第 29 卷第 3 期　　　　大　学　数　学　　　　Vol. 29, №. 3
2013 年 6 月　　　　COLLEGE MATHEMATICS　　　　Jun. 2013

正弦和余弦的多倍角公式及其应用

陆元鸿

(华东理工大学 数学系,上海 200237)

[摘　要] 推导证明了正弦和余弦的多倍角公式,并给出了多倍角公式在推导切比雪夫多项式的一般表达式. 证明 $\cos\frac{m\pi}{n}$ 和 $\sin\frac{m\pi}{n}$ 不是超越数,求特殊矩阵的特征值,推导组合求和公式等方面的应用.

[关键词] 多倍角公式;切比雪夫多项式;组合求和

[中图分类号] O122;O124　　[文献标识码] C　　[文章编号] 1672-1454(2013)03-0101-07

1　正弦和余弦的多倍角公式的推导证明

在三角学中,有正弦和余弦的倍角公式

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1,\quad \sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta,$$

有正弦和余弦的 3 倍角公式

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,\quad \sin 3\theta = 4\cos^2\theta\sin\theta - \sin\theta,$$

有正弦和余弦的 4 倍角公式

$$\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1,\quad \sin 4\theta = 8\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin\theta,$$

$$\cdots\cdots$$

我们自然会想到,是不是有一般的 n 倍角公式呢? 下面就给出这样的公式.

定理　对任何正整数 n,必有

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (C_{n-k}^{k} + C_{n-1-k}^{k-1})(-1)^k 2^{n-1-2k}\cos^{n-2k}\theta,$$

$$\sin n\theta = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-1-k}^{k}(-1)^k 2^{n-1-2k}\cos^{n-1-2k}\theta\sin\theta.$$

证　用数学归纳法来证明这两个公式.

当 $n=1$ 时,

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{1}{2}\right]} (C_{1-k}^{k}+C_{1-1-k}^{k-1})(-1)^k 2^{1-1-2k}\cos^{1-2k}\theta=(C_{1-0}^{0}+C_{0-0}^{0-1})(-1)^0 2^{0-2\times 0}\cos^{1-0}\theta=\cos\theta,$$

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{1-1}{2}\right]} C_{1-1-k}^{k}(-1)^k 2^{1-1-2k}\cos^{1-1-2k}\theta\sin\theta=C_{0-0}^{0}(-1)^0 2^{0-2\times 0}\cos^{0-2\times 0}\theta\sin\theta=\sin\theta,$$

公式显然成立.

设已知对某个给定的正整数 n,公式成立,有

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (C_{n-k}^{k} + C_{n-1-k}^{k-1})(-1)^k 2^{n-1-2k}\cos^{n-2k}\theta,$$

[收稿日期] 2011-04-29

$$\sin n\theta=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-1-k}^{k}(-1)^{k}2^{n-1-2k}\cos^{n-1-2k}\theta\sin\theta .$$

下面看 $n+1$ 时的情形.

$\cos(n+1)\theta=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta$

$$\begin{aligned}
&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(C_{n-k}^{k}+C_{n-1-k}^{k-1})(-1)^{k}2^{n-1-2k}\cos^{n+1-2k}\theta-\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}C_{n-1-k}^{k}(-1)^{k}2^{n-1-2k}\cos^{n-1-2k}\theta\sin^{2}\theta\\
&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(C_{n-k}^{k}+C_{n-1-k}^{k-1})(-1)^{k}2^{n-1-2k}\cos^{n+1-2k}\theta-\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}C_{n-1-k}^{k}(-1)^{k}2^{n-1-2k}(\cos^{n-1-2k}\theta-\cos^{n+1-2k}\theta)\\
&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(C_{n-k}^{k}+C_{n-1-k}^{k-1}+C_{n-1-k}^{k})(-1)^{k}2^{n-1-2k}\cos^{n+1-2k}\theta+\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}C_{n-1-k}^{k}(-1)^{k+1}2^{n-1-2k}\cos^{n-1-2k}\theta\\
&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(C_{n-k}^{k}+C_{n-k}^{k})(-1)^{k}2^{n-1-2k}\cos^{n+1-2k}\theta+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}C_{n-1-(k-1)}^{k-1}(-1)^{k-1+1}2^{n-1-2(k-1)}\cos^{n-1-2(k-1)}\theta\\
&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_{n-k}^{k}(-1)^{k}2^{n-2k}\cos^{n+1-2k}\theta+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}C_{n-k}^{k-1}(-1)^{k}2^{n+1-2k}\cos^{n+1-2k}\theta\\
&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(C_{n-k}^{k}+2C_{n-k}^{k-1})(-1)^{k}2^{n-2k}\cos^{n+1-2k}\theta\\
&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(C_{n+1-k}^{k}+C_{n-k}^{k-1})(-1)^{k}2^{n-2k}\cos^{n+1-2k}\theta,
\end{aligned}$$

$\sin(n+1)\theta=\sin n\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta$

$$\begin{aligned}
&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}C_{n-1-k}^{k}(-1)^{k}2^{n-1-2k}\cos^{n-2k}\theta\sin\theta+\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(C_{n-k}^{k}+C_{n-1-k}^{k-1})(-1)^{k}2^{n-1-2k}\cos^{n-2k}\theta\sin\theta\\
&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(C_{n-k}^{k}+C_{n-1-k}^{k-1}+C_{n-1-k}^{k})(-1)^{k}2^{n-1-2k}\cos^{n-2k}\theta\sin\theta\\
&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(C_{n-k}^{k}+C_{n-k}^{k})(-1)^{k}2^{n-1-2k}\cos^{n-2k}\theta\sin\theta=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_{n-k}^{k}(-1)^{k}2^{n-2k}\cos^{n-2k}\theta\sin\theta.
\end{aligned}$$

可见,当 $n+1$ 时,两个公式也成立.所以,对任何正整数 n ,公式都成立.

2 用多倍角公式求切比雪夫(Чнбышев)多项式的一般表达式

第一类切比雪夫多项式 $T_n(x)$ 是微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$ 的解.

第一类切比雪夫多项式可以用余弦和反余弦函数定义为

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x),\quad n=0,1,2,\cdots.$$

令 $\theta=\arccos x,\cos\theta=x$,根据余弦多倍角公式,立即可以得到下列一般表达式:

$$\begin{aligned}
T_n(x)=\cos(n\arccos x)=\cos n\theta&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(C_{n-k}^{k}+C_{n-1-k}^{k-1})(-1)^{k}2^{n-1-2k}\cos^{n-2k}\theta\\
&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(C_{n-k}^{k}+C_{n-1-k}^{k-1})(-1)^{k}2^{n-1-2k}x^{n-2k}.
\end{aligned}$$

具体来说,有

$$T_0(x)=1,\quad T_1(x)=x,$$
$$T_2(x)=2x^2-1,\quad T_3(x)=4x^3-3x,$$
$$T_4(x)=8x^4-8x^2+1,\quad T_5(x)=16x^5-20x^3x+5x,$$
$$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1,\quad T_7(x)=64x^7-112x^5+56x^3-7x,$$

……

第二类切比雪夫多项式　$U_n(x)$ 是微分方程 $(1-x^2)y''-3xy'+n(n+2)y=0$ 的解.

第二类切比雪夫多项式可以用正弦和反余弦函数定义为

$$U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)},\quad n=0,1,2,\cdots.$$

令 $\theta=\arccos x,\cos\theta=x$,根据正弦多倍角公式,立即可以得到下列一般表达式:

$$U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)}=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_{n-k}^{k}(-1)^k2^{n-2k}\cos^{n-2k}\theta$$

$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_{n-k}^{k}(-1)^k2^{n-2k}x^{n-2k}.$$

具体来说,有

$$U_0(x)=1,\quad U_1(x)=2x,$$
$$U_2(x)=4x^2-1,\quad U_3(x)=8x^3-4x,$$
$$U_4(x)=16x^4-12x^2+1,\quad U_5(x)=32x^5-32x^3+6x,$$
$$U_6(x)=64x^6-80x^4+24x^2-1,\quad U_7(x)=128x^7-192x^5+80x^3-8x,$$

……

3　用多倍角公式证明对任何正整数 $m,n,\cos\frac{m\pi}{n}$ 和 $\sin\frac{m\pi}{n}$ 都不是超越数

设

$$\theta=\frac{m\pi}{n},\quad x=\cos\theta=\cos\frac{m\pi}{n},\quad y=\sin\theta=\sin\frac{m\pi}{n}.$$

根据余弦 n 倍角公式,有

$$(-1)^m=\cos m\pi=\cos\left(n\frac{m\pi}{n}\right)=\cos n\theta=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(C_{n-k}^{k}+C_{n-1-k}^{k-1})(-1)^k2^{n-1-2k}\cos^{n-2k}\theta$$

$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(C_{n-k}^{k}+C_{n-1-k}^{k-1})(-1)^k2^{n-1-2k}x^{n-2k}.$$

这是一个整系数 n 次代数方程,$x=\cos\theta=\cos\frac{m\pi}{n}$ 是它的一个根.所以 $\cos\frac{m\pi}{n}$ 不是超越数.

当 n 是偶数时,根据余弦 n 倍角公式,有

$$(-1)^m=\cos m\pi=\cos\left(n\frac{m\pi}{n}\right)=\cos n\theta=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(C_{n-k}^{k}+C_{n-1-k}^{k-1})(-1)^k2^{n-1-2k}\cos^{n-2k}\theta$$

$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(C_{n-k}^{k}+C_{n-1-k}^{k-1})(-1)^k2^{n-1-2k}(1-\sin^2\theta)^{\frac{n}{2}-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(C_{n-k}^{k}+C_{n-1-k}^{k-1})(-1)^k2^{n-1-2k}(1-y^2)^{\frac{n}{2}-k}.$$

这是一个整系数 n 次代数方程,$y=\sin\theta=\sin\frac{m\pi}{n}$ 是它的一个根.

当 n 是奇数时,根据正弦 n 倍角公式,有

$$0=\sin m\pi=\sin\left(n\frac{m\pi}{n}\right)=\sin n\theta=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}C_{n-1-k}^{k}(-1)^k2^{n-1-2k}\cos^{n-1-2k}\theta\sin\theta$$

$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}C_{n-1-k}^{k}(-1)^k2^{n-1-2k}(1-\sin^2\theta)^{\frac{n-1}{2}-k}\sin\theta$$

$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-1-k}^{k}(-1)^{k}2^{n-1-2k}(1-y^{2})^{\frac{n-1}{2}-k}y.$$

这是一个整系数 n 次代数方程，$y=\sin\theta=\sin\frac{m\pi}{n}$ 是它的一个根.所以 $\sin\frac{m\pi}{n}$ 不是超越数.

4 用多倍角公式求一个 n 阶矩阵的特征值

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0&0&0\\1&0&1&\cdots&0&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1&0\\0&0&0&\cdots&1&0&1\\0&0&0&\cdots&0&1&0\end{bmatrix}_{n}$$

首先,用数学归纳法证明公式

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&\cdots&0\\-1&\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda\end{vmatrix}_{n}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^{k}C_{n-k}^{k}\lambda^{n-2k}.$$

当 $n=1$ 时,

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=|\lambda|=\lambda=(-1)^{0}C_{1-0}^{0}\lambda^{1-2\times0},$$

公式成立.

当 $n=2$ 时,

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1\\-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^{2}-1=(-1)^{0}C_{2-0}^{0}\lambda^{2-2\times0}+(-1)^{1}C_{2-1}^{1}\lambda^{2-2\times1},$$

公式也成立.

设对某个 m ,当 $n=1,2,\cdots,m-1$ 时,公式都成立,下面讨论 $n=m$ 时的情形.

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&\cdots&0\\-1&\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda\end{vmatrix}_{m}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda&-1&\cdots&0\\-1&\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda\end{vmatrix}_{m-1}-(-1)\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&0\\-1&\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-1&0&\cdots&\lambda\end{vmatrix}_{m-1}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix}\lambda&-1&\cdots&0\\-1&\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda\end{vmatrix}_{m-1}-\begin{vmatrix}\lambda&-1&\cdots&0\\-1&\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda\end{vmatrix}_{m-2}$$

$$=\lambda\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}(-1)^{k}C_{m-1-k}^{k}\lambda^{m-1-2k}-\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-2}{2}\right]}(-1)^{k}C_{m-2-k}^{k}\lambda^{m-2-2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}(-1)^{k}C_{m-1-k}^{k}\lambda^{m-2k}+\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]-1}(-1)^{k+1}C_{m-1-(k+1)}^{(k+1)-1}\lambda^{m-2(k+1)}$$

$$=(-1)^{0}C_{m-1-0}^{0}\lambda^{m-2\times0}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}(-1)^{k}C_{m-1-k}^{k}\lambda^{m-2k}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}(-1)^{k}C_{m-1-k}^{k-1}\lambda^{m-2k}$$

$$=\lambda^{m}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}(-1)^{k}(C_{m-1-k}^{k}+C_{m-1-k}^{k-1})\lambda^{m-2k}$$

$$=(-1)^0C_{k-0}^0\lambda^{m-2\times 0}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}(-1)^kC_{m-k}^k\lambda^{m-2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}(-1)^kC_{m-k}^k\lambda^{m-2k},$$

可见，$n=m$ 时，公式也成立．所以，对任何正整数 n，公式都成立．

设 $\theta=\frac{j\pi}{n+1}$，$\lambda_j=2\cos\theta=2\cos\frac{j\pi}{n+1}$，$j=1,2,\cdots,n$．根据正弦多倍角公式，有（公式中的 n 用 $n+1$ 代入）

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^kC_{n-k}^k\lambda_j^{n-2k}\sin\frac{j\pi}{n+1}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_{n-k}^k(-1)^k2^{n-2k}\cos^{n-2k}\theta\sin\theta=\sin(n+1)\theta$$

$$=\sin\frac{(n+1)j\pi}{n+1}=\sin j\pi=0.$$

因为 $j=1,2,\cdots,n$，$0<\frac{j\pi}{n+1}<\pi$，$\sin\frac{j\pi}{n+1}\neq 0$，所以必有

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^kC_{n-k}^k\lambda_j^{n-2k}=0.$$

由此可见，当 $j=1,2,\cdots,n$ 时，每一个 $\lambda_j=2\cos\frac{j\pi}{n+1}$ 都是特征方程

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^kC_{n-k}^k\lambda^{n-2k}=0$$

的根，所以，n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值就是

$$\lambda_j=2\cos\frac{j\pi}{n+1},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

5　用多倍角公式推导一些组合求和公式

由欧拉公式可知

$$\cos n\theta+\mathrm{i}\,\sin n\theta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n=(\cos\theta+\mathrm{i}\,\sin\theta)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,(\cos\theta)^{n-k}\,(\mathrm{i}\,\sin\theta)^k$$

$$=C_n^0\cos^n\theta+\mathrm{i}C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta-C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta-\mathrm{i}C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta$$

$$+C_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta+\cdots+C_n^n\,(\mathrm{i}\,\sin\theta)^n. \tag{1}$$

在(1)式中，等号左边的实部必定与等号右边的实部相等，所以有

$$\cos n\theta=C_n^0\cos^n\theta-C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+C_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta$$

$$-C_n^6\cos^{n-6}\theta\sin^6\theta+\cdots+(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_n^{2\left[\frac{n}{2}\right]}\cos^{n-2\left[\frac{n}{2}\right]}\theta\sin^{2\left[\frac{n}{2}\right]}\theta$$

$$=\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^jC_n^{2j}\cos^{n-2j}\theta\sin^{2j}\theta=\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^jC_n^{2j}\cos^{n-2j}\theta\,(1-\cos^2\theta)^j$$

$$=\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^jC_n^{2j}\cos^{n-2j}\theta\sum_{h=0}^{j}C_j^h\,(-1)^h\cos^{2h}\theta$$

$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^kC_n^{2(k+m)}C_{k+m}^m\cos^{n-2k}\theta.$$

与余弦 n 倍角公式

$$\cos n\theta=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(C_{n-k}^k+C_{n-1-k}^{k-1})\,(-1)^k2^{n-1-2k}\cos^{n-2k}\theta$$

相对比，可得

$$\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2(k+m)} C_{k+m}^m = (C_{n-k}^k + C_{n-1-k}^{k-1}) 2^{n-1-2k}, \quad k=0,1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right].$$

$k=0$ 时,有

$$\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2m} = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots + C_n^{2\left[\frac{n}{2}\right]} = 2^{n-1}.$$

$k=1$ 时,有

$$\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} m C_n^{2m+2} = C_n^2 + 2C_n^4 + 3C_n^6 + \cdots + \left[\frac{n}{2}\right] C_n^{2\left[\frac{n}{2}\right]} = n 2^{n-3}.$$

$k=2$ 时,有

$$\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{m+2}^2 C_n^{2m+4} = C_n^4 + 3C_n^6 + 6C_n^8 + \cdots + C_{\left[\frac{n}{2}\right]}^2 C_n^{2\left[\frac{n}{2}\right]} = \frac{n(n-3)}{2} 2^{n-5}.$$

$$\cdots\cdots$$

在(1)式中,等号左边的虚部必定与等号右边的虚部相等,所以有

$$\begin{aligned}
\sin n\theta &= C_n^1 \cos^{n-1}\theta \sin\theta - C_n^3 \cos^{n-3}\theta \sin^3\theta + C_n^5 \cos^{n-5}\theta \sin^5\theta \\
&\quad - C_n^7 \cos^{n-7}\theta \sin^7\theta + \cdots + (-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2\left[\frac{n+1}{2}\right]} \cos^{n-2\left[\frac{n+1}{2}\right]}\theta \sin^{2\left[\frac{n+1}{2}\right]}\theta \\
&= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^j C_n^{2j+1} \cos^{n-2j-1}\theta \sin^{2j+1}\theta = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^j C_n^{2j+1} \cos^{n-2j-1}\theta\, (1-\cos^2\theta)^j \sin\theta \\
&= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^j C_n^{2j+1} \cos^{n-2j-1}\theta \sum_{h=0}^{j} C_j^h (-1)^h \cos^{2h}\theta \sin\theta \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k C_n^{2(k+m)+1} C_{k+m}^m \cos^{n-2k-1}\theta \sin\theta.
\end{aligned}$$

与正弦 n 倍角公式

$$\sin n\theta = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-1-k}^k (-1)^k 2^{n-1-2k} \cos^{n-1-2k}\theta \sin\theta$$

相对比,可得

$$\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2(k+m)+1} C_{k+m}^m = C_{n-1-k}^k 2^{n-1-2k}, \quad k=0,1,2,\cdots,\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

$k=0$ 时,有

$$\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2m+1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots + C_n^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1} = 2^{n-1}.$$

$k=1$ 时,有

$$\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (m+1) C_n^{2m+3} = C_n^3 + 2C_n^5 + 3C_n^7 + \cdots + \left[\frac{n-1}{2}\right] C_n^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1} = (n-2) 2^{n-3}.$$

$k=2$ 时,有

$$\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{m+2}^2 C_n^{2m+5} = C_n^5 + 3C_n^7 + 6C_n^9 + \cdots + C_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}^2 C_n^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1} = \frac{(n-3)(n-4)}{2} 2^{n-5}.$$

$$\cdots\cdots$$

[参 考 文 献]

[1]《数学手册》编写组. 数学手册[M]. 北京:高等教育出版社,1979.

Multiple Angles Formula of Sine and Cosine and Its Application

LU Yuan-hong

(Department of Mathematics, East China University of Science & Technology, Shanghai 200237 ,China)

Abstract: Multiple angles formula of sine and cosine is proved. The formula can be applied to expressing Chebyshev polynomial, proving that $\cos\frac{m\pi}{n}$ and $\sin\frac{m\pi}{n}$ are not transcendental numbers, finding eigenvalues of a matrix and deriving formulas of summation of combination.

Key words: multiple angles formula; Chebyshev polynomial; summation of combination