$An=(C_n^0-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\cdots)+(C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\cdots)i$ 由复数相等的条件即得 $Sn=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$.

由前文可以看出,要进行有效的化归,既要发挥思维定势的积极作用,善于进行习惯性思维;又要消除思维定势的消极影响,善于由此及彼,进行创造性思维.可以说,化归,是习惯性与创造性的有机结合.至于其培养的方法与途径当然是多种多样的.

参考文献

浅析数学教育中应培养的数学观念.数学通报.1988,1.

牛顿恒等式的多种应用

周 万 林

(湖南新化县一中)

牛顿恒等式:对于数列 $\{t_n\}$: $t_n=Ax_1^n+Bx_2^n$,若 x_1, x_2 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的两根,则

$$t_n=-at_{n-1}-bt_{n-2}.$$

证明 据条件得

$x_1^2=-ax_1-b, x_2^2=-ax_2-b$,故

$$-at_{n-1}-bt_{n-2}=-a(Ax_1^{n-1}+Bx_2^{n-1})-b(Ax_1^{n-2}+Bx_2^{n-2})$$

$$=Ax_1^{n-2}(-ax_1-b)+Bx_2^{n-2}(-ax_2-b)$$

$$=Ax_1^{n-2}\cdot x_1^2+Bx_2^{n-2}\cdot x_2^2=Ax_1^n+Bx_2^n.$$

即 $t_n=-at_{n-1}-bt_{n-2}$.

下面举例说明牛顿恒等式在解题中的多种应用.

1 求解有关方程问题

例1 不解方程求作一个关于 y 的一元二次方程,使它的首项系数为1,两根分别是方程 $x^2+3x+1=0$ 的两根的5次幂(上海市1984年初中数学竞赛第二试试题).

解 设 x_1,x_2 为已知方程的两根,y_1、y_2 为所求方程的两根.则

$x_1x_2=1, y_1y_2=x_1^5x_2^5=(x_1x_2)^5=1$.

令 $t_n=x_1^n+x_2^n$,则据牛顿恒等式知

$t_n=-3t_{n-1}-t_{n-2}$

$t_1=x_1+x_2=-3$

$t_2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=7$

$t_3=-3t_2-t_1=-18$

$t_4=-3t_3-t_2=47$

$t_5=-3t_4-t_3=-123$

而 $y_1+y_2=x_1^5+x_2^5=t_5=-123$

故所求方程为 $y^2+123y+1=0$.

例2 解方程: $\sin^{10}x+\cos^{10}x=\frac{29}{64}$

解 令 $u=\sin^2x, v=\cos^2x$,则

$$\begin{cases}u+v=1\\ u^5+v^5=\frac{29}{64}\end{cases}$$

据牛顿恒等式知

$u^5+v^5=(u^4+v^4)-uv(u^3+v^3)$

$=\cdots=(u+v)^5-5uv(u+v)^3+5u^2v^2(u+v)$

$=1-5uv+5u^2v^2=\frac{29}{64}$

$\therefore\ u^2v^2-uv+\frac{7}{64}=0$

解得 $uv=\frac{7}{8}$ 或 $uv=\frac{1}{8}$

$\therefore\ \sin^2x\cos^2x=\frac{7}{8}$ 或 $\sin^2x\cos^2x=\frac{1}{8}$

即 $\sin^22x=\frac{7}{2}$,此方程无解.

或 $\sin^22x=\frac{1}{2}\Longrightarrow\sin2x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

解得 $x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{8}(k\in Z)$

2 证明有关条件等式

例3 已知 $\sin^3\theta+\cos^3\theta=1$,求证:

$\sin^n\theta+\cos^n\theta=1(n\in N)$

证明 设 $t_n=\sin^n\theta+\cos^n\theta(n=1,2,\cdots)$

$P=\sin\theta+\cos\theta,q=\sin\theta\cos\theta$

$\because\quad \sin^3\theta+\cos^3\theta=1$

$\therefore\quad p^3=\sin^3\theta+\cos^3\theta+3\sin\theta\cos\theta\ (\sin\theta+\cos\theta)=1+3pq$ ①

$p^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=1+2q$ ②

联立①、②解得 $p=1,q=0$

据牛顿恒等式,得

$t_n=pt_{n-1}-qt_{n-2}=t_{n-1}$

直接迭代得

$t_n=t_{n-1}=t_{n-2}=\cdots=t_2=t_1=p=1$

$\therefore$ 对一切 $n\in N$ 有 $\sin^n\theta+\cos^n\theta=1$.

例 4 已知 $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$,求证:

$$x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\theta(n\in N)$$

证明 当 $n=1$ 时,结论显然成立.

当 $n\geqslant2$ 时,据牛顿恒等式,有

$$x^n+\frac{1}{x^n}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)-\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)$$

$$=2\cos\theta\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)-\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)$$

假设 $n\leqslant k-1(k\geqslant3)$时,结论成立. 即

$$x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}=2\cos(k-1)\theta$$

$$x^{k-2}+\frac{1}{x^{k-2}}=2\cos(k-2)\theta$$

于是 $x^k+\frac{1}{x^k}=2\cos\theta\cdot2\cos(k-1)\theta-2\cos(k-2)\theta=2\cos k\theta$

故当 $n=k$ 时,结论也成立.

$\therefore$ 对一切 $n\in N$,原等式成立.

3 证明有关整除性问题

例 5 求证: n 是正整数时, 大于 $(3+\sqrt{5})^{2n}$的最小整数能被 2^{n+1} 整除. (苏州市1987 年高中数学竞赛题)

证明 设 $t_n=(3+\sqrt{5})^{2n}+(3-\sqrt{5})^{2n}$
$=(14+6\sqrt{5})^n+(14-6\sqrt{5})^n\quad(n\in N)$

$\because$ $14+6\sqrt{5}$、$14-6\sqrt{5}$ 是方程 $x^2-28x+16=0$ 的根,据牛顿恒等式,得

$$t_n=28t_{n-1}-16t_{n-2}\qquad(n\geqslant3)$$

又$\because t_1=28,t_2=752$,由递推式易知$t_n\in z$.

$\because$ $0<(3-\sqrt{5})^{2n}<1$, 故大于 $(3+\sqrt{5})^{2n}$ 的最小整数是 t_n.

下面用数学归纳法证明 $2^{n+1}|t_n$.

由 $t_1=2^2\times7,t_2=2^3\times94$ 知 $n=1,2$ 时,结论成立.

若 $n=k-1,k$ 时,$2^k|t_{k-1}$, $2^{k+1}|t_k$成立,则当 $n=k+1$ 时,由

$t_{k+1}=14(2t_k)-4(2^2t_{k-1})$ 知 $2^{k+2}|t_{k+1}$ 也成立.

于是对任何 $n\in N$, $2^{n+1}|t_n$ 成立,从而原命题得证.

例 6 试证: $11^{n+2}+12^{2n+1}(n=0,1,2,\cdots)$ 能被 133 整除.

证明 设 $t_n=11^{n+2}+12^{2n+1}$
$=121\cdot11^n+12\cdot144^n$

$\because$ 11,144 是方程 $x^2-155x+1584=0$ 的两根,据牛顿恒等式,得

$t_n=155t_{n-1}-1584t_{n-2}(n\geqslant2)$

又$\because t_0=133$, $t_1=3059=133\times23$ 均能被133整除,递推可知,$t_n=11^{n+2}+12^{2n+1}$能被 133 整除.

4 解、证实数的有关性质

例 7 求证:当 n 为正整数时,$(8+3\sqrt{7})^n$的整数部分是奇数.

证明 设 $t_n=(8+3\sqrt{7})^n+(8-3\sqrt{7})^n$

$\because$ $8+3\sqrt{7}$、$8-3\sqrt{7}$ 是方程 $x^2-16x+1=0$ 的两根,据牛顿恒等式,得

$t_n=16t_{n-1}-t_{n-2}$ (※)

$\because$ $t_1=16,t_2=254$ 为正偶数, 由递推公式(※)知,对一切 $n\in N$, t_n 均为正偶数. 又$\because$ $0<8-3\sqrt{7}<1$,$\therefore$ $0<(8-3\sqrt{7})^n<1$,故

$$[(8+3\sqrt{7})^n]=[t_n-(8-3\sqrt{7})^n]=t_n-1\text{ 为奇数.}$$

例 8 求证: $(7+4\sqrt{3})^n$的小数部分是以至少 n 个 9 开头的.

证明 设 $t_n=(7+4\sqrt{3})^n+(7-4\sqrt{3})^n$

$\because$ $7+4\sqrt{3}$、$7-4\sqrt{3}$ 是方程 $x^2-14x+1=0$ 的两根,据牛顿恒等式知

$$t_n=14t_{n-1}-t_{n-2} \qquad (※)$$

∵ $t_1=14$，$t_2=194$ 为正整数，由递推公式(※)知，对任意 $n\in N$．t_n 为正整数．

又 $0<7-4\sqrt{3}<7-1.73\times4=0.08<0.1$

∴ $0<(7-4\sqrt{3})^n<0.1^n$

从而 $(7+\sqrt{3})^n=t_n-(7-4\sqrt{3})^n$
$$>t_n-0.1^n$$

故 $(7+4\sqrt{3})^n$ 的小数部分是以至少 n 个 9 开头的．

例9 试求 $(10+\sqrt{99})^{2n-1}$ 的个位数字是多少($n\in N$)？

解 设 $t_m=(10+\sqrt{99})^m+(10-\sqrt{99})^m$
$(m\in N)$

∵ $10+\sqrt{99}$、$10-\sqrt{99}$ 是方程 $x^2-20x+1=0$ 的根，据牛顿恒等式知

$$t_m=20t_{m-1}-t_{m-2} \qquad (※)$$

∵ $t_1=20$，$t_2=398$，据(※)由数学归纳法容易证明对一切 $m\in N$，$t_m\in N$，且当 m 是奇数时，t_m 是 10 的倍数．

∵ $0<(10-\sqrt{99})^{2n-1}<1$

∴ $0<1-(10-\sqrt{99})^{2n-1}<1$

$(10+\sqrt{99})^{2n-1}=t_{2n-1}-(10-\sqrt{99})^{2n-1}$
$=(t_{2n-1}-1)+1-(10-\sqrt{99})^{2n-1}$

∵ t_{2n-1} 是 10 的倍数，∴ $t_{2n-1}-1$ 的个位数字必是 9．故 $(10+\sqrt{99})^{2n-1}$ 的个位数字是 9．

从以上诸例可见，利用牛顿恒等式解题思路清晰，解法新颖、简捷，且解题的规律性易于掌握，值得同学们一学．

上海1991年一道高考试题之我见

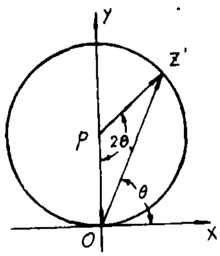
王 德 兴

（上海市吴淞中学）

1991 年上海高考数学试题的第 25 题 (1) 是：

设复数 z 的幅角为 $\theta(0\leqslant\theta<\pi)$，且满足等式 $|z-i|=1$．求复数 z^2-zi 的幅角(用含 θ 的式子表示)其中 i 为虚数单位；

试题解答者只给了此题一种解法，且运算量大．笔者结合命题的几何意义，给出一个较为简便的解法．另外，笔者以为，命题在 $z=0$ 时失误．



简便解法是：设 $z\neq0$，且满足等式 $|z-i|=1$，z 在复平面的对应点 z' 是以 i 所对应的点 P 为圆心，1 为半径的圆上的点，z' 并于原点，据已知 z 的幅角为 $\theta(0<\theta<\pi)$，故 $\angle xoz'=\theta$．因为 ⊙P 和 x 轴相切于原点 o，据弦切角定理，$\angle oPz'=2\theta$．显然，$\overrightarrow{Po}$ 对应复数 $-i$，$\overrightarrow{Pz'}$ 对应复数 $z-i$，据复数乘法之几何意义知：

$z-i=-i(\cos2\theta+i\sin2\theta)=\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)$ 故，$Arg(z-i)=2\theta-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in z)$．从而 $Arg(z^2-zi)=Argz+Arg(z-i)=\theta+2\theta-\frac{\pi}{2}+2k\pi=3\theta-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in z)$

若 $z=0$，则 $z^2-zi=0$，而复数 0 之幅角为任意实数，故 $Arg(z^2-zi)$ 无法用含 z(此时为0)的幅角(此时按已知为 $[0,\pi)$ 内任意实数) θ 表示．因此，命题在 $z=0$ 时失误．若一定要写出 $z=0$ 时的 z^2-zi 的幅角，也只能是任意实数．因此，试题之答案 $Arg(z^2-zi)=3\theta-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in z)$ 无法包含 $z=0$ 时的情况，因而其答案也有误．

1991 年上海高考数学试题的第 25 题 (2) 是：

设复数 z 满足等式 $|z-i|=1$，且 $z\neq0$，$z\neq2i$，又复数 w 使得 $\frac{w}{w-2i}\cdot\frac{z-2i}{z}$ 为实数．问复数 w 在复平面上所对应的点 z 的集合是什么图形，并说明理由．