d_{n-1}U_{n-2}\left(\zeta_i\right)]\ (i=1,2,\ldots,\tfrac{n-2}{2},\tfrac{n+2}{2},\ldots,n-1),$$

$$\boldsymbol{v}^{\left(\frac{n}{2}\right)}=[0,d_1,0,-d_3,\ldots,0,(-1)^{\frac{n-2}{2}}d_{n-1}],$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)}=[1,0,0,\ldots,0,0].$$

(5) 若$a_1c_1=ac,a_{n-1}c_{n-1}=0$, 则由定理2.2.1知, 此时$\boldsymbol{A}$的特征值与$a_1c_1=0$, $a_{n-1}c_{n-1}=ac$时相同. 对于特征向量的计算, 我们也讨论三种情况: (a) $a_{n-1}\neq 0,c_{n-1}=0$; (b) $a_{n-1}=0,c_{n-1}\neq 0$; (c) $a_{n-1}=c_{n-1}=0$. 由于这三种情况的计算过程与$a_1c_1=0,a_{n-1}c_{n-1}=ac$时

类似, 所以我们直接给出构造的对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的对角元以及所求的特征向量, 不再赘述具体细节.

(a) $a_{n-1} \neq 0, c_{n-1} = 0$.

设 $d_0 = 1$, $d_1 = \sqrt{\frac{a_1}{c_1}}$, $d_i = \sqrt{\frac{a}{c}} d_{i-1} (i = 2, 3, \ldots, n-2)$, $d_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{\sqrt{ac}} d_{n-2}$. 经计算, 如果 n 是奇数, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)} = [2d_0\zeta_i U_0(\zeta_i), \ldots, 2d_{n-2}\zeta_i U_{n-2}(\zeta_i), d_{n-1}U_{n-2}(\zeta_i)] \ (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)} = [0, 0, \ldots, 0, d_{n-1}].$$

如果 n 是偶数, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)} = [2d_0\zeta_i U_0(\zeta_i), \ldots, 2d_{n-2}\zeta_i U_{n-2}(\zeta_i), d_{n-1}U_{n-2}(\zeta_i)] \, (i = 1, 2, \ldots, \tfrac{n-2}{2}, \tfrac{n+2}{2}, \ldots, n-1),$$

$$\boldsymbol{v}^{\left(\frac{n}{2}\right)} = \boldsymbol{v}^{(n)} = [0, 0, \ldots, 0, d_{n-1}].$$

(b) $c_{n-1} \neq 0, a_{n-1} = 0$.

设 $d_0 = 1$, $d_1 = \sqrt{\frac{a_1}{c_1}}$, $d_i = \sqrt{\frac{a}{c}} d_{i-1} (i = 2, 3, \ldots, n-2)$, $d_{n-1} = \frac{\sqrt{ac}}{c_{n-1}} d_{n-2}$. 经计算, 如果 n 是奇数, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)} = [d_0U_0(\zeta_i), d_1U_1(\zeta_i), \ldots, d_{n-2}U_{n-2}(\zeta_i), 0] \ (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)} = [d_0, 0, -d_2, 0, d_4, \ldots, 0, (-1)^{\frac{n-1}{2}} d_{n-1}].$$

如果 n 是偶数, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)} = [d_0U_0(\zeta_i), d_1U_1(\zeta_i), \ldots, d_{n-2}U_{n-2}(\zeta_i), 0] \ (i = 1, \ldots, \tfrac{n-2}{2}, \tfrac{n+2}{2}, \ldots, n-1),$$

$$\boldsymbol{v}^{\left(\frac{n}{2}\right)} = \boldsymbol{v}^{(n)} = [d_0, 0, -d_2, 0, d_4, \ldots, 0, (-1)^{\frac{n-2}{2}} d_{n-2}, 0].$$

(c) $a_{n-1} = c_{n-1} = 0$.

设 $d_0 = 1$, $d_1 = \sqrt{\frac{a_1}{c_1}}$, $d_i = \sqrt{\frac{a}{c}} d_{i-1} (i = 2, 3, \ldots, n-1)$. 经计算, 如果 n 是奇数, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)} = [d_0U_0(\zeta_i), d_1U_1(\zeta_i), \ldots, d_{n-2}U_{n-2}(\zeta_i), 0] \ (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)} = [0, 0, \ldots, 0, d_{n-1}].$$

如果 n 是偶数, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)} = [d_0U_0(\zeta_i), \ldots, d_{n-2}U_{n-2}(\zeta_i), 0] \ (i = 1, \ldots, \tfrac{n-2}{2}, \tfrac{n+2}{2}, \ldots, n-1),$$

$$\boldsymbol{v}^{\left(\frac{n}{2}\right)} = [d_0, 0, -d_2, 0, d_4, \ldots, (-1)^{\frac{n-2}{2}} d_{n-2}, 0],$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)} = [0, 0, \ldots, 0, d_{n-1}].$$

(6) 若 $a_1c_1 = 0, a_{n-1}c_{n-1} = 2ac$, 则由定理 2.2.1 知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 对于特征向量的计算, 我们需要讨论三种情况:(a) $a_1 \neq 0, c_1 = 0$; (b) $c_1 \neq 0, a_1 = 0$; (c) $a_1 = c_1 = 0$.

设 $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_0, d_1, \ldots, d_{n-1})$ 是一个对角矩阵. 下面我们详细地叙述求解过程.

(a) $a_1 \neq 0, c_1 = 0$.

设 $d_0 = 1$, $d_1 = \frac{a_1}{\sqrt{ac}}$, $d_i = \sqrt{\frac{a}{c}} d_{i-1}\,(i = 2, 3, \ldots, n-2)$, $d_{n-1} = \sqrt{\frac{a_{n-1}}{2c_{n-1}}} d_{n-2}$.

如果 n 是奇数, 那么特征值 $\lambda_i = b + 2\sqrt{ac}\eta_i\,(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ 对应的方程组 $(\lambda\mathbf{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{D}\boldsymbol{u} = 0$ 可以化简为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ -1 & 2\eta_i & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2\eta_i & -1 \\ & & & -1 & \eta_i \end{bmatrix} \boldsymbol{u} = 0.$$

求解方程组, 得到对应的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)} = [0, d_1 U_0(\eta_i), d_2 U_1(\eta_i), \ldots, d_{n-1} U_{n-2}(\eta_i)]\ (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

由于特征值 $\lambda_n = b$ 对应的方程组 $(\lambda\mathbf{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{D}\boldsymbol{u} = 0$ 可以化简为 (2.3.3), 因此属于 $\lambda_n = b$ 的特征向量是 $\boldsymbol{v}^{(n)} = [d_0, 0, -d_2, 0, d_4, \ldots, 0, (-1)^{\frac{n-1}{2}} d_{n-1}]$.

如果 n 是偶数, 经计算, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)} = [0, d_1 U_0(\eta_i), \ldots, d_{n-1} U_{n-2}(\eta_i)]\ (i = 1, 2, \ldots, \tfrac{n-2}{2}, \tfrac{n+2}{2}, \ldots, n-1),$$

$$\boldsymbol{v}^{\left(\frac{n}{2}\right)} = \boldsymbol{v}^{(n)} = [0, d_1, 0, -d_3, \ldots, 0, (-1)^{\frac{n-2}{2}} d_{n-1}].$$

(b) $c_1 \neq 0, a_1 = 0$.

设 $d_0 = 1$, $d_1 = \frac{\sqrt{ac}}{c_1}$, $d_i = \sqrt{\frac{a}{c}} d_{i-1}\,(i = 2, 3, \ldots, n-2)$, $d_{n-1} = \sqrt{\frac{a_{n-1}}{2c_{n-1}}} d_{n-2}$.

如果 n 是奇数, 那么特征值 $\lambda_i = b + 2\sqrt{ac}\eta_i\,(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ 对应的方程组 $(\lambda\mathbf{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{D}\boldsymbol{u} = 0$ 可以化简为

$$\begin{bmatrix} 2\eta_i & -1 & & & \\ 0 & 2\eta_i & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2\eta_i & -1 \\ & & & -1 & \eta_i \end{bmatrix} \boldsymbol{u} = 0.$$

解方程组, 我们得到特征向量

$$\boldsymbol{v}^{(i)} = [1, 2d_1\eta_i U_0(\eta_i), \ldots, 2d_{n-1}\eta_i U_{n-2}(\eta_i)]\ (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

由于特征值 $\lambda_n = b$ 对应的方程组 $(\lambda\mathbf{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{D}\boldsymbol{u} = 0$ 可以化简为 (2.3.4), 所以对应的特征向量是 $\boldsymbol{v}^{(n)} = [1, 0, 0, \ldots, 0, 0]$.

如果n是偶数, 那么$\boldsymbol{A}$的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[1,2d_1\eta_iU_0(\eta_i),\ldots,2d_{n-1}\eta_iU_{n-2}(\eta_i)]\ (i=1,2,\ldots,\tfrac{n-2}{2},\tfrac{n+2}{2},\ldots,n-1),$$

$$\boldsymbol{v}^{\left(\frac{n}{2}\right)}=\boldsymbol{v}^{(n)}=[1,0,0,\ldots,0,0].$$

(c) $a_1=c_1=0$.

设$d_0=d_1=1$, $d_i=\sqrt{\frac{a}{c}}d_{i-1}\,(i=2,3,\ldots,n-2)$, $d_{n-1}=\sqrt{\frac{a_{n-1}}{2c_{n-1}}}d_{n-2}$.

如果n是奇数, 那么特征值$\lambda_i=b+2\sqrt{ac}\eta_i\,(i=1,2,\ldots,n-1)$对应的方程组$(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}=0$可以化简为

$$\begin{bmatrix}1&0&&&\\0&2\eta_i&-1&&\\&-1&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&2\eta_i&-1\\&&&-1&\eta_i\end{bmatrix}\boldsymbol{u}=0.$$

解方程组, 得到特征向量

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[0,d_1U_0(\eta_i),d_2U_1(\eta_i),\ldots,d_{n-1}U_{n-2}(\eta_i)]\,(i=1,2,\ldots,n-1).$$

由于特征值$\lambda_n=b$对应的方程组$(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}=0$可以化简为(2.3.5), 所以属于$\lambda_n=b$的特征向量为$\boldsymbol{v}^{(n)}=[1,0,0,\ldots,0,0]$.

如果n是偶数, 经计算, 矩阵$\boldsymbol{A}$的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[0,d_1U_0(\eta_i),d_2U_1(\eta_i),\ldots,d_{n-1}U_{n-2}(\eta_i)]\ (i=1,2,\ldots,\tfrac{n-2}{2},\tfrac{n+2}{2},\ldots,n-1),$$

$$\boldsymbol{v}^{\left(\frac{n}{2}\right)}=[0,d_1,0,-d_3,\ldots,0,(-1)^{\frac{n-2}{2}}d_{n-1}],$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)}=[1,0,0,\ldots,0,0].$$

(7) 若$a_1c_1=2ac, a_{n-1}c_{n-1}=0$, 则由定理2.2.1知此时$\boldsymbol{A}$的特征值与$a_1c_1=0, a_{n-1}c_{n-1}=2ac$时相同. 对于特征向量的计算, 我们考虑三种情况: (a) $a_{n-1}\neq 0, c_{n-1}=0$; (b) $a_{n-1}=0, c_{n-1}\neq 0$; (c) $a_{n-1}=c_{n-1}=0$.

设$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_0,d_1,\ldots,d_{n-1})$是一个对角矩阵. 由于计算过程与$a_1c_1=0, a_{n-1}c_{n-1}=2ac$时类似, 因此我们直接给出构造矩阵$\boldsymbol{D}$的对角元和矩阵$\boldsymbol{A}$的特征向量.

(a) $a_{n-1}\neq 0, c_{n-1}=0$.

设$d_0=1$, $d_1=\sqrt{\frac{2a_1}{c_1}}$, $d_i=\sqrt{\frac{a}{c}}d_{i-1}\,(i=2,3,\ldots,n-2)$, $d_{n-1}=\frac{a_{n-1}}{\sqrt{ac}}d_{n-2}$. 经计算, 如果$n$是奇数, 那么矩阵$\boldsymbol{A}$的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[2d_0\eta_iT_0(\eta_i),\ldots,2d_{n-2}\eta_iT_{n-2}(\eta_i),d_{n-1}T_{n-2}(\eta_i)]\ (i=1,2,\ldots,n-1),$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)}=[0,0,\ldots,0,d_{n-1}].$$

如果 n 是偶数, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[2d_0\eta_iT_0(\eta_i),\ldots,2d_{n-2}\eta_iT_{n-2}(\eta_i),d_{n-1}T_{n-2}(\eta_i)]\ (i=1,2,\ldots,\tfrac{n-2}{2},\tfrac{n+2}{2},\ldots,n-1),$$

$$\boldsymbol{v}^{\left(\frac{n}{2}\right)}=\boldsymbol{v}^{(n)}=[0,0,\ldots,0,d_{n-1}].$$

(b) $c_{n-1}\neq 0, a_{n-1}=0$.

设 $d_0=1$, $d_1=\sqrt{\frac{2a_1}{c_1}}$, $d_i=\sqrt{\frac{a}{c}}d_{i-1}\,(i=2,3,\ldots,n-2)$, $d_{n-1}=\frac{\sqrt{ac}}{c_{n-1}}d_{n-2}$. 经计算, 如果 n 是奇数, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[d_0T_0(\eta_i),d_1T_1(\eta_i),\ldots,d_{n-2}T_{n-2}(\eta_i),0]\ (i=1,2,\ldots,n-1),$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)}=[d_0,0,-d_2,0,d_4,\ldots,0,(-1)^{\frac{n-1}{2}}d_{n-1}].$$

如果 n 是偶数, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[d_0T_0(\eta_i),d_1T_1(\eta_i),\ldots,d_{n-2}T_{n-2}(\eta_i),0]\ (i=1,\ldots,\tfrac{n-2}{2},\tfrac{n+2}{2},\ldots,n-1),$$

$$\boldsymbol{v}^{\left(\frac{n}{2}\right)}=\boldsymbol{v}^{(n)}=[d_0,0,-d_2,0,d_4,\ldots,0,(-1)^{\frac{n-2}{2}}d_{n-2},0].$$

(c) $a_{n-1}=c_{n-1}=0$.

设 $d_0=1$, $d_1=\sqrt{\frac{2a_1}{c_1}}$, $d_i=\sqrt{\frac{a}{c}}d_{i-1}\,(i=2,3,\ldots,n-1)$. 经计算, 如果 n 是奇数, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[d_0T_0(\eta_i),d_1T_1(\eta_i),\ldots,d_{n-2}T_{n-2}(\eta_i),0]\ (i=1,2,\ldots,n-1),$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)}=[0,0,\ldots,0,d_{n-1}].$$

如果 n 是偶数, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[d_0T_0(\eta_i),d_1T_1(\eta_i),\ldots,d_{n-2}T_{n-2}(\eta_i),0]\ (i=1,\ldots,\tfrac{n-2}{2},\tfrac{n+2}{2},\ldots,n-1),$$

$$\boldsymbol{v}^{\left(\frac{n}{2}\right)}=[d_0,0,-d_2,0,d_4,\ldots,(-1)^{\frac{n-2}{2}}d_{n-2},0],$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)}=[0,0,\ldots,0,d_{n-1}].$$

至此, 关于计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量的讨论结束.

定理 2.3.1. 关于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量 $\boldsymbol{v}^{(i)}\,(i=1,2,\ldots,n)$ 有以下结论:

(1) 若 $\alpha=\beta=0$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[d_0U_0(\alpha_i),d_1U_1(\alpha_i),\ldots,d_{n-1}U_{n-1}(\alpha_i)]\ (i=1,2,\ldots,n);$$

(2) 若 $\alpha=0,\beta=d$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[d_0U_0(\theta_i),d_1U_1(\theta_i),\ldots,d_{n-1}U_{n-1}(\theta_i)]\ (i=1,2,\ldots,n);$$

(3) 若 $\alpha=d,\beta=0$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[d_0W_0(\theta_i),d_1W_1(\theta_i),\ldots,d_{n-1}W_{n-1}(\theta_i)]\ (i=1,2,\ldots,n);$$

(4) 若 $\alpha=0,\beta=-d$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[d_0U_0(\xi_i),d_1U_1(\xi_i),\ldots,d_{n-1}U_{n-1}(\xi_i)]\ (i=1,2,\ldots,n);$$

(5) 若 $\alpha=-d,\beta=0$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[d_0V_0(\xi_i),d_1V_1(\xi_i),\ldots,d_{n-1}V_{n-1}(\xi_i)]\ (i=1,2,\ldots,n);$$

(6) 若 $\alpha=d,\beta=-d$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[d_0W_0(\delta_i),d_1W_1(\delta_i),\ldots,d_{n-1}W_{n-1}(\delta_i)]\ (i=1,2,\ldots,n);$$

(7) 若 $\alpha=-d,\beta=d$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[d_0V_0(\delta_i),d_1V_1(\delta_i),\ldots,d_{n-1}V_{n-1}(\delta_i)]\ (i=1,2,\ldots,n);$$

(8) 若 $\alpha=\beta=d$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[d_0W_0(\zeta_i),d_1W_1(\zeta_i),\ldots,d_{n-1}W_{n-1}(\zeta_i)]\ (i=1,2,\ldots,n-1),$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)}=\left[d_0,-d_1,\ldots,(-1)^{n-1}d_{n-1}\right];$$

(9) 若 $\alpha=\beta=-d$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[d_0V_0(\zeta_i),d_1V_1(\zeta_i),\ldots,d_{n-1}V_{n-1}(\zeta_i)]\ (i=1,2,\ldots,n-1),$$

$$\boldsymbol{v}^{(n)}=[d_0,d_1,\ldots,d_{n-1}].$$

证明. 设 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_0,d_1,\ldots,d_{n-1})$ 是一个对角矩阵, 其中

$$d_0=1,\ d_i=\left(\frac{a_1a_2\ldots a_i}{c_1c_2\ldots c_i}\right)^{1/2}(i=1,2,\ldots,n-1). \tag{2.3.6}$$

在上述九个结论中, 我们需要构造的对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 均为 (2.3.6).

(1) 若 $\alpha=\beta=0$, 则由定理 2.2.2 知 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是 $\lambda_i=b+2d\alpha_i$. 化简系数矩阵 $(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{D}$, 我们得到方程组

$$\begin{bmatrix} 2\alpha_i & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2\alpha_i \end{bmatrix}\boldsymbol{u}=0.$$

解方程组, 求得其解为

$$\boldsymbol{u}^{(i)}=[U_0(\alpha_i),U_1(\alpha_i),\ldots,U_{n-1}(\alpha_i)]\ (i=1,2,\ldots,n).$$

因此, 此时矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}^{(i)}=[d_0U_0(\alpha_i),d_1U_1(\alpha_i),\ldots,d_{n-1}U_{n-1}(\alpha_i)]\ (i=1,2,\ldots,n).$$

对于情况 (2)–(7), 证明过程类似于结论 (1), 此处不再赘述.

(8) 若 $\alpha=\beta=d$, 则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 $\lambda_i=b+2d\zeta_i\,(i=1,2,\ldots,n-1)$ 对应的方程组为

$$\begin{bmatrix} 2\zeta_i+1 & -1 & & & \\ -1 & 2\zeta_i & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2\zeta_i & -1 \\ & & & -1 & 2\zeta_i+1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}=0.$$

解方程组得矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=[d_0W_0(\zeta_i),d_1W_1(\zeta_i),\ldots,d_{n-1}W_{n-1}(\zeta_i)]\ (i=1,2,\ldots,n-1).$$

特征值 $\lambda_n=b-2d$ 对应的方程组为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}=0.$$

解方程组得矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量为 $\boldsymbol{v}^{(n)}=[d_0,-d_1,\ldots,(-1)^{n-1}d_{n-1}]$.

结论 (9) 的证明过程类似于结论 (8), 不再详细叙述. □

第三章　谱分解与幂

上一章研究了两类复三对角矩阵的行列式、特征多项式、特征值以及特征向量. 而在这一章中, 我们仅仅考虑矩阵 $\boldsymbol{B}$, 也即定理2.3.1中的九种情况. 通过构造变换矩阵的逆矩阵, 给出定理2.3.1中九种三对角矩阵的谱分解. 在谱分解的基础上, 计算 $\boldsymbol{B}$ 的任意整数次幂的元素表示和显式逆. 最后, 我们讨论这九种三对角矩阵的酉对角化条件, 以及由他们构成的族的性质.

众所周知, 如果 $\boldsymbol{B}$ 的谱分解为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1}$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 $l(l\in\mathbb{N})$ 次幂为 $\boldsymbol{B}^{l}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}^{l}\boldsymbol{S}^{-1}$, 其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是一个以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为对角元的对角矩阵, $\boldsymbol{S}$ 是一个以 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量为列向量的变换矩阵 [39]. 因此, 如果解决了矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的谱分解问题, 那么 $\boldsymbol{B}$ 的整数次幂也就迎刃而解了.

§3.1　谱分解与幂逆

考虑定理2.3.1中(1)–(9), 我们指出引理1.2.4中 $\boldsymbol{S}$ 的逆矩阵是乘积 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^{2}$, 其中 $\boldsymbol{D}$ 由(2.3.6)定义, $\boldsymbol{T}=\operatorname{diag}(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ 是一个以 $t_1,t_2,\ldots,t_n$ 为对角元的对角矩阵, $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{S}$ 的转置矩阵. 由引理1.2.4知 $\boldsymbol{B}$ 的谱分解为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^{2}$. 在这个谱分解中, $\boldsymbol{S}$ 是以 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量为列向量的变换矩阵, $\boldsymbol{\Lambda}$ 是以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为对角元的对角矩阵, $\boldsymbol{D}$ 是一个由(2.3.6)定义的对角矩阵. 由于矩阵 $\boldsymbol{S},\boldsymbol{\Lambda}$ 可分别由定理2.3.1和定理2.2.2得到, 因此要得到矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的谱分解, 需要构造对角矩阵 $\boldsymbol{T}$, 并证明 $\boldsymbol{S}$ 的逆矩阵是 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^{2}$. 在求得谱分解之后, 根据谱分解, 可以得到 $\boldsymbol{B}$ 的任意整数次幂和逆. 为了表达形式简洁, 记 $\alpha_h=\cos\frac{h\pi}{n+1}$, $\theta_h=\cos\frac{2h\pi}{2n+1}$, $\xi_h=\cos\frac{(2h-1)\pi}{2n+1}$, $\delta_h=\cos\frac{(2h-1)\pi}{2n}$, $\zeta_h=\cos\frac{h\pi}{n}$.

定理 3.1.1. *若 $\alpha=\beta=0$, 则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的谱分解为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^{2}$, 其中 $\boldsymbol{T}$ 是以 $t_h=\frac{2-2\alpha_h^2}{n+1}\,(h=1,2,\ldots,n)$ 为对角元的对角矩阵.*

证明. 为了证明矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的谱分解是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^{2}$, 我们需要做的唯一工作就是证明 $\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^{2}=\mathbf{I}$. 事实上,

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^{2}]_{ij}&=\sum_{h=1}^{n}d_{i-1}U_{i-1}\left(\alpha_h\right)t_h d_{j-1}U_{j-1}\left(\alpha_h\right)(d_{j-1}^{-1})^{2}\\
&=\frac{d_{i-1}}{d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}\frac{2-2\cos^{2}\frac{h\pi}{n+1}}{n+1}\cdot\frac{\sin\frac{ih\pi}{n+1}}{\sin\frac{h\pi}{n+1}}\cdot\frac{\sin\frac{jh\pi}{n+1}}{\sin\frac{h\pi}{n+1}}\\
&=\frac{2d_{i-1}}{(n+1)d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}\sin\frac{ih\pi}{n+1}\sin\frac{jh\pi}{n+1}\\
&=\frac{d_{i-1}}{(n+1)d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}\left(\cos\frac{(i-j)h\pi}{n+1}-\cos\frac{(i+j)h\pi}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

根据引理 1.2.3 中的等式 (1.2.1), 我们有

$$[\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij}=\begin{cases}1, \text{当 } i=j \text{ 时},\\ 0, \text{当 } i\neq j \text{ 时}.\end{cases}$$

因此, $\boldsymbol{B}$ 的谱分解为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$. □

推理 3.1.1. *若 $\alpha=\beta=0$, 则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 $l(l\in\mathbb{N})$ 次幂 $\boldsymbol{B}^l$ 的 (i,j) 元是*

$$\left[\boldsymbol{B}^l\right]_{ij}=\frac{2d_{i-1}}{(n+1)d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}(1-\alpha_h^2)(b+2d\alpha_h)^l U_{i-1}(\alpha_h)U_{j-1}(\alpha_h).$$

又若 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 则其逆矩阵的 (i,j) 元是

$$\left[\boldsymbol{B}^{-1}\right]_{ij}=\frac{2d_{i-1}}{(n+1)d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}\frac{1-\alpha_h^2}{b+2d\alpha_h}U_{i-1}(\alpha_h)U_{j-1}(\alpha_h).$$

证明. 根据定理 3.1.1, 我们有 $\boldsymbol{B}^l$ 的 (i,j) 元是

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{B}^l]_{ij}&=[\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}^l\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij}\\&=\sum_{h=1}^{n}d_{i-1}U_{i-1}\left(\alpha_h\right)\lambda_h^l t_h d_{j-1}U_{j-1}\left(\alpha_h\right)\left(d_{j-1}^{-1}\right)^2\\&=\frac{2d_{i-1}}{(n+1)d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}(1-\alpha_h^2)(b+2d\alpha_h)^l U_{i-1}(\alpha_h)U_{j-1}(\alpha_h).\end{aligned}$$

如果 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 即 $b\neq-2d\alpha_i\,(i=1,2,\ldots,n)$, 那么我们取 $l=-1$ 时即可得到 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵的 (i,j) 元. □

定理 3.1.2. *若 $\alpha=0,\beta=d$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的谱分解是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$, 其中对角矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的对角元为 $t_h=\frac{4-4\theta_h^2}{2n+1}\,(h=1,2,\ldots,n)$.*

证明. 为了证明 $\boldsymbol{B}$ 的谱分解是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$, 我们需要证明乘积 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$ 是 $\boldsymbol{S}$ 的逆矩阵. 首先, 我们有

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij}&=\sum_{h=1}^{n}d_{i-1}U_{i-1}\left(\theta_h\right)t_h d_{j-1}U_{j-1}\left(\theta_h\right)\left(d_{j-1}^{-1}\right)^2\\&=\frac{d_{i-1}}{d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}\frac{4-4\cos^2\frac{2h\pi}{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{\sin\frac{2ih\pi}{2n+1}}{\sin\frac{2h\pi}{2n+1}}\cdot\frac{\sin\frac{2jh\pi}{2n+1}}{\sin\frac{2h\pi}{2n+1}}\\&=\frac{2d_{i-1}}{(2n+1)d_{j-1}}\left(\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{2(i-j)h\pi}{2n+1}-\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{2(i+j)h\pi}{2n+1}\right).\end{aligned}$$

其次, 由引理 1.2.3 中的等式 (1.2.2) 知,

$$[\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij}=\begin{cases}1, \text{当 } i=j \text{ 时},\\ 0, \text{当 } i\neq j \text{ 时}.\end{cases}$$

因此, $\boldsymbol{B}$ 的谱分解是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$. □

推理 3.1.2. 若 $\alpha=0,\beta=d$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 $l(l\in\mathbb{N})$ 次幂 $\boldsymbol{B}^l$ 的 (i,j) 元是

$$[\boldsymbol{B}^l]_{ij}=\frac{4d_{i-1}}{(2n+1)d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}(1-\theta_h^2)\,(b+2d\theta_h)^l\,U_{i-1}(\theta_h)U_{j-1}(\theta_h).$$

又若 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 则其逆矩阵的 (i,j) 元是

$$[\boldsymbol{B}^{-1}]_{ij}=\frac{4d_{i-1}}{(2n+1)d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}\frac{1-\theta_h^2}{b+2d\theta_h}U_{i-1}(\theta_h)U_{j-1}(\theta_h).$$

证明. 根据定理3.1.2, 我们有 $\boldsymbol{B}^l$ 的 (i,j) 元是

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{B}^l]_{ij}&=[\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}^l\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij}\\&=\sum_{h=1}^{n}d_{i-1}U_{i-1}(\theta_h)\,\lambda_h^l t_h d_{j-1}U_{j-1}(\theta_h)\,(d_{j-1}^{-1})^2\\&=\frac{4d_{i-1}}{(2n+1)d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}(1-\theta_h^2)\,(b+2d\theta_h)^l\,U_{i-1}(\theta_h)U_{j-1}(\theta_h).\end{aligned}$$

若 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 即 $b\neq-2d\theta_i\,(i=1,2,\dots,n)$, 那么当取 $l=-1$ 时即可求得 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵. □

定理 3.1.3. 若 $\alpha=d,\beta=0$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的谱分解是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$, 其中对角矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的对角元是 $t_h=\frac{2-2\theta_h}{2n+1}\,(h=1,2,\dots,n)$.

证明. 根据引理1.2.3中的等式(1.2.2), 我们有

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij}&=\sum_{h=1}^{n}d_{i-1}W_{i-1}(\theta_h)\,t_h d_{j-1}W_{j-1}(\theta_h)\,(d_{j-1}^{-1})^2\\&=\frac{d_{i-1}}{d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}\frac{2-2\cos\frac{2h\pi}{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{\sin\frac{(2i-1)h\pi}{2n+1}}{\sin\frac{h\pi}{2n+1}}\cdot\frac{\sin\frac{(2j-1)h\pi}{2n+1}}{\sin\frac{h\pi}{2n+1}}\\&=\frac{2d_{i-1}}{(2n+1)d_{j-1}}\left(\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{2(i-j)h\pi}{2n+1}-\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{2(i+j-1)h\pi}{2n+1}\right)\\&=\begin{cases}1,\text{当 } i=j \text{ 时},\\0,\text{当 } i\neq j \text{ 时}.\end{cases}\end{aligned}$$

因此, $\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$ 是 $\boldsymbol{S}$ 的逆矩阵, 从而 $\boldsymbol{B}$ 的谱分解是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$. □

推理 3.1.3. 若 $\alpha=d,\beta=0$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 $l(l\in\mathbb{N})$ 次幂 $\boldsymbol{B}^l$ 的 (i,j) 元是

$$[\boldsymbol{B}^l]_{ij}=\frac{2d_{i-1}}{(2n+1)d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}(1-\theta_h)(b+2d\theta_h)^lW_{i-1}(\theta_h)W_{j-1}(\theta_h).$$

又若 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 则其逆矩阵的 (i,j) 元是

$$[\boldsymbol{B}^{-1}]_{ij}=\frac{2d_{i-1}}{(2n+1)d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}\frac{1-\theta_h}{b+2d\theta_h}W_{i-1}(\theta_h)W_{j-1}(\theta_h).$$

证明. 由定理3.1.3知$\boldsymbol{B}^l$的(i,j)元是

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{B}^l]_{ij} &= [\boldsymbol{S\Lambda}^l\boldsymbol{TS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij}\\ &= \sum_{h=1}^{n} d_{i-1}W_{i-1}(\theta_h)\,\lambda_h^l t_h d_{j-1}W_{j-1}(\theta_h)\,(d_{j-1}^{-1})^2\\ &= \frac{2d_{i-1}}{(2n+1)d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}(1-\theta_h)(b+2d\theta_h)^l W_{i-1}(\theta_h)W_{j-1}(\theta_h).\end{aligned}$$

若$\boldsymbol{B}$是可逆矩阵, 即$b\neq -2d\theta_i\,(i=1,2,\ldots,n)$, 则取$l=-1$, 我们可以得到$\boldsymbol{B}$的逆矩阵. □

定理 3.1.4. 若$\alpha=0,\beta=-d$, 则$\boldsymbol{B}$的谱分解为$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S\Lambda TS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$, 其中对角矩阵$\boldsymbol{T}$的对角元是$t_h=\frac{4-4\xi_h^2}{2n+1}\,(h=1,2,\ldots,n)$.

证明. 乘积$\boldsymbol{STS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$所得矩阵的$(i,j)$元是

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{STS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij} &= \sum_{h=1}^{n} d_{i-1}U_{i-1}(\xi_h)\,t_h d_{j-1}U_{j-1}(\xi_h)\,(d_{j-1}^{-1})^2\\ &= \frac{d_{i-1}}{d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}\frac{4-4\cos^2\frac{(2h-1)\pi}{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{\sin\frac{(2h-1)i\pi}{2n+1}}{\sin\frac{(2h-1)\pi}{2n+1}}\cdot\frac{\sin\frac{(2h-1)j\pi}{2n+1}}{\sin\frac{(2h-1)\pi}{2n+1}}\\ &= \frac{2d_{i-1}}{(2n+1)d_{j-1}}\left(\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{(2h-1)(i-j)\pi}{2n+1}-\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{(2h-1)(i+j)\pi}{2n+1}\right).\end{aligned}$$

由引理1.2.3中等式(1.2.3)知$\boldsymbol{STS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2=\mathbf{I}$. 从而$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S\Lambda TS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$. □

推理 3.1.4. 若$\alpha=0,\beta=-d$, 则$\boldsymbol{B}$的$l(l\in\mathbb{N})$次幂$\boldsymbol{B}^l$的(i,j)元是

$$[\boldsymbol{B}^l]_{ij}=\frac{4d_{i-1}}{(2n+1)d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}(1-\xi_h^2)(b+2d\xi_h)^l U_{i-1}(\xi_h)\,U_{j-1}(\xi_h)\,.$$

又若$\boldsymbol{B}$是可逆矩阵, 则其逆矩阵的(i,j)元是

$$[\boldsymbol{B}^{-1}]_{ij}=\frac{4d_{i-1}}{(2n+1)d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}\frac{1-\xi_h^2}{b+2d\xi_h}U_{i-1}(\xi_h)\,U_{j-1}(\xi_h)\,.$$

证明. 由定理3.1.4知$\boldsymbol{B}$的l次幂$\boldsymbol{B}^l$的(i,j)元是

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{B}^l]_{ij} &= [\boldsymbol{S\Lambda}^l\boldsymbol{TS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij}\\ &= \sum_{h=1}^{n} d_{i-1}U_{i-1}(\xi_h)\,\lambda_h^l t_h d_{j-1}U_{j-1}(\xi_h)\,(d_{j-1}^{-1})^2\\ &= \frac{4d_{i-1}}{(2n+1)d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}(1-\xi_h^2)(b+2d\xi_h)^l U_{i-1}(\xi_h)\,U_{j-1}(\xi_h)\,.\end{aligned}$$

若$\boldsymbol{B}$是可逆矩阵, 即$b\neq -2d\xi_i\,(i=1,2,\ldots,n)$, 那么取$l=-1$即可得到$\boldsymbol{B}$的逆矩阵. □

定理 3.1.5. 若$\alpha=-d,\beta=0$, 则$\boldsymbol{B}$的谱分解为$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S\Lambda TS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$, 其中对角矩阵$\boldsymbol{T}$的对角元是$t_h=\frac{2+2\xi_h}{2n+1}\,(h=1,2,\ldots,n)$.

证明. 乘积 $\boldsymbol{STS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$ 所得矩阵的 (i,j) 元是

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{STS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij} &= \sum_{h=1}^{n} d_{i-1}V_{i-1}(\xi_h)\,t_h d_{j-1}V_{j-1}(\xi_h)\,(d_{j-1}^{-1})^2 \\
&= \frac{d_{i-1}}{d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}\frac{2+2\cos\frac{(2h-1)\pi}{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{\cos\frac{(2i-1)(2h-1)\pi}{2(2n+1)}}{\cos\frac{(2h-1)\pi}{2(2n+1)}}\cdot\frac{\cos\frac{(2j-1)(2h-1)\pi}{2(2n+1)}}{\cos\frac{(2h-1)\pi}{2(2n+1)}} \\
&= \frac{2d_{i-1}}{(2n+1)d_{j-1}}\left(\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{(i-j)(2h-1)\pi}{2n+1}+\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{(i+j-1)(2h-1)\pi}{2n+1}\right).
\end{aligned}
$$

由引理 1.2.3 中的等式 (1.2.3) 知 $\boldsymbol{STS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2=\mathbf{I}$. 因此, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S\Lambda TS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$. □

推理 3.1.5. *若 $\alpha=-d,\beta=0$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 $l(l\in\mathbb{N})$ 次幂 $\boldsymbol{B}^l$ 的 (i,j) 元是*

$$
[\boldsymbol{B}^l]_{ij}=\frac{2d_{i-1}}{(2n+1)d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}(1+\xi_h)(b+2d\xi_h)^l V_{i-1}(\xi_h)V_{j-1}(\xi_h).
$$

又若 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 则其逆矩阵的 (i,j) 元是

$$
[\boldsymbol{B}^{-1}]_{ij}=\frac{2d_{i-1}}{(2n+1)d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}\frac{1+\xi_h}{b+2d\xi_h}V_{i-1}(\xi_h)V_{j-1}(\xi_h).
$$

证明. 根据定理 3.1.5, 我们有 $\boldsymbol{B}^l$ 的 (i,j) 元是

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{B}^l]_{ij} &= [\boldsymbol{S\Lambda}^l\boldsymbol{TS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij} \\
&= \sum_{h=1}^{n} d_{i-1}V_{i-1}(\xi_h)\,\lambda_h^l t_h d_{j-1}V_{j-1}(\xi_h)\,(d_{j-1}^{-1})^2 \\
&= \frac{2d_{i-1}}{(2n+1)d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}(1+\xi_h)(b+2d\xi_h)^l V_{i-1}(\xi_h)V_{j-1}(\xi_h).
\end{aligned}
$$

若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 即 $b\neq -2d\xi_i\,(i=1,2,\ldots,n)$, 那么取 $l=-1$ 即可得到 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵. □

定理 3.1.6. *若 $\alpha=d,\beta=-d$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的谱分解为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S\Lambda TS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$, 其中对角矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的对角元为 $t_h=\frac{1-\delta_h}{n}\,(h=1,2,\ldots,n)$.*

证明. 首先, 我们有

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{STS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij} &= \sum_{h=1}^{n} d_{i-1}W_{i-1}(\delta_h)\,t_h d_{j-1}W_{j-1}(\delta_h)\,(d_{j-1}^{-1})^2 \\
&= \frac{d_{i-1}}{d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}\frac{1-\cos\frac{(2h-1)\pi}{2n}}{n}\cdot\frac{\sin\frac{(2i-1)(2h-1)\pi}{4n}}{\sin\frac{(2h-1)\pi}{4n}}\cdot\frac{\sin\frac{(2j-1)(2h-1)\pi}{4n}}{\sin\frac{(2h-1)\pi}{4n}} \\
&= \frac{d_{i-1}}{nd_{j-1}}\left(\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{(i-j)(2h-1)\pi}{2n}-\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{(i+j-1)(2h-1)\pi}{2n}\right).
\end{aligned}
$$

其次, 由引理 1.2.3 中的等式 (1.2.4) 知

$$
[\boldsymbol{STS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij}=\begin{cases}1, \text{当 } i=j \text{ 时}, \\ 0, \text{当 } i\neq j \text{ 时}.\end{cases}
$$

因此, $\boldsymbol{B}$ 的谱分解为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S\Lambda TS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$. □

推理 3.1.6. 若 $\alpha=d,\beta=-d$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 $l(l\in\mathbb{N})$ 次幂 $\boldsymbol{B}^l$ 的 (i,j) 元是

$$[\boldsymbol{B}^l]_{ij}=\frac{d_{i-1}}{nd_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}(1-\delta_h)(b+2d\delta_h)^lW_{i-1}(\delta_h)W_{j-1}(\delta_h).$$

又若 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 则其逆矩阵的 (i,j) 元是

$$[\boldsymbol{B}^{-1}]_{ij}=\frac{d_{i-1}}{nd_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}\frac{1-\delta_h}{b+2d\delta_h}W_{i-1}(\delta_h)W_{j-1}(\delta_h).$$

证明. 由定理 3.1.6 知 $\boldsymbol{B}$ 的 l 次幂 $\boldsymbol{B}^l$ 的 (i,j) 元是

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{B}^l]_{ij}&=[\boldsymbol{S\Lambda}^l\boldsymbol{TS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij}\\&=\sum_{h=1}^{n}d_{i-1}W_{i-1}\left(\delta_h\right)\lambda_h^l t_h d_{j-1}W_{j-1}\left(\delta_h\right)(d_{j-1}^{-1})^2\\&=\frac{d_{i-1}}{nd_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}(1-\delta_h)(b+2d\delta_h)^lW_{i-1}(\delta_h)W_{j-1}(\delta_h).\end{aligned}$$

若 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 即 $b\neq-2d\delta_i\,(i=1,2,\dots,n)$, 那么取 $l=-1$ 即可得到 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵. □

定理 3.1.7. 若 $\alpha=-d,\beta=d$, 那么 $\boldsymbol{B}$ 的谱分解是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S\Lambda TS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$, 其中对角矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的对角元是 $t_h=\frac{1+\delta_h}{n}\,(h=1,2,\dots,n)$.

证明. 首先, 我们有乘积 $\boldsymbol{STS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$ 所得矩阵的 (i,j) 元是

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{STS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij}&=\sum_{h=1}^{n}d_{i-1}V_{i-1}\left(\delta_h\right)t_h d_{j-1}V_{j-1}\left(\delta_h\right)(d_{j-1}^{-1})^2\\&=\frac{d_{i-1}}{d_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}\frac{1+\cos\frac{(2h-1)\pi}{2n}}{n}\cdot\frac{\cos\frac{(2i-1)(2h-1)\pi}{4n}}{\cos\frac{(2h-1)\pi}{4n}}\cdot\frac{\cos\frac{(2j-1)(2h-1)\pi}{4n}}{\cos\frac{(2h-1)\pi}{4n}}\\&=\frac{d_{i-1}}{nd_{j-1}}\left(\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{(i-j)(2h-1)\pi}{2n}+\sum_{h=1}^{n}\cos\frac{(i+j-1)(2h-1)\pi}{2n}\right).\end{aligned}$$

其次, 由引理 1.2.3 中等式 (1.2.4) 得 $\boldsymbol{STS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2=\mathbf{I}$. 从而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S\Lambda TS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$. □

推理 3.1.7. 若 $\alpha=-d,\beta=d$, 那么 $\boldsymbol{B}$ 的 $l(l\in\mathbb{N})$ 次幂 $\boldsymbol{B}^l$ 的 (i,j) 元是

$$[\boldsymbol{B}^l]_{ij}=\frac{d_{i-1}}{nd_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}(1+\delta_h)(b+2d\delta_h)^lV_{i-1}(\delta_h)V_{j-1}(\delta_h).$$

又若 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 则其逆矩阵的 (i,j) 元是

$$[\boldsymbol{B}^{-1}]_{ij}=\frac{d_{i-1}}{nd_{j-1}}\sum_{h=1}^{n}\frac{1+\delta_h}{b+2d\delta_h}V_{i-1}(\delta_h)V_{j-1}(\delta_h).$$

证明. 根据定理 3.1.7, 我们有 $\boldsymbol{B}$ 的 l 次幂 $\boldsymbol{B}^l$ 的 (i,j) 元是

$$[\boldsymbol{B}^l]_{ij}=[\boldsymbol{S\Lambda}^l\boldsymbol{TS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij}=\sum_{h=1}^{n}d_{i-1}V_{i-1}\left(\delta_h\right)\lambda_h^l t_h d_{j-1}V_{j-1}\left(\delta_h\right)(d_{j-1}^{-1})^2$$

$$= \frac{d_{i-1}}{nd_{j-1}} \sum_{h=1}^{n} (1+\delta_h)(b+2d\delta_h)^l V_{i-1}(\delta_h) V_{j-1}(\delta_h).$$

若 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 即 $b \neq 2d\delta_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$, 那么取 $l = -1$ 即可得到 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵. □

定理 3.1.8. 若 $\alpha = \beta = d$, 那么 $\boldsymbol{B}$ 的谱分解是 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S\Lambda T S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$, 其中对角矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的对角元是 $t_h = \frac{1-\zeta_h}{n}\,(h = 1, 2, \ldots, n-1)$, $t_n = \frac{1}{n}$.

证明. 因为矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的列向量是由 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量构成, 所以

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} d_0 W_0(\zeta_1) & d_0 W_0(\zeta_2) & \cdots & d_0 \\ d_1 W_1(\zeta_1) & d_1 W_1(\zeta_2) & \cdots & -d_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n-1} W_{n-1}(\zeta_1) & d_{n-1} W_{n-1}(\zeta_2) & \cdots & (-1)^{n-1} d_{n-1} \end{bmatrix}.$$

下面我们证明 $\boldsymbol{S}$ 的逆矩阵是

$$\boldsymbol{T S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2 = \begin{bmatrix} t_1 d_0 W_0(\zeta_1) & t_1 d_1^{-1} W_1(\zeta_1) & \cdots & t_1 d_{n-1}^{-1} W_{n-1}(\zeta_1) \\ t_2 d_0 W_0(\zeta_2) & t_2 d_1^{-1} W_1(\zeta_2) & \cdots & t_2 d_{n-1}^{-1} W_{n-1}(\zeta_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_n d_0^{-1} & -t_n d_1^{-1} & \cdots & (-1)^{n-1} t_n d_{n-1}^{-1} \end{bmatrix}.$$

如果 $(i+j)$ 是偶数, 那么

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{S T S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij} &= \sum_{h=1}^{n-1} d_{i-1} W_{i-1}(\zeta_h)\, t_h d_{j-1}^{-1} W_{j-1}(\zeta_h) + d_{i-1} d_{j-1}^{-1} t_n \\ &= \frac{d_{i-1}}{d_{j-1}} \left(\sum_{h=1}^{n-1} \frac{1-\cos\frac{h\pi}{n}}{n} \cdot \frac{\sin\frac{(2i-1)h\pi}{2n}}{\sin\frac{h\pi}{2n}} \cdot \frac{\sin\frac{(2j-1)h\pi}{2n}}{\sin\frac{h\pi}{2n}} + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{d_{i-1}}{nd_{j-1}} \left(\sum_{h=1}^{n-1} \cos\frac{(i-j)h\pi}{n} - \sum_{h=1}^{n-1} \cos\frac{(i+j-1)h\pi}{n} + 1 \right). \end{aligned}$$

根据引理 1.2.3 中的等式 (1.2.1), 我们有

$$[\boldsymbol{S T S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij} = \begin{cases} 1, \text{当 } i = j \text{ 时}, \\ 0, \text{当 } i \neq j \text{ 时}. \end{cases}$$

如果 $(i+j)$ 是奇数, 那么

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{S T S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij} &= \frac{d_{i-1}}{d_{j-1}} \left(\sum_{h=1}^{n-1} \frac{1-\cos\frac{h\pi}{n}}{n} \cdot \frac{\sin\frac{(2i-1)h\pi}{2n}}{\sin\frac{h\pi}{2n}} \cdot \frac{\sin\frac{(2j-1)h\pi}{2n}}{\sin\frac{h\pi}{2n}} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{d_{i-1}}{nd_{j-1}} \left(\sum_{h=1}^{n-1} \cos\frac{(i-j)h\pi}{n} - \sum_{h=1}^{n-1} \cos\frac{(i+j-1)h\pi}{n} - 1 \right). \end{aligned}$$

由引理 1.2.3 中的等式 (1.2.1), 我们知 $[\boldsymbol{STS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij}=0$. 因此, 由以上讨论, 我们得到 $\boldsymbol{STS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2=\mathbf{I}$. □

推理 3.1.8. 若 $\alpha=\beta=d$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 $l(l\in\mathbb{N})$ 次幂 $\boldsymbol{B}^l$ 的 (i,j) 元是

$$[\boldsymbol{B}^l]_{ij}=\frac{d_{i-1}}{nd_{j-1}}\left[\sum_{h=1}^{n-1}(1-\zeta_h)(b+2d\zeta_h)^lW_{i-1}(\zeta_h)W_{j-1}(\zeta_h)+(-1)^{i+j}(b-2d)^l\right].$$

又若 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 则其逆矩阵的 (i,j) 元是

$$[\boldsymbol{B}^{-1}]_{ij}=\frac{d_{i-1}}{nd_{j-1}}\left[\sum_{h=1}^{n-1}\frac{1-\zeta_h}{b+2d\zeta_h}W_{i-1}(\zeta_h)W_{j-1}(\zeta_h)+\frac{(-1)^{i+j}}{b-2d}\right].$$

证明. 根据定理 3.1.8, 如果 $(i+j)$ 是偶数, 那么

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{B}^l]_{ij}&=[\boldsymbol{S\Lambda}^l\boldsymbol{TS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij}\\&=\sum_{h=1}^{n-1}d_{i-1}W_{i-1}(\zeta_h)\,\lambda_h^lt_hd_{j-1}^{-1}W_{j-1}(\zeta_h)+\frac{d_{i-1}}{nd_{j-1}}\lambda_n^l\\&=\frac{d_{i-1}}{nd_{j-1}}\left[\sum_{h=1}^{n-1}(1-\zeta_h)(b+2d\zeta_h)^lW_{i-1}(\zeta_h)W_{j-1}(\zeta_h)+(b-2d)^l\right].\end{aligned}$$

如果 $(i+j)$ 是奇数, 那么

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{B}^l]_{ij}&=[\boldsymbol{S\Lambda}^l\boldsymbol{TS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij}\\&=\sum_{h=1}^{n-1}d_{i-1}W_{i-1}(\zeta_h)\,\lambda_h^lt_hd_{j-1}^{-1}W_{j-1}(\zeta_h)-\frac{d_{i-1}}{nd_{j-1}}\lambda_n^l\\&=\frac{d_{i-1}}{nd_{j-1}}\left[\sum_{h=1}^{n-1}(1-\zeta_h)(b+2d\zeta_h)^lW_{i-1}(\zeta_h)W_{j-1}(\zeta_h)-(b-2d)^l\right].\end{aligned}$$

因此,

$$[\boldsymbol{B}^l]_{ij}=\frac{d_{i-1}}{nd_{j-1}}\left[\sum_{h=1}^{n-1}(1-\zeta_h)(b+2d\zeta_h)^lW_{i-1}(\zeta_h)W_{j-1}(\zeta_h)+(-1)^{i+j}(b-2d)^l\right].$$

若 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 即 $b\neq-2d\zeta_i\,(i=1,2,\dots,n-1)$ 且 $b\neq2d$, 那么取 $l=-1$ 即可得到 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵. □

定理 3.1.9. 若 $\alpha=\beta=-d$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的谱分解是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S\Lambda TS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$, 其中对角矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的对角元是 $t_h=(1+\zeta_h)/n\,(h=1,2,\dots,n-1)$, $t_n=1/n$.

证明. 乘积 $\boldsymbol{STS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$ 所得矩阵的 (i,j) 元是

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{STS}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij}&=\frac{d_{i-1}}{d_{j-1}}\left(\sum_{h=1}^{n-1}\frac{1+\cos\frac{h\pi}{n}}{n}\cdot\frac{\cos\frac{(2i-1)h\pi}{2n}}{\cos\frac{h\pi}{2n}}\cdot\frac{\cos\frac{(2j-1)h\pi}{2n}}{\cos\frac{h\pi}{2n}}+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{d_{i-1}}{nd_{j-1}}\left(\sum_{h=1}^{n-1}\cos\frac{(i-j)h\pi}{n}+\sum_{h=1}^{n-1}\cos\frac{(i+j-1)h\pi}{n}+1\right).\end{aligned}$$

由引理1.2.3中的等式(1.2.1)得

$$[\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij}=\begin{cases}1,\text{当}\, i=j\,\text{时},\\ 0,\text{当}\, i\neq j\,\text{时}.\end{cases}$$

因此, $\boldsymbol{B}$ 的谱分解是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2$. □

推理 3.1.9. *若 $\alpha=\beta=-d$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 $l(l\in\mathbb{N})$ 次幂 $\boldsymbol{B}^l$ 的 (i,j) 元是*

$$[\boldsymbol{B}^l]_{ij}=\frac{d_{i-1}}{nd_{j-1}}\left[\sum_{h=1}^{n-1}(1+\zeta_h)(b+2d\zeta_h)^l V_{i-1}(\zeta_h)V_{j-1}(\zeta_h)+(b+2d)^l\right].$$

又若 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 则其逆矩阵的 (i,j) 元是

$$[\boldsymbol{B}^{-1}]_{ij}=\frac{d_{i-1}}{nd_{j-1}}\left[\sum_{h=1}^{n-1}\frac{1+\zeta_h}{b+2d\zeta_h}V_{i-1}(\zeta_h)V_{j-1}(\zeta_h)+\frac{1}{b+2d}\right].$$

证明. 根据定理3.1.9, 我们有 $\boldsymbol{B}$ 的 l 次幂 $\boldsymbol{B}^l$ 的 (i,j) 元是

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{B}^l]_{ij}&=[\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}^l\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1})^2]_{ij}\\ &=\sum_{h=1}^{n-1}d_{i-1}V_{i-1}\left(\zeta_h\right)\lambda_h^l t_h d_{j-1}V_{j-1}\left(\zeta_h\right)(d_{j-1}^{-1})^2+\frac{d_{i-1}}{nd_{j-1}}\lambda_n^l\\ &=\frac{d_{i-1}}{nd_{j-1}}\left[\sum_{h=1}^{n-1}(1+\zeta_h)(b+2d\zeta_h)^l V_{i-1}(\zeta_h)V_{j-1}(\zeta_h)+(b+2d)^l\right].\end{aligned}$$

若 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 即 $b\neq-2d\zeta_i\,(i=1,2,\ldots,n-1)$ 且 $b\neq-2d$, 那么取 $l=-1$ 即可得到 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵. □

§3.2 三对角矩阵族的性质

矩阵的一个族 $\mathfrak{F}\subseteq\boldsymbol{M}_n$ 是矩阵的任一(有限的或无限的)集合, 而交换族是其每一个矩阵在乘法下都是可交换的族. 对于定理2.3.1中的九种情况, 每一种情况中所有矩阵构成的集合都可以看作一个族. 设 $\mathfrak{F}\subseteq\boldsymbol{M}_n$ 是定理2.3.1中的任意一个族, 则我们有以下结论.

推理 3.2.1. *设 $\boldsymbol{B}\in\mathfrak{F}$. 如果 $\boldsymbol{B}$ 的下对角元和上对角元的模对应相等, 即 $|a_i|=|c_i|\,(i=1,2,\ldots,n)$, 那么 $\boldsymbol{B}$ 可以酉对角化.*

证明. 一个矩阵的特征向量的非零倍数仍然是该矩阵的特征向量. 因此, 如果 $\boldsymbol{v}^{(i)}\,(i=1,2,\ldots,n)$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的一组特征向量, 那么向量组 $\boldsymbol{v}_1^{(i)}=\sqrt{t_i}\boldsymbol{v}^{(i)}\,(i=1,2,\ldots,n)$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的一组特征向量.

设 $\boldsymbol{U}$ 是一个以 $\boldsymbol{v}_1^{(1)},\boldsymbol{v}_1^{(2)},\ldots,\boldsymbol{v}_1^{(n)}$ 为列向量的矩阵. 如果我们想证明 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^*$ ($\boldsymbol{U}^*$ 是 $\boldsymbol{U}$ 的Hermite伴随), 则需要证明 $\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^*=\mathbf{I}$. 对于定理2.3.1中的九个族, 我们仅证明第一个族, 即变量 $\alpha=\beta=0$.

设 $\alpha_h=\cos\frac{h\pi}{n+1}$, $t_h=\frac{2-2\alpha_h^2}{n+1}$, $h=1,2,\ldots,n$. 显然, 乘积 $\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^*$ 所得矩阵的 (j,k) 元是

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^*]_{jk}&=d_{j-1}\overline{d_{k-1}}\sum_{h=1}^{n}t_hU_{j-1}(\alpha_h)U_{k-1}(\alpha_h)\\&=\frac{2d_{j-1}\overline{d_{k-1}}}{n+1}\sum_{h=1}^{n}\sin\frac{jh\pi}{n+1}\sin\frac{kh\pi}{n+1}\\&=\frac{d_{j-1}\overline{d_{k-1}}}{n+1}\sum_{h=1}^{n}\left(\cos\frac{(j-k)h\pi}{n+1}-\cos\frac{(j+k)h\pi}{n+1}\right).\end{aligned}$$

由定理3.1.1的证明, 我们有

$$\frac{1}{n+1}\sum_{h=1}^{n}\left(\cos\frac{(j-k)h\pi}{n+1}-\cos\frac{(j+k)h\pi}{n+1}\right)=\begin{cases}1, \text{当 } j=k \text{ 时},\\ 0, \text{当 } j\neq k \text{ 时}.\end{cases}$$

当 $j=k$ 时, 由于 $|a_i|=|c_i|\,(i=1,2,\ldots,n)$, 所以 $d_0\overline{d_0}=|d_0|^2=1$, $d_{j-1}\overline{d_{j-1}}=|d_{j-1}|^2=\left|\frac{a_1\ldots a_{j-1}}{c_1\ldots c_{j-1}}\right|=1\,(j=2,3,\ldots,n)$. 因此, $\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^*=\mathbf{I}$, 即变换矩阵 $\boldsymbol{U}$ 是一个酉矩阵. 从而, 当 $|a_i|=|c_i|\,(i=1,2,\ldots,n)$ 时, $\boldsymbol{B}$ 可以酉对角化.

类似地, 我们可以证明对于另外八种情况, 结论也成立. □

推理 3.2.2. *设 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是族 $\mathfrak{F}$ 中的任意两个三对角矩阵. 如果 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为对称矩阵, 那么 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 可以同时对角化, 即存在相似矩阵 $\boldsymbol{S}$ 使得 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{S}$ 都是对角矩阵.*

证明. 如果 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为对称矩阵, 也即它们的上对角元和下对角元对应相等, 那么由 (2.3.6) 所定义的矩阵 $\boldsymbol{D}$ 是单位矩阵, 从而 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 具有相同的特征向量. 根据它们的谱分解, 存在相似矩阵 $\boldsymbol{S}$ 使得 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{S}$ 都是对角矩阵.. □

推理 3.2.3. *设 $\mathfrak{F}_1\subseteq\mathfrak{F}$ 是 $\mathfrak{F}$ 中所有对称矩阵构成的族. 那么 $\mathfrak{F}_1$ 既是一个可同时对角化族也是一个交换族.*

证明. 由推理3.2.2我们知 $\mathfrak{F}_1$ 是一个可同时对角化族, 即对任意的 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in\mathfrak{F}_1$, 存在相同的相似矩阵 $\boldsymbol{S}$ 使得 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{\Lambda_1}$ 和 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{\Lambda_2}$, 其中 $\boldsymbol{\Lambda_1},\boldsymbol{\Lambda_2}$ 是对角矩阵. 从而, 我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}&=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda_1}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda_2}\boldsymbol{S}^{-1}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda_1}\boldsymbol{\Lambda_2}\boldsymbol{S}^{-1}\\&=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda_2}\boldsymbol{\Lambda_1}\boldsymbol{S}^{-1}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda_2}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda_1}\boldsymbol{S}^{-1}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

因此, $\mathfrak{F}_1$ 既是一个可同时对角化族也是一个可交换族. □

第四章 总结与展望

本文提出了一种计算复三对角矩阵的行列式、特征值和特征向量的新方法. 这种方法既不同于Yueh和Willms所用的半无限序列的符号演算, 也不同于Kouachi采用的基于递推序列的方法, 而是巧妙地将三对角矩阵和四类切比雪夫多项式联系起来, 利用切比雪夫多项式的一些性质来研究三对角矩阵的相关问题. 通过矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的行列式和特征问题的求解, 已经将这种方法完整地呈现了出来.

另外, 在求解差分方程、微分方程以及延滞微分方程时, 我们需要计算三对角矩阵的逆和整数幂. 本文仅考虑了首末主对角元变化而上对角元和对应的下对角元的乘积为定值的三对角矩阵$\boldsymbol{B}$. Willms在文[5]中已经给出了这类三对角矩阵的特征值和特征向量. 本文在§2.2和§2.3计算$\boldsymbol{B}$的特征值和特征向量有两个原因. 一方面, 本文是通过一种新的途径求解特征值问题, 即利用切比雪夫多项式的零点求得特征值和解非对称齐次方程组求得特征向量. 另一方面, 用切比雪夫多项式来表示特征向量为§3.1中变换矩阵的逆矩阵的构造奠定了基础. 通过构造变换矩阵的逆矩阵, 本文给出了矩阵$\boldsymbol{B}$的谱分解. 基于谱分解, 进一步计算了$\boldsymbol{B}$的任意整数次幂和逆(矩阵可逆的情况下).

特征值问题是矩阵论中重要的研究课题. 本文仅解决了矩阵$\boldsymbol{B}$中的变量α, β取一些特殊值时的特征值问题和幂逆的显式表达, 今后可以继续探讨α, β取其他值时的相关问题. 对于矩阵$\boldsymbol{A}$, 我们不仅可以去研究它的谱分解和整数幂, 还可以将矩阵$\boldsymbol{A}$推广到除了首末上下对角元以外, 其他对角元满足上对角元和对应的下对角元的乘积为定值的情况. 除此之外, 基于本文已经解决了的特征值问题, 可以继续讨论矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的行列式展形以及积和式展形等问题.

参考文献

[1] S. Martínez, F. Bullo, J. Cortés, E. Frazzoli. On Synchronous Robotic Networks—Part I: Models, Tasks, and Complexity [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52: 2199-2213.

[2] S. Martínez, F. Bullo, J. Cortés, E. Frazzoli. On Synchronous Robotic Networks—Part II: Time Complexity of Rendezvous and Deployment Algorithms [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52: 2214-2226.

[3] W. -C. Yueh. Eigenvalues of several tridiagonal matrices [J]. Applied Mathematics E-notes, 2005, 5: 66-74.

[4] S. Kouachi. Eigenvalues and eigenvectors of tridiagonal matrices [J]. Electronic Journal of Linear Algebra, 2006, 15: 115-133.

[5] A. R. Willms. Analytic results for the eigenvalues of certain tridiagonal matrices [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis Applications, 2008, 30: 639-656.

[6] J. Rimas. On computing of arbitrary positive integer powers for one type of symmetric tridiagonal matrices of even order-I [J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 168: 783 – 787.

[7] J. Rimas. On computing of arbitrary positive integer powers for one type of symmetric tridiagonal matrices of odd order—I [J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 171: 1214 – 1217.

[8] Jonas Rimas. On computing of arbitrary positive integer powers for one type of symmetric tridiagonal matrices of even order—II [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 172: 245 – 251.

[9] J. Rimas. On computing of arbitrary positive integer powers for one type of symmetric tridiagonal matrices of odd order—II [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 174: 676 – 683.

[10] J. Rimas. On computing of arbitrary positive integer powers for one type of even order skew-symmetric tridiagonal matrices with eigenvalues on imaginary axis – I [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 174: 997 – 1000.

[11] J. Rimas. On computing of arbitrary positive integer powers for one type of even order skew-symmetric tridiagonal matrices with eigenvalues on imaginary axis—II [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 181: 1120 – 1125.

[12] J. Rimas. On computing of arbitrary positive integer powers for one type of odd order skew-symmetric tridiagonal matrices with eigenvalues on imaginary axis – I [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 183: 1378 – 1380.

[13] J. Rimas. On computing of arbitrary positive integer powers for one type of odd order skew-symmetric tridiagonal matrices with eigenvalues on imaginary axis-II [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 186: 872 – 878.

[14] J. Rimas. On computing of arbitrary positive integer powers for one type of odd order tridiagonal matrices with zero row – I [J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 169: 1390 – 1394.

[15] Jonas Rimas. On computing of arbitrary positive integer powers for one type of odd order tridiagonal matrices with zero row—II [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 174: 490 – 499.

[16] J. Rimas. On computing of arbitrary positive integer powers for one type of even order tridiagonal matrices with zero row – I [J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 164: 149 – 154.

[17] J. Rimas. On computing of arbitrary positive integer powers for tridiagonal matrices with elements $1, 0, 0, \ldots, 0, 1$ in principal and $1, 1, 1, \ldots, 1$ in neighbouring diagonals – I [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 186: 1254 – 1257.

[18] J. Rimas. On computing of arbitrary positive integer powers for tridiagonal matrices with elements $1, 0, 0, \ldots, 0, 1$ in principal and $1, 1, 1, \ldots, 1$ in neighbouring diagonals – II [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 187: 1472 – 1475.

[19] J. Rimas. On computing of arbitrary positive integer powers for one type of even order tridiagonal matrices with eigenvalues on imaginary axis – I [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 189: 1916 – 1920.

[20] J. Rimas. On computing of arbitrary positive integer powers for one type of even order tridiagonal matrices with eigenvalues on imaginary axis – II [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 190: 1466 – 1471.

[21] J. Rimas. On computing of arbitrary positive integer powers for tridiagonal matrices with elements $-1, 0, 0, \ldots, 0$ in principal and $1, 1, 1, \ldots, 1$ in neighbouring diagonals – I [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 193: 253 – 256.

[22] J. Rimas. On computing of arbitrary positive integer powers for tridiagonal matrices with elements $-1, 0, 0, \ldots, 0, 1$ in principal and $1, 1, 1, \ldots, 1$ in neighbouring diagonals – I [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 188: 634 – 637.

[23] J. Rimas. On computing of arbitrary positive integer powers for tridiagonal matrices with elements $-1, 0, 0, \ldots, 0, 1$ in principal and $1, 1, 1, \ldots, 1$ in neighbouring diagonals – II [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 188: 2020 – 2024.

[24] G. Leonaite, J. Rimas. On computing of arbitrary positive integer powers for one type of odd order tridiagonal matrices with two zero rows and eigenvalues on imaginary axis-I [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 185: 346 – 349.

[25] G. Leonaite, J. Rimas. On computing of arbitrary positive integer powers for one type of odd order tridiagonal matrices with two zero rows – I [J], Applied Mathematics and Computation, 2007, 186: 1537 – 1541.

[26] J. Rimas. On computing of arbitrary positive integer powers for one type of tridiagonal matrices of even order [J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 164: 829 – 835.

[27] J. Rimas. On computing of arbitrary positive integer powers for one type of tridiagonal matrices [J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 161: 1037 – 1040.

[28] H. Kıyak, I. Gürses, F. Yılmaz, D. Bozkurt. A formula for computing integer powers for one type of tridiagonal matrix [J]. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 2010, 39: 351-363.

[29] A. Öteleş, M. Akbulak. Positive integer powers of certain complex tridiagonal matrices [J]. Mathematical Sciences Letters, 2013, 2: 63-72.

[30] J. Gutiérrez-Gutiérrez. Powers of tridiagonal matrices with constant diagonals [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 206: 885-891.

[31] J. Gutiérrez-Gutiérrez. Positive integer powers of certain tridiagonal matrices [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 202: 133-140.

[32] J. Rimas. Explicit expression for powers of tridiagonal 2-Toeplitz matrix of odd order [J]. Linear Algebra and its Applications, 2012, 436: 3493 – 3506.

[33] J. Jia, T. Sogabe, M. El-Mikkawy. Inversion of k-tridiagonal matrices with Toeplitz structure [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2013, 65: 116 – 125.

[34] M. Elouafi, A. D. Aiat Hadj. On the powers and the inverse of a tridiagonal matrix [J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 211: 137 – 141.

[35] N. Shen, Z. L. Jiang, J. Li. The Spectral Decomposition of Near-Toeplitz Tridiagonal Matrices [J]. International Journal of Applied Mathematics and Informatics, 2013, 7: 115-122.

[36] Z. L. Jiang, N. Shen and J. Li. The Spectral Decomposition of Some Tridiagonal Matrices [J]. WSEAS Transactions on Mathematics, 2013, 12: 1135-1145.

[37] R. P. Agarwal. Difference equations and inequalities: theory, methods, and applications [M]. New York: Marcel Dekker, 2000.

[38] G. James. Advanced Modern Engineering Mathematics [M]. England: Pearson Education Limited, 2011.

[39] R. A. Horn, C. R. Johnson. Matrix analysis [M]. New York: Cambridge University Press, 1990.

[40] J. C. Mason, D. C. Handscomb. Chebyshev Polynomials [M]. Bocas Raton: CRC Press, 2003.

[41] L. Fox, I. B. Parker. Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis [M]. London: Oxford University press, 1968.

攻读硕士学位期间的研究成果

[1] Zhaolin Jiang, Nuo Shen and Juan Li. The Spectral Decomposition of Some Tridiagonal Matrices. WSEAS Transactions on Mathematics (EI), 2013, 12: 1135-1145.

[2] Nuo Shen, Zhaolin Jiang, Juan Li. On explicit determinants of the RFMLR and RLMFL circulant matrices involving certain famous numbers. WSEAS Transactions on Mathematics (EI), 2013, 12: 42-53.

[3] Nuo Shen, Zhaolin Jiang, Juan Li. The spectral decomposition of near-Toeplitz tridiagonal matrices. International Journal of Applied Mathematics and Informatics, 2013, 7: 115-122.

[4] Zhaolin Jiang, Nuo Shen, Juan Li. Determinants of the RFMLR circulant matrices with Perrin, Padovan, Tribonacci, and the generalized Lucas numbers. Journal of Applied Mathematics (SCI), 2014, 2014: 1-11.

[5] Zhaolin Jiang, Nuo Shen, Juan Li. On the explicit determinants of RFMLR and RLMFL circulant matrices involving Jacobsthal numbers in communication. Lecture Notes in Electrical Engineering (EI会议), 2014, 272: 401-408.

[6] Juan Li, Zhaolin Jiang and Nuo Shen. Explicit determinants of the Fibonacci RFPL circulant and Lucas RFPL circulant matrix. JP Journal of Algebra, Number Theory and Application, 2013, 28(2): 167-179.

[7] Zhaolin Jiang, Juan Li, Nuo Shen. On explicit determinants of RFRLR and RFPLL circulant matrices involving Pell numbers in information theory. ICICA 2012, Part II, CCIS 308 (EI 会议), 2012: 364-370.

[8] Zhaolin Jiang, Juan Li, Nuo Shen. On the explicit determinants and singularities of r-circulant and left r-circulant matrices with some famous numbers. WSEAS Transactions on Mathematics (EI), 2013, 12: 341-351.

[9] Juan Li, Zhaolin Jiang, Nuo Shen and Jianwei Zhou. On optimal backward perturbation analysis for the linear system with skew circulant coefficient matrix. Computational and Mathematical Methods in Medicine (SCI), 2013, 2013: 1-7.

[10] Nuo Shen, Zhaolin Jiang and Juan Li. A method for solving the eigenvalue problem of certain tridiagonal matrices. 已投Journal of Computational and Applied Mathematics.

[11] Nuo Shen, Zhaolin Jiang and Hongwei Wang. The spectral decomposition and explicit powers of several tridiagonal matrices. 已投Journal of Computational and Applied Mathematics.

[12] Zhaolin Jiang, Nuo Shen, Hongwei Wang and Juan Li. On powers of near-Toeplitz tridiagonal matrices-I. 已投Applied Mathematics and Computation.

[13] Zhaolin Jiang, Nuo Shen, Hongwei Wang and Juan Li. On powers of near-Toeplitz tridiagonal matrices-II. 已投Applied Mathematics and Computation.

致谢

三年的时光转瞬即逝, 丰富多彩的学生生活即将结束, 回首往昔, 感触颇多! 感谢命运让我在山东师范大学和临沂大学结识了新的老师和同学, 交到了新的朋友, 与他们共同经历的点点滴滴都将永远珍藏在我的心中.

衷心的感谢恩师江兆林教授、王洪伟教授和王江鲁教授. 从硕士刚入校至今, 是恩师一步一步地将我领进门, 指导我查阅文献、分析问题和解决问题. 他们那以学术研究为乐的态度深深地感染了我, 吸引着我开始自主学习、探究学习. 我的论文从选题、写作到最后定稿, 每一步都倾注了恩师大量的心血. 三年来, 恩师不仅在学习上给予了我很大的帮助, 而且在生活上对我也关怀备至. 恩师严谨的治学态度、敏锐的洞察力和高尚的人格都深深地影响着我, 将使我终生学之不尽, 受益无穷!

感谢我的父母二十多年来对我的养育教育, 他们一直是我前进的动力; 感谢其他亲人和朋友对我的默默支持和关怀!

感谢周建伟、姜自武、卢福良等老师给予我专业知识上的指导, 以及黄宜坤、郭春雷、卢成晓、李雯等老师给予我生活上的照顾.

感谢同窗的李娟, 师妹徐婷婷、唐霞、辛红霞. 在硕士读书期间, 她们与我一起学习, 积极讨论问题, 帮助我开阔思维, 为论文的完成打下了基础.

感谢所有数科院的研究生, 谢谢她们对我的帮助和包容. 因为有了她们, 我的研究生生活才充满了意义.

最后, 感谢在百忙之中抽出时间审阅本论文的专家教授.