DOI:10.13299/j.cnki.amjcu.000171

高校应用数学学报
第3卷第2期 Applied Mathematics №2, Vol. 3
1988年6月 A Journal of Chinese Universities Jun. 1988

计数多项式与计数子

邵嘉裕

（同济大学应用数学系）

摘　要

容斥原理、广容斥原理等都可视为相应于某个特定的集合运算函数的计数原理。我们证明了，对任一集合运算函数，都可有一个类似的计数原理，且存在唯一的一个多项式——计数多项式，使相应计数原理可由此多项式直接给出。作为具体例子，我们给出了容斥、广容斥原理等公式简明的新处理及其若干推广。作为计数多项式概念的推广，我们研究了计数子的概念、性质、计算原则与方法及其与某二个布尔代数间同构映射之间的关系。

1. 引　言

设S为一集合。记2^S为S的全体子集为元素所成的集合。称从$2^S\times\cdots\times 2^S$（$k$个$2^S$的积集合）到$2^S$的一个映射为$S$上的一个$k$元素集合函数。一个$k$元集合函数若可以由$k$个集合变元之间的有限次并、交、补的一个运算式来表示，则称为是一个k元集合运算函数（或简单集合函数）。

在本文中我们引进如下记号。记

$$\bar{A}=S\backslash A \qquad (A\subseteq S) \tag{1.1}$$

$$I(k)=\{1,\cdots,k\} \tag{1.2}$$

$$A_X=\bigcap_{i\in X}A_i \qquad (X\subseteq I(k)) \tag{1.3}$$

（规定$A_\phi=S$）

$$\bar{A}_Y=\bigcap_{j\in Y}\bar{A}_j \qquad (Y\subseteq I(k)) \tag{1.4}$$

又称形如下式

$$B_X(A_1,\cdots A_k)\ =A_X\cap\bar{A}_{\bar{X}}$$

的集合运算函数为k个集合变元$A_1,\cdots,A_k$所生成的（相应于足标子集X的）一个最小集。

本文于1987年5月3日收到

因集合$I(k)$共有2^k个子集，故$A_1, \cdots A_k$共可生成2^k个最小集。容易验证，任意两个不同的最小集之交是取值恒为空集的集合函数。

集合论中关于最小集的一个经典结果是：

定理A ([1])：k个集合变元$A_1, \cdots, A_k$的任一集合运算函数均等于由$A_1, \cdots, A_k$所生成的若干个不同的最小集之并。

定义 设w是集合2^S上的一个实函数。若w满足

$$w(A_1 \dot{\cup} A_2) = w(A_1) + w(A_2) \qquad (\text{其中} A_1 \cap A_2 = \phi) \tag{1.5}$$

则称w为S上的一个权函数。

注 有时候权函数的定义还可比此更广泛一些：设w仅是2^S的某个子集$\mathscr{A}$上的实函数，如果w满足(1.5)式(对$A_1, A_2 \in \mathscr{A}$)而$\mathscr{A}$中的成员对集合的并、交、补运算封闭并且$S \in \mathscr{A}$(这样的$\mathscr{A}$称为S上的一个集代数)，则也可称这样的函数w为一个权函数(或广义的权函数)。前面所定义的S上的权函数可视为是推广意义下的权函数在$\mathscr{A} = 2^S$时的特殊情形。

例如，设S是平面上一个正方形中的点集。若对S的子集A，定义$w(A)$为A的面积。则因并非S的任一子集都存在一个面积值，故此w不能看成是定义在整个2^S上的。但若取$\mathscr{A}$为S的所有可求面积子集所成的集代数，则在推广意义下w就仍可视为定义在$\mathscr{A}$上的一个权函数了。

当S为有限集且$\mathscr{A} = 2^S$时，若记$w(a) = w(\{a\})(a \in S)$，则此时对S的任一子集A均有

$$w(A) = \sum_{a \in A} w(a)$$

以下为叙述方便计，我们总假设$\mathscr{A} = 2^S$，即w是S上的一个权函数。但本文所得的结论事实上对推广意义下的权函数(例如面积函数等)也是成立的。

利用记号(1.1)—(1.3)，熟知的“容斥原理”可表为如下之形式：

$$w(\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_k) = \sum_{X \subseteq I(k)} (-1)^{|X|} w(A_X) \tag{1.6}$$

它以$\{A_1, \cdots A_k\}$中诸成员们各种可能的交的权表出了集合$\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_k$的权(注意到$S = A_\phi$)。因此，容斥原理本质上可看成是相应于一个特定的集合运算函数$G(A_1, \cdots, A_k) = \bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_k$的计数公式。在第2节中我们将看到，Jordan筛法公式、广容斥原理([2])等其他一些类似计数公式亦均可视为相应于另一些特定的集合运算函数的计数公式。

在本文中，我们将把这些(相应于特殊集合运算函数的)计数原理推广到任意集合运算函数。在第2节中我们将证明：对任一集合运算函数$G(A_1, \cdots, A_k)$，都可以有一个相应的计数公式(用$A_1, \cdots, A_k$中诸成员们各种可能的交的权来表出$G(A_1, \cdots, A_k)$的权的公式)，且这个公式的具体形式可由$G(A_1, \cdots, A_k)$的“计数多项式”(见第2节定义1)直接给出。

包括容斥原理在内的一系列计数公式，其最常用的证法是所谓的“贡献法”——计算集合中任一元素对等式两边的贡献是否相等的方法。下面我们来叙述和证明这一方法的基本原理。

设 S 为任一集合。定义 S 上子集 A 的特征函数 $\chi_A(x)$ 为

$$\chi_A(a)=\begin{cases}1 & 若 a\in A\\ 0 & 若 a\notin A\end{cases} \tag{1.7}$$

今设有如下的一个待证的集合赋权恒等式：

$$\sum_{i=1}^{p} a_i w(A_i)=\sum_{j=1}^{q} b_j w(B_j) \tag{1.8}$$

其中诸 a_i，b_j 均为实数，诸 A_i，B_j 均为 S 的子集，w 是 S 上的一个权函数。对任一 $a\in S$，我们分别称如下二数量

$$L(a)=\sum_{i=1}^{p} a_i\chi_{A_i}(a) \tag{1.9}$$

和

$$R(a)=\sum_{j=1}^{q} b_j\chi_{B_j}(a) \tag{1.10}$$

为元素 a 对(1.8)式左边和右边的“纯贡献”（而称 $L(a)w(a)$ 和 $R(a)w(a)$ 为 a 对 (1.8)式左边和右边的“贡献”）。用“贡献法”证形如 (1.8) 式的集合赋权等式的基本原理可表为如下之引理：

引理1 设诸 a_i，b_j 为实数，诸 A_i, B_j 均为 S 的子集 ($i=1,\cdots,p$；$j=1,\cdots,q$)。则(1.8)式对 S 上的任意权函数 w 均成立的充要条件是 S 中任一元素 a 对 (1.8) 式两边的纯贡献 $L(a)$ 和 $R(a)$ 相等。

证：必要性：对固定的 $a\in S$，定义 2^S 上的实函数 w 为

$$w(A)=\chi_A(a) \qquad \forall A\subseteq S$$

容易验证这样定义的 w 是 S 上的一个权函数。利用 (1.8) 式对这个特殊的权函数成立即可推知 $L(a)=R(a)$。

充分性：设 w 是 S 上的任一权函数。令 $T_1,\cdots,T_m$ 为由 S 的 $p+q$ 个子集 $A_1,\cdots,A_p$ 及 $B_1,\cdots,B_q$ 所生成的全部非空的最小集。由定理 A 知诸 A_i，B_j 均可表为若干个这样的非空最小集之并。于是存在 $I_1,\cdots,I_p$，$J_1,\cdots,J_q\subseteq I(m)$，使

$$A_i=\dot{\bigcup_{k\in I_i}} T_k \qquad (i=1,\cdots,p) \tag{1.11}$$

$$B_j=\dot{\bigcup_{k\in J_j}} T_k \qquad (j=1,\cdots,q) \tag{1.12}$$

记

$$c_{ik}=\begin{cases}1 & k\in I_i\\ 0 & k\notin I_i\end{cases} \tag{1.13}$$

及

$$d_{jk}=\begin{cases}1 & k\in J_j\\ 0 & k\notin J_j\end{cases} \tag{1.14}$$

则由(1.11)及(1.12)式立得：

$$w(A_i)=\sum_{k\in I_i}w(T_k)=\sum_{k=1}^{m}c_{ik}w(T_k) \tag{1.15}$$

$$w(B_j)=\sum_{k\in J_j}w(T_k)=\sum_{k=1}^{m}d_{jk}w(T_k) \tag{1.16}$$

$$\chi_{A_i}(x)=\sum_{k\in I_i}\chi_{T_k}(x)=\sum_{k=1}^{m}c_{ik}\chi_{T_k}(x) \tag{1.17}$$

$$\chi_{B_j}(x)=\sum_{k\in J_j}\chi_{T_k}(x)=\sum_{k=1}^{m}d_{jk}\chi_{T_k}(x) \tag{1.18}$$

于是

$$L(x)=\sum_{i=1}^{p}a_i\chi_{A_i}(x)=\sum_{i=1}^{p}a_i\left(\sum_{k=1}^{m}c_{ik}\chi_{T_k}(x)\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{p}a_ic_{ik}\right)\chi_{T_k}(x)$$

同理，

$$R(x)=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{q}b_jd_{jk}\right)\chi_{T_k}(x)$$

由$L(x)\equiv R(x)$假设及诸$T_1,\cdots,T_m$非空且二二不交，即得

$$\sum_{i=1}^{p}a_ic_{ik}=\sum_{j=1}^{q}b_jd_{jk}\qquad(1\leqslant k\leqslant m)$$

由(1.15)及(1.16)式，又得

$$\sum_{i=1}^{p}a_iw(A_i)=\sum_{i=1}^{p}a_i\left(\sum_{k=1}^{m}c_{ik}w(T_k)\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{p}a_ic_{ik}\right)w(T_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{q}b_jd_{jk}\right)w(T_k)=\sum_{j=1}^{q}b_j\left(\sum_{k=1}^{m}d_{jk}w(T_k)\right)=\sum_{j=1}^{q}b_jw(B_j)$$

于是(1.8)式成立，充分性得证。

注：当S为有限集时，引理的充分性可以由

$$\sum_{i=1}^{p}a_iw(A_i)=\sum_{i=1}^{p}a_i\left(\sum_{a\in S}\chi_{A_i}(a)w(a)\right)=\sum_{a\in S}L(a)w(a)$$

及

$$\sum_{j=1}^{q}b_jw(B_j)=\sum_{a\in S}R(a)w(a)$$

两关系式直接推出。

利用引理1可得到相应于任一最小集$B_X(A_1,\cdots,A_k)$的如下的计数公式（特别当$X=\phi$时，即得容斥原理）：

定理1：相应于最小集$B_X(A_1,\cdots,A_k)$，有如下的计数公式

$$w(B_X(A_1,\cdots,A_k))=\sum_{X\subseteq T\subseteq I(k)}(-1)^{|T|-|X|}w(A_T) \tag{1.19}$$

对任意集合S上的任意k个子集$A_1,\cdots,A_k$及S上的任意权函数w均成立。

证：利用如下的多项式恒等式

$$(\prod_{i\in X}x_i)(\prod_{j\notin X}(1-x_j))=\sum_{X\subseteq T\subseteq I(k)}(-1)^{|T|-|X|}(\prod_{i\in T}x_i)\tag{1.20}$$

任取$a\in S$，记$a_i=\chi_{A_i}(a)(i=1,\cdots,k)$。应用关系式
$\chi_{A\cap B}(a)=\chi_A(a)\cdot\chi_B(a)$及$\chi_{\bar{A}}(a)=1-\chi_A(a)$可得a对(1.19)式两边的纯贡献分别为

$$L(a)=\chi_{B_X(A_1,\cdots,A_k)}(a)=(\prod_{i\in X}a_i)(\prod_{j\notin X}(1-a_j))$$

和

$$R(a)=\sum_{X\subseteq T\subseteq I(k)}(-1)^{|T|-|X|}(\prod_{i\in T}(a_i))$$

由多项式恒等式(1.20)即知$L(a)=R(a)$。于是由引理1知计数公式(1.19)成立。

2. 集合运算函数的计数多项式

设$Z[x_1,\cdots,x_k]$为关于不定元$x_1,\cdots,x_k$的整系数多项式的集合。对任一$T\subseteq I(k)=\{1,\cdots,k\}$，记

$$x_T=\prod_{i\in T}x_i \qquad (约定x_\phi=1)\tag{2.1}$$

又定义$Z[x_1,\cdots,x_k]$的如下子集：

$$Z_0[x_1,\cdots,x_k]=\{\sum_{T\subseteq I(k)}b(T)x_T\,|\,诸b(T)均为整数\}\tag{2.2}$$

显然，对$Z_0[x_1,\cdots,x_k]$中任一多项式，其展开式中每一项均为若干个不同变元与一个整系数的乘积。

定理2：对任一(k元)集合运算函数$G(A_1,\cdots,A_k)$，存在唯一的一个多项式$f(x_1,\cdots,x_k)=\sum_{T\subseteq I(k)}b(T)x_T\in Z_0[x_1,\cdots,x_k]$，使计数公式

$$w(G(A_1,\cdots,A_k))=\sum_{T\subseteq I(k)}b(T)w(A_T)\tag{2.3}$$

对任意非空集合S上的任意k个子集$A_1,\cdots,A_k$及S上的任意权函数w均成立。

证　存在性，由第1节定理A知$G(A_1,\cdots,A_k)$可表为由$A_1,\cdots,A_k$生成的若干个不同的最小集之并，即存在$X_1,\cdots,X_m\subseteq I(k)$（**注意**：此地诸$X_i$与集合$S$无关），使

$$G(A_1,\cdots A_k)=\bigcup_{i=1}^{m}B_{X_i}(A_1,\cdots,A_k)\tag{2.4}$$

因不同的最小集间二二不交，故对任一权函数w有

$$w(G)=\sum_{i=1}^{m}w(B_{X_i})$$

今由定理1知诸$w(B_{X_i})(i=1,\cdots,m)$均可表为诸$w(A_T)(T\subseteq I(k))$的整系数线性组合的形式，故$w(G)$亦然。于是存在某一个（与集合S无关而仅依赖于集合运算函数$G(A_1,\cdots,$

A_k)的）$Z_0[x_1,\cdots,x_k]$中多项式$\sum\limits_{T\subseteq I(k)} b(T)x_T$，使计数公式(2.3)成立。

唯一性：我们把唯一性的证明归结为如下的引理2。

引理2 设S为任一非空集合。若下式

$$\sum_{T\subseteq I(k)} b(T)w(A_T)=0 \tag{2.5}$$

对S上任一权函数w及S的任意k个子集$A_1,\cdots,A_k$均成立，则诸系数$b(T)(T\subseteq I(k))$全为0。

证 任取$a\in S$，并取S上的权函数为$w(A)=\chi_A(a)$，我们对子集T的基数$|T|$作归纳法。设$T=T_0$，取$A_1,\cdots,A_k$为

$$A_i=\begin{cases}\phi & i\notin T_0\\ S & i\in T_0\end{cases} \tag{2.6}$$

于是，对$A_T=\bigcap\limits_{i\in T}A_i$，有

$$A_T=\begin{cases}\phi & T\not\subseteq T_0\\ S & T\subseteq T_0\end{cases} \tag{2.7}$$

从而

$$w(A_T)=\begin{cases}0 & T\not\subseteq T_0\\ 1 & T\subseteq T_0\end{cases} \tag{2.8}$$

将(2.8)式代入(2.5)式，即得

$$\sum_{T\subseteq T_0} b(T)=0 \tag{2.9}$$

由归纳法假设知当$T\subsetneq T_0$时有$b(T)=0$，于是(2.9)式成为$b(T_0)=0$，引理证毕。

利用引理2可立得定理2中的唯一性，故定理2得证。

定义1：定理2所给出的那个相应于集合运算函数$G(A_1,\cdots,A_k)$的唯一存在的$Z_0[x_1,\cdots,x_k]$中的多项式称为是$G(A_1,\cdots,A_k)$的计数多项式，记作$f_G(x_1,\cdots,x_k)$。

由上述定义可知，按如下步骤便可求出关于$w(G(A_1,\cdots,A_k))$的计数公式：

(1)求计数多项式$f_G(x_1,\cdots,x_k)$

(2)将计数多项写成完全展开式$\sum\limits_{T\subseteq I(k)} b(T)x_T$

(3)在完全展开形式中以$w(A_T)$代替x_T

由于(2)、(3)两步都是平凡的，故求关于$w(G(A_1,\cdots,A_k))$的计数公式的问题事实上等价于求一个多项式$f_G(x_1,\cdots x_k)$。例如，由下面引理3可知$G(A_1,A_2,A_3)=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap A_3$的计数多项式为$f_G(x_1,x_2,x_3)=(1-x_1)(1-x_2)x_3=x_3-x_1x_3-x_2x_3+x_1x_2x_3$，于是可得相应的计数公式为$w(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap A_3)=w(A_3)-w(A_1\cap A_3)-w(A_2\cap A_3)+w(A_1\cap A_2\cap A_3)$

引理3：设$G(A_1,\cdots,A_k)$是一个k元素集合运算函数。则$Z_0[x_1,\cdots,x_k]$中多项式$f(x_1,\cdots,x_k)=\sum\limits_{T\subseteq I(k)} b(T)x_T$是$G$的计数多项式的充要条件是下面的等式

$$\chi_{G(A_1,\cdots,A_k)}(a)=f(\chi_{A_1}(a),\cdots,\chi_{A_k}(a)) \qquad (2.10)$$

对任意$a\in S$及$A_1,\cdots,A_k\subseteq S$均成立。

证 由计数多项式的定义及引理2知$f(x_1,\cdots,x_k)=\sum\limits_{T\subseteq I(k)}b(T)x_T$是$G$的计数多项式的充要条件是计数公式(2.3)对任意$A_1,\cdots,A_k\subseteq S$及$S$上的任意权函数均成立。由引理1又知计数公式(2.3)成立的充要条件是S中任一元素a对(2.3)式两边的纯贡献$L(a)$和$R(a)$相等。经过简单计算易知$L(a)=\chi_{G(A_1,\cdots,A_k)}(a)$及

$$R(a)=\sum_{T\subseteq I(k)}b(T)\chi_{A_T}(a)=\sum_{T\subseteq I(k)}b(T)(\prod_{i\in T}\chi_{A_i}(a))=f(\chi_{A_1}(a),\ \cdots,\ \chi_{A_k}(a))$$

于是(2.10)式$\Longleftrightarrow L(a)=R(a)$。引理得证。

上述引理3说明了，计数多项式$f_G(x_1,\ \cdots,\ x_k)$实际上可视为$\chi_G(a)$依赖于诸“变元”$\chi_{A_i}(a)(i=1,\cdots,k)$的那个多项式。

接下去我们研究计数多项式的具体计算问题。下面的定理3说明了，较复杂的集合运运算函数的计数多项式可以由一些简单的集合运算函数的计数多项式通过初等代数运算而合成。

定理3： 设$G=G(A_1,\cdots,A_k)$和$H=H(A_1,\cdots,A_k)$为k元集合运算函数，则有：

1．（加法原则）：若$G(A_1,\cdots,A_k)\cap H(A_1,\cdots,A_k)\equiv\phi$，则

$$f_{G\cup H}(x_1,\cdots,x_k)=f_G(x_1,\cdots,x_k)+f_H(x_1,\cdots,x_k) \qquad (2.11)$$

2．（乘法原则）

若$I(k)=J_1\dot{\cup}J_2$(其中$J_1\cap J_2=\phi$，J_1，$J_2\neq\phi$)。集合函数$G(A_1,\ \cdots,A_k)$仅依赖于诸变元$\{A_i|i\in J_1\}$，而集合函数$H(A_1,\cdots,A_k)$仅依赖于诸变元$\{A_j|j\in J_2\}$(此时$f_G(x_1,\ \cdots,\ x_k)$和$f_H(x_1,\cdots,x_k)$中不出现相同的变元，从而其乘积$f_G\cdot f_H$仍然是$Z_0[x_2,\cdots,x_k]$中多项式)。

则 $$f_{G\cap H}(x_1,\cdots,x_k)=f_G(x_1,\cdots,x_k)\cdot f_H(x_1,\cdots,x_k) \qquad (2.12)$$

证 1.由计数多项式之定义及恒等式

$$w(G\dot{\cup}H)=w(G)+w(H)$$

知加法原则显然成立。

2.对任意非空集S及任意$a\in S$，由引理3知有

$$\chi_G(a)=f_G(\chi_{A_1}(a),\cdots,\chi_{A_k}(a))$$

及 $$\chi_H(a)=f_H(\chi_{A_1}(a),\cdots,\chi_{A_k}(a))$$

故 $$\chi_{G\cap H}(a)=\chi_G(a)\cdot\chi_H(a)=f_G(\chi_{A_1}(a)\cdots\chi_{A_k}(a))\cdot f_H(\chi_{A_1}(a),\cdots,\chi_{A_k}(a))$$

今由假设条件知多项式$f_G(x_1,\cdots,x_k)\cdot f_H(x_1,\cdots,x_k)$是$Z_0[x_1,\cdots,x_k]$中多项式，故由引理3知其即为$G\cap H$的计数多项式。证毕。

下面我们来看加法原则和乘法原则的几个应用之例。

例1：（最小集的计数多项式）若

$B_Y(A_1,\cdots,A_k)=(\bigcap_{i\in Y}A_i)\cap(\bigcap_{j\notin Y}\bar{A}_j)$ 为诸集合变元 A_1，…，A_k 的一个最小集，则其计数多项式为

$$f_{B_Y}(x_1,\cdots,x_k)=(\prod_{i\in Y}x_i)(\prod_{j\notin Y}(1-x_j))=\sum_{T\supseteq Y}(-1)^{|T|-|Y|}x_T \quad (2.13)$$

证 由计数多项式定义可直接验证

$$f_{A_i}(x_1,\cdots,x_k)=x_i \quad (2.14)$$

及

$$f_{\bar{A}_j}(x_1,\cdots,x_k)=1-x_j \quad (2.15)$$

利用乘法原则即得(2.13)之前一等式。(2.13)的后一等式则是个简单的多项式展开式。

例2：(Jordan公式)若$E_m=E_m(A_1,\cdots,A_k)$为集合S中恰属于$A_1,\cdots,A_k$中的m个子集的元素所成的集合，则$E_m(A_1,\cdots,A_k)$的计数多项式之展开式为：

$$f_{E_m}(x_1,\cdots,x_k)=\sum_{i=m}^{k}(-1)^{i-m}\binom{i}{m}(\sum_{|T|=i}x_T) \quad (2.16)$$

证 $E_m(A_1,\cdots,A_k)$可按如下形式写成若干个最小集之并：

$$E_m(A_1,\cdots,A_k)=\dot{\bigcup_{|Y|=m}}B_Y(A_1,\cdots,A_k) \quad (2.17)$$

于是由例1及加法原则知

$$f_{E_m}(x_1,\cdots,x_k)=\sum_{|Y|=m}f_{B_Y}(x_1,\cdots,x_k)=\sum_{|Y|=m}(\sum_{T\supseteq Y}(-1)^{|T|-|Y|}x_T) \quad (2.18)$$

这样问题已化为验证如下的一个多项式恒等式：

(2.18)右端＝(2.16)右端 (2.19)

今

$$\text{(2.18)右端}=\sum_{T\subseteq I(k)}(\sum_{\substack{Y\subseteq T\\|Y|=m}}(-1)^{|T|-m}x_T)$$

$$=\sum_{T\subseteq I(k)}\binom{|T|}{m}(-1)^{|T|-m}x_T=\sum_{i=m}^{k}\left(\sum_{|T|=i}\binom{i}{m}(-1)^{i-m}x_T\right)$$

$$=\sum_{i=m}^{k}(-1)^{i-m}\binom{i}{m}(\sum_{|T|=i}x_T)=\text{(2.16)右端}$$

于是(2.16)得证。

将(2.16)式写成计数公式之形式，即可得Jordan公式

$$w(E_m(A_1,\cdots,A_k))=\sum_{i=m}^{k}(-1)^{i-m}\binom{i}{m}\sum_{|T|=i}w(A_T) \quad (2.20)$$

由上述证明可见，Jordan公式之本质乃是一个多项式的初等恒等式(2.19)。

例3：若$T_m=T_m(A_1,\cdots,A_k)$表集合S中至少属于$A_1,\cdots,A_k$中的m个子集的元素所成的集合，则$T_m(A_1,\cdots,A_k)$的计数多项式为：

$$f_{T_m}(x_1,\cdots,x_k)=\sum_{i=m}^{k}(-1)^{i-m}\binom{i-1}{m-1}\Big(\sum_{|T|=i}x_T\Big) \tag{2.21}$$

证 显然，$T_m(A_1,\cdots,A_k)=\dot{\bigcup\limits_{j=m}^{k}} E_j(A_1,\cdots,A_k)$

故由例 2 及加法原则知

$$f_{T_m}(x_1,\cdots,x_k)=\sum_{j=m}^{k}\Big(\sum_{i=j}^{k}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}\Big(\sum_{|T|=i}x_T\Big)\Big)$$

$$=\sum_{i=m}^{k}\Big(\sum_{j=m}^{i}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}\Big)\Big(\sum_{|T|=i}x_T\Big)$$

利用组合恒等式（此式可用归纳法证明）

$$\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^{j}\binom{i}{j}=(-1)^{m-1}\binom{i-1}{m-1} \tag{2.22}$$

即得
$$\sum_{j=m}^{i}(-1)^{j}\binom{i}{j}=(-1)^{m}\binom{i-1}{m-1} \tag{2.23}$$

于是
$$f_{T_m}(x_1,\cdots,x_k)=\sum_{i=m}^{k}(-1)^{i-m}\binom{i-1}{m-1}\Big(\sum_{|T|=i}x_T\Big),$$
(2.21)式得证。

例4：（广容斥原理）我们先引进一些记号。设 $\mathscr{A}^i=\{A_1^i,\cdots,A_{m_i}^i\}(i=1,\cdots,n)$为 n 组集合变元。记

$$I(m_i)=\{1,\cdots,m_i\} \qquad (i=1,\cdots,n)$$

$$A_Y^i=\bigcap_{j\in Y}A_j^i \qquad (Y\subseteq I(m_i))$$

$$\bar{A}_Y^i=\bigcap_{j\in Y}\bar{A}_j^i$$

$$B_Y^i=A_Y^i\cap\bar{A}_{\bar{Y}}^i \qquad (\bar{Y}=I(m_i)\setminus Y)$$

这里 B_Y^i便是由第 i 组变元$\{A_1^i,\cdots,A_{m_i}^i\}$所生成的相应于足标集$Y$的最小集。又记

$$E_r^i=\bigcup_{\substack{Y\subseteq I(m_i)\\|Y|=r}}B_Y^i$$

及

$$E_{(r_1,\ldots,r_n)}=\bigcap_{i=1}^{n}E_{r_i}^i$$

这里集合运算函数$E_{(r_1,\ldots,r_n)}$表集合S中恰属于第 i 组子集$\mathscr{A}^i$中的r_i个子集（$i=1,\cdots,n$)的元素们构成的集合。再记

$$x_Y^i=\prod_{j\in Y}x_j^i \qquad (Y\subseteq I(m_i))$$

则$E_{(r_1,\dots,r_n)}$的计数多项式的展开形式为：

$$f_{E_{(r_1,\cdots,r_n)}}(x_1^1,\cdots,x_{m_1}^1,\cdots,x_1^n,\cdots,x_{m_n}^n)=$$

$$=\sum_{k_1=r_1}^{m_1}\cdots\sum_{k_n=r_n}^{m_n}\left(\prod_{i=1}^{n}(-1)^{k_i-r_i}\binom{k_i}{r_i}\right)\left(\sum_{|Y_1|=k_1}\cdots\sum_{|Y_n|=k_n}\sum_{j=1}^{n}x_{Y_j}^j\right) \tag{2.24}$$

证　由例2之(2.16)式及乘法原则知

$$f_{E_{(r_1,\dots,r_n)}}=\prod_{i=1}^{n}f_{E_{r_i}^i}(x_1^i,\cdots,x_{m_i}^i)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k_i=r_i}^{m_i}(-1)^{k_i-r_i}\binom{k_i}{r_i}\sum_{|Y_i|=k_i}x_{Y_i}^i\right) \tag{2.25}$$

这样问题已转化为一个初等代数问题，即证如下的一个多项式恒等式：

$$(2.24)\text{右端}=(2.25)\text{右端} \tag{2.26}$$

为验证(2.26)式，我们两次运用如下的多项式乘法公式：

$$\sum_{k_1\in S_1}\cdots\sum_{k_n\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}a_ik_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k_i\in S_i}a_ik_i\right) \tag{2.27}$$

即得

$$(2.24)\text{右端}=\sum_{k_1=r_1}^{m_1}\cdots\sum_{k_n=r_n}^{m_n}\left(\prod_{i=1}^{n}(-1)^{k_i-r_i}\binom{k_i}{r_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}\sum_{|Y_i|=k_i}x_{Y_i}^i\right)$$

$$=\sum_{k_1=r_1}^{m_1}\cdots\sum_{k_n=r_n}^{m_n}\left(\prod_{i=1}^{n}(-1)^{k_i-r_i}\binom{k_i}{r_i}\left(\sum_{|Y_i|=k_i}x_{Y_i}^i\right)\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k_i=r_i}^{m_i}(-1)^{k_i-r_i}\binom{k_i}{r_i}\left(\sum_{|Y_i|=k_i}x_{Y_i}^i\right)\right)=(2.25)\text{右端。}$$

于是(2.24)式得证。

将(2.24)式写成计数公式形式并记

$$W_{k_1,\cdots,k_n}=\sum_{|Y_1|=k_1}\cdots\sum_{|Y_n|=k_n}w\left(\bigcap_{j=1}^{n}A_{Y_j}^j\right)$$

即得广容斥原理

$$w(E_{(r_1,\cdots,r_n)})=\sum_{k_1=r_1}^{m_1}\cdots\sum_{k_n=r_n}^{m_n}W_{k_1,\cdots,k_n}\prod_{i=1}^{n}(-1)^{k_i-r_i}\binom{k_i}{r_i} \tag{2.28}$$

由上述证明可见，(2.28)式的本质乃是多项式恒等式(2.26)。

例5；（广容斥原理的推广）本例中各记号的意义同例4。我们再记

$$T_r^i=\bigcup_{j=r}^{m_i} E_j^i$$

又对$J\subseteq I(n)$，记

$$R_{(J;r_1,\cdots r_n)}=(\bigcap_{i\in J} T_{r_i}^i)\cap(\bigcap_{j\notin J} E_{r_j}^j)$$

这里$R_{(J;r_1,\ldots,r_n)}$表S中恰属于诸组$\mathscr{A}^j(j\notin J)$中的r_j个子集，且至少属于诸组$\mathscr{A}^i(i\in J)$中的r_i个子集的元素们构成的集合。又记集合$I(n)$上子集J的特征函数为χ_J。则$R_{(J;r_1,\ldots,r_n)}$的计数多项式的展开形式为：

$$f_{R(J;r_1,\cdots r_n)}(x_1^1\cdots,x_{m_1}^1,\cdots,x_1^n,\cdots,x_{m_n}^n)$$

$$=\sum_{k_1=r_1}^{m_1}\cdots\sum_{k_n=r_n}^{m_n}=\left(\prod_{i=1}^{n}(-1)^{k_i-r_i}\binom{k_i-\chi_J(i)}{r_i-\chi_J(i)}\right)\left(\sum_{|Y_1|=k_1}\cdots\sum_{|Y_n|=k_n}\prod_{j=1}^{n}x_{Y_j}^j\right)\quad(2.29)$$

证 由乘法原则及例2、例3知

$$f_{R(J;r_1,\cdots,r_n)}=\left(\prod_{i\in J}\left(\sum_{k_i=r_i}^{m_i}(-1)^{k_i-r_i}\binom{k_i-1}{r_i-1}\sum_{|Y_i|=k_i}x_{Y_i}^i\right)\right.$$

$$\cdot\left(\prod_{j\notin J}\left(\sum_{k_j=r_j}^{m_j}(-1)^{k_j-r_j}\binom{k_j}{r_j}\sum_{|Y_j|=k_j}x_{Y_j}^j\right)\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k_i=r_i}^{m_i}(-1)^{k_i-r_i}\binom{k_i-\chi_J(i)}{r_i-\chi_J(i)}\sum_{|Y_i|=k_i}x_{Y_i}^i\right)$$

然后与广容斥原理一样两次运用多项式乘法公式(2.27)即得(2.29)式。

将(2.29)式写成计数公式，即得广容斥原理的如下形式之推广：

$$w(R_{(J;r_1,\cdots,r_n)})=\sum_{k_1=r_1}^{m_1}\cdots\sum_{k_n=r_n}^{m_n}\left(W_{k_1,\cdots,k_n}\cdot\prod_{i=1}^{n}(-1)^{k_i-r_i}\binom{k_i-\chi_J(i)}{r_i-\chi_J(i)}\right)\quad(2.30)$$

(2.30)式当$J=\phi$时的特殊情形即为广容斥原理。

3. 计 数 子

为了避免两个计数多项式的乘积出现变元的高次幂($Z_0[x_1,\cdots,x_k]$中元对乘法不封闭)的情形，我们在乘法原则中假设了二个集合函数G和H分别依赖于二组完全不同的集合变元。当然我们希望去掉这一不太自然的假设条件。

考虑整系数多项式环$Z[x_1,\cdots,x_k]$的商环

$$R=\frac{Z[x_1,\cdots,x_k]}{\langle x_1^2-x_1,\cdots,x_k^2-x_k\rangle}=\frac{Z[x_1,\cdots,x_k]}{I}$$

其中$I=\langle x_1^2-x_1,\cdots,x_k^2-x_k\rangle$表$Z[x_1,\cdots,x_k]$中由多项式$(x_1^2-x_1)$，…，$(x_k^2-x_k)$们所生成的理想。

由于在商环R中有

$$(x_i+I)^n=x_i+I\qquad(n\geqslant1,\ i=1,\ \cdots,\ k)$$

即各变元的高次幂均可化为一次幂，故对R中任一元素$f(x_1,\cdots,x_k)+I$，通过将f的各项中诸变元的高次幂均改成一次幂，可以找到唯一的一个$Z_0[x_1,\cdots,x_k]$中的多项式$\bar{f}(x_1,\cdots,x_k)$，使

$$f(x_1,\cdots,x_k)+I=\bar{f}(x_1,\cdots,x_k)+I$$

易见，将$f(x_1,\cdots,x_k)+I$变为$\bar{f}(x_1,\cdots,x_k)$的这个映射是R到$Z_0[x_1,\cdots,x_k]$上的一个一一对应。因此，我们可以将集合$Z_0[x_1,\cdots,x_k]$中的元素与多项式商环R中的相应元素等同起来，这样前面所定义的计数多项式便都可视为R中的元素了。我们再按照R中元素的运算来定义计数多项式的加法和乘法，便可保证任意二个计数多项式的乘积仍在R中（即仍在$Z_0[x_1,\cdots,x_k]$中）了。

设$a_i\in\{0,1\}$，则$a_i^2=a_i(i=1,\cdots,k)$。对R中任一元$r=f(x_1,\cdots,x_k)+I$，我们定义r在$(a_1,\cdots,a_k)$点的值$r(a_1,\cdots,a_k)$为多项式f在该点的值$f(a_1,\cdots,a_k)$。若$f(x_1,\cdots,x_k)+I=g(x_1,\cdots,x_k)+I$，则存在$g_i(x_1,\cdots,x_k)\in Z[x_1,\cdots,x_k](i=1,\cdots,k)$，使

$$f(x_1,\cdots,x_k)=g(x_1,\cdots,x_k)+\sum_{i=1}^{k}g_i(x_1,\cdots,x_k)(x_i^2-x_i)$$

从而由$a_i^2=a_i$知$f(a_1,\cdots,a_k)=g(a_1,\cdots,g_k)$。于是$r(a_1,\cdots,a_k)$的定义与代表元$f(x_1,\cdots,x_k)$的选择无关，即定义是合理的。

特别，因特征函数之值恒为0或1，故R中任一元r在点$(\chi_{A_1}(a),\cdots,\chi_{A_k}(a))$上的值总是有合理定义的。

引进了多项式商环R作为计数多项式的合理框架之后，计数多项式的定义、引理3及乘法原则等可修改如下：

定义2： 设$r=f(x_1,\cdots,x_k)+I\in R$，其中$f(x_1,\cdots,x_k)\in Z_0[x_1,\cdots,x_k]$。若$f(x_1,\cdots,x_k)$是$G(A_1,\cdots,A_k)$的计数多项式，则称$r$为$G(A_1,\cdots,A_k)$的计数子(enumerator)，记作$r_G$。

由定义易见任一集合运算函数的计数子是存在唯一的。

引理4： R中元r是$G=G(A_1,\cdots,A_k)$的计数子的充要条件是：对任意非空集合S中的任意k个子集$A_1,\cdots,A_k$及S中任意元素a，均有

$$\chi_G(a)=r(\chi_{A_1}(a),\cdots\chi_{A_k}(a)) \tag{3.1}$$

证 设$r=f(x_1,\cdots,x_k)+I$，其中$f(x_1,\cdots,x_k)\in Z_0[x_1,\cdots,x_k]$。由定义知$r(\chi_{A_1}(a),\cdots,\chi_{A_k}(a)=f(\chi_{A_1}(a),\cdots,\chi_{A_k}(a))$。由计数子之定义及引理3，又知$r=r_G\Longleftrightarrow f=f_G\Longleftrightarrow$对任意$A_1,\cdots,A_k\subseteq S$及任意$a\in S$，有$\chi_G(a)=f(\chi_{A_1}(a),\cdots,\chi_{A_k}(a)=r(\chi_{A_1}(a),\cdots,\chi_{A_k}(a))$，引理证毕。

推论： 计数子r_G是R中的幂等元，即$r_G^2=r_G$

证 记$r=r_G^2-r_G\in R$。由引理4知

$$r(\chi_{A_1}(a),\ \cdots,\ \chi_{A_k}(a))=\chi^2{}_G(a)-\chi_G(a)=0=\chi_\phi(a)$$

故由引理4知r是空集ϕ的计数子。由计数子的唯一性知$r=0$，即$r_G^2=r_G$。

现在我们将计数多项式的乘法原则推广为计数子的“一般乘法原则”。

定理4（一般乘法原则）：对任意二个关于变元$A_1, \cdots, A_k$的集合运算函数$G(A_1, \cdots, A_k)$与$H(A_1, \cdots, A_k)$，有

$$r_{G\cap H} = r_G \cdot r_H \tag{3.2}$$

证 记$r = r_G \cdot r_H \in R$。因

$$\chi_{G\cap H}(a) = \chi_G(a) \cdot \chi_H(a) = r_G(\chi_{A_1}(a), \cdots, \chi_{A_k}(a)) \cdot r_H(\chi_{A_1}(a), \cdots, \chi_{A_k}(a))$$
$$= r(\chi_{A_1}(a), \cdots, \chi_{A_k}(a))$$

故由引理4知$r = r_{G\cap H}$。定理证毕。

下面我们考虑计数子的复合问题。仍以R表多项式商环$\dfrac{Z[x_1, \cdots, x_k]}{\langle x_1^2 - x_1, \cdots, x_k^2 - x_k\rangle}$。记$R^*$为另一多项式商环

$$R^* = \frac{Z[y_1, \cdots, y_m]}{\langle y_1^2 - y_1, \cdots, y_m^2 - y_m\rangle}$$

其中$I^* = \langle y_1^2 - y_1, \cdots, y_m^2 - y_m\rangle$是$Z[y_1, \cdots, y_m]$中一理想。一般说来，$R^*$中元素$r^* = g(y_1, \cdots, y_m) + I^*$与$R$中的$m$个元素$r_i = h_i(x_1, \cdots, x_k) + I (i = 1, \cdots, m)$的复合不一定总能合理地定义。因为复合后的元素

$$g(h_1(x_1, \cdots, x_k), \cdots, h_m(x_1, \cdots, x_k)) + I \tag{3.3}$$

虽与诸r_i的代表元$h_i(x_1, \cdots, x_k)$的选择无关，但却可能因r^*的代表元$g(y_1, \cdots, y_m)$的选择而异。然而，当诸$r_i (i = 1, \cdots, m)$都是R中的幂等元$(r_i^2 = r_i)$时，复合后的元素(3.3)就也与r^*的代表元$g(y_1, \cdots, y_m)$的选择无关了。这样，当诸r_i均为R中幂等元时，我们定义r^*与$r_1, \cdots, r_m$的复合为它们各自的(任意)代表元g与$h_1, \cdots, h_m$复合后的多项式$g(h_1(x_1, \cdots, x_k), \cdots, h_m(x_1, \cdots, x_k))$所相应的$R$中的元素$g(h_1(x_1, \cdots, x_k), \cdots, h_m(x_1, \cdots, x_k)) + I$，并记其为$r^*(r_1, \cdots, r_m)$。

特别，当诸r_i分别为集合运算函数$H_i(A_1, \cdots, A_k)$的计数子$(i = 1, \cdots, m)$时，由上面推论知诸r_i均为R中的幂等元。这样，计数子之间就总可以按上述之意义进行复合。

引进了计数子之间的复合概念后，我们就可以证明如下关于计数子的“复合原则”了。

定理5：设$G = G(B_1, \cdots, B_m)$为m元集合运算函数，而诸$H_i(A_1, \cdots, A_k) (i = 1, \cdots, m)$为$k$元集合运算函数。若记$G(H_1, \cdots, H_m)$为$G$与诸$H_i$的复合(集合运算)函数$G(H_1(A_1, \cdots, A_k), \cdots, H_m(A_1, \cdots, A_k))$，则有：

$$r_{G(H_1, \cdots, H_m)} = r_G(r_{H_1}, \cdots, r_{H_m}) \tag{3.4}$$

即复合(集合运算)函数的计数子是计数子的复合。

证 由计数子定义知

$$r_G = f_G(y_1, \cdots, y_m) + I^* \in R^*$$

及

$$r_{H_i} = f_{H_i}(x_1, \cdots, x_k) + I \in R$$

由计数子的复合定义又有

$$r_G(r_{H_1},\cdots,r_{H_m})=f_G(f_{H_1}(x_1,\cdots,x_k),\cdots,f_{H_m}(x_1,\cdots,x_k))+I \tag{3.5}$$

最后，两次应用引理 3 之(2.10)式，可得

$$\chi_{G(H_1,\cdots,H_m)}(a)=f_G(\chi_{H_1}(a),\cdots,\chi_{H_m}(a))$$
$$=f_G(f_{H_1}(\chi_{A_1}(a),\cdots,\chi_{A_k}(a)),\cdots,f_{H_m}(\chi_{A_1}(a),\cdots,\chi_{A_k}(a)))$$

于是由引理 4 知$f_G(f_{H_1}(x_1,\cdots,x_k),\cdots,f_{H_m}(x_1,\cdots,x_k))+I$是$G(H_1,\cdots,H_m)$的计数子。即$r_{G(H_1,\cdots,H_m)}=r_G(r_{H_1},\cdots,r_{H_m})$，定理证毕。

由于任一集合运算函数可由并、交、补三种（事实上交、补二种即够。为叙述方便起见，我们仍用三种）基本集合运算函数复合而成，故由复合原则知任一计数子亦可由如下三类基本计数子复合而成：

$$r_{\bar{A}}=(1-x)+I \tag{3.6}$$

$$r_{A_1\cap A_2}=x_1x_2+I \tag{3.7}$$

$$r_{A_1\cup A_2}=(x_1+x_2-x_1x_2)+I \tag{3.8}$$

于是复合原则为我们建议了计数子的如下计算方法：在R中定义一个新运算$\oplus$为：

$$r_1\oplus r_2=r_1+r_2-r_1r_2 \tag{3.9}$$

把$G(A_1,\cdots,A_k)$中诸A_i换成$\bar{x}_i$(此地$\bar{x}_i=x_i+I$)，交改为R中的乘法，并改为R中的“$\oplus$”运算，补看成R上的一元函数$f(r)=1-r$，则所得者即为$G(A_1,\cdots,A_k)$的计数子r_G。

从布尔代数的观点看，任一交换环T中的全部幂等元在按$a\oplus b=a+b-ab$，$a\odot b=ab$及$a'=1-a$所定义“$\oplus$”,“$\odot$”，“$'$”运算之下构成一个布尔代数$\tilde{T}$。而变元$A_1,\cdots,A_k$的全部集合运算函数在并、交、补运算下也构成一个布尔代数(集合代数)$\mathscr{A}$。计数子的复合原则事实上说明了，把$\mathscr{A}$中元素$G(A_1,\cdots,A_k)$变为其计数子r_G的映射是布尔代数$\mathscr{A}$到布尔代数$\tilde{R}$(R为前述之多项式商环)上的一个同构映射。

定理6　设$\mathscr{A}$和$\tilde{R}$为如上定义之布尔代数。则映射φ：$\mathscr{A}\to\tilde{R}$：$\varphi(G(A_1,\cdots,A_k))=r_G$，是布尔作数$\mathscr{A}$和$\tilde{R}$间的一个同构映射。

证　φ是同态：

由计数子的复合原则知有

$$r_{G\cup H}=r_G+r_H$$

$$r_{G\cap H}=r_G\odot r_H$$

$$r_{\bar{G}}=r'_G$$

于是φ是一个布尔代数的同态。

φ是单射：若$r_G=r_H$，则由引理 4 知对任意$a\in S$，有$\chi_G(a)=\chi_H(a)$，于是$G=H$。

φ是满射：我们证明$|\mathscr{A}|=|\tilde{R}|=2^{2^k}$。

因$A_1,\cdots,A_k$共可生成2^k个不同的最小集，其中任意若干个不同的最小集之并便共有

2^{2^k}个，由定理A即得$|\mathscr{A}|=2^{2^k}$

记$R=R_k$。R_k中任一元素可记为$a\bar{x}_k+b$，其中$a,b\in R_{k-1}$。于是

$a\bar{x}_k+b$是幂等元$\Longleftrightarrow(a\bar{x}_k+b)^2=a\bar{x}_k+b$

$$\Longleftrightarrow b^2=b \quad \text{且} a^2+2ab=a$$

$$\Longleftrightarrow b^2=b \quad \text{且}(a+b)^2=a+b$$

$$\Longleftrightarrow b \text{ 和 } a+b \text{ 均是 } R_{k-1} \text{ 中的幂等元}$$

即 $a\bar{x}_k+b\in\tilde{R}_k\Longleftrightarrow b$，$(a+b)\in\tilde{R}_{k-1}$。由此即知$|\tilde{R}_k|=|\tilde{R}_{k-1}|^2$。今$R_1$中恰有4个幂等元0，1，$\bar{x}$，$1-\bar{x}$，即$|\tilde{R}_1|=2^2$。由递推关系即得$|\tilde{R}_k|=2^{2^k}$。于是$|\mathscr{A}|=|\tilde{R}|$，$\varphi$是满射。定理证毕。

作者感谢四川大学魏万迪教授所给予的有益帮助。

参 考 文 献

[1]洪帆著，《离散数学基础》。华中工学院出版社。1983年 §1.9,P21—23

[2]魏万迪，广容斥原理及其应用，科学通报，1980，中文版NO.7，296—299；英文版NO.3，196—200

ENUMERATION POLYNOMIALS AND ENUMERATORS

Shao, Jiayu

(Tongji University)

Abstract

The inclusion-exclusion and generalized inclusion-exclusion principle can be viewed as enumeration principles corresponding to some special"operative set functions". We show that there exists an enumeration principle corresponding to any "operative set function" and there exists a unique polynomial--enumeration polynomial which directly gives the corresponding enumeration principle. As examples, we give simple proofs and some new generalizations of inclusion-exclusion and generalized inclusion-exclusion principle. As a further generalization of enumeration polynomial, We discuss the concept of "enumerator", its properies, computing methods and the relation with the isomorphism map between some boolean algebras.