牛顿恒等式在解题中的应用

计振明

(浙江省嘉兴一中, 314050)

笔者阅读了 2006 年全国高中数学联赛加试第 3 题, 发现应用牛顿恒等式解题能获得简洁的证明或解法. 本文谈谈与一元二次方程或一元三次方程有关的牛顿恒等式及其应用, 供大家参考.

定理 对数列$\{S_n\}$, $S_n = A_1x_1^n + A_2x_2^n + A_3x_3^n$, 若 x_1, x_2, x_3 是方程 $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ 的三个根, 则

$$S_{n+3} = -a_1S_{n+2} - a_2S_{n+1} - a_3S_n.$$

特别地, 对数列$\{S_n\}$, $S_n = Ax_1^n + Bx_2^n$, 若 x_1, x_2 是方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的两根, 则

$$S_{n+2} = -aS_{n+1} - bS_n.$$

这就是著名的牛顿恒等式. 下面举例说明它的应用.

例 1 求方程组

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 33 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

的解.

解: 设x, y 是方程$t^2 - 3t + b = 0$的两根, 则 $S_1 = x + y = 3$, $S_5 = x^5 + y^5 = 33$,

由牛顿恒等式, 有

$$\begin{aligned} S_5 &= 3S_4 - bS_3 \\ &= 3(3S_3 - bS_2) - bS_3 \\ &= (3^2 - b)S_3 - 3bS_2 \\ &= (3^2 - b)(3S_2 - bS_1) - 3bS_2 \\ &= (3^3 - 6b)S_2 - (3^2 - b)bS_1 \\ &= (3^3 - 6b)(3S_1 - bS_0) - (3^2 - b)bS_1 \\ &= (3^3 - 6b)(3^2 - 2b) - 3(3^2 - b)b \\ &= 243 - 135b + 15b^2, \end{aligned}$$

$\because 243 - 135b + 15b^2 = 33$,

即 $b^2 - 9b + 14 = 0$,

$\therefore b = 2$ 或 $b = 7$.

当 $b = 2$ 时, x, y 是方程 $t^2 - 3t + 2 = 0$ 的两根.

$$\therefore \begin{cases} x = 1, \\ y = 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

当 $b = 7$ 时, x, y 是方程 $t^2 - 3t + 7 = 0$ 的两根(虚根).

$$\therefore \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{19}}{2}\mathrm{i}, \\ y = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{19}}{2}\mathrm{i}, \end{cases}$$

$$\text{或} \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{19}}{2}\mathrm{i}, \\ y = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{19}}{2}\mathrm{i}. \end{cases}$$

例 2 (第二届美国数学奥林匹克试题) 试确定方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^5 + y^5 + z^5 = 3 \end{cases}$$

的所有解.

解 设 x, y, z 是方程 $t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3 = 0$ 的三个根, 由定理, 得

$S_1 = x + y + z = -a_1 = 3$, 即 $a_1 = -3$,

$S_2 = x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + zy) = 9 - 2a_2 = 3$, 即 $a_2 = 3$,

$S_3 = -a_1S_2 - a_2S_1 - a_3S_0 = -3a_3$,

$S_4 = -a_1S_3 - a_2S_2 - a_3S_1 = -9 - 12a_3$,

$S_5 = -a_1S_4 - a_2S_3 - a_3S_2 = -27 - 30a_3 = 3$, 即 $a_3 = -1$.

因此 x, y, z 是方程 $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$

的三个根,即$(t-1)^3=0$的三个根,故$x=y=z=1$.

例 3 (2006 年全国高中数学联赛加试题)解方程组

$$\begin{cases} x-y+z-w=2, \\ x^2-y^2+z^2-w^2=6, \\ x^3-y^3+z^3-w^3=20, \\ x^4-y^4+z^4-w^4=66. \end{cases}$$

解:设x, z是方程$m^2-pm+q=0$的两根,由定理,得

$$S_1=x+z=p,$$
$$S_2=x^2+z^2=p^2-2q,$$
$$S_3=x^3+z^3=p^3-3pq,$$
$$S_4=x^4+z^4=p^4-4p^2q+2q^2,$$

同理,令y, w是方程$n^2-sn+t=0$的两根,由定理,得

$$S'_1=y+w=s,$$
$$S'_2=y^2+w^2=s^2-2t,$$
$$S'_3=y^3+w^3=s^3-3st,$$
$$S'_4=y^4+w^4=s^4-4s^2t+2t^2,$$

故原方程组等价转化为

$$\begin{cases} p=2+s & ① \\ p^2-2q=6+s^2-2t & ② \\ p^3-3pq=20+s^3-3st & ③ \\ p^4-4p^2q+2q^2=66+s^4-4s^2t+2t^2 & ④ \end{cases}$$

由 ① 式可得:

$$p^2=s^2+4s+4 \quad ⑤$$
$$p^3=s^3+6s^2+12s+8 \quad ⑥$$
$$p^4=s^4+8s^3+24s^2+32s+16 \quad ⑦$$

由 ②, ⑤ 得:

$$q=t+2s-1 \quad ⑧$$

由 ③, ⑥ 得:

$$pq=st+2s^2+4s-4 \quad ⑨$$

由 ④, ⑦ 得:

$$2p^2q-q^2=2s^2t-t^2+4s^2+16s-25 \quad ⑩$$

将 ① 代入 ⑧ 和 ⑨ 得:

$$t=\frac{s}{2}-1 \quad ⑪$$

将 ⑪代入 ⑧ 得:

$$q=\frac{5}{2}s-2 \quad ⑫$$

将①, ⑪, ⑫代入 ⑩,得$s=2$.所以有$t=0$, $p=4$, $q=3$.

所以x, z和y, w分别是方程$m^2-4m+3=0$和$n^2-2n=0$的两根,

所以原方程组的解为:$x=3$, $y=2$, $z=1$, $w=0$;或$x=3$, $y=0$, $z=1$, $w=2$;或$x=1$, $y=2$, $z=3$, $w=0$;或$x=1$, $y=0$, $z=3$, $w=2$.

当然定理还可以把次数提高到四次或更高次,这样的题目在各类竞赛中也常出现,这里不再举例说明.此定理在证明一些整除性问题时也非常有用,有兴趣的朋友可以深入研究.

练习题:

1. 求方程$\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$的实数解.

提示:令$\sqrt[4]{97-x}=y$, $\sqrt[4]{x}=z$,则原方程可化为$\begin{cases} y+z=5, \\ y^4+z^4=97. \end{cases}$

答案:$x=16$或$x=81$.

2. 试确定方程组$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x^5+y^5+z^5=1 \end{cases}$的所有解.

答案:$x=1$, $y=z=0$;或$y=1$, $x=z=0$;或$z=1$, $y=x=0$.

3. 若$x+y+z=0$,求证:$\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\cdot\frac{x^3+y^3+z^3}{3}=\frac{x^5+y^5+z^5}{5}$.

提示:令x, y, z是方程$t^3+a_1t^2+a_2t+a_3=0$的三个根,由定理即可证之.

(收稿日期:2007—09—14)