2003年 第 4期

萍乡高等专科学校学报

Journal of Pingxiang College

2003 NO. 4

欧拉函数一个性质的推广及应用

李 汝 全

(萍乡高等专科学校,江西 萍乡 337000)

关于欧拉函数 $\varphi(x)$ 有如下一个性质:

若 m 是大于 1的正整数,a 是整数,$(a,m)=1$, ξ通过模 m 的简化剩余系,则

$$\sum_{\xi}\left\{\frac{a\xi}{m}\right\}=\frac{1}{2}\varphi(m).\qquad(\text{其中 }\{x\}=x-[x],\ [x]\text{ 是不超过 }x\text{ 的最大整数})$$

证明:因 $(a,m)=1$, ξ通过模 m 的简化剩余系,则 $a\xi$ 也通过模 m 的简化剩余系。由带余除法有 $a\xi_i=mq_i+r_i\quad 0<r_i<m,\ q_i\in Z,\ i=1,2,\cdots\cdots\varphi(m)$,显然 $(r_i,m)=1$,所以 r_i 通过模 m 的非负最小简化剩余系,又因为 $(m-r_i,m)=1$,故 $m-r_i$ 也通过模 m 的非负最小简化剩余系,从而

$$\sum_{i=1}^{\varphi(m)}\frac{r_i}{m}=\sum_{i=1}^{\varphi(m)}\frac{m-r_i}{m}\quad\text{于是},\ 2\sum_{\xi}\left\{\frac{a\xi}{m}\right\}=2\sum_{i=1}^{\varphi(m)}\frac{r_i}{m}=\sum_{i=1}^{\varphi(m)}\frac{r_i}{m}+\sum_{i=1}^{\varphi(m)}\frac{m-r_i}{m}=\sum_{i=1}^{\varphi(m)}\frac{r_i+m-r_i}{m}=\varphi(m)$$

故

$$\sum_{\xi}\left\{\frac{a\xi}{m}\right\}=\frac{1}{2}\varphi(m)$$

仔细分析上面的证明过程,可知它能推广成如下命题:

若 m 是大于 1的正整数,a 和 b 是整数。$(a,m)=1$, ξ通过模 m 的完全剩余系。则

$$\sum_{\xi}\left\{\frac{a\xi+b}{m}\right\}=\frac{m-1}{2}\qquad\text{证明(略)}$$

上式右边与 b 无关,当 $b=0$ 时,$\sum_{\xi}\left\{\frac{a\xi}{m}\right\}=\frac{m-1}{2}$

由上式,我们可方便地证得数学奥林匹克的两道试题:

1. 假定 a,b 是互素的正整数,求证

$$\left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{2a}{b}\right]+\left[\frac{3a}{b}\right]+\cdots\cdots+\left[\frac{(b-1)a}{b}\right]=\frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

证明:
$$\sum_{\xi=1}^{b-1}\left[\frac{a\xi}{b}\right]=\sum_{\xi=1}^{b-1}\frac{a\xi}{b}-\sum_{\xi=1}^{b-1}\left\{\frac{a\xi}{b}\right\}=\frac{a}{b}[1+2+3+\cdots\cdots+(b-1)]-\frac{b-1}{2}$$
$$=a\cdot\frac{b-1}{2}-\frac{b-1}{2}=\frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

2. 计算和式的值: $\sum_{n=0}^{502}\left[\frac{305n}{503}\right]$

此题即上题中令 $a=305,b=503$ 即是

故 $\sum_{n=0}^{502}\left[\frac{305n}{503}\right]=\frac{304\times502}{2}=304\times251=76304$

责任编辑: 林元重

① 收稿日期: 2003-10-20