文章编号: 0455-2059(2007)03-0114-04

切比雪夫多项式与循环图中生成树的个数

卢鹏丽

(兰州理工大学 计算机与通信学院, 甘肃 兰州 730050)

摘　要: 生成树的个数是评估图(网络)可靠性的一个重要且被广泛研究的量. 利用切比雪夫多项式的性质推出了循环图中计算生成树个数的在线性时间内即可实现的方法,并讨论了渐进特性.

关键词: 矩阵树定理; 生成树; 循环图; Chebyshev 多项式

中图分类号: O115　　　　**文献标识码**: A

对于一个通信网络, 每两个结点间有可能断开, 假设断开的可能性为 $1-p$, 那么可以估计此网络连通的可靠性为 $P=\sum\limits_{k=n-1}^{m}A_kp^k(1-p)^{m-k}$, 其中 n 为网络中结点的个数, m 为边数, A_k 为具有 n 个结点 k 条边的连通子图的个数. 对于 n 个结点的网络要连通, 至少要有 $n-1$ 条边, 所以 $P\doteq A_{n-1}p^{n-1}\cdot(1-p)^{m-n+1}$, A_{n-1} 为生成树的个数. 因此网络的可靠性主要由生成树的个数决定.

经典理论矩阵树定理[1-2]给出了计算图中生成树的个数 $T(G)$ 的方法, 但是需要计算行列式的值, 这对于计算大图的生成树个数是不可行的. 本文给出了一类特殊的图——步数固定的循环图中计算生成树个数的简单、在线性时间内即可实现的算法, 并讨论了渐进特性.

1　循环图

假设 $1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_k$, $s_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 为给定的正整数. 步数固定的无向循环图 ($C_n^{s_1,s_2,\cdots,s_k}$) 定义为有 n 个顶点 $(0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 的图, 第 i 个顶点和第 $((i\pm s_j) \bmod n)$ 个顶点相邻, 其中 $1\leqslant j\leqslant k$. 多重边和自环的情况也是允许的, 图 1 给出了两个循环图的例子, $C_5^{1,2}$ 和 $C_6^{2,3}$. 若 $s_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 不固定 (例如为 n 的函数), 则为步数不固定的循环图. 本文只讨论步数固定的循环图中生成树的计数.

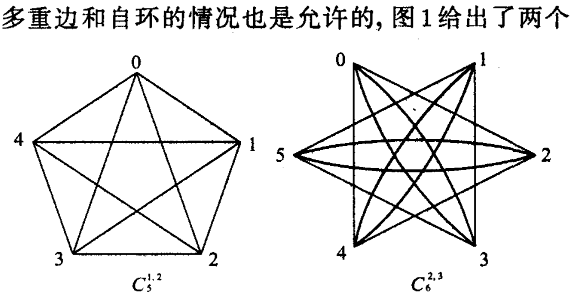

图 1　循环图

Fig. 1　Two examples of circulant graphs

2　基本引理及结果

性质 1[3]　假设 G 为一个 h-正则图, $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{n-1}\leqslant\lambda_n(=h)$ 为 G 的邻接矩阵的特征根, 则 $T(G)=\frac{1}{n}\prod\limits_{i=1}^{n-1}(h-\lambda_i)$. 由循环图的定义可知, 循环图 $C_n^{s_1,s_2,\cdots,s_k}$ 为 $2k$-正则图, 即 $h=2k$.

性质 2[3]　假设 $[0, a_2, a_3, \cdots, a_n]$ 为 G 的邻接矩阵的第 1 行, $\varepsilon=\exp(2\pi\sqrt{-1}/n)$, 则 G 的邻接矩阵的特征根 $\lambda_i=\sum\limits_{j=2}^{n}a_j\varepsilon^{i(j-1)}$, $i=1, \cdots, n-1$.

从性质 1 和性质 2 可以得到下面的结论.

引理 1[4]

$$\begin{aligned}T(C_n^{s_1,s_2,\cdots,s_k})=&\frac{1}{n}\prod_{j=1}^{n-1}(2k-\varepsilon^{-s_1j}-\varepsilon^{-s_2j}-\cdots\\&-\varepsilon^{-s_kj}-\varepsilon^{s_1j}-\varepsilon^{s_2j}-\cdots-\varepsilon^{s_kj})\\=&\frac{1}{n}\prod_{j=1}^{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{k}\big(2-2\cos\frac{2js_i\pi}{n}\big)\Big),\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon=\exp(2\pi\sqrt{-1}/n)$, 且 ε^j 与 ε^{-j} 互为共轭复数.

显然, 对于环 C_n^1, 去掉任何一个边都是一个生成树, 所以有

$$\begin{aligned}n=T(C_n^1)=&\frac{1}{n}\prod_{j=1}^{n-1}\big(2-2\cos\frac{2j\pi}{n}\big)\\=&\frac{1}{n}\prod_{j=1}^{n-1}\big(4\sin^2\frac{j\pi}{n}\big).\end{aligned}\tag{1}$$

其余的在推导中还用到切比雪夫多项式和一些性质, 下面给出.

收稿日期: 2006-04-24.　　**修改稿收到日期**: 2006-10-30.

基金项目: 甘肃省自然科学基金资助项目(3SZ051-A25-037).

作者简介: 卢鹏丽(1973-), 女, 甘肃酒泉人, 讲师, 博士研究生, 研究方向为算法分析与设计, E-mail: lupl@lut.cn.

对于正整数m, 第一类切比雪夫多项式的定义为$T_m(x)=\cos(m\arccos x)$, 第二类切比雪夫多项式的定义为

$$U_{m-1}(x)=\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}T_m(x)=\frac{\sin(m\arccos x)}{\sin(\arccos x)},\qquad(2)$$

可以得到$U_m(x)-2xU_{m-1}(x)+U_{m-2}(x)=0$. 解此递推关系式可得

$$U_m(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}[(x+\sqrt{x^2-1})^{m+1}-(x-\sqrt{x^2-1})^{m+1}],\qquad(3)$$

式中x取任意复数(当$x=\pm1$时, 取极限).

由定义可得上式的所有零点, 可以得到

$$U_{m-1}(x)=2^{m-1}\prod_{j=1}^{m-1}(x-\cos\frac{j\pi}{m}).\qquad(4)$$

并且当m为奇数时, $U_{m-1}(x)$为奇函数, m为偶数时, $U_{m-1}(x)$为偶函数, 即

$$U_{m-1}(-x)=(-1)^{m-1}U_{m-1}(x).\qquad(5)$$

从(4), (5)式可得

$$U_{m-1}^2(x)=4^{m-1}\prod_{j=1}^{m-1}(x^2-\cos^2\frac{j\pi}{m}).\qquad(6)$$

变换(6)式可得

$$U_{m-1}^2(\sqrt{\frac{x+2}{4}})=\prod_{j=1}^{m-1}(x-2\cos\frac{2\pi j}{m}).\qquad(7)$$

引理 2 假设k为大于零的整数, 则$2-2\cos(2kx)$能够写为$4^kf_k(\cos^2x)\sin^2x$, 其中f_k为首项系数为1的$k-1$次多项式, 并且1不是它的根.

由引理1和引理2可得引理3.

引理 3 循环图$(C_n^{s_1,s_2,\cdots,s_k})$生成树的个数为

$$T(C_n^{s_1,s_2,\cdots,s_k})=\frac{1}{n}\prod_{j=1}^{n-1}4^{s_k}f(\cos^2\frac{j\pi}{n})\sin^2(\frac{j\pi}{n}),$$

其中$f(x)$为首项系数为1的s_k-1阶的多项式, 并且1不是它的根.

假设$x_1,x_2,\cdots,x_{s_k-1}$为$f(x)$的根, 则

$$f(x)=(-1)^{s_k-1}\prod_{i=1}^{s_k-1}(x_i-x).$$

结论 利用引理3可得

$$T(C_n^{s_1,s_2,\cdots,s_k})=\frac{1}{n}\prod_{j=1}^{n-1}4^{s_k}(-1)^{s_k-1}(\prod_{i=1}^{s_k-1}(x_i-\cos^2\frac{j\pi}{n}))\sin^2(\frac{j\pi}{n}).$$

利用(1)式和(6)式可知上式等于

$$(-1)^{(n-1)(s_k-1)}\frac{1}{n}\prod_{i=1}^{s_k-1}(4^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}(x_i-\cos^2\frac{j\pi}{n}))\cdot4^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}\sin^2\frac{j\pi}{n}$$

$$=(-1)^{(n-1)(s_k-1)}n\prod_{i=1}^{s_k-1}U_{n-1}^2(\sqrt{x_i}).$$

再利用(3)式可得

$$T(C_n^{s_1,s_2,\cdots,s_k})=n[\prod_{i=1}^{s_k-1}\frac{1}{2\sqrt{1-x_i}}((\sqrt{-x_i}+\sqrt{1-x_i})^n-(\sqrt{-x_i}-\sqrt{1-x_i})^n)]^2.\qquad(8)$$

这种方法计算无向循环图中生成树的个数简单有效, 无需用矩阵树定理计算矩阵的行列式, 而且在线性时间内即可实现.

下面给出两个例子验证$T(C_n^{1,2})=nF_n^2$, 其中F_n为Fibonacci数列和求$T(C_n^{1,2,3})$.

公式$T(C_n^{1,2})=nF_n^2$最初由BEDROSIAN[5]猜测, 随后由KLEITMAN等[6]证明.

$$\begin{aligned}T(C_n^{1,2})&=\frac{1}{n}\prod_{j=1}^{n-1}(4-\mathrm{e}^{\frac{2\pi j}{n}}-\mathrm{e}^{\frac{4\pi j}{n}}-\mathrm{e}^{\frac{-2\pi j}{n}}-\mathrm{e}^{\frac{-4\pi j}{n}})\\&=\frac{1}{n}\prod_{j=1}^{n-1}(4-2\cos\frac{2\pi j}{n}-2\cos\frac{4\pi j}{n})\\&=\frac{1}{n}\prod_{j=1}^{n-1}(-16\cos^4\frac{\pi j}{n}+12\cos^2\frac{\pi j}{n}+4)\\&=\frac{4}{n}\prod_{j=1}^{n-1}4(\cos^2\frac{\pi j}{n}+\frac{1}{4})\sin^2\frac{\pi j}{n}\\&=n\prod_{j=1}^{n-1}4(\cos^2\frac{\pi j}{n}+\frac{1}{4}),\end{aligned}$$

可得$f(x)=x-1/4$, 只有一个根为$x=1/4$. 由(8)式可得

$$\begin{aligned}T(C_n^{1,2})&=\frac{n}{\sqrt5}[(\frac{1+\sqrt5}{2})^n-(\frac{1-\sqrt5}{2})^n]^2\\&=nF_n^2,\end{aligned}$$

公式得证.

$$\begin{aligned}T(C_n^{1,2,3})&=\frac{1}{n}\prod_{j-1}^{n-1}(6-\mathrm{e}^{\frac{2\pi j}{n}}-\mathrm{e}^{\frac{4\pi j}{n}}-\mathrm{e}^{\frac{6\pi j}{n}}-\mathrm{e}^{\frac{-2\pi j}{n}}-\mathrm{e}^{\frac{-4\pi j}{n}}-\mathrm{e}^{\frac{-6\pi j}{n}})\\&=\frac{1}{n}\prod_{j=1}^{n-1}(6-2\cos\frac{2\pi j}{n}-2\cos\frac{4\pi j}{n}-2\cos\frac{6\pi j}{n})\\&=\frac{1}{n}\prod_{j=1}^{n-1}64(\cos^4\frac{\pi j}{n}-\frac{1}{4}\cos^2\frac{\pi j}{n}+\frac{1}{8})\sin^2\frac{\pi j}{n}\\&=n\prod_{j=1}^{n-1}16(\cos^4\frac{\pi j}{n}-\frac{1}{4}\cos^4\frac{\pi j}{n}+\frac{1}{8}).\end{aligned}$$

上式中最后一步用到了(1)式. 由引理3可得

$$f(x)=x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8},$$

两个根分别为

$$x_1 = 0.125\,000\,000\,0 - 0.330\,718\,913\,9\,\mathrm{i},$$

$$x_2 = 0.125\,000\,000\,0 + 0.330\,718\,913\,9\,\mathrm{i}.$$

由 (8) 式即可得 $T(C_n^{1,2,3})$.

3 渐进特性

由 (8) 式可得: 对于所有的 $i(1 \leqslant i \leqslant s_k)$, 令

$$y_{i,0} = \sqrt{-x_i} + \sqrt{1-x_i},$$

$$y_{i,1} = \sqrt{-x_i} - \sqrt{1-x_i};$$

对于 $(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{s_{k-1}}) \in \{0, 1\}^{s_{k-1}}$, 令

$$R_{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{s_{k-1}}} = (-1)^{\sum_{i=1}^{s_{k-1}} \delta_i} \cdot \prod_{i=1}^{s_{k-1}} y_{i \cdot \delta_i},$$

$$c = \prod_{i=1}^{s_k - 1} \frac{1}{2\sqrt{1-x_i}}.$$

则

$$a_n = c \sum_{(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{s_{k-1}}) \in \{0,1\}^{s_{k-1}}} R^n_{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{s_{k-1}}},$$

$$T(C_n^{s_1,s_2,\cdots,s_k}) = na_n^2,$$

其中 a_n 由 $2^{s_{k-1}}$ 个不同的 $R_{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{s_{k-1}}}$ 值决定. 所以可以推知循环图中生成树的个数满足 $2^{s_{k-1}}$ 阶线性递推关系, 并且 a_n 是生成函数

$$G(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{2^{s_{k-1}}} \frac{c}{1 - R_i x}$$

的 x^n 项的系数.

由文献 [7] 可知, 如果 $\gcd(s_1, s_2, \cdots, s_k) = 1$, 则生成函数的最小模根 Φ 为单一的实根, 即 $a_n \sim c\Phi^n$, $T(C_n^{s_1,s_2,\cdots,s_k}) \sim n c^2 \Phi^{2n}$. 生成函数的最小模根近似等于 $1/R_{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{s_{k-1}}}$, 所以计算最小模根也即求 $R_{\max}(1/R_{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{s_{k-1}}}$ 为实数, $R_{\max}$ 也为实数). 容易得到, 对于所有的 $i(1 \leqslant i \leqslant s_k)$, 令

$$y_i = \max\{|y_{i,0}|, |y_{i,1}|\},$$

则 $\Phi = |R_{\max}| = \prod_{i=1}^{s_k-1} y_i$. 所以使用这种方法计算 $T(C_n^{s_1,s_2,\cdots,s_k})$, 只需计算 s_{k-1} 阶多项式的根, 并且可以得到 $T(C_n^{s_1,s_2,\cdots,s_k})$ 的渐进值.

例如 $T(C_n^{1,2,3}) = na_n^2$, $a_n \sim c\Phi^n$, $c = \frac{1}{2\sqrt{1-x_1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x_2}} = 0.267\,261\,2$, $\Phi = y_{1,0} \cdot y_{2,0} = 2.102\,256$.

表 1 列出了 $s_k \leqslant 5$ 的渐进值.

表 1 a_n 的渐近性质 ($s_k \leqslant 5$)

Tab. 1 Asymptotic properties for a_n where $s_k \leqslant 5$

$[s_k]$	c	Φ
{1, 2}	0.447 213 6	1.618 034
{1, 3}	0.316 227 8	1.700 016
{1, 4}	0.242 535 6	1.736 815
{1, 5}	0.196 116 1	1.755 602
{2, 3}	0.277 350 1	1.722 084
{2, 4}	0.447 213 6	1.618 034
{2, 5}	0.185 693 4	1.759 576
{3, 4}	0.200 000 0	1.754 878
{3, 5}	0.171 498 6	1.764 394
{4, 5}	0.156 173 8	1.769 046
{1, 2, 3}	0.267 261 2	2.102 256
{1, 2, 4}	0.218 217 9	2.147 396
{1, 3, 4}	0.196 116 1	2.165 786
{2, 3, 4}	0.185 695 3	2.181 935
{1, 2, 5}	0.182 574 2	2.187 137
{1, 3, 5}	0.169 030 9	2.200 510
{1, 4, 5}	0.154 303 5	2.194 750
{2, 3, 5}	0.162 221 4	2.189 798
{2, 4, 5}	0.149 071 2	2.211 485
{3, 4, 5}	0.141 421 4	2.224 979
{1, 2, 3, 4}	0.182 574 2	2.509 601
{1, 2, 3, 5}	0.160 128 2	2.537 090
{1, 2, 4, 5}	0.147 442 0	2.555 259
{1, 3, 4, 5}	0.140 028 0	2.563 612
{2, 3, 4, 5}	0.136 082 8	2.572 032
{1, 2, 3, 4, 5}	0.134 840 0	2.866 404

由文献 [7] 知, 如果 $\gcd(s_1, s_2, \cdots, s_k) = d \neq 1$ 并且 $\gcd(n, d) \neq 1$, 则图 $(C_n^{s_1,s_2,\cdots,s_k})$ 不连通, 生成树的个数为 0; 如果 $\gcd(s_1, s_2, \cdots, s_k) = d \neq 1$, 并且 $\gcd(n, d) = 1$, 则 $T(C_n^{s_1,s_2,\cdots,s_k}) = T(C_n^{\frac{s_1}{d},\frac{s_2}{d},\cdots,\frac{s_k}{d}})$, 所以表 1 中 {1, 2} 和 {2, 4} 的值相同.

4 结论

由 Chebyshev 多项式[8]的性质推出了计算步数固定的无向循环图中生成树个数的简单、在线性时间内即可实现的算法, 解决了当 n 较大时, 计算图的生成树个数困难的问题[9], 并且讨论了渐进性质.

参考文献

[1] KIRCHHOFF G. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird[J]. Ann Phys Chem, 1847, 72: 497-508.

[2] STANLEY R P. Enumerative Combinatorics[M]. London: Cambridge University Press, 1999.

[3] BIGGS N. Algebraic Graph Theory[M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[4] ZHANG F J, YONG X. Asymptotic enumeration theorems for the numbers of spanning trees and Eulerian trails in circulatant digraphs & graphs[J]. Science in China A, 1999, 43(2): 264-271.

[5] BEDROSIAN S. The Fibonacci numbers via trigonometric expressions[J]. J Franklin Inst, 1970, 289: 67-69.

[6] KLEITMAN D J, GOLDEN B. Counting trees in a certain class of graphs[J]. Amer Math Monthly, 1975, 82: 40-44.

[7] ZHANG Y, YONG X, GOLIN M J. The number of spanning trees in circulant graphs[J]. Discrete Math, 2000, 223: 337-350.

[8] 张远平, 张志勇. 循环图中生成树的计数[J]. 湖南师范大学学报: 自然科学版, 2003, 26(3): 14-17.

[9] 谢继国, 王荣. 用循环图计算Ramsey下界数[J]. 兰州大学学报: 自然科学版, 1999, 35(1): 87-90.

Chebyshev polynomials and formulas for a number of spanning trees in circulant graphs

LU Peng-li

(School of Computer and Communication, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: The number of spanning trees in a graph (network) is an important, well-studied quantity. Through the use of the properties of Chebyshev polynomials, simple and running-in-linear-time methods to count the spanning trees for circulant graphs were given, and asymptotic properties were discussed.

Key words: matrix tree theorem; spanning tree; circulant graph; Chebyshev polynomial

AMS Subject Classifications(2000): 05C50; 05C80