第 25 卷 第 3 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 25 No. 3
2002 年 7 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　July, 2002

严格非匀称线性超树的计数公式*

单志龙
(华南理工大学电子与信息学院, 广州 510640)
柳柏濂
(华南师范大学数学系, 广州 510631)

C1 A

摘　要　本文应用容斥原理, 得到了有 n 个顶点、m 条边的严格非匀称标号线性无圈超图的计数公式.

关键词　超图, 线性超图, 超树, 二部树

1　引言

超图和超树描述了有限集合的集合系统, 在离散数学中它们是最一般的结构且起着很重要的作用. 近年的研究表明, 超图和超树在计算机科学的关系数据库设计中非常有用 [1,2].

定义 1　二元组 $H=(V,\varepsilon)$ 为一个超图, 如果 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 是有限集, $\varepsilon=\{E_i\mid i=1,2,\cdots,m\}$ 是 V 的子集的一个族. 若 $E_i\neq\phi$, $1\le i\le m$, 且 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}E_i=V$. $|V|=n$ 称为 $H=(V,\varepsilon)$ 的阶, V 中的元称为顶点, ε 中的元称为边. 若 $E_i\in\varepsilon$, 且 $|E_i|=1$, 则 E_i 称为环 (loop). $\max\limits_i|E_i|$ 称为 H 的秩.

在超图 H 中, 一个顶点 v 称为孤立的, 如果它仅仅属于一条边. 一条边 E 称为 H 的一个耳朵, 如果存在 $E'\in\varepsilon\backslash E$, 使得 $E\backslash E'$ 中的每个顶点是孤立的. 设 E 是一个耳朵, 称从 H 除去 E 为耳朵移除. 重复耳朵移除直到不能再移除为止, 所得到的超图称为是原超图的 Graham 约化.

一个超图称为是无圈的, 如果它的 Graham 约化是空的. 在超图 H 中, 若对任两条不同的边 $E_1,E_2\in\varepsilon$, 在 ε 中均存在一边序列 $f_1,f_2,\cdots,f_k$, 使得 $E_1=f_1,E_2=f_k$ 且 $f_i\cap f_{i+1}\neq\phi$, $1\le i\le k-1$, 则称 H 是连通的.

定义 2　H 称为超树, 如果超图 H 是连通且不含圈的. 若任意 $E_i\in\varepsilon$, $|E_i|=M$(常数), 则称 H 是秩为 M 的匀称超树. 超图 H 称为是线性的, 如果对于每一对边 $E_1,E_2\in\varepsilon$, 都有 $|E_1\cap E_2|\le 1$. 如果线性超树 H 的 m 条边所含的顶点数各不相等, 则称 H 为严格非匀称线性超树.

最近, 我们求得了 $(k+1)$ 秩匀称线性无圈超图和非标号线性无圈超图的计数公式 [3], 王建方和李海珠求得了标号匀称线性无圈超图的递归公式. 本文在此基础上求得严

本文 2000 年 4 月 25 日收到. 2001 年 10 月 15 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (10071025 号) 和广东省自然科学基金 (011490 号) 资助项目.

格非匀称线性超树计数公式.

2 基本结果

若 H 是一有 m 条边的超图，那么以 $\varepsilon(H)$ 为顶点集，以 $\{E_iE_j|E_i,E_j\in\varepsilon(H),\ E_i\cap E_j\neq\phi\}$ 为边集的图称为 H 的线图，记为 $L(H)$. 对于 $L(H)$ 中的每条边我们都分配以权 $|E_i\cap E_j|$, 且用 $\omega(H)$ 记线图 $L(H)$ 中一个森林的最大权. 非负参数 $\mu(H)$ 称为 H 的圈数 (cyclomatic number), 其中

$$\mu(H)=\sum_{i=1}^{m}|E_i|-\Big|\bigcup_{i=1}^{m}E_i\Big|-\omega(H). \tag{1}$$

引理 1 H 是无圈超图当且仅当 $\mu(H)=0$(见 [2]).

如果 $a_j(1\le j\le m)$ 是正整数，则我们有

引理 2 对于每一个 $i\ (1\le i\le m-2)$ 都有

$$\begin{aligned}&\sum_{1\le j\le m}a_j^i-\sum_{1\le j_1<j_2\le m}(a_{j_1}+a_{j_2})^i+\sum_{1\le j_1<j_2<j_3\le m}(a_{j_1}+a_{j_2}+a_{j_3})^i\\&+\cdots+(-1)^{m-1}(a_1+a_2+\cdots+a_m)^i=0.\end{aligned} \tag{2}$$

证 用 $g(i,m)$ 表示把 i 件相异物体放进编号为 1 的 a_1 个盒子，编号为 2 的 a_2 个盒子， $\cdots$, 编号为 m 的 a_m 个盒子的总共 $a_1+a_2+\cdots+a_m$ 个盒子中，使得每组有相同编号的盒子非空的不同分配方法数. 因为 $1\le i\le m-2$, 故显然有 $g(i,m)=0$.

用 S 表示把 i 件相异物体放进 $a_1+a_2+\cdots+a_m$ 个盒子的全部不同方法所成之集，则有 $|S|=(a_1+a_2+\cdots+a_m)^i$. 设 $s\in S$, 若在分配方法 s 之下，编号为 $j\ (1\le j\le m)$ 的 a_j 个盒子没有分得一件物体，则称 s 具有性质 P_j. 对任意的 $k\ (1\le k\le m)$ 个正整数 $j_1,j_2,\cdots,j_k\ (1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le m)$, 以 $N(P_{j_1}P_{j_2}\cdots P_{j_k})$ 表示 S 中同时具有性质 $P_{j_1}P_{j_2}\cdots P_{j_k}$ 的元素个数，则 $N(\overline{P}_{j_1}\overline{P}_{j_2}\cdots\overline{P}_{j_k})$ 表示 S 中无性质 $P_{j_1}P_{j_2}\cdots P_{j_k}$ 的元素个数. 易见

$$N(P_{j_1}P_{j_2}\cdots P_{j_k})=(a_{j_{k+1}}+a_{j_{k+2}}+\cdots+a_{j_m})^i, \tag{3}$$

且 $g(i,m)=N(\overline{P_1P}_2\cdots\overline{P}_m)$, 由容斥原理可知

$$\begin{aligned}g(i,m)=&|S|+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le m}N(P_{j_1}P_{j_2}\cdots P_{j_k})\\=&|S|+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le m}(a_{j_{k+1}}+a_{j_{k+2}}+\cdots+a_{j_m})^i\\=&(a_1+a_2+\cdots+a_m)^i-\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_{m-1}\le m}(a_{j_1}+a_{j_2}+\cdots+a_{j_{m-1}})^i\\&+\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_{m-2}\le m}(a_{j_1}+a_{j_2}+\cdots+a_{j_{m-2}})^i+\cdots+(-1)^{m-1}\sum_{1\le j\le m}a_j^i=0.\end{aligned} \tag{4}$$

对 (4) 式两端同时乘以 $(-1)^{m-1}$, 即可得到 (2) 式. 得证.

引理 3　若 $a_i \geq 1\ (1 \leq i \leq m)$，$n \geq \sum\limits_{i=1}^{m} a_i$，则下式成立：

$$\binom{n}{a_{i_1},\cdots,a_{i_j}}\binom{n-\sum\limits_{k=1}^{j} a_{i_k}}{a_{i_{j+1}},\cdots,a_{i_m}}=\binom{n}{a_1,a_2,\cdots,a_m}, \tag{5}$$

其中 $a_{i_1},\cdots,a_{i_m}$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 的一个重新排列.

证　把上式左边展开就可得到右式. 详细证明略.

3　主要结果

我们把有 n 个顶点，m 条边的严格非匀称线性超树的集合记作 $\tau^*(n,m)$，且令 $t^*=|\tau^*(n,m)|$. 假设一棵严格非匀称线性超树的 m 条边所含的顶点数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_m$，不失一般性，设 $n_1<n_2<\cdots<n_m$. 我们把这样的严格非匀称线性超树的集合记为 $\tau(n;n_1,n_2,\cdots,n_m)$，令 $t=|\tau(n;n_1,n_2,\cdots,n_m)|$.

如果 $H\in\tau^*(n,m)$，则容易得到 $\omega(H)=m-1$. 于是由引理 1 有 $\mu(H)=\sum\limits_{i=1}^{m} n_i-n-(m-1)=0$，即

$$n=\sum_{i=1}^{m} n_i-(m-1). \tag{6}$$

不难看出，$t^*(n,m)$ 与 $t(n;n_1,n_2,\cdots,n_m)$ 有如下关系式：

$$t^*(n,m)=\sum_{n_1<n_2<\cdots<n_m} t(n;n_1,n_2,\cdots,n_m), \tag{7}$$

其中，$\sum\limits_{i=1}^{m} n_i=n+(m-1)$. 于是，我们只须求出 $t(n;n_1,n_2,\cdots,n_m)$ 即可. 为了方便起见，我们首先只考虑无环严格非匀称线性超树的情形，且为了简洁，在下面的讨论中我们用 $\binom{n}{n_{j_1},n_{j_2},\cdots,n_{j_k}}$ 来代替 $\dfrac{n!}{n_{j_1}!n_{j_2}!\cdots n_{j_k}!\left(n-\sum\limits_{i=1}^{k} n_{j_i}\right)!}$.

定理 4　如果 $n>n_m\geq 2$，则对于有 m 条边，且这 m 条边所含的顶点数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_m$ 的无环严格非匀称线性超树有

$$t(n;n_1,n_2,\cdots,n_m)=\binom{n}{a_1,a_2,\cdots,a_m}n^{m-2}, \tag{8}$$

其中 $a_i=n_i-1$.

证　设 $H\in\tau(n;n_1,n_2,\cdots,n_m)$，则 H 的第一个影子定义如下

$$H_{(1)}=\{S\in V^{(1)}:S\subseteq E,\ \text{其中 } E \text{ 是 } H \text{ 的某些耳朵}\},$$

其中 $V^{(1)}=\{A\subseteq V:|A|=1\}$. 我们首先选定一条边，不妨设该边含有 n_1 个顶点，则其第一个影子的个数为 $\binom{n_1}{1}$，然后再在其上添加其它的边，每添加一条边其第一个影子的个数就增加 $\binom{n_i}{1}-1\ (2\leq i\leq m)$，于是可以得到

$$|H_{(1)}|=\binom{n_1}{1}+\binom{n_2}{1}-1+\binom{n_3}{1}-1+\cdots+\binom{n_m}{1}-1=\sum_{i=1}^{m} n_i-(m-1)=n. \tag{9}$$

现在我们通过对 n 用归纳法来证明 (8) 式. 如果 $m=1$, 即 n 等于 $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 中的一个, 易验证 (8) 式是平凡的. 假设 $n > n_m \geq 2$ 而且对于小于 n 的数, (8) 都成立. 令 $a_i = n_i - 1$, 因为 H 是无环的, 故有 $n_i \geq 2$, 即 $a_i \geq 1$. 令 $X = V^{(a_1)} \cup V^{(a_2)} \cup \cdots \cup V^{(a_m)}$, $S = V^{(a_{i_1})} \cup V^{(a_{i_2})} \cup \cdots \cup V^{(a_{i_j})}$, 其中 $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_j}\} \subseteq \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ $(1 \leq j \leq m)$, 则 $S \subseteq X$. 又令

$$A_S = \{H \in \tau(n; n_1, n_2, \cdots, n_m): \text{对每一个 } t \in S,\ v \in t \text{ 有 } \deg_H(v) = 1,\ \text{且 } t \subseteq E, \text{其中 } E \text{ 是 } H \text{ 的某些耳朵}\}.$$

显然 $A_S \neq \phi$ 当且仅当对于任意对 $t_1, t_2 \in S$ 有 $t_1 \cap t_2 = \phi$ 且 $|S| \leq m$. 如果 $A_S \neq \phi$, 则 $H_1 = H - \bigcup\limits_{t \in S} t \in \tau(n - \sum\limits_{k=1}^{j} a_{i_k}; n_{i_{j+1}}, n_{i_{j+2}}, \cdots, n_{i_m})$, 其中 $|S| = j$.

由归纳假设和 (9) 式可以得到

$$\begin{aligned} |A_S| &= |(H_1)_{(1)}|^j t\Big(n - \sum_{k=1}^{j} a_{i_k}; n_{i_{j+1}}, n_{i_{j+2}}, \cdots, n_{i_m}\Big) \\ &= \Big(n - \sum_{k=1}^{j} a_{i_k}\Big)^{m-2} \binom{n - \sum\limits_{k=1}^{j} a_{i_k}}{a_{i_{j+1}}, a_{i_{j+2}}, \cdots, a_{i_m}}, \end{aligned} \tag{10}$$

又有

$$\big|\{S \subseteq X: A_S \neq \phi,\ |S| = j\}\big| = \binom{n}{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_j}}. \tag{11}$$

于是由容斥原理和引理 3 可知

$$\begin{aligned} &t(n; n_1, n_2, \cdots, n_m) = \Big|\bigcup_{x \in X} A_x\Big| = \sum_{S \subseteq X} (-1)^{|S|-1} |A_S| \\ =& \sum_{i=1}^{m} \binom{n}{a_i} \binom{n - a_i}{a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_m} (n - a_i)^{m-2} \\ &- \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq m} \binom{n}{a_{j_1}, a_{j_2}} \binom{n - a_{j_1} - a_{j_2}}{a_{j_3}, a_{j_4}, \cdots, a_{j_m}} (n - a_{j_1} - a_{j_2})^{m-2} \\ &+ \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq m} \binom{n}{a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3}} \binom{n - a_{j_1} - a_{j_2} - a_{j_3}}{a_{j_4}, a_{j_5}, \cdots, a_{j_m}} \Big(n - \sum_{k=1}^{3} a_{j_k}\Big)^{m-2} \\ &+ \cdots + (-1)^{m-1} \binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_m} \Big(n - \sum_{k=1}^{m} a_k\Big)^{m-2} \\ =& \binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_m} \Big(\sum_{i=1}^{m} (n - a_i)^{m-2} - \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq m} (n - a_{j_1} - a_{j_2})^{m-2} \\ &+ \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq m} \Big(n - \sum_{k=1}^{3} a_{j_k}\Big)^{m-2} + \cdots + (-1)^{m-1} \Big(n - \sum_{k=1}^{m} a_k\Big)^{m-2} \Big) \\ =& \binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_m} \Big(\sum_{i=0}^{m-2} (-1)^i \binom{m-2}{i} n^{m-2-i} \sum_{j=1}^{m} a_j^i \end{aligned}$$

$$- \sum_{i=0}^{m-2}(-1)^i\binom{m-2}{i}n^{m-2-i}\sum_{1\le j_1<j_2\le m}(a_{j_1}+a_{j_2})^i$$

$$+\cdots+(-1)^{m-1}\sum_{i=0}^{m-2}(-1)^i\binom{m-2}{i}n^{m-2-i}\Big(\sum_{j=1}^{m}a_j\Big)^i\Big)$$

$$=\binom{n}{a_1,a_2,\cdots,a_m}\Big(\sum_{i=0}^{m-2}(-1)^i\binom{m-2}{i}n^{m-2-i}\Big(\sum_{j=1}^{m}a_j^i-\sum_{1\le j_1<j_2\le m}(a_{j_1}+a_{j_2})^i$$

$$+\cdots+(-1)^{m-1}(a_1+a_2+\cdots+a_m)^i\Big)\Big). \tag{12}$$

不难看出，(12) 式右边的求和部分，当 $i=0$ 时，得 n^{m-2}; 当 $1\le i\le m-2$ 时，由引理 2, 得 0, 由此导出 (8) 式. 定理得证.

如果 H 为有环的，为满足严格非匀称的条件，设仅仅只有一条环，于是可知该环可以悬挂于 n 个顶点的任何一个，故 (8) 式乘以 n 即可得到有 $(m+1)$ 条边的严格非匀称线性超树的计数公式. 当 H 有多条环时，类似的处理方法便可得到有环严格非匀称线性超树的计数公式.

致谢 作者感谢同姜文和尤利华所作的有益探讨.

参 考 文 献

1 王建方，李东. 超图的路和圈. 中国科学, 1998, 28(9): 769-778
(Wang Jianfang, Li Dong. The Paths and Circles of the Hypergraphs. *Science in China* (Series A), 1998, 28(9): 769-778)

2 王建方，李海珠. 无圈超图的计数. 中国科学, 2001, 31(1): 6–10
(Wang Jianfang, Li Haizhu. Counting Acyclic Hypergraphs. *Science in China* (Series A), 2001, 31(1): 6–10)

3 单志龙，柳柏濂. (k+1) 秩匀称线性无圈超图的计数公式. 科学通报, 2000, 45(16): 1705–1709
(Shan Zhilong, Liu Bolian. The Counting Series for (k+1)-uniform Linear Acyclic Hypergraphs. *Chinese Science Bulletin*, 2000, 45(16): 1705–1709)

COUNTING STRICT NON-UNIFORM LINEAR HYPERTREES

SHAN ZHILONG

(*College of Electronic & Information Engineering, South China University of Technology, Guangzhou* 510640)

LIU BOLIAN

(*Department of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou* 510631)

Abstract By applying the principle of inclusion-exclusion, a formula is presented for strict non-uniform linear hypertrees with n vertices and m lines in this paper.

Key words Hypergraph, linear hypergraph, hypertree, bipartite tree