大连理工大学

硕士学位论文

发生函数方法在组合计数理论中的若干应用

姓名：修风光

申请学位级别：硕士

专业：基础数学

指导教师：冯红

20060601

摘　要

组合计数理论是组合数学中一个最基本的研究方向，它主要研究满足一定条件的安排方式的数目及其计算问题，所用到的基本原理和方法大体有：容斥原理、反演原理、 Polya 计数定理以及发生函数方法等. 本文借助其中的一种基本且应用广泛的方法——发生函数方法，对在组合计数理论中具有举足轻重地位的两类组合数：Lucas 数和 Stirling 数进行了进一步地学习和研究.

本文的主要工作可概括如下：

1. 第一章主要介绍了本文的两个研究对象： Lucas 数和 Stirling 数. 介绍了它们的起源、定义、基本性质以及研究状况.

2. 第二章详细介绍了本文研究所用到的主要方法：发生函数方法. 借助抽象代数的观点，将发生函数定义为形式幂级数，在引进形式幂级数的一种加法和乘法运算后，可使一切形式幂级数做成一个整环，为发生函数的四则运算建立了严谨的理论基础. 最后通过举例，形象地展示了这一方法的具体应用.

3. 第三章把发生函数方法的思想运用到对广义 Lucas 数的研究中，借助各种已知数列的发生函数，得到了若干包含广义 Lucas 数的平方及三次方的恒等式，并在最后借助所得到的恒等式给出了 Lucas 数的几个同余性质.

4. 第四章从组合意义角度对两类普通 Stirling 数进行了推广. 结合推广后的两类 Stirling 数的组合意义，首先给出了它们满足的基本递推关系. 接着又给出了它们的各种形式的发生函数. 进一步又得到了推广后的两类 Stirling 数的若干基本性质，如“三角”递推关系，“垂直”递推关系，同余性质等.

关键词：发生函数； Lucas 数；同余； Stirling 数

Some Applications of the Generating Function in Combinatorial Counting Theory
Abstract

The combinatorial counting theory is the most fundamental research orientation in combinatorics. It primarily studies the number of the placement ways which satisfy some specific conditions and also the computation problem. The basic principles and methods it uses include: the principle of inclusion and exclusion, the principle of Mobius inversion, Polya theory of counting, the method of generating function and so on. By use of the basic and widely applicable method of all the above methods–the method of generating function, the Lucas number and the Stirling numbers are studied in this paper, which play an important role in the combinatorial counting theory.

The main results obtained in this thesis can be summarized as follows:

Chapter 1 of this dissertation is devoted to introducing the two primary research objects of this paper: the Lucas number and the Stirling number. Their origin, definition, basic properties and the research situation are introduced.

Chapter 2 introduces thoroughly the main method used in this paper: the generating function. By means of the point of abstract algebra, the generating function is defined as formal power series. And all the formal power series can form an integral domain after introducing a kind of addition and mutiplication of the formal power series. These give a rigorous theoretical basis to the four arithmetic operations of the generating function. In the end we display vividly some concrete applications of this method by illustration.

In chapter 3 we apply the idea of generating function to the study of the generalized Lucas number. By means of various known generating functions of some sequences, some identities involving the squares and the cubics of this number are gotten. In addtion, by use of the obtained identities we give some congruence relations of the Lucas number.

Chapter 4 is arranged as follows. At first we extend the two kinds of ordinary Stirling numbers from the combinatorial angle. According to the combinatorial sense of the generalized Stirling numbers , some basic recurrences they satisfy are given. Then we obtain all kinds of generating function of these numbers and study their basic properties. In the end many results related the generalized Stirling numbers are derived. Take the " triangle " recurrence, the " vertical " recurrence and the congruence property for example.

Keywords: generating function; Lucas number; congruence; Stirling number

符号说明

下面给出本文中常用符号代表的含义.

1. $[x]$: 对于任意实数 x, 符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.
2. $[x]^n f(x)$: 设 $f(x)$ 是 x 的幂级数，符号 $[x]^n f(x)$ 表示幂级数 $f(x)$ 中 x^n 的系数.
3. $a \equiv b \pmod m$: 设 a, b 是任意两个整数，如果对于正整数 m, 有 $a-b$ 被 m 整除，则称 a 与 b 对模 m 同余，记为 $a \equiv b \pmod m$.
4. $n!$: 对于任意非负整数 n, 令 $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$, 简称为 n 的阶乘. 这里约定 $0! = 1$.
5. $(x)_n$: 设 x 为任意复数， n 为任意非负整数，令 $(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$, 称为 x 的长为 n 的降阶乘. 如果 $n=0$, 则约定 $(x)_n = (x)_0 = 1$.
6. $\langle x \rangle_n$: x, n 同上规定， $\langle x \rangle_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$, 称为 x 的长为 n 的升阶乘. 这里同样约定 $\langle x \rangle_0 = 1$.
7. $\binom{n}{r}$: $\binom{n}{r} = \begin{cases} \dfrac{n!}{r!(n-r)!}, & n \geq r, \\ 0, & n < r. \end{cases}$ 这里 n, r 均为非负整数. $\binom{n}{r}$ 表示 n 元集合的 r 组合数，通常被称为二项式系数.
8. $\binom{\alpha}{k}$: $\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \dfrac{(\alpha)_k}{k!}, & k > 0 \\ 1, & k = 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$ 这里 α 为任意实数， k 为任意整数. $\binom{\alpha}{k}$ 通常被称为广义二项式系数.
9. $\binom{n}{k_1, \cdots, k_r}$: $\binom{n}{k_1, \cdots, k_r} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k_1! \cdots k_r!}, & n = \sum\limits_{i=1}^{r} k_i, \\ 0, & n \neq \sum\limits_{i=1}^{r} k_i. \end{cases}$ 这里 $n, k_1, \cdots, k_r$ 均为非负整数. $\binom{n}{k_1, \cdots, k_r}$ 称为多项式系数.
10. 牛顿二项式定理：设 α 是一个任意实数，则对于满足 $0 \leq |x| < |y|$ 的所有 x 和 y, 有

$$(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k y^{\alpha-k}$$

式中 $\binom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \dfrac{(\alpha)_k}{k!}$ 即为广义二项式系数.

独创性说明

作者郑重声明：本硕士学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写的研究成果，也不包含为获得大连理工大学或其他单位的学位或证书所使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

作者签名： 杨凤光 **日期：** 2006.6.9

大连理工大学学位论文版权使用授权书

本学位论文作者及指导教师完全了解“大连理工大学硕士、博士学位论文版权使用规定”，同意大连理工大学保留并向国家有关部门或机构送交学位论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权大连理工大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，也可采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编学位论文。

作者签名：修凤光

导师签名：冯红

2006 年 6 月 9 日

1 绪论

Fibonacci 数、Lucas 数和两类 Stirling 数经常出现在组合计数问题中，是比较典型的三种数列．而其典型性还不在于数列本身，是在于许多实际计数问题的计算关系都与这三种数列是相同或相似的． Fibonacci 数列和 Lucas 数列均满足一个线性递推关系．而两类 Stirling 数则分别满足依赖两个自变量的递推关系，并且 Stirling 数和二项式系数有某种相似性．

1.1 Fibonacci 数与 Lucas 数研究的历史背景

Fibonacci 数是组合数学中有名的组合数之一．它来源于 1202 年意大利数学家 Fibonacci 提出的一个有趣的兔子问题：把一对兔子（雌、雄各一只）在某年的开始放到围栏中，每个月这对兔子都生出一对新兔子，其中雌、雄各一只．从第二个月开始，每对新兔子每个月也生出一对新兔子，也是雌、雄各一只．问一年后围栏中有多少对兔子？更一般地，此问题可以变为 n 个月后共有多少对兔子？

对于 $n=1,2,\cdots$，令 F_n 表示第 n 个月开始时围栏中的兔子对数．则显然有 $F_1=1,F_2=2$，并且有 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n\geq 3)$．从而若我们规定 $F_0=1$，则可知 $\{F_n:n\geq 0\}$ 是满足如下递推关系的一个数列：

$$\begin{cases} F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, & (n\geq 2)\\ F_0=1,F_1=1. \end{cases}$$

我们就把满足上述递推关系及初始条件的数列 $\{F_n:n\geq 0\}$ 叫做 Fibonacci 数列，数列中每一项 F_n 都称为 Fibonacci 数．

此外，人们在很多表面上毫无联系的问题中都发现它们，使得这一数列成为很基本的一个数学概念．例如

(1) 上楼梯问题：某人欲登上 n 级楼梯，若每次只能跨一级或两级，则他从地面上到第 n 级楼梯的不同的方法数恰为 F_n．

(2) 棋盘的（完全）覆盖问题：棋盘覆盖是指用规格为 1×2 的骨牌覆盖 $p\times q$ 的方格棋盘，要求每块骨牌恰好盖住盘上的相邻两格．所谓完全覆盖，是指对棋盘的一种满覆盖（即盘上所有格子都被覆盖），而且骨牌不互相重叠．容易看出，一定存在 $2\times n$ 棋盘的完全覆盖．现在的问题是，究竟有多少种不同的完全覆盖方案？答案恰为 F_n．等等．

法国数学家鲁卡斯 (E. Lucas) 在研究数论时发现素数分布问题和 Fibonacci 数有关，同时他也发现了一个新的数列．即所谓的 Lucas 数列 $\{L_n : n \geq 0\} : L_0 = 2, L_1 = 1, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}(n \geq 2)$.

我们看到， Lucas 数列 $\{L_n : n \geq 0\}$ 与 Fibonacci 数列 $\{F_n : n \geq 0\}$ 具有某些相同的性质．例如自从第二项以后的项是由前面二项的和组成．此外，我们也可以从下面的两个计数问题中看到二者的一个基本联系与区别． F_n 等于集合 $[n-1] = \{1, 2, \cdots, n-1\}$ 中不含两个相继整数的子集的个数．而 L_n 等于集合 $[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$ 中不含两个相继的整数，也不同时包含 1 和 n 的子集的个数．而且，从二者的这个组合意义出发，我们不难发现他们之间满足如下的一个基本关系式：$L_n = F_n + F_{n-2}, n \geq 2$.

这两个数列有着许多美妙的数论性质和一些极有意义的应用．众所周知， Fibonacci 数和“优选法”关系密切；由 Fibonacci 数的性质可以证明：用欧几里得辗转相除法求两个正整数 m 和 $n(m > n)$ 的最大公因数时，其除法次数不超过 n 的位数的 5 倍，等等．正因为如此，这些序列引起了众多数学家和数学爱好者的浓厚兴趣．国际上，这方面的研究和探讨十分活跃．在美国已于 1963 年出版了专门刊物：《 Fibonacci Quarterly 》．从 1984 年起，又每隔两年召开一次 Fibonacci 数及其应用的国际会议，吸引了世界各地许多数学工作者前往参加．

1.2 Stirling 数研究的历史背景

在本文中，我们要研究的另一类组合数是：第一类 Stirling 数 $s(n,k)$ 和第二类 Stirling 数 $S(n,k)$.

Stirling 数的概念是由 J. Stirling 于 1730 年提出的，并在他的著作《 Methodus Differentialis 》中首次使用．这一名称的正式运用则要归功于 Thiele 和 Nielsen. 1770 年， L. Lagrenge 推导出了第一类 Stirling 数的递推关系和一些数论性质．而 P. S. Laplace(1821) 和 A. Cauchy 则在第二类 Stirling 数的逼近理论上取得了一些成果．对 Stirling 数做透彻研究的要数 Ch. Jordan, 他得出了 Stirling 数的若干重要性质．1974 年， L.Comtet 在他的著作 [10] 中拿出了整整一章来介绍这两类数，并且提供了大量参考文献．

下面我们首先给出两类 Stirling 数的定义．我们已约定对任意复数 x 及非负整数 n, $(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$ 称为 x 的长为 n 的降阶乘．当将 x 看作一个复变量时，它就是一个关于 x 的 n 次多项式．

记 $C_n[x]$ 为全体次数不超过 n 的复系数多项式所形成的线性空间，则多项式组 $\{1, x, \cdots, x^n\}$ 及 $\{(x)_0; (x)_1, \cdots, (x)_n\}$ 同为 $C_n[x]$ 的基底，于是两组多项式之间可互相线性表出：

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) x^k \tag{1.1}$$

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k \tag{1.2}$$

定义 1.2.1. *由 (1.1) 和 (1.2) 式所定义的表出系数 $s(n,k)$ 和 $S(n,k)(0 \le k \le n)$ 分别称为第一类和第二类 Stirling 数. 有时为了与以后出现的各种其它 Stirling 数相区别，上述两类 Stirling 数常分别被称为第一类和第二类普通 Stirling 数.*

当非负整数 $k > n$ 时，我们补充定义 $s(n,k) = S(n,k) = 0$.

此外，由定义易验证两类 Stirling 数具有如下一些特殊值：

$$s(n,0) = S(n,0) = 0, (n > 0),$$
$$s(n,n) = S(n,n) = 1, (n \ge 0).$$

人们发现，如此简单的形式所定义的 Stirling 数在组合学中有着广泛的应用. 它们具有许多好的性质. 例如：

定理 1.2.1. [10] *第二类 Stirling 数 $S(n,k)$ 满足"三角"递推关系：*

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k), \quad (n,k \ge 1) \tag{1.3}$$

$$S(n,0) = S(0,k) = 0, \quad (n,k \ge 1), \quad S(0,0) = 1. \tag{1.4}$$

定理 1.2.2. [10] *第一类 Stirling 数 $s(n,k)$ 满足"三角"递推关系：*

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k), \quad (n,k \ge 1) \tag{1.5}$$

$$s(n,0) = s(0,k) = 0, \quad (n,k \ge 1), \quad s(0,0) = 1. \tag{1.6}$$

定理 1.2.3. [10]*$S(n,k)$ 有如下的显式表达式*

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^n \tag{1.7}$$

定理 1.2.4. [10]*$s(n,k)$ 的值为*

$$\begin{aligned} s(n,k) &= \sum_{0\le h\le n-k}(-1)^h\binom{n-1+h}{n-k+h}\binom{2n-k}{n-k-h}S(n-k+h,h) \\ &= \sum_{0\le j\le h\le n-k}(-1)^{j+h}\binom{h}{j}\binom{n-1+h}{n-k+h}\binom{2n-k}{n-k-h}\frac{(h-j)^{n-k+h}}{h!} \end{aligned} \tag{1.8}$$

此外，$s(n,k)$ 和 $S(n,k)$ 还满足如下的"正交"关系.

定理 1.2.5. [10] *当 $m, n \ge 0$ 时，有*

$$\sum_{k\ge 0} s(n,k)S(k,m) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, \text{当 } n = m \text{ 时}, \\ 0, \text{当 } n \ne m \text{ 时}. \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\sum_{k\ge 0} S(n,k)s(k,m) = \delta_{n,m} \tag{1.10}$$

进而有下面的“ Stirling 反演公式”：设 $\{a_n : n \geq 0\}, \{b_n : n \geq 0\}$ 为任意两个复数序列，则

$$a_n = \sum_{k\geq 0} s(n,k) b_k \iff b_n = \sum_{k\geq 0} S(n,k) a_k \tag{1.11}$$

当然，这两类组合数也具有一定的组合意义，这为它们的应用开拓了更为广阔的天地.

第二类 Stirling 数 $S(n,k)$ 的组合意义如下：

(1) 分配问题：将 n 个有区别的球放入 k 个相同的盒子，要求各盒不空，则不同的方法总数为 $S(n,k)$.

(2) 集合的划分：将含有 n 个元素的集合恰好分成 k 个无序非空子集的所有不同的划分的数目即 $S(n,k)$. 这种划分通常称为集合的一个 k- 划分. 划分中的每个非空子集称为一个块.

而第一类 Stirling 数 $s(n,k)$ 满足：$(-1)^{n+k}s(n,k)$(常被称为第一类无符号 Stirling 数) 等于恰可表示成 k 个互不相交的轮换乘积的 n 元置换的个数.

从两类 Stirling 数所满足的基本关系式 (1.1),(1.2) 出发，人们在若干文献中推广了这两个基本关系式，给出了各种各样的广义 Stirling 数对. 例如 1980 年，L. Carlitz 在 [6] 和 [7] 中讨论了一类称之为“ weighted Stirling numbers ”的 Stirling 数对. 1982 年， M. Koutras 在 [34] 中又给出了一类被称作“ non-central Stirling numbers ”的 Stirling 数对. 1985 年，F. T. Howard 在 [25] 中研究了一对名为“ degenerate weighted Stirling numbers ”的 Stirling 数对. 1997 年，徐利治、 G. L. Mullen 及 P. J. Shiue 在 [27] 中将两类 Stirling 数与 Dickson 多项式相结合，又讨论了一类被称为“ Dickson-Stirling Numbers ”的 Stirling 数对，等等. 接着， 1998 年，徐利治和 P. J. Shiue 在 [29] 中对以往出现的各种 Stirling 数对从代数角度进行了统一，并给出了统一后的广义 Stirling 数对的各种基本性质.

他们给出的统一的广义 Stirling 数对是满足如下关系式的一对数 $\{S^1, S^2\} = \{S^1(n,k),\ S^2(n,k)\} \equiv \{S(n,k;\alpha,\beta,\gamma), S(n,k;\beta,\alpha,-\gamma)\}$:

$$(t|\alpha)_n = \sum_{k=0}^{n} S^1(n,k)(t-\gamma|\beta)_k, \tag{1.12}$$

$$(t|\beta)_n = \sum_{k=0}^{n} S^2(n,k)(t+\gamma|\alpha)_k. \tag{1.13}$$

其中 $n \in N_0$(非负整数集), 参数 α, β, γ 为任意给定的实数或复数, 且要求 $(\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0)$. 记号 $(t|\alpha)_n = t(t-\alpha)(t-2\alpha)\cdots(t-n\alpha+\alpha)$, 称为 t 关于增量 α 的广义阶乘. 特别地，约定 $(t|\alpha)_0 = 1, (t|1)_n = (t)_n$.

通常我们称满足上述关系式 (1.12) 及 (1.13) 的一对数 $\{S^1, S^2\}$ 为一个 $<\alpha,\beta,\gamma>$ 对或 $<\beta,\alpha,-\gamma>$ 对.

容易看出，普通 Stirling 数对 $\{s(n,k), S(n,k)\}$ 恰是一个 $<1,0,0>$ 对. 也就是

说，按照这里的记法，两类普通 Stirling 数可分别记作：

$$s(n,k)=S(n,k;1,0,0),\quad S(n,k)=S(n,k;0,1,0).$$

此外，人们在文献 [26] 、 [57] 中，又接着对统一后的广义 Stirling 数对进行了研究，借助它们给出了若干求和公式及组合恒等式.

另外，人们对两类 Stirling 数进行研究的另一个着眼点就是它们所具有的组合意义. 从这一角度出发又产生了若干具有一定组合意义的广义 Stirling 数对，如文献 [2] 、 [48] 等中所研究的. 所有这些同时也为 Stirling 数 q- 模拟 ($q-analog$) 的研究工作奠定了基础. 迄今为止，关于 Stirling 数 q- 模拟的研究成果也已有很多，可参阅文献 [14] 、 [18] 、 [40] 、 [43] 、 [53] 等.

2 发生函数

发生函数又称生成函数或母函数，它的英文原词是 generating function. 它诞生于 18 世纪，最早 de Moivre 在 1730 年用它来讨论 Fibonacci 数. 十年后 Euler 用以研究正整数的分拆，但直到 1812 年，在 Laplace 的经典名著 " Theorie Analytique des Probabilites "（概率的解析理论）中，发生函数方法才得到充分的发展.

发生函数方法的提出巧妙地将离散数学与连续数学结合了起来，为离散数学中的若干问题提供了很好的解决方法. 这极大地推动了离散数学尤其是当中的组合数学的发展. 现在，这一方法几乎能处理组合数学中方方面面的各种问题，成为了人们研究组合问题不可缺少的工具之一.

2.1 发生函数

我们知道，有不少组合计数问题都是对任一给定的非负整数 n, 求一个与 n 有关的数 a_n, 因此本质上是求一个未知数列 $\{a_n : n \geq 0\}$. 发生函数方法的基本思想是: 欲求未知数列 $\{a_n : n \geq 0\}$, 可先求出由此数列做成的幂级数的和函数 $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 再反过来把 $g(x)$ 展成幂级数以求出 a_n. 在许多组合计数问题中情况往往是：函数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 比数列 $\{a_n : n \geq 0\}$ 本身与所给条件有更直接的联系，因而相对地更容易得到前者 ($\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$) 所应满足得（函数）关系式，从而将其求出.

定义 2.1.1. *对于一个数列 $\{a_n : n \geq 0\} = a_0, a_1, a_2, \cdots$, 我们称幂级数*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{2.1}$$

为这个数列的发生函数. 为了与后面的指数型发生函数相区别，数列的这种形式的发生函数通常被称为普通型发生函数.

这样数列就转化成函数. 假如能够求得这个函数，则不仅原则上已确定了原数列，还可以通过对函数的运算和分析得到这个数列的很多性质.

G. Polya 生动而又深刻地写道："发生函数就象个口袋，可以装许多零碎东西. 我们把携带不方便的零碎东西全都放在口袋里，就只需携带单独一个对象了. 完全类似的，分别处理数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 中的各项不方便，但把它们都放在幂级数（发生函数）$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 里，就只需处理单独一个数学对象了."

生函数）$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 里，就只需处理单独一个数学对象了."

例 2.1.1. *求方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ 的合于 $1\le x_1\le 6, 0\le x_2\le 7, 4\le x_3\le 8, 2\le x_4\le 6$ 的整数解的个数.*

解 记方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=k$ 的合于上述条件的整数解的个数为 a_k, 则 $\{a_k : k\ge 0\}$ 的发生函数

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+x^2+\cdots+x^6)(1+x+\cdots+x^7)(x^4+\cdots+x^8)(x^2+\cdots+x^6) \\ &= x^7(1+x+\cdots+x^5)(1+x+\cdots+x^7)(1+x+\cdots+x^4)(1+x+\cdots+x^4) \\ &= x^7(1-x^6)(1-x^8)(1-x^5)^2(1-x)^{-4}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} a_{20} &= [x^{20}]g(x) \\ &= [x^{13}](1-x^6)(1-x^8)(1-2x^5+x^{10})(1-x)^{-4} \\ &= [x^{13}](1-2x^5-x^6-x^8+x^{10}+2x^{11}+2x^{13})(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k)(\text{其中} b_k=(-1)^k\binom{-4}{k}=\frac{\langle 4\rangle_k}{k!}) \\ &= b_{13}-2b_8-b_7-b_5+b_3+2b_2+2b_0 \\ &= 560-330-120-56+20+20+2 \\ &= 96. \end{aligned}$$

当然在解这个具体问题时可以不必引入 $\{a_k\}$ 及其发生函数，而直接把问题的解化为求 $g(x)$ 中 x^{20} 的系数，但这种化归正是发生函数的思想所在.

2.2 形式幂级数

前面我们把数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 所确定的幂级数 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ 称为该数列的发生函数. 而要把幂级数 $g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ 确实当作“变量 x 的函数”，一种最自然的理解是把 x 当作复数变量，则 $g(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_kx^k$ 在其收敛圆 $|x|<r$ 上就的确是 x 的（解析）函数，从而可对它进行通常的运算. 按照这种理解，就必须时时核查由数列所确定的幂级数有没有正的收敛半径 r. 这既是一种麻烦，又是一种限制，因为这将使很多数列在这种意义下没有发生函数. 对于在定义并使用发生函数时所面临的这个收敛性问题，当代数学家 D. E. Knuth 在其名著《The art of computer programming, vol I》中做了这样的论述：“… 当运用发生函数时，通常无需担心级数的收敛性，因为我们只是在探求得到某个问题的解的可能途径，一旦当我们用任何手段发现了解，尽管这些手段也许不严格，就有可能独立地验证这个解. …, 例如有时很容易用数学归纳法来证明，我们甚至不必提到它是利用发生函数发现的. 此外，可以证明我们对发生函数所做的绝大多数——如果不是所有的话——运算都能严格论证其可行而无须顾及级数的收敛性；例如可见 I. Niven, Formal Power Series, Amer. Math. Monthly, 76(1969), 871-889.” 这段引文最后的断言是通过把发生函数作为形式幂级数而得以实现的，现作简单介绍.

定义 2.2.1. 用 C 记复数域，x 是 C 上的不定元. 则对 C 上任一数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\} \equiv \{a_n : n \geq 0\}$, 称表示式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{2.2}$$

为 C 上的形式幂级数.

由定义知，形式幂级数只是一个具有幂级数形式的表达式，它没有任何别的意义（特别，它不被看作是 x 的一个函数）. 因此对形式幂级数，我们不考虑它的收敛性问题，对其各项系数也没有任何附加限制.

复数域 C 上以 x 为不定元的全体形式幂级数的集合记作 $C[[x]]$. 下面，我们在 $C[[x]]$ 中适当定义两种代数运算：加法和乘法，使它成为一个整环，任何一个形式幂级数都是这个环中的元素.

定义 2.2.2. 对于集合 $C[[x]]$ 中任何二元素 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, 若有 $a_n = b_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$, 则称形式幂级数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相等，记为 $f(x) = g(x)$.

定义 2.2.3. 对于 $C[[x]]$ 中任何二元素 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $f(x)$ 和 $g(x)$ 相加定义为

$$f(x) + g(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n \tag{2.3}$$

称 $f(x) + g(x)$ 为形式幂级数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 之和，把运算“ + ”叫做加法.

$f(x)$ 与 $g(x)$ 相乘定义为

$$f(x) \cdot g(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) x^n \tag{2.4}$$

称 $f(x) \cdot g(x)$ 为形式幂级数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 之积，把运算“ · ”叫做乘法.

注 我们可看到，在收敛情形时，这里定义的加法和乘法运算与普通幂级数的相应运算是一致的.

定理 2.2.1. 集合 $C[[x]]$ 在上述加法和乘法运算下构成一个整环.

证明 首先容易验证 $C[[x]]$ 关于加法是封闭的，并且加法满足结合律和交换律. 此外，$C[[x]]$ 关于加法有零元，其零元是数列 $(0, 0, \cdots 0, \cdots)$ 的形式幂级数，记作 0. 同时，对于任意形式幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 它在加法运算下的逆元是数列 $(-a_0, -a_1, \cdots - a_n, \cdots)$ 的形式幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-a_n) x^n$. 从而可知，$(C[[x]], +)$ 是交换群.

其次，证明 $(C[[x]], \cdot)$ 是一个可交换的含幺半群. 首先：容易验证，$C[[x]]$ 在上述乘法运算下是封闭的，并且乘法满足结合律和交换律. 其次，若取 $a_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \geq 1. \end{cases}$, 则形式幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 是一乘法单位元，记作 1. 因此，$(C[[x]], \cdot)$ 是一个可交换的含幺半群.

最后，不难验证乘法对加法满足分配律，而且无零因子. 事实上，设

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \neq 0 \in C[[x]],$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \neq 0 \in C[[x]],$$

则

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})x^n$$

必不为零.

因此，$C[[x]]$ 在上述加法和乘法运算下构成一个可交换、含单位元、无零因子的环，即整环. 证毕.

定理 2.2.2. *$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $C[[x]]$ 中可逆的充要条件是 $a_0 \neq 0$.*

证明 $f(x)$ 可逆 $\iff$ 存在 $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$，使 $f(x)\cdot g(x)=1$ $\iff$ 存在 $\{b_n : n \geq 0\}$，使以下关系式成立：

$$a_0 b_n + \cdots + a_n b_0 = \begin{cases} 1, 若\ n=0, \\ 0, 若\ n>0. \end{cases}$$

$\iff$ 对任意 n，下面的线性方程组对 $b_0, b_1, \cdots, b_n$ 有解：

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff a_0 \neq 0$. 证毕.

既然所有形式幂级数的集合在上述规定的加法和乘法运算下构成一个整环，而且对于具有非零常数项的那些形式幂级数还可求它的乘法逆元，因此如同收敛级数的情况那样，四则运算可以畅行无阻. 又因为如上规定的形式幂级数的两种运算方式和数学分析中对收敛级数规定的相应运算是一模一样的，因此当形式幂级数为收敛级数的特殊情况下，不管从哪个角度来处理，计算的最后结果总是一致的，此时还可用它的和函数去代替它参与运算. 特别是当和函数为初等函数时更为方便.

因此，我们把发生函数当作形式幂级数来处理是方便的，只要运算没有越出上面所述及的范围，可以一律不用顾及收敛性问题.

对于整环 $C[[x]]$ 中的形式幂级数还可以引进形式微商.

定义 2.2.4. 对任意 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\in C[[x]]$, $f(x)$ 的形式导数 $f'(x)$(或记为 $\frac{df}{dx}$) 定义为

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \tag{2.5}$$

这种运算同样具有通常导数的性质:

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x) \tag{2.6}$$

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \tag{2.7}$$

也可以定义积分运算:

$$\int_0^x f(y)\ \mathrm{d}y=a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\frac{1}{3}a_2x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}.$$

而且有 $\frac{d}{dx}\int_0^x f(y)\ \mathrm{d}y=f(x)$.

对于 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\in C[[x]]$, 通常形式地记 $f(0)=a_0$, $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, 其中 $f^{(n)}(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次导数. 这和确定解析函数 $f(x)$ 的 Taylor 展式中 x^n 的系数的公式完全一样.

下面是几个常用数列 $\{a_n:n\geq 0\}$ 的发生函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 不难象作 Taylor 展开那样一一验证.

	$\{a_k\},k=0,1,2,\cdots$	发生函数
1	$a_k=1$	$\frac{1}{1-x}$
2	$a_k=k$	$\frac{x}{(1-x)^2}$
3	$a_k=\alpha^k$	$\frac{1}{1-\alpha x}$
4	$a_0=0,a_k=\frac{1}{k}$	$\ln\frac{1}{1-x}$
5	$a_k=\binom{\alpha}{k}$, α任意	$(1+x)^\alpha$
6	$a_k=\frac{\alpha^k}{k!}$, α任意	$e^{\alpha x}$
7	$a_k=\frac{(-1)^k}{(2k)!}$	$\cos\sqrt{x}$
8	$a_k=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$

此外, 在处理与排列有关的计数问题时, 经常要考虑数列 $\{a_n\}$ 进行“加权” $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$ 后的新数列 $\left\{\frac{a_n}{n!}\right\}$ 的发生函数. 为此, 我们引进如下定义:

定义 2.2.5. 对于复数域上的任一数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\} \equiv \{a_n : n \geq 0\}$, 形式幂级数

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!}x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \end{aligned} \tag{2.8}$$

称为该数列的指数型发生函数.

例如，若 $a_n \equiv 1(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 则 $\{a_n : n \geq 0\}$ 的指数型发生函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

这也正是“指数型”这一名称的由来.

从上述定义知，指数型发生函数与普通型发生函数的一般项仅相差一个因子 $\frac{1}{n!}$. 如以 $\{\widehat{a_n}\} = \{\frac{a_n}{n!}\}$ 作为数列，则 $\{\widehat{a_n}\}$ 的普通型发生函数就是 $\{a_n\}$ 的指数型发生函数. 这样，数列 $\{a_n\}$ 的指数型发生函数的各种运算（如加、减、乘、除、微商、积分等）就完全可以按照数列 $\{\widehat{a_n}\}$ 的普通型发生函数的相应运算而得出，而不必另作规定.

我们上面提到的两种发生函数是关于简单序列的最常见且应用最广泛的两种类型. 当然还有若干其它类型，有兴趣的读者可参阅文献 [42]、[49].

此外，关于形式幂级数的较深入的讨论，可参看文献 [36]、[45]、[58] 等.

注 关于多重序列的发生函数

发生函数的概念可以拓广到多重序列. 在此我们只简单介绍一下双重序列的情况.

设 $\{a_{n,k} : n, k \geq 0\}$ 为一双重序列，则常用到的 $\{a_{n,k} : n, k \geq 0\}$ 的三种发生函数是如下三个形式幂级数

$$\Phi(t, u) = \sum_{n,k \geq 0} a_{n,k} t^n u^k, \tag{2.9}$$

$$\Psi(t, u) = \sum_{n,k \geq 0} a_{n,k} \frac{t^n}{n!} \frac{u^k}{k!}, \tag{2.10}$$

$$\Theta(t, u) = \sum_{n,k \geq 0} a_{n,k} \frac{t^n}{n!} u^k. \tag{2.11}$$

作为例子，我们看一下二项式系数的双重序列 $a_{n,k} = \binom{n}{k}$ 的各种发生函数，此

时

$$
\begin{aligned}
\Phi(t,u) &= \sum_{n,k\geq 0}\binom{n}{k}t^n u^k = \sum_{n\geq 0}t^n\left(\sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}u^k\right)\\
&= \sum_{n\geq 0}t^n(1+u)^n\\
&= \frac{1}{1-t(1+u)} \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Theta(t,u) &= \sum_{n,k\geq 0}\binom{n}{k}\frac{t^n}{n!}u^k = \sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{n!}(1+u)^n\\
&= exp\{t(1+u)\} \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

2.3 发生函数的应用

我们在前面已提到过，发生函数最早主要被应用于正整数分拆及概率论等有关问题的研究中. 关于这两方面的较详细地论述，可以参阅文献 [1]、[33]、[36] 等. 后来随着人们对这一方法的不断深入研究，如今发生函数方法已经成了离散数学领域中的重要方法，它能以某种统一的程序方式处理和解决众多不同类型的问题. 关于这一方法的著作很多，较详细且基本的论述可参看 [32] 以及专门论述发生函数的引人入盛的著作 [49]. 此外，关于这一方法的研究，还出现在一些有关差分运算的文章中，如 [31]、[41] 等. 在组合数学中，它的最显著的应用莫过于求解各种各样的递推关系、证明组合恒等式及组合计数方面. 有关发生函数方法在求解递推关系中的应用，在文献 [45] 中有详细的介绍，我们在这里不再赘述. 在此仅举例说明一下这种方法在组合计数方面的应用.

问题 2.3.1. *设 $S_1,\cdots,S_k$ 是非负整数集合 N_0 的 k 个子集. 求在 k 元集 $Y=\{y_1,\cdots,y_k\}$ 中允许重复的取 n 个, 使 y_i 的重复度属于 $S_i(i=1,\cdots,k)$ 的重复组合个数 $C_{S_1,\cdots,S_k}(n)$.*

若在如上所述的一个重复组合中，元素 y_i 的重复度为 x_i, 则有 $x_i\in S_i(i=1,\cdots,k)$, 且 $x_1+\cdots+x_k=n$, 于是我们有

$$
C_{S_1,\cdots,S_k}(n)=\sum_{\substack{x_1+\cdots+x_k=n\\ x_i\in S_i(i=1,2,\cdots,k)}}1 \qquad (2.14)
$$

即 $C_{S_1,\cdots,S_k}(n)$ 等于下述带限制条件的不定方程 $x_1+\cdots+x_k=n(x_i\in S_i,i=1,\cdots,k)$ 的非负整数解个数.

但我们的目的是想给出 $C_{S_1,\cdots,S_k}(n)$ 的（关于 n 的）发生函数表达式. 从而利用所得发生函数可对一些具体给定的 $S_1,\cdots,S_k$, 求出 $C_{S_1,\cdots,S_k}(n)$ 的明确表达式.

为此，我们先给出如下的一个定理.

定理 2.3.1. 设 $\{f_i(n)\}\,(i=1,\cdots,k)$ 是 k 个序列， $S_1,\cdots,S_k\subseteq N_0$ 是非负整数集的 k 个子集．则限制和式

$$a_n=\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=n\\ n_i\in S_i(i=1,2,\cdots,k)}} f_1(n_1)\cdots f_k(n_k) \tag{2.15}$$

的发生函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\Big(\sum_{n\in S_1}f_1(n)x^n\Big)\cdots\Big(\sum_{n\in S_k}f_k(n)x^n\Big). \tag{2.16}$$

证明 作辅助序列

$$\hat{f}_i(n)=\begin{cases} f_i(n), & 若\ n\in S_i,\\ 0, & 若\ n\notin S_i\end{cases}\quad (i=1,\cdots,k)$$

则

$$\begin{aligned}
&\sum_{n_1+\cdots+n_k=n}\hat{f}_1(n_1)\cdots\hat{f}_k(n_k)\\
=&\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=n\\(n_1,\cdots,n_k)\in S_1\times\cdots\times S_k}}\hat{f}_1(n_1)\cdots\hat{f}_k(n_k)+\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=n\\(n_1,\cdots,n_k)\notin S_1\times\cdots\times S_k}}\hat{f}_1(n_1)\cdots\hat{f}_k(n_k)\\
=&\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=n\\(n_1,\cdots,n_k)\in S_1\times\cdots\times S_k}}f_1(n_1)\cdots f_k(n_k)+0\\
=&\ a_n
\end{aligned}$$

于是由多个形式幂级数的乘积公式可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}_1(n)x^n\Big)\cdots\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}_k(n)x^n\Big)\\
&=\Big(\sum_{n\in S_1}f_1(n)x^n\Big)\cdots\Big(\sum_{n\in S_k}f_k(n)x^n\Big).
\end{aligned}$$

由此定理，我们马上可以得到问题 2.3.1 的以发生函数形式给出的解答．

定理 2.3.2. 若 $a_n=C_{S_1,\cdots,S_k}(n)$ 为问题 2.3.1 中的带一般限制条件的重复组合个数，其中 $k,S_1,\cdots,S_k$ 均看成是固定的．则序列 $\{a_n\}$ 的发生函数可表为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\Big(\sum_{n\in S_1}x^n\Big)\cdots\Big(\sum_{n\in S_k}x^n\Big) \tag{2.17}$$

证明 在定理 2.3.1 中取诸 $f_i(n)\equiv 1(i=1,\cdots,k)$，则 (2.15) 式右端成为 $C_{S_1,\cdots,S_k}(n)$ 的表达式 (2.14) 之右端．由此可得发生函数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\Big(\sum_{n\in S_1}x^n\Big)\cdots\Big(\sum_{n\in S_k}x^n\Big),$$

恰为 (2.17) 式．从而此定理得证．

例 2.3.1. 设有 A 和 B 两种字，每一种均有无限个. 从中选取 n 个，其中含偶数个 A, 利用发生函数求出选取的方法数 h_n.

解 此时相当于 $S_1=\{0,2,4,\cdots,2n,\cdots\}, S_2=N_0$. 故运用定理 2.3.2, 可知相应的发生函数为

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}h_nx^n &= (1+x^2+x^4+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)\\ &= \frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x}=\frac{1}{(1-x^2)(1-x)}\\ &= \frac{1}{4}[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}+\frac{2}{(1-x)^2}]\\ &= \frac{1}{4}[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n]\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}[(-1)^n+1+2(n+1)]x^n\end{aligned}$$

从而

$$h_n=\frac{1}{4}[(-1)^n+1+2(n+1)]=\frac{2n+3+(-1)^n}{4}.$$

运用类似的方法，借助指数发生函数，我们又可给出下述问题的解答.

问题 2.3.2. 设 $S_1,\cdots,S_k$ 是非负整数集合 N_0 的 k 个子集. 求在 k 元集 $Y=\{y_1,\cdots,y_k\}$ 中允许重复地取 n 个，使 y_i 的重复度属于 $S_i(i=1,\cdots,k)$ 的重复排列数 $P_{S_1,\cdots,S_k}(n)$.

定理 2.3.3. 设 $c_n=P_{S_1,\cdots,S_k}(n)$ 为问题 2.3.2 中的带一般限制条件的重复排列个数，其中 $k,S_1,\cdots,S_k$ 均视为是固定的. 则 c_n 的指数型发生函数可表为

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{x^n}{n!}=(\sum_{n\in S_1}\frac{1}{n!}x^n)\cdots(\sum_{n\in S_k}\frac{1}{n!}x^n) \tag{2.18}$$

例 2.3.2. 由 1,2,3,4 所组成的 n 位数中，含偶数个 1 的共有多少？

解 设含偶数个 1 的共有 a_n 个，则由定理 2.3.3 知，对应的指数型发生函数为

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!} &= (1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^3\\ &= \frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot e^{3x}=\frac{e^{4x}+e^{2x}}{2}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(4^n+2^n)\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

于是有

$$a_n=\frac{4^n+2^n}{2}=2^{n-1}(2^n+1).$$

上述两个例子也提醒我们，应该深刻体会发生函数的组合学背景，从而才能正确地应用发生函数方法. 例如，要解决组合问题，就应该选用普通型发生函数，要解决排列问题，一般就应该选用指数型发生函数.

3 有关广义 Lucas 数的一些新结果

本章借助发生函数的方法，对广义 Lucas 序列 $\{V_n : n \geq 0\}$ 做了进一步的研究. 所谓广义 Lucas 序列 $\{V_n : n \geq 0\}$ 是指满足递推关系 $V_n = pV_{n-1} - qV_{n-2}(n \geq 2)$ 及初始条件 $V_0 = 2, V_1 = p$, 其中参数 p, q 均为整数的一个序列. 我们给出了一些包含这个序列的平方及三次方的恒等式，同时借助它们得到了一些关于 Lucas 序列 $\{L_n : n \geq 0\}$ 的恒等式及同余关系.

3.1 引论

Horadam[23] 定义了一个满足如下递推关系及初始条件的二阶线性递归序列 $W_n = W_n(a, b; p, q), n = 0, 1, \cdots$

$$W_n = pW_{n-1} - qW_{n-2} \quad (n \geq 2) \tag{3.1}$$

$$W_0 = a, \quad W_1 = b.$$

其中的参数 a, b, p, q 均为整数. 并且指出，如果序列 $\{W_n : n \geq 0\}$ 的特征多项式 $\lambda^2 - p\lambda + q$ 有两个不同的根，不妨设为 α 与 β, 则关于序列 $\{W_n : n \geq 0\}$, 我们有下述 Binet 公式：

$$W_n = \frac{A\alpha^n - B\beta^n}{\alpha - \beta}, \tag{3.2}$$

其中 $A = b - a\beta, B = b - a\alpha, \alpha = \dfrac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \beta = \dfrac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

此时，结合第一章中提到的 Fibonacci 数 F_n 与 Lucas 数 L_n 的定义，可以知道，F_n 与 L_n 可分别表示为 $F_n = W_n(0, 1; 1, -1), L_n = W_n(2, 1; 1, -1)$. 通常我们还有如下记号： $U_n = W_n(0, 1; p, q) = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, $V_n = W_n(2, p; p, q) = \alpha^n + \beta^n$. 并分别称序列 $\{U_n : n \geq 0\}$ 及 $\{V_n : n \geq 0\}$ 为广义 Fibonacci 序列、广义 Lucas 序列.

关于这两个序列已经有过许多方面的研究. 在有关二者多重卷积和的计算方面，文献 [15]、[55]、[56] 等中讨论了关于广义 Fibonacci 序列 $\{U_n : n \geq 0\}$ 的多重卷积和 $\sum\limits_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n} U_{a_1}U_{a_2}\cdots U_{a_k}$ 的计算.

此后文 [57] 中又给出了包含序列 $\{U_n : n \geq 0\}$ 的平方及三次方的多重卷积和的封闭表示. 例如,

$$\sum_{a+b=n} U_a^2 U_b^2 = \frac{[-2nqU_{n-1} + p(n-1)U_n]V_n}{p^2 - 4q} - \frac{2q}{p^2 - 4q}\left(\frac{U_{2n+2}}{U_2} - nq^{n-1}\right),$$

$$\sum_{a+b=n} U_a^3 U_b^3 = \frac{-2nq^3U_{3(n-1)}+(n-1)V_3U_{3n}}{(p^2-4q)^3U_3} - \frac{9q^n(2nqU_{n-1}-pU_n)}{(p^2-4q)^3} - \frac{6q[U_{3n}-(V_2+q)q^{n-1}U_n]}{p(p^2-4q)^3}.$$

而关于广义 Lucas 序列 $\{V_n : n \geq 0\}$ 的这方面的研究，到目前为止，仅出现了与形式

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n} V_{a_1}V_{a_2}\cdots V_{a_k}$$

有关的结果.

我们下面将研究包含序列 $\{V_n : n \geq 0\}$ 的平方及三次方的多重卷积和的计算，即主要讨论下面形式的两个和式的计算：

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n} V_{a_1}^2V_{a_2}^2\cdots V_{a_k}^2 \quad , \quad \sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n} V_{a_1}^3V_{a_2}^3\cdots V_{a_k}^3.$$

这些是十分有趣且有广泛应用的. 它不仅向我们展示了有关这两个序列的卷积性质，而且还能进一步给出它们的一些同余性质.

3.2 包含广义 Lucas 数的平方及三次方的恒等式

设序列 $\{V_n^2 : n \geq 0\}$ 及 $\{V_n^3 :\geq 0\}$ 的发生函数分别为：

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^2 x^n, H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^3 x^n$$

通过简单的计算，我们有

$$G(x) = \frac{1}{1-\alpha^2x} + \frac{2}{1-\alpha\beta x} + \frac{1}{1-\beta^2x}, \quad |x| < \min\left(\frac{1}{|\alpha^2|}, \frac{1}{|q|}, \frac{1}{|\beta^2|}\right).$$

$$H(x) = \frac{1}{1-\alpha^3x} + \frac{3}{1-\alpha^2\beta x} + \frac{3}{1-\alpha\beta^2x} + \frac{1}{1-\beta^3x}, \quad |x| < \min\left(\frac{1}{|\alpha^3|}, \frac{1}{|\alpha q|}, \frac{1}{|\beta q|}, \frac{1}{|\beta^3|}\right).$$

定义

$$G_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{2n}x^n, \quad G_2(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n. \tag{3.3}$$

$$H_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{3n}x^n, \quad H_2(x) = 3\sum_{n=0}^{\infty} q^n V_n x^n. \tag{3.4}$$

于是有

$$G(x) = G_1(x) + G_2(x), \quad H(x) = H_1(x) + H_2(x). \tag{3.5}$$

对于

$$G_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}V_{2n}x^n=\frac{2-V_2x}{1-V_2x+q^2x^2},$$

令

$$G_1^k(x)=\left(\frac{2-V_2x}{1-V_2x+q^2x^2}\right)^k=\sum_{n=0}^{\infty}V_{2n}^{(k)}x^n.$$

则明显的有 $V_{2n}^{(1)}=V_{2n}$. 同时有下述结论.

引理 3.2.1. 对于上述定义的序列 $\{V_{2n}^{(k)}:n\ge 0\}$, 我们有:

$$k(V_2^2-4q^2)V_{2n}^{(k+1)}=4(n+2)V_{2(n+2)}^{(k)}-2(2n+k+2)V_2V_{2(n+1)}^{(k)}+(n+k)V_2^2V_{2n}^{(k)}. \quad (3.6)$$

证明: 由于

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(G_1^k(x)) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{2-V_2x}{1-V_2x+q^2x^2}\right)^k\\
&= k\left(\frac{2-V_2x}{1-V_2x+q^2x^2}\right)^{k-1}\frac{V_2-4q^2x+V_2q^2x^2}{(1-V_2x+q^2x^2)^2}\\
&= k\left(\frac{2-V_2x}{1-V_2x+q^2x^2}\right)^{k-1}\frac{V_2(1-V_2x+q^2x^2)+(V_2^2-4q^2)x}{(1-V_2x+q^2x^2)^2}\\
&= k\frac{V_2}{2-V_2x}\left(\frac{2-V_2x}{1-V_2x+q^2x^2}\right)^k+k\frac{V_2^2-4q^2}{(2-V_2x)^2}x\left(\frac{2-V_2x}{1-V_2x+q^2x^2}\right)^{k+1},\end{aligned}$$

所以有

$$(2-V_2)^2\frac{d}{dx}(G_1^k(x))=k(V_2^2-4q^2)xG_1^{k+1}(x)+kV_2(2-V_2x)G_1^k(x),$$

进而

$$k(V_2-4q^2)xG_1^{k+1}(x)=(2-V_2x)^2\frac{d}{dx}(G_1^k(x))-kV_2(2-V_2x)G_1^k(x).$$

再比较上述等式两端 x^k 的系数, 则便可得式 (3.6).

在式 (3.6) 中分别取 k=1 、 2, 并利用递推关系 $V_{2n}=V_2V_{2(n-1)}-q^2V_{2(n-2)}$, 则我们又可得下述引理.

引理 3.2.2.

$$\begin{aligned}V_{2n}^{(2)}&=\frac{1}{V_2-4q^2}\left\{2V_2V_{2(n+1)}+[(n+1)(V_2^2-4q^2)-4q^2]V_{2n}\right\},\\
V_{2n}^{(3)}&=\frac{n+2}{2(V_2-4q^2)}\left\{6V_2V_{2(n+1)}+[(n+1)(V_2^2-4q^2)-12q^2]V_{2n}\right\}.\end{aligned}$$

对于

$$H_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}V_{3n}x^n=\frac{2-V_3x}{1-V_3x+q^3x^2},$$

$$H_2(x)=3\sum_{n=0}^{\infty}q^nV_nx^n=3\frac{2-pqx}{1-pqx+q^3x^2}.$$

首先我们令 $h_n = q^n V_n$, 于是有

$$H_2(x) = 3\frac{2-pqx}{1-pqx+q^3x^2} = 3\sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n.$$

其次，分别令

$$H_1^k(x) = \left(\frac{2-V_3x}{1-V_3x+q^3x^2}\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} V_{3n}^{(k)} x^n,$$

$$H_2^k(x) = \left(3\frac{2-pqx}{1-pqx+q^3x^2}\right)^k = 3^k\sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(k)} x^n.$$

则显然有 $V_{3n}^{(1)} = V_{3n}, h_n^{(1)} = h_n = q^n V_n$.

此时，利用引理 3.2.1 的推导方法，对于序列 $\{V_{3n}^{(k)} : n \geq 0\}, \{h_n^{(k)} : n \geq 0\}$ 我们可以得到下述类似引理 3.2.1 的结论.

引理 3.2.3.

$$k(V_3^2-4q^3)V_{3n}^{(k+1)} = 4(n+2)V_{3(n+2)}^{(k)} - 2(2n+k+2)V_3V_{3(n+1)}^{(k)} + (n+k)V_3^2V_{3n}^{(k)}, \tag{3.7}$$
$$k(p^2q^2-4q^3)h_n^{(k+1)} = 4(n+2)h_{n+2}^{(k)} - 2(2n+k+2)pqh_{n+1}^{(k)} + (n+k)p^2q^2h_n^{(k)}. \tag{3.8}$$

同样，注意到序列 $\{V_{3n} : n \geq 0\}$ 、 $\{h_n :\geq 0\}$ 分别满足关系式

$$V_{3n} = V_3V_{3(n-1)} - q^3V_{3(n-2)},$$

$$h_n = pqh_{n-1} - q^3h_{n-2},$$

则在式 (3.7) 和 (3.8) 中取 $k=1$ 、 2, 又有下述引理.

引理 3.2.4.

$$V_{3n}^{(2)} = \frac{1}{V_3^2-4q^3}\left\{2V_3V_{3(n+1)} + [(n+1)(V_3^2-4q^3) - 4q^3]V_{3n}\right\},$$
$$V_{3n}^{(3)} = \frac{n+2}{2(V_3^2-4q^3)}\left\{6V_3V_{3(n+1)} + [(n+1)(V_3^2-4q^3) - 12q^3]V_{3n}\right\},$$
$$h_n^{(2)} = \frac{1}{p^2-4q}\left\{2pq^nV_{(n+1)} + [(n+1)(p^2-4q) - 4q]q^nV_n\right\},$$
$$h_n^{(3)} = \frac{n+2}{2(p^2-4q)}\left\{6pq^nV_{(n+1)} + [(n+1)(p^2-4q) - 12q]q^nV_n\right\}.$$

利用以上引理，我们就可以得到本章的主要结果.

定理 3.2.1. 设 $\{V_n :\geq 0\}$ 为广义 *Lucas* 序列，则有

$$\begin{aligned}\sum_{a+b=n} V_a^2V_b^2 &= \frac{1}{V_2^2-4q^2}\left\{2V_2V_{2(n+1)} + [(n+1)(V_2^2-4q^2) - 4q^2]V_{2n}\right\}\\ &\quad +4U_{2n+1} + 4(n+2)q^n,\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\sum_{a+b+c=n} V_a^2V_b^2V_c^2 = \frac{n+2}{2(V_2^2-4q^2)}\{6V_2V_{2(n+1)}+[(n+1)(V_2^2-4q^2)-12q^2]V_{2n}\}$$
$$+\frac{6}{p(p^2-4q)}[2V_{2n+3}+p(n+3)V_{2(n+1)}-(n+2)pqV_{2n}$$
$$+(2n+3)pq^nV_2-2(2n+5)pq^{n+1}]+4(n+2)(n+1)q^n.$$

证明 对于 $G(x)=G_1(x)+G_2(x)$, 我们有

$$G^2(x)=G_1^2(x)+G_2^2(x)+2G_1(x)G_2(x), \tag{3.10}$$
$$G^3(x)=G_1^3(x)+G_2^3(x)+3G_1(x)G_2(x)G(x). \tag{3.11}$$

另一方面对于

$$G_2(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}q^nx^n=\frac{2}{1-qx},$$

有

$$G_2^2(x)=\frac{4}{(1-qx)^2}=4\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^nx^n,$$

以及

$$G_2^3(x)=\frac{8}{(1-qx)^3}=4\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)q^nx^n.$$

同时经过仔细运算，我们又可得

$$G_1(x)G_2(x) = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha^2x}-\frac{\beta}{1-\beta^2x}+\frac{\alpha-\beta}{1-\alpha\beta x}\right),$$

$$G_1(x)G_2(x)G(x) = \frac{2}{(\alpha-\beta)^2}\Big[\frac{\alpha^3\beta x+\alpha(\alpha-2\beta)}{(1-\alpha^2x)^2}+\frac{\beta^3\alpha x+\beta(\beta-2\alpha)}{(1-\beta^2x)^2}$$
$$+\frac{4\alpha^2\beta^2x+2(\alpha-\beta)^2-4\alpha\beta}{(1-\alpha\beta x)^2}\Big]$$
$$+\frac{4}{(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)}\Big[\frac{\alpha^2(2\alpha+\beta)}{1-\alpha^2x}+\frac{\beta^2(2\beta+\alpha)}{1-\beta^2x}\Big]+\frac{2}{1-\alpha\beta x}.$$

则结合引理 3.2.2, 通过比较等式 (3.10) 和 (3.11) 两端 x^n 的系数，我们就不难得到此定理.

推论 3.2.1. *设序列 $\{V_n:\geq 0\}$ 为广义 Lucas 序列， k 为一正整数，则有*

$$\sum_{a+b=n} V_{ak}^2V_{bk}^2 = \frac{1}{V_{2k}^2-4q^{2k}}\left\{2V_{2k}V_{2(n+1)k}+[(n+1)(V_{2k}^2-4q^{2k})-4q^{2k}]V_{2nk}\right\}$$
$$+\frac{4U_{(2n+1)k}}{U_k}+4(n+2)q^{nk}, \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\sum_{a+b+c=n} V_{ak}^2V_{bk}^2V_{ck}^2 &= \frac{n+2}{2(V_{2k}-4q^{2k})}\left\{6V_{2k}V_{2(n+1)k}+[(n+1)(V_{2k}^2-4q^{2k})-12q^{2k}]V_{2nk}\right\}\\ &+\frac{6}{V_k(V_k^2-4q^k)}\Big[2V_{(2n+3)k}+(n+3)V_kV_{2(n+1)k}-(n+2)V_kq^kV_{2nk}\\ &+(2n+3)q^{nk}V_kV_{2k}-2(2n+5)q^{(n+1)k}V_k\Big]+4(n+2)(n+1)q^{nk}.\end{aligned}$$

证明 令

$$\begin{aligned}U_n' &= \frac{(\alpha^k)^n-(\beta^k)^n}{\alpha^k-\beta^k}=\frac{U_{nk}}{U_k},\\ V_n' &= \alpha^{nk}+\beta^{nk}=V_{nk}.\end{aligned}$$

则可以证明，序列 $\{U_n':\geq 0\}$ 和 $\{V_n':\geq 0\}$ 均满足线性递推关系

$$W_n=V_kW_{n-1}-q^kW_{n-2},\quad n\geq 2.$$

从而我们可以将定理 3.2.1 的结论用到序列 $\{U_n':\geq 0\}$ 和 $\{V_n':\geq 0\}$ 上. 也就是说，在定理 3.2.1 中分别用 U_n'、V_n'、V_k、q^k 代替 U_n、V_n、p、q, 则便可很容易得到此推论.

定理 3.2.2. *设 $\{V_n:\geq 0\}$ 为广义 Lucas 序列，则有*

$$\begin{aligned}\sum_{a+b=n} V_a^3V_b^3 &= \frac{1}{V_3^2-4q^3}\left\{2V_3V_{3(n+1)}+[(n+1)(V_3^2-4q^3)-4q^3]V_{3n}\right\}\\ &+\frac{9}{p^2-4q}\left\{2pq^nV_{n+1}+[(n+1)(p^2-4q)-4q]q^nV_n\right\}\\ &+\frac{6}{p}[2U_{3n+2}+qU_{3n}+q^nU_{n+2}-q^{n+1}U_n-q^{n+2}U_{n-2}], \qquad (3.13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{a+b+c=n} V_a^3V_b^3V_c^3 &= \frac{n+2}{2(V_3^2-4q^3)}\left\{6V_3V_{3(n+1)}+[(n+1)(V_3^2-4q^3)-12q^3]V_{3n}\right\}\\ &+\frac{27(n+2)}{2(p^2-4q)}\left\{6pq^nV_{n+1}+[(n+1)(p^2-4q)-12q]q^nV_n\right\}\\ &+\frac{18}{p(p^2-4q)(p^2-q)}(V_{3n+5}+pV_{3n+4})\\ &+\frac{9}{p^2(p^2-4q)}\Big\{(n+4)V_{3n+4}+6pV_{3n+3}+(n+4)p^2V_{3n+2}\\ &-(n+2)q(p^2+q)V_{3n}+q^{n+2}p^2V_{2n-2}+(3n+4)q^nV_{n+4}\\ &+6q^npV_{n+3}-2pq^{n+1}V_{n+1}-[3(n+2)(p^2+q)+6p^2]q^{n+1}V_n\\ &+3(n+1)p^2q^{n+2}V_{n-2}\Big\}.\end{aligned}$$

证明 对于 $H(x)=H_1(x)+H_2(x)$, 我们有

$$
\begin{aligned}
H^2(x) &= H_1^2(x)+H_2^2(x)+2H_1(x)H_2(x),\\
H^3(x) &= H_1^3(x)+H_2^3(x)+3H_1(x)H_2(x)H(x).
\end{aligned}
$$

于是运用定理 3.2.1 中的证明方法，再结合引理 3.2.4, 此定理便可得证.

类似地，我们又有下述推论.

推论 3.2.2. *设序列 $\{V_n :\geq 0\}$ 为广义 Lucas 序列， k 为一正整数，则有*

$$
\begin{aligned}
\sum_{a+b=n} V_{ak}^3V_{bk}^3 &= \frac{1}{V_{3k}^2-4q^{3k}}\left\{2V_{3k}V_{3(n+1)k}+[(n+1)(V_{3k}^2-4q^{3k})-4q^{3k}]V_{3nk}\right\}\\
&+\frac{9}{V_k^2-4q^k}\left\{2V_kq^{nk}V_{(n+1)k}+[(n+1)(V_k^2-4q^k)-4q^k]q^{nk}V_{nk}\right\}\\
&+\frac{6}{V_kU_k}\left\{2U_{(3n+2)k}+q^kU_{3nk}+q^{nk}[U_{(n+2)k}-q^kU_{nk}-q^{2k}U_{(n-2)k}]\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{a+b+c=n} V_{ak}^3V_{bk}^3V_{ck}^3 &= \frac{n+2}{2(V_{3k}^2-4q^{3k})}\left\{6V_{3k}V_{3(n+1)k}+[(n+1)(V_{3k}^2-4q^{3k})-12q^{3k}]V_{3nk}\right\}\\
&+\frac{27(n+2)}{2(V_k^2-4q^k)}\left\{6q^{nk}V_kV_{(n+1)k}+[(n+1)(V_k^2-4q^k)-12q^k]q^{nk}V_{nk}\right\}\\
&+\frac{18}{V_k(V_k^2-4q^k)(V_k^2-q^k)}\left[V_{(3n+5)k}+V_kV_{(3n+4)k}\right]\\
&+\frac{9}{V_k^2(V_k^2-4q^k)}\left\{(n+4)V_{(3n+4)k}+6V_kV_{(3n+3)k}\right.\\
&+(n+4)V_k^2V_{(3n+2)k}-(n+2)q^k(V_k^2+q^k)V_{3nk}\\
&+q^{(n+2)k}V_k^2V_{(2n-2)k}+(3n+4)q^{nk}V_{(n+4)k}\\
&+6q^{nk}V_kV_{(n+3)k}-2V_kq^{(n+1)k}V_{(n+1)k}\\
&-\left[3(n+2)(V_k^2+q^k)+6V_k^2\right]q^{(n+1)k}V_{nk}\\
&\left.+3(n+1)V_k^2q^{(n+2)k}V_{(n-2)k}\right\}.
\end{aligned}
$$

最后我们注意到，当 $p=-q=1$ 时，广义 Lucas 序列 $\{V_n:n\geq 0\}$ 及广义 Fibonacci 序列 $\{U_n:n\geq 0\}$ 就分别变成 Lucas 序列 $\{L_n:n\geq 0\}$ 及 Fibonacci 序列 $\{F_n:n\geq 0\}$. 从而根据 (3.12) 及 (3.13) 式，我们就可以得到如下一些包含 Lucas 序列 $\{L_n:n\geq 0\}$ 的幂的恒等式.

推论 3.2.3.

$$\begin{aligned}\sum_{a+b=n} L_{ak}^2 L_{bk}^2 &= \frac{1}{L_{2k}^2-4}\left\{2L_{2k}L_{2(n+1)k}+[(n+1)(L_{2k}^2-4)-4]L_{2nk}\right\}\\&+\frac{4F_{(2n+1)k}}{F_k}+4(n+2)(-1)^{nk}. \qquad (3.14)\\ \sum_{a+b=n} L_a^3 L_b^3 &= \frac{1}{5}\big[2L_{3n+3}+(5n+6)L_{3n}+18(-1)^n L_{n+1}+9(5n+9)(-1)^n L_n\big]\\&+6\big[2F_{3n+2}-F_{3n}+(-1)^n(F_{n+2}+F_n-F_{n-2})\big]. \qquad (3.15)\end{aligned}$$

此外，根据上面的推论 3.2.3, 我们又可得到关于 Lucas 序列 $\{L_n : n \geq 0\}$ 的一些同余关系：

$$2L_{2k}L_{2(n+1)k}-4L_{2nk}\equiv 0\ (mod\, L_{2k}^2-4), \quad k\geq 1, \qquad (3.16)$$

$$2L_{3n+3}+L_{3n}+(-1)^n(3L_{n+1}+L_n)\equiv 0\ (mod\, 5). \qquad (3.17)$$

4 两类相伴 Stirling 数

本章对 [10; p 251] 中提到的两类相伴 Stirling 数进行了较为系统地研究. 这两类相伴 Stirling 数是从组合意义角度对两类普通 Stirling 数的一种推广. 我们给出了二者的若干基本性质, 如各种递推关系、同余性质等, 同时得到了一些简单的恒等式.

4.1 两类 r-Stirling 数

通过第一章的介绍, 我们知道, 两类普通 Stirling 数, 即第一类 Stirling 数 $s(n,k)$ 和第二类 Stirling 数 $S(n,k)$, 分别具有如下的组合意义. $|s(n,k)|$ 等于恰可表示成 k 个互不相交的轮换乘积的 n 元置换的个数. 而 $S(n,k)$ 等于 n 元集合的所有 k- 划分的个数. 从这一角度出发, A. Z. Broder[2] 给出了一类推广的 Stirling 数. 它们各自的定义如下.

定义 4.1.1. [2] *第一类 r-Stirling 数 $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_r$ 等于集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有 n 元置换中, 恰可表示成 m 个互不相交的轮换的乘积, 且元素 $1,2,\cdots,r$ 在不同的轮换中的置换的个数.*

定义 4.1.2. [2] *第二类 r-Stirling 数 $\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix}_r$ 等于集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有 m- 划分中, 元素 $1,2,\cdots,r$ 在不同的块中的划分的个数.*

从上述定义我们看到, 当 $r=1$ 时, 这两类 r-Stirling 数就分别退化为第一类和第二类普通 Stirling 数.

A. Z. Border[2] 首先给出了这两类 r-Stirling 数所满足的基本递推关系.

定理 4.1.1. [2] *第一类 r-Stirling 数 $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_r$ 满足如下的“三角”递推关系*

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_r = \begin{cases} (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}_r + \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_r, & n>r, \\ \delta_{m,r} & ,n=r, \\ 0, & n<r. \end{cases}$$

定理 4.1.2. [2] *第二类 r-Stirling 数 $\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix}_r$ 满足如下的“三角”递推关系*

$$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix}_r = \begin{cases} m\begin{Bmatrix} n-1 \\ m \end{Bmatrix}_r + \begin{Bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{Bmatrix}_r, & n>r, \\ \delta_{m,r}, & n=r, \\ 0, & n<r. \end{cases}$$

此外，结合二者的组合意义又给出了它们如下形式的“交错”递推关系.

定理 4.1.3. [2]

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_r = \frac{1}{r-1}\left(\begin{bmatrix} n \\ m-1 \end{bmatrix}_{r-1} - \begin{bmatrix} n \\ m-1 \end{bmatrix}_r\right), \qquad n \geq r > 1.$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix}_r = \begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix}_{r-1} - (r-1)\begin{Bmatrix} n-1 \\ m \end{Bmatrix}_{r-1}, \qquad n \geq r \geq 1.$$

接着以上述定理为基础，详细讨论了两类 r-Stirling 数的各种基本性质，最后还对与两类 r-Stirling 数相关的 r-Stirling 多项式及 Q– 级数进行了研究，这里不再赘述.

在以下的几节中，我们将对从另一组合意义角度进行推广的 Stirling 数 – 两类相伴 Stirling 数展开研究，讨论它们的基本性质.

4.2 两类相伴 Stirling 数及它们满足的若干递推关系

定义 4.2.1. *对任意整数 $r \geq 1$, 第一类 r- 相伴 Stirling 数 $s_r(n,k)$ 等于 n 元置换中恰可表示成 k 个互不相交的轮换的乘积，且每个轮换中的元素个数不小于 r 的置换的个数.*

定义 4.2.2. *对任意整数 $r \geq 1$, 第二类 r- 相伴 Stirling 数 $S_r(n,k)$ 等于 n 元集合的所有 k- 划分中，每个块至少含 r 个元素的划分的个数.*

从上述定义可以看出，两类普通 Stirling 数恰对应于 $r=1$ 的情况. 即 $s_1(n,k) = |s(n,k)|, S_2(n,k) = S(n,k)$. 另外， $r=2$ 对应的两类 2- 相伴 Stirling 数，有时也分别被称为第一类和第二类连带 Stirling 数. 特别地，我们可以看到，第一类 2- 相伴 Stirling 数 $s_2(n,k)$ 也等于恰可表示成 k 个互不相交的轮换乘积的 n 元错排的个数. 所谓集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个元 n 错排（即错位排列）是指这样的全排列 $i_1i_2\cdots i_n$, 使 $i_j \neq j, j=1,2,\cdots,n$.

定理 4.2.1. *第一类 r- 相伴 Stirling 数 $s_r(n,k)$ 满足如下“三项”递推关系：*

$$\begin{aligned} &s_r(n,k) = 0, && n < kr \\ &s_r(n,k) = \frac{(kr)!}{k!r^k}, && n = kr \\ &s_r(n+1,k) = ns_r(n,k) + (n)_{r-1}s_r(n-r+1,k-1). && n \geq kr \end{aligned} \tag{4.1}$$

证明 首先对于 $s_r(kr,k)$, 根据定义，我们有

$$s_r(kr,k) = \binom{kr}{r,r,\cdots,r}\frac{1}{k!}((r-1)!)^k = \frac{(kr)!}{k!r^k}.$$

其次，我们注意到，集合 $\{1,2,\cdots,n+1\}$ 的 $n+1$ 个元素所产生的 $n+1$ 元置换中，恰可表示成 k 个互不相交的轮换的乘积，且每个轮换中的元素个数不小于 r 的置换可分成两类：一类是含有元素 $n+1$ 的轮换恰含 r 个元素，一类是含有元素 $n+1$ 的轮换至少含 $r+1$ 个元素. 而又可以知道这两类所包含的置换个数分别是 $(n)_{r-1}s_r(n-r+1,k-1)$ 和 $ns_r(n,k)$. 从而可知此定理得证.

定理 4.2.2. 第二类 r- 相伴 *Stirling* 数 $S_r(n,k)$ 满足下面的"三项"递推关系：

$$\begin{aligned}
&S_r(n,k)=0, && n<kr\\
&S_r(n,k)=\frac{(kr)!}{k!(r!)^k}, && n=kr \qquad (4.2)\\
&S_r(n+1,k)=kS_r(n,k)+\binom{n}{r-1}S_r(n-r+1,k-1).n\geq kr
\end{aligned}$$

证明 此定理的证明完全类似于定理 4.2.1 的证明，故省略.

下面给出两类 r- 相伴 Stirling 数的几个特殊值.

$$s_2(2k,k)=S_2(2k,k)=1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1) \tag{4.3}$$

$$s_2(2k+1,k)=\frac{1}{3}(2k+1)!\,[(k-1)!\,2^{k-1}]^{-1} \tag{4.4}$$

$$s_2(2k+2,k)=\frac{1}{18}(4k+5)(2k+2)!\,[(k-1)!\,2^{k}]^{-1} \tag{4.5}$$

$$S_2(2k+1,k)=\frac{1}{6}(2k+1)!\,[(k-1)!2^{k-1}]^{-1} \tag{4.6}$$

$$S_2(2k+2,k)=\frac{1}{72}(2k+1)(2k+2)!\,[(k-1)!\,2^{k-1}]^{-1} \tag{4.7}$$

这几个式子都是很容易得到的. 例如，对于 (4.5), 借助第一类 2- 相伴 Stirling 数的组合意义，我们有

$$\begin{aligned}
s_2(2k+2,k) &= \binom{2k+2}{4}\times3!\times s_2(2k-2,k-1)+\binom{2k+2}{6}\times s_3(6,2)\times s_2(2k-4,k-2)\\
&= \frac{(2k+2)(2k+1)(2k)(2k-1)}{4}\times\frac{(2k-2)!}{(k-1)!2^{k-1}}+\frac{(2k+2)_6}{6!}\times\frac{6!}{2!3^2}\times\frac{(2k-4)!}{(k-2)!2^{k-2}}\\
&= \frac{1}{18}(4k+5)(2k+2)![(k-1)!2^k]^{-1}.
\end{aligned}$$

另外，借助递推关系 (4.1) 和 (4.2), 通过简单计算，可得下列各表.

表 1. $r=1$

$s_1(n,k)$	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	$S_1(n,k)$	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
n=1	1					n=1	1				
n=2	1	1				n=2	1	1			
n=3	2	3	1			n=3	1	3	1		
n=4	6	11	6	1		n=4	1	7	6	1	
n=5	24	50	35	10	1	n=5	1	15	25	10	1

表 2. $r=2$

$s_2(n,k)$	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	$S_2(n,k)$	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
n=2	1					n=2	1	1			
n=3	2					n=3	1				
n=4	6	3				n=4	1	3			
n=5	24	20				n=5	1	10			
n=6	120	130	15			n=6	1	25	15		
n=7	720	924	210			n=7	1	56	105		

此外，根据两类 r- 相伴 Stirling 数的定义，我们还可得到下面的两个组合恒等式.

定理 4.2.3.

$$\sum_{j=0}^{k}\frac{(n)_{jr}}{j!r^j}s_{r+1}(n-jr,k-j)=s_r(n,k) \tag{4.8}$$

证明 根据 $s_r(n,k)$ 的定义，有

$$\begin{aligned} s_r(n,k) &= \sum_{k=0}^{k}\binom{n}{jr}s_r(jr,j)s_{r+1}(n-jr,k-j) \\ &= \sum_{j=0}^{k}\frac{n!}{(jr)!(n-jr)!}\cdot\frac{(jr)!}{j!r^j}\cdot s_{r+1}(n-jr,k-j) \\ &= \sum_{j=0}^{k}\frac{(n)_{jr}}{j!r^j}s_{r+1}(n-jr,k-j) \end{aligned}$$

从而可知定理 4.2.3 得证.

运用类似的方法，我们又可得到下面的定理.

定理 4.2.4.

$$\sum_{j=0}^{k}\frac{(n)_{jr}}{j!(r!)^j}S_{r+1}(n-jr,k-j)=S_r(n,k) \tag{4.9}$$

若在此定理中取 $r=1$, 并令 $k=n-a$, 这里 a 为任一非负整数，则有

$$S(n,n-a)=\sum_{j=a+1}^{2a}\binom{n}{j}S_2(j,j-a). \tag{4.10}$$

通过这个式子，借助第二类 2- 相伴 Stirling 数，我们可以较快地得到有关第二类普通 Stirling 数的若干特殊值. 例如，

$$\begin{aligned} &S(n,n)=1 \\ &S(n,n-1)=\binom{n}{2} \\ &S(n,n-2)=\binom{n}{3}+3\binom{n}{4}=\frac{1}{4}\binom{n}{3}(3n-5) \\ &S(n,n-3)=\binom{n}{4}+10\binom{n}{5}+15\binom{n}{6}=\frac{1}{2}\binom{n}{4}(n^2-5n+6). \end{aligned}$$

4.3 关于两类相伴 Stirling 数的各种发生函数

引理 4.3.1. 对任一固定的整数 $r\geq 1$, 第一类 r- 相伴 *Stirling* 数 $s_r(n,k)$ 的"垂直"发生函数 $f_k(t)=\sum_{n=0}^{\infty}s_r(n,k)\frac{t^n}{n!}$ 满足如下微分方程

$$(1-t)\frac{d}{dt}f_k(t)=t^{r-1}f_{k-1}(t), \tag{4.11}$$

其中 $k=1,2,3,\cdots$. 并且满足 $f_k(0)=0(k\geq 1), f_0(t)=1$.

证明 根据函数 $f_k(t)$ 的定义，性质 $f_k(0)=0(k\geq 1)$ 及 $f_0(t)=1$ 都是显然成立的. 此外，根据定理 4.2.1, 首先有

$$\sum_{n\geq kr}s_r(n+1,k)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n\geq kr}ns_r(n,k)\frac{t^n}{n!}+\sum_{n\geq kr}(n)_{r-1}s_r(n-r+1,k-1)\frac{t^n}{n!},$$

即

$$\sum_{n\geq kr+1}s_r(n,k)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n\geq kr}s_r(n,k)\frac{t^n}{(n-1)!}+\sum_{n\geq (k-1)r+1}(n+r-1)_{r-1}s_r(n,k-1)\frac{t^{n+r-1}}{(n+r-1)!},$$

从而

$$\frac{d}{dt}f_k(t)-s_r(kr,k)\frac{t^{kr-1}}{(kr-1)!}=t\frac{d}{dt}f_k(t)+t^{r-1}f_{k-1}(t)-t^{r-1}s_r((k-1)r,k-1)\frac{t^{(k-1)r}}{[(k-1)r]!}.$$

进一步结合 $s_r(kr,k)=\frac{(kr)!}{k!r^k}$, 则有

$$\frac{d}{dt}f_k(t)=t\frac{d}{dt}f_k(t)+t^{r-1}f_{k-1}(t),$$

即

$$(1-t)\frac{d}{dt}f_k(t)=t^{r-1}f_{k-1}(t). \qquad \text{其中 } k=1,2,3,\cdots$$

从而引理 4.3.1 得证.

定理 4.3.1. 对任一固定的整数 $r\geq 1$, 第一类 r- 相伴 *Stirling* 数 $s_r(n,k)$ 有如下"垂直"发生函数：

$$\sum_{n\geq 0}s_r(n,k)\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{k!}\Big(\sum_{n\geq r}\frac{t^n}{n}\Big)^k. \tag{4.12}$$

证明 令 $\phi_k(t)=\frac{1}{k!}(\sum_{n\geq r}\frac{t^n}{n})^k$. 我们注意到方程 (4.11) 具有唯一的满足条件 $f_k(0)=0(k\geq 1)$ 及 $f_0(t)=1$ 的解. 从而只要能够证明 $\phi_k(t)$ 是方程 (4.11) 的满足上述两条件的解，则必然有 $\phi_k(t)=f_k(t)$.

首先，显然有 $\phi_k(0)=0(k\geq 1)$ 及 $\phi_0(t)=1$.

其次，通过简单的微分及代数运算可得 $(1-t)\frac{d}{dt}\phi_k(t)=t^{r-1}\phi_{k-1}(t)$ 成立，从而此定理得证.

根据定理 4.3.1, 我们可以很容易得到下面的推论.

推论 4.3.1. 对任一固定的整数 $r \geq 1$, 第一类 r- 相伴 *Stirling* 数 $s_r(n,k)$ 的"双向"发生函数如下：

$$\sum_{n,k\geq 0} s_r(n,k)\frac{t^n}{n!}u^k = exp\{u\sum_{n\geq r}\frac{t^n}{n}\}. \tag{4.13}$$

推论 4.3.2. $s_r(n,k)$ 满足下列"垂直"递推关系：

$$s_r(n+1,k) = \sum_{j=(k-1)r}^{n-r+1} n(n-1)\cdots(j+1)s_r(j,k-1), \tag{4.14}$$

$$(k+1)s_r(n,k+1) = \sum_{j=kr}^{n-r}\frac{1}{n-j}n(n-1)\cdots(j+1)s_r(j,k). \tag{4.15}$$

证明 对于式 (4.14), 我们对 (4.13) 式的两边关于变量 t 微分得

$$\begin{aligned}\sum_{n,k\geq 0} s_r(n,k)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u^k &= exp\{u\sum_{n\geq r}\frac{t^n}{n}\}\cdot\{u\sum_{n\geq r}t^{n-1}\}\\ &= \{\sum_{n,k\geq 0} s_r(n,k)\frac{t^n}{n!}u^{k+1}\}\cdot\{\sum_{n\geq r}t^{n-1}\}\end{aligned}$$

再比较上式两端 $\frac{t^n}{n!}u^k$ 的系数，便可得

$$\begin{aligned}s_r(n+1,k) &= \sum_{j=(k-1)r}^{n-r+1}\binom{n}{j}s_r(j,k-1)(n-j)!\\ &= \sum_{j=(k-1)r}^{n-r+1} n(n-1)\cdots(j+1)s_r(j,k-1)\end{aligned}$$

从而式 (4.14) 得证.

而如果先对 (4.13) 式两边关于变量 u 微分，再比较等式两端 $\frac{t^n}{n!}u^k$ 的系数，便可得到式 (4.15). 证毕.

运用类似的方法，我们可以得到关于第二类 r- 相伴 Stirling 数的上述有关结论. 在这里，仅将它们列举如下，不再加以证明.

引理 4.3.2. 对任一固定的整数 $r \geq 1$, 第二类 r- 相伴 *Stirling* 数 $S_r(n,k)$ 的"垂直"发生函数 $g_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_r(n,k)\frac{t^n}{n!}$ 满足微分方程

$$\frac{d}{dt}g_k(t) - kg_k(t) = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}g_{k-1}(t), \qquad k = 1,2,3,\cdots \tag{4.16}$$

并且有 $g_k(0) = 0(k \geq 1)$ 及 $g_0(t) = 1$.

定理 4.3.2. $S_r(n,k)$ 的"垂直"发生函数如下：

$$\sum_{n\geq 0} S_r(n,k)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}(\sum_{n\geq r}\frac{t^n}{n!})^k. \tag{4.17}$$

推论 4.3.3. $S_r(n,k)$ 有如下的"双向"发生函数:

$$\sum_{n,k\geq 0} S_r(n,k)\frac{t^n}{n!}u^k = exp\{u\sum_{n\geq r}\frac{t^n}{n!}\}. \tag{4.18}$$

推论 4.3.4. $S_r(n,k)$ 满足下列"垂直"递推关系:

$$S_r(n+1,k) = \sum_{j=(k-1)r}^{n-r+1}\binom{n}{j}S_r(j,k-1), \tag{4.19}$$

$$(k+1)S_r(n,k+1) = \sum_{j=kr}^{n-r}\binom{n}{j}S_r(j,k). \tag{4.20}$$

4.4 同余性质

为研究两类相伴 Stirling 数的同余性质，我们首先需要下面的结论.

定理 4.4.1.

$$s_{r+1}(n,k) = \sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j(rj)!}{r^j j!}\binom{n}{rj}s_r(n-rj,k-j), \tag{4.21}$$

$$S_{r+1}(n,k) = \sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j(rj)!}{(r!)^j j!}\binom{n}{rj}S_r(n-rj,k-j). \tag{4.22}$$

证明 根据定理 4.3.1, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} s_{r+1}(n,k)\frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!}(\sum_{n\geq r+1}\frac{t^n}{n})^k \\
&= \frac{1}{k!}(\sum_{n\geq r}\frac{t^n}{n}-\frac{t^r}{r})^k \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(\sum_{n\geq r}\frac{t^n}{n})^{k-j}(-\frac{t^r}{r})^j \\
&= \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}(-\frac{t^r}{r})^j\frac{1}{(k-j)!}(\sum_{n\geq r}\frac{t^n}{n})^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j t^{rj}}{j! r^j}\sum_{m\geq 0}s_r(m,k-j)\frac{t^m}{m!} \\
&= \sum_{j=0}^{k}\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^j}{j! r^j}s_r(m,k-j)\frac{t^{m+rj}}{m!} \\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j(rj)!}{r^j j!}\binom{n}{rj}s_r(n-rj,k-j)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

再比较第一个式子和最后一个式子中 $\frac{t^n}{n!}$ 的系数，便可得到式 (4.21).

同样运用定理 4.3.2, 可得式 (4.22) 成立.

定理 4.4.2. 对任意素数 p, 及整数 k, $1 < k < p$, 两类相伴 *Stirling* 数 $s_r(n,k)$ 和 $S_r(n,k)$ 分别满足如下同余关系：

$$s_r(p,k) \equiv 0 \ (mod\, p), \tag{4.23}$$

$$S_r(p,k) \equiv 0 \ (mod\, p). \tag{4.24}$$

证明 我们仅证明式 (4.24), 对式 (4.23) 可同样地证明. 为此，我们对 r 采用归纳法.

首先，当 $r=1$ 时，由于 $S_1(p,k)$ 即为第二类普通 Stirling 数，故有 $S_1(p,k) \equiv 0$ (mod p)[10]

其次，设式 (4.24) 对整数 $r(r \geq 1)$ 成立，则根据 (4.22) 式，有

$$\begin{aligned} S_{r+1}(p,k) &= \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j (rj)!}{(r!)^j j!} \binom{p}{rj} S_r(p-rj, k-j) \\ &= S_r(p,k) + \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^j (rj)!}{(r!)^j j!} \binom{p}{rj} S_r(p-rj, k-j) \end{aligned}$$

根据归纳假设，有 $S_r(p,k) \equiv 0 \ (mod\, p)$, 又由于 $\binom{p}{i} \equiv 0 \ (mod\, p)(1 \leq i < p)$, 及 $\frac{(rj)!}{(r!)^j j!} = S_r(rj, j)$ 为一整数，从而可得 $S_{r+1}(p,k) \equiv 0 \ (mod\, p)$, 对 $1 < k < p$ 成立. 综上可知式 (4.24) 得证.

进一步，我们又有下述结论.

定理 4.4.3. 对任意素数 p 及整数 $r \geq 2, 1 \leq k < p$, 有

$$s_r(p+1, k+1) \equiv 0 \ (mod\, p), \tag{4.25}$$

$$S_r(p+1, k+1) \equiv 0 \ (mod\, p). \tag{4.26}$$

证明 首先，根据式 (4.14), 有

$$\begin{aligned} s_r(p+1, k+1) &= \sum_{j=kr}^{p-r+1} p(p-1)\cdots(j+1) s_r(j,k), \\ &\equiv 0 \ (mod\, p), \text{对任意整数 } r \geq 2, \text{ 及 } 1 \leq k < p \text{ 成立}. \end{aligned}$$

其次，根据式 (4.19), 有 $S_r(p+1, k+1) = \sum_{j=kr}^{p-r+1} \binom{p}{j} S_r(j,k)$ ，则显然有 $S_r(p+1, k+1) \equiv 0 \ (mod\, p)$ 对 $1 \leq k < p$ 及 $r \geq 2$ 成立. 从而此定理得证.

此外，结合定理 4.4.2 及定理 4.4.3, 及性质：对任意素数 p 及整数 j, $0 \leq j \leq p-2$, $\binom{p+j}{k} \equiv 0 \ (mod\, p)$, 当 $j+1 \leq k \leq p-1$ 时成立，再利用归纳法，我们便可得到关于两类相伴 Stirling 数同余性质的如下一般结论.

定理 4.4.4. 对任意素数 p 及整数 $r \geq 2, 1 < k < p$ 有

$$s_r(p+j,k) \equiv 0\ (mod\, p), \tag{4.27}$$

$$S_r(p+j,k) \equiv 0\ (mod\, p). \tag{4.28}$$

其中整数 j 满足 $0 \leq j \leq max\{p, 2k-3\}$.

关于两类普通 Stirling 数的同余性质，文献 [29] 中已给出如下的一般结论：对任意素数 p 及整数 k, $1 < k < p$, $s(n,k)$ 和 $S(n,k)$ 分别满足下列同余关系：

$$s(p+j,k+j) \equiv 0\ (mod\, p), \tag{4.29}$$

$$S(p+j,k+j) \equiv 0\ (mod\, p). \tag{4.30}$$

其中整数 j 满足 $0 \leq j \leq p-k$.

4.5 关于第一类连带 Stirling 数的一些有趣结果

在推论 4.3.1 中，若我们取整数 $r=2$, 则有

$$\begin{aligned}
\sum_{n,k\geq 0} s_2(n,k)\frac{t^n}{n!}u^k &= exp\{u\sum_{n\geq 2}\frac{t^n}{n}\} \\
&= exp\left\{u(\ln\frac{1}{1-t}-t)\right\} \\
&= (1-t)^{-u}e^{-ut} \\
&= \sum_{n\geq 0}\langle u\rangle_n\frac{t^n}{n!}\sum_{n\geq 0}(-u)^n\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

通过比较上述等式两端 $\frac{t^n}{n!}$ 的系数，可得下述结论.

定理 4.5.1. 第一类连带 *Stirling* 数 $s_2(n,k)$ 具有如下的“水平”发生函数

$$\sum_{k\geq 0} s_2(n,k)u^k = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}u(u+1)\cdots(u+j-1)(-u)^{n-j}. \tag{4.31}$$

在 (4.31) 式中，若令 $u=-1$, 则可得等式: $\sum_{k\geq 0} s_2(n,k)(-1)^k = 1-n$.

若令 $u=1$, 则有

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} s_2(n,k) &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}j!(-1)^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(n-j)!(-1)^{j} \\
&= n!\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}.
\end{aligned}$$

而若以 D_n 计 n 元置换中所有措排的个数，则根据二者的组合意义，显然有 $\sum_{k\geq 0} s_2(n,k) = D_n$, 从而有 $D_n = n!\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}$([10; p 203]).

结 论

本文所取得的主要结论可归纳如下：

1、借助发生函数的方法，得到了若干包含广义 Lucas 序列 $\{V_n : n \geq 0\}$ 的平方及三次方的多重卷积和公式，即形如

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n} V_{a_1}^2 V_{a_2}^2 \cdots V_{a_k}^2$$

及

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n} V_{a_1}^3 V_{a_2}^3 \cdots V_{a_k}^3$$

的和式的简单封闭形式．同时得到了一些关于 Lucas 序列 $\{L_n : n \geq 0\}$ 的恒等式及同余关系．

2、对两类 r- 相伴 Stirling 数进行了系统的研究，给出了它们的若干基本性质，如各种递推关系、发生函数及同余性质等．同时得到了一些包含二者的恒等式．

参考文献

[1] Andrews G E. The theory of partitions. Cambridge Univ. Press, 1984.

[2] Broder A Z. The r-Stirling numbers. Discrete Mathematics, 1984, 49: 241-259.

[3] Yildiz Bunyamin, Karaduman Erdal. On Fibonacci search method with k-Lucas numbers . Applied Mathematics and Computation, 2003, 143: 523-531.

[4] Carlitz L. q-Bernoulli numbers and polynomials. Duke Math. J, 1984, 15: 987-1000.

[5] Carlitz L. Degenerate Stirling, Bernoulli and Eulerian numbers. Utilitas Math, 1979, 15: 51-88.

[6] Carlitz L. Weighted Stirling numbers of the first and second kind I. The Fibonacci Quarterly, 1980, 18: 145-162.

[7] Carlitz L. Weighted Stirling numbers of the first and second kind II. The Fibonacci Quarterly, 1980, 18: 242-257.

[8] Charalambides Ch A, Singh J. A review of the Stirling numbers, their generalizations and statistical apllications. Comm. Statist. Theory Methods, 1988, 17: 2533-2595.

[9] Chen W Y C, Rota G C. q-analogs of the inclusion-exclusion principle and permutations with restricted position. Discrete Mathematics, 1992, 104: 7-22.

[10] Comtet L. Advanced Combinatorics. Reidel, Dordrecht, NL, 1974.

[11] Daina R K, Srivastava H M. A class of numbers associated with the Lucas numbers. Mathematical and Computer Modelling, 1997, 25: 15-22.

[12] Dursun T, Emrah K. On the order-k generalized Lucas numbers. Applied Mathematics and Computation, 2004, 155: 637-641.

[13] Ehrenborg R, Readdy M. Juggling and applications to q-analogues. Discrete Math, 1996, 157: 107-125.

[14] Ehrenborg R. Determinants involving q-Stirling numbers. Adv. Appl. Math, 2003, 31: 630-642.

[15] Feng Hong. The multiset Mahonian statistics. 大连理工大学报， 2002, 42: 17-20.

[16] Feng Hong, Zhang Zhizheng. Computational formulas for convoluted generalized Fibonacci and Lucas numbers, 2003,144-151.

[17] Garsia A M, Remmel J B. A combinatorial interpretation of q-Derangement and q-Laguerre numbers. Eur. J. Combin, 1980, 1: 47-59.

[18] Garsia A M, Remmel J B. q-counting rook configurations and a formula of Frobenius. J. Combin. Theory Ser A, 1986, 41: 246-275.

[19] Gould H W. The q-Stirling numbers of the first and second kinds. Duke Math. J. 1961, 28: 281-289.

[20] Goulden I P, Jackson D M. Combinatorial enumerations. John Wiley Sons, 1983.

[21] Goldman J R, Rota G C. On the fundations of combinatorial theory IV: Finite vector spaces and Eulerian generating functions. Stud. Appl. Math, 1970, 49: 239-258.

[22] Goulde I P, Jackson D M. An inversion model for q-identities. Europ.J. Combinatorics, 1983, 4: 225-230.

[23] He Ping-an, Zhang Zhizheng. The multiple sum on the generalized Lucas sequences. The Fibonacci Quarterly, 2002, 40: 124-127.

[24] Horada A F. Basic properties of a certain generalized sequence of numbers. The Fibonacci Quarterly, 1965, 3(2): 161-176.

[25] Howar F T. Degenerate weighted Stirling numbers. Discrete Mathematics, 1985, 57: 45-58.

[26] Hsu L C. A summation rule using Stirling numbers of the second kind. The Fibonacci Quarterly, 1993, 31: 256-262.

[27] Hsu L C, Mullen G L, Shiue P J. Dickson-Stirling numbers. Proceeding of the Edinburgh Mathematical Society, 1997, 40: 409-423.

[28] Hsu L C, Yu Hongquan. A unified approach to a class of Stirling-type pairs. Appl. Math. A Journal of Chinese Universities, 1997, 12(B): 225-232.

[29] Hsu L C, Shiue J S. A unified approach to generalized Stirling numbers. Advances in Apllied Mathematics, 1998, 20: 366-384.

[30] Katriel J. Refined Stirling numbers: Enumeration of special sets of permutations and set-partitions. Journal of Combinatorical Theory. Ser A, 2002, 99: 85-94.

[31] Jordan(Charles). Calculas of finite differences, 1947(repr. Chelsea, 1965).

[32] Knuth D E. Subsets, Subspaces and Partitions. J. Combin. Theory, 1971, 10: 178-180.

[33] 柯召，魏万迪．组合论（上册）．科学出版社， 1981.

[34] Koutras M. Non-central Stirling numbers and some applications. Discrete Mathematics , 1982, 42: 73-89.

[35] Konvalina J. Generalized binomial coefficients and the subset-subspace problem. Advances in Apllied Mathematics, 1998, 21: 228-240.

[36] 李乔．组合数学基础．高等教育出版社， 1993.

[37] Medicis A D, Leroux P. A unified combinatorial approach for q-(and p,q-) Stirling numbers. J. Statist. Plann. Inference, 1993, 34: 89-105.

[38] Medicis A D, Leroux P. Generalized Stirling numbers: Convolution formula and p,q-analogues. Canadian J. Math, 1995, 47: 474-499.

[39] Milne S C. A q-analog of restricted growth functions, Dobinski's equality and Charlier polynomials. Trans. Amer. Math. Soc, 1978, 245: 89-118.

[40] Milne S C. Restricted growth functions, rank row matchings of partition Lattices, and q-Stirling numbers. Adv. Math, 1982, 43: 173-196.

[41] Milne-Thomson. The calculas of finite differences. Macnillan, 1933.

[42] Nolund(N E). Differenzenre chnung. Berlin, 1924.

[43] Remmel J B, Wachs M L. Rook theory, generalized Stirling numbers and (p,q)- analogues. E.J.C. 2004, 11: R84.

[44] Sagan B E. A maj statistic for partitions. European J. Combin, 1991, 12: 69-79.

[45] 绍嘉裕．组合数学．上海：同济大学出版社， 1991.

[46] Stanley R. Enumerative Combinatorics, Vol.I. 1986, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced

Books& Software, Monterey, California.

[47] Solack, Suloyman. On the norms of circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers. Applied Mathematics and Computation, 2005, 160: 125-132.

[48] Sun Yidong. Two classes of p-Stirling numbers. Discrete Mathematics, to appear.

[49] Touchard. Sur quelques series de Lambert et de Dirichlet. C. J. M. 1960, 12: 1-19.

[50] Wang J. Quotient sets and subset-subspace analogy. Adv. Appl. Math, 1999, 23(4): 333-339.

[51] Wilf H S. Generating functionology. Acad. press, 1990. (中译本发生函数论，清华大学出版社， 2003)

[52] 王天民. 组合数学教程，机械工业出版社， 1990.

[53] Wachs M, White D. P, q-Stirlng numbers and set partition statistics. J. Combin. Theory. Ser A. 1990, 56: 27-46.

[54] 杨一飞，王朝瑞. 组合数学及其应用，北京理工大学出版社， 1992.

[55] Zhang Wenpeng. Some identities involving the Fibonacci numbers. The Fibonacci Quarterly, 1997, 35(3): 225-228.

[56] Zhang Z, Wang X. A note on a class of computational formulas involving the mutiple sum of recurrence sequences. The Fibonacci Quarterly, 2002, 40(5): 394-398.

[57] Zhao Feng-zhen, Wang Tianming. Some identities involving the powers of the generalized Fibonacci numbers. The Fibonacci Quarterly, 2003, 41(1): 7-12.

[58] Zhao Xiqiang, Ding Shuangshuang. A generalized summation rule related to Stirling numbers. The Fibonacci Quarterly, 2004, 42(3): 194-201.

[59] 周振黎，康泰. 组合数学，四川：重庆大学出版社， 1986.

攻读硕士学位期间发表学术论文情况

1. Fengguang Xiu, Hong Feng. A note on the generalized Lucas numbers. 大连理工大学网络学刊（第三章）.

致　谢

本文是在导师冯红副教授的悉心指导和无微不至的关怀下完成的。在三年的研究生生活中，冯老师渊博的知识、严谨的治学态度、兢兢业业的工作精神、平易近人的态度以及和煦温暖的笑容，都给我留下了深刻的印象，是我终生受益的精神财富，永远学习的榜样！值此论文完成之际，谨向冯老师三年来的细心栽培与谆谆教诲致以崇高的敬意和诚挚的感谢！

同时感谢大连理工大学应用数学系王军教授、王天明教授、王毅教授、郑斯宁教授、于洪全副教授、蔡晶老师、杨莉老师的关心和帮助！

感谢李玉双师姐、孙怡东师兄在学习上的指导和帮助！

感谢王利东同学在论文打印方面给予的帮助！

感谢赵光军、刘丽、张明、许小芳、叶明玉、马世美、张翠、李群等同一个教研室的师兄弟姐妹们的关心和帮助！

感谢室友林红娟、王翠萍、纪艳菊、石端银、王静以及03级硕研基础班的全体同学在我学业及生活上的关心和帮助，跟他们一起度过的时光令人难以忘怀！

感谢我的母亲、妹妹及其他亲人对我学业的支持．特别地，感谢我的母亲，在我求学的过程中，是她给了我精神和物质上最无私的支持，谢谢母亲无私的慈爱，默默的关心！

再一次向所有指导、关心、支持、帮助、鼓励我的人表示我最诚挚的谢意！