DOI:10.13627/j.cnki.cdjy.2000.03.025

巧用牛顿恒等式及推论解题

□蔡 麟

牛顿恒等式 对于数列$\{a_n\}$,$a_n=Ax_1^n+Bx_2^n$,若x_1、x_2是方程$x^2+px+q=0$的两根,则

$$a_n=-pa_{n-1}-qa_{n-2}.$$

证明 由条件得 $x_1^2=-px_1-q,x_2^2=-px_2-q$,

故 $-pa_{n-1}-qa_{n-2}$

$=-p(Ax_1^{n-1}+Bx_2^{n-1})-q(Ax_1^{n-2}+Bx_2^{n-2})$

$=Ax_1^{n-2}(-px_1-q)+Bx_2^{n-2}(-px_2-q)$

$=Ax_1^{n-2}\cdot x_1^2+Bx_2^{n-2}\cdot x_2^2=Ax_1^n+Bx_2^n$,

即 $a_n=-pa_{n-1}-qa_{n-2}$.

推论1 若数列$\{a_n\}$的通项$a_n=a\alpha^n+b\beta^n(\alpha\neq\beta)$,则$n>2$时有 $a_n=(\alpha+\beta)a_{n-1}-\alpha\beta a_{n-2}$.

证明 设$\alpha+\beta=p,\alpha\beta=q$,则$\alpha$、$\beta$为方程$x^2-px+q=0$的两根,

$\alpha^2-p\alpha+q=0$ (1)

$\beta^2-p\beta+q=0$ (2)

由(1)有 $a\alpha^{n-2}(\alpha^2-p\alpha+q)=a(\alpha^n-p\alpha^{n-1}+q\alpha^{n-2})=0$,

同理 $b(\beta^n-p\beta^{n-1}+q\beta^{n-2})=0$,

两式相加得 $a_n-pa_{n-1}+qa_{n-2}=0$,

即 $a_n=(\alpha+\beta)a_{n-1}-\alpha\beta a_{n-2}$ $(n\geqslant3)$.

用同样的推理方法,可得

推论2 若数列$\{a_n\}$的通项$a_n=a\alpha^n+b\beta^n+c\gamma^n$($\alpha$、$\beta$、$\gamma$互不相等),则当$n\geqslant3$时,有

$a_n=(\alpha+\beta+\gamma)a_{n-1}-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)a_{n-2}+\alpha\beta\gamma a_{n-3}$.

下面举例说明牛顿恒等式及推论的应用。

一、判断整除性

例1 试证:$11^{n+2}+12^{2n+1}(n=0,1,2,\cdots)$能被133整除。

证明 设$a_n=11^{n+2}+12^{2n+1}$

$=121\times11^n+12\times144^n$,

$\because$ 11、144是方程$x^2-155x+1584=0$的两根,

$\therefore$ $a_n=155\times a_{n-1}-1584\times a_{n-2}(n\geqslant2)$,

又 $a_0=133,a_1=3059=133\times23$均能被133整除,

由逆推式知:$a_n=11^{n+2}+12^{2n+1}$能被133整除。

例2 求证:$(7+4\sqrt{3})^n$的小数部分是以至少n个9开头的。

证明 设$a_n=(7+4\sqrt{3})^n+(7-4\sqrt{3})^n$,

$\because$ $7+4\sqrt{3}$、$7-4\sqrt{3}$是方程,$x^2-14x+1=0$的两根,

$\therefore$ $a_n=14a_{n-1}-a_{n-2}(n\geqslant3)$。

又 $a_1=14,a_2=194$,由逆推式知

对任何$n\in N$,a_n为正整数

$\because$ $0<7-4\sqrt{3}<7-1.73\times4<0.1$,

$\therefore$ $0<(7-4\sqrt{3})^n<0.1^n$,

从而$(7+4\sqrt{3})^n=a_n-(7-4\sqrt{3})^n<a_n-0.1^n$,

故$(7+4\sqrt{3})^n$的小数部分是以至少n个9开头的。

二、求数列的逆推式

例3(1981年全国高考附加题) 以AB为直径的半圆有一个内接正方形$CDEF$,其边长为1,设$AC=a$,$BC=b$,作数列$u_1=a-b,u_2=a^2-ab+b^2,u_3=a^3-a^2b+ab^2-b^3,\cdots,u_k=a^k-a^{k-1}b+a^{k-2}b^2-\cdots+(-1)^kb^k$,

求证:$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ $(n\geqslant3)$.

证明 由已知得通项

$u_n=a_n-a^{n-1}b+a_{n-2}b^2-\cdots+(-1)^nb^n$

$=[a^{n+1}-(-b)^{n+1}]\div(a+b)$

$=\frac{a}{a+b}a^n+\frac{b}{a+b}(-b)^n$,

收稿日期:1999.09.15

蔡 麟 四川省绵阳市水电学校(621000)

由推论1得 $u_n=(a-b)u_{n-1}-(-ab)u_{n-2}\quad(n\geqslant3)$,

而 $a-b=AC-BC=AC-AF=FC=1$,

$ab=AC\times BC=CD^2=1$

故 $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}\quad(n\geqslant3)$.

三、求值、化简

例4 已知 $\sin x+\cos x=m$,求 $\sin^4x+\cos^4x$.

解 设 $a_n=\sin^nx+\cos^nx\quad(n\in N)$,则

$$p=a_1=\sin x+\cos x=m,$$

$$a_2=\sin^2x+\cos^2x=1,$$

于是 $q=\sin x\cos x=\frac{1}{2}(a_1^2-a_2)$

$$=\frac{1}{2}(m^2-1),$$

根据推论1,$a_n=ma_{n-1}-qa_{n-2}\quad(n\geqslant3)$,

$\therefore\quad a_3=ma_2-qa_1=m-mq$,

$$a_4=ma_3-qa_2=-\frac{1}{2}m^4+m^2+\frac{1}{2},$$

即 $\sin^4x+\cos^4x=-\frac{1}{2}m^4+m^2+\frac{1}{2}$.

例5 设 $x+y=1,x^2+y^2=2$,求 x^7+y^7 的值(1979年日本高考题)

解 设 $a_n=x^n+y^n$,则 $p=a_1=x+y=1,a_2=x^2+y^2=2$,于是 $q=xy=\frac{1}{2}(a_1^2-a_2)=-\frac{1}{2}$,由推论1

$$a_n=(x+y)a_{n-1}-xya_{n-2}=a_{n-1}+\frac{1}{2}a_{n-2},$$

$$\therefore\quad a_3=a_2+\frac{1}{2}a_1=2+\frac{1}{2}\times1=\frac{5}{2},$$

依次可得 $a_4=\frac{7}{2},a_5=\frac{19}{4},a_6=\frac{26}{4}$,

$$a_7=a_6+\frac{1}{2}a_5=\frac{26}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{19}{4}=\frac{71}{8},$$

即 $x^7+y^7=\frac{71}{8}$.

四、证明条件等式

例6 求证 $\sin^5(\alpha-120^\circ)+\sin^5\alpha+\sin^5(\alpha+120^\circ)=-\frac{15}{16}\sin3\alpha$.

证明 设 $a_n=\sin^n(\alpha-120^\circ)+\sin^n\alpha+\sin^n(\alpha+120^\circ)$,则 $a_0=3$,易知

$$p=a_1=\sin(\alpha-120^\circ)+\sin\alpha+\sin(\alpha+120^\circ)=0\quad(1)$$

$$q=\sin(\alpha-120^\circ)\sin\alpha+\sin\alpha\sin(\alpha+120^\circ)+\sin(\alpha+120^\circ)\sin(\alpha-120^\circ)=-\frac{3}{4}\qquad(2)$$

$$s=\sin(\alpha-120^\circ)\sin\alpha\sin(\alpha+120^\circ)=-\frac{\sin3\alpha}{4},$$

由(1)、(2)可得

$$a_2=\sin^2(\alpha-120^\circ)+\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+120^\circ)=a_1^2-2\cdot q=\frac{3}{2},$$

根据推论2 $qa_n=-qa_{n-2}+sa_{n-3}(n\geqslant3)$,

$$\therefore\quad a_3=-qa_1+sa_0=-\frac{3}{4}\sin3\alpha,$$

$$a_5=-qa^3+sa_2=\frac{3}{4}\left(-\frac{3}{4}\sin3\alpha\right)-\frac{1}{4}\sin3\alpha\times\frac{3}{2}=-\frac{15}{16}\sin3\alpha,\text{即}$$

$$\sin^5(\alpha-120^\circ)+\sin^5\alpha+\sin^5(\alpha+120^\circ)=-\frac{15}{16}\sin3\alpha.$$

例7 已知 $\alpha+\beta+\gamma=0$,求证:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}\cdot\frac{\alpha^5+\beta^5+\gamma^5}{5}=\frac{\alpha^7+\beta^7+\gamma^7}{7}.$$

(1957年上海市数学竞赛题)

证明 设 $a_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$,则 $a_0=3,p=a_1=\alpha+\beta-\gamma=0,q=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,s=\alpha\beta\gamma$,

于是 $a_2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

$$=a_1^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=-2q,$$

根据推论2 $a_n=-qa_{n-2}+sa_{n-3}(n\geqslant3)$,

$\therefore\quad a_3=-qa_1+sa_0=3s,a_4=-qa_2+sa_1=2q^2$,

$a_5=-qa_3+sa_2=-5qs$,

$a_7=-qa_5+sa_4=5q^2s+2q^2s=7q^2s$,

$$\therefore\quad\frac{a_2}{2}\times\frac{a_5}{5}=\frac{a_7}{7},$$

故 $\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}\cdot\frac{\alpha^5+\beta^5+\gamma^5}{5}=\frac{\alpha^7+\beta^7+\gamma^7}{7}$.

五、简化数学归纳法证明的第二步

例8 求证:$(3+\sqrt5)^n+(3-\sqrt5)^n$ 能被 2^n 整除。

证明 设 $a_n=(3+\sqrt5)^n+(3-\sqrt5)^n$,

1° $\because a_1=6,\quad a_2=28,\quad\therefore 2\mid a_1,\quad 2^2\mid a_2$,

2° 假设 $2^{k-1}\mid a_{k-1},\quad 2^k\mid a_k\quad(k\geqslant2)$,

当 $n=k+1$ 时,根据推论1

$$a_{k+1}=(3+\sqrt5+3-\sqrt5)a_k-(3+\sqrt5)\cdot(3-\sqrt5)a_{k-1}=6a_k-4a_{k-1}\quad(k\geqslant2),$$

由假设易知,$2^{k+1}\mid6a_k,\ 2^{k+1}\mid4a_{k-1}$,因此 $2^{k+1}\mid a_{k+1}$,

由1°、2°知,对一切 $n\in N$,

$$2^n\mid[(3+\sqrt5)^n+(3-\sqrt5)^n].$$