# 格路径上的组合学

# Combinatorics on Lattice Paths


作　者：张雅秋

Author：Zhang Yaqiu


指导老师：严慧芳　Supervisor: Yan Huifang

专　业：数 学　Major: Mathematics

学　位：理学硕士　Degree: Master of Science

授予单位：浙江师范大学　Institute: Zhejiang Normal University

March, 2015

# 摘 要


格路计数是组合数学中经典的研究内容之一,直到现在仍然是一个非常热门的研究领域,因其还有许多未能证明和发现的性质一直以来备受关注. 本文选取格路计数中 $Hankel$ 行列式的计算问题以及格路上 $Chung-Feller$ 性质的研究作为主要内容.

令 $\{a_l\}_{l\geq 0}$ 是一个序列, 对于一个非负整数 $k$, 序列 $\{a_l\}_{l\geq 0}$ 的 $Hankel$ 矩阵 $A_n^k$ 是一个具有如下形式的矩阵 $A_n^k=(a_{k+i+j-2})_{i,j=1}^n$, 其中 $\{a_l\}_{l\geq 0}$ 是基于格路计数产生的三种组合数, 即 $Catalan$ 数, $Motzkin$ 数和 $Schröder$ 数. 关于 $Hankel$ 行列式 $det(A_n^{(k)})$ 的计算问题已经得到了广泛的研究, 例如非常著名的等式 $det_{1\leq i,j\leq n}(c_{i+j-2})=1, det_{1\leq i,j\leq n}(c_{i+j-1})=1$ 和 $det_{1\leq i,j\leq n}(c_{i+j})=n+1$; $Cameron$ 和 $Yip$ 等人发现两个连续带权 $Motzkin$ 数的 $Hankel$ 行列式的结果与第二类切比雪夫多项式有着密切的联系; $Rajković$, $Petković$ 和 $Barry$ 利用正交多项式算出了两个连续带权 $Schröder$ 数的 $Hankel$ 行列式的显性公式; 而 $Eu$,$Wong$ 和 $Yen$ 得出两个连续带权 $Schröder$ 数的线性组合的$Hankel$ 行列式的生成函数和显性公式, 他们研究的依据是著名的 $Gessel-Viennot-Lindström$ 引理, 这也是本文研究格路上 $Hankel$ 行列式的理论依据.

著名的 $Chung-Feller$ 定理是1909年由 $MacMahon$ 首次发现的; 于1949年由 $Chung$ 和 $Feller$ 用分析的方法证明并且命名; 之后, $Narayana$ 等人利用循环路证明了该定理; 2005年, $Eu$, $Fu$ 和 $Yeh$ 在研究了不同格路生成函数的泰勒展式后, 改进了该定理,并且证明了赋权自由 $Schröder$ 路也具有 $Chung-Feller$ 性质; 2007年, 陈永川教授等人依据双根平面树中的蝴蝶分解, 重新证明了 $Chung-Feller$ 定理以及$Eu$, $Fu$ 和 $Yeh$ 的发现.

本学位论文主要研究了格路上的 $Hankel$ 行列式以及 $Chung-Feller$ 性质, 共分为三章.

第一章介绍基本概念, 相关的研究现状以及本文的主要结果.

第二章研究并算出了带权 *Motzkin* 数, 自由带权 *Motzkin* 数以及带权 *Schröder* 数的一些 *Hankel* 行列式的生成函数及显性公式.

第三章研究并发现了某类特殊格路的 *Chung* - *Feller* 性质, 并借此证明了 *Dziemiańczuk* 提出的公开问题.

**关键词：** 格路计数; *Motzkin* 数; *Schröder* 数; *Hankel* 行列式; *Chung* - *Feller* 性质

# ABSTRACT

Lattice paths are one of the classical objects in combinatorics, which have received a great deal of attention and are closely related to other combinatorial objects. In this paper, we are mainly concerned with the Hankel determinants and Chung-Feller properties on lattice paths.

Let $\{a_l\}_{l\geq 0}$ be a sequence. For a nonnegative integer $k$, let $A_n^k$ denote the Hankel matrix of order $n$ of the sequences $\{a_l\}_{l\geq 0}$ of the form $A_n^k = (a_{k+i+j-2})_{i,j=1}^n$, where $\{a_l\}_{l\geq 0}$ could be Catalan, Motzkin and Schröder numbers. The problem of evaluating the determinant $A_n^k$ has been extensively studied. For example, it is well known that $det_{1\leq i,j\leq n}(c_{i+j-2}) = 1$, $det_{1\leq i,j\leq n}(c_{i+j-1}) = 1$ and $det_{1\leq i,j\leq n}(c_{i+j}) = n+1$ ; Cameron and Yip showed that the Hankel determinant of sums of consecutive Motzkin numbers are closely related to a Chebychev polynomial of the second kind; Rajković, Petković and Barry obtained the explicit formula for the Hankel determinant of sums of consecutive Schröder numbers using orthogonal polynomials; Eu, Wong and Yen derived the generating functions and explicit formulae for the Hankel determinants of the sequence of linear combinations of two consecutive weighted Schröder paths. The result that they derived is based on the well-known Gessel-Viennot-Lindström lemma,which is the basic theory in this paper.

The famous Chung-Feller theorem was first discovered by MacMahon in 1909; In 1949, Chung and Feller proved this theorem by using analytic method and named it by their names, then, it was proved again by Narayana et al.with cyclic paths; In 2005, Eu, Fu and Yeh refined this theorem by studying the Taylor expansions of generation functions of different lattice paths; And in 2007, by introducing the notion of butterfly decomposition of double root trees, Chen et al. provide an alternative proof of the Chung-Feller properties of lattice paths obtained by Eu, Fu and Yeh.

In this thesis, we are mainly concerned with the Hankel determinants and Chung-Feller properties on lattice paths. This thesis consists of three chapters.

In Chapter 1, we introduce some basic definitions and notations, give a chief survey in this direction and state the main results obtained.

In Chapter 2, we derive the generating functions and explicit formulae for the Hankel determinants of weighted Motzkin numbers, weighted free Motzkin numbers and weighted Schröder numbers.

In Chapter 3, we obtain Chung-Feller properties of a class of lattice paths in answer to a problem posed by Dziemiańczuk.

**KEY WORDS:** lattice paths enumeration; Motzkin number;Schröder number; Hankel determinant;Chung-Fller theorem

# 目　录

# 1 绪论

## 1.1 基本概念

在本节中,我们介绍文章涉及到的一些概念.

### 1.1.1 格路

格路是 $Z \times Z$ 平面上一条只允许沿着平面方格格点行进的路径,格路上相邻两个格点之间的线段称为这条格路的步.

在 $Z \times Z$ 平面上,一条从起点 $(0,0)$ 到终点 $(2n,0)$ 的使用上升步 $U=(1,1)$,下降步 $D=(1,-1)$ 的路,并且每一步均不能走到 $x-$ 轴下方,我们则称这条路为 $Dyck$ 路,长度为 $n$. 所有 $n$ 长 $Dyck$ 路的个数记为 $c_n$, $c_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$,这就是著名的 $Catalan$ 数.

在 $Z \times Z$ 平面上,一条从起点 $(0,0)$ 到终点 $(2n,0)$ 的使用上升步 $U=(1,1)$,下降步 $D=(1,-1)$,水平步 $H=(1,0)$ 的路,并且每一步均不能走到 $x-$ 轴下方,我们则称这条路为 $Motzkin$ 路,长度为 $n$. 所有 $n$ 长 $Motzkin$ 路的个数称为 $Motzkin$ 数,记作 $m_n$, $\{m_n\}_{n\geq 0}=\{1,1,2,4,9,21,51,\ldots\}$.

在 $Z \times Z$ 平面上,一条从起点 $(0,0)$ 到终点 $(2n,0)$ 的使用上升步 $U=(1,1)$,下降步 $D=(1,-1)$,水平步 $\bar{H}=(2,0)$ 的路,并且每一步均不能走到 $x-$ 轴下方,我们则称这条路为 $Schröder$ 路,长度为 $n$. $Schröder$ 路分为大 $Schröder$ 路和小 $Schröder$ 路,如果一条 $Schröder$ 路的水平步都不在 $x-$ 轴上,则称之为小 $Schröder$ 路;否则,称之为大 $Schröder$ 路. 所有 $n$ 长小 $Schröder$ 路的个数记作 $s_n$, $\{s_n\}_{n\geq 0}=\{1,1,3,11,45,197,903,\ldots\}$,所有 $n$ 长大 $Schröder$ 路的个数记作 $r_n$, $\{r_n\}_{n\geq 0}=\{1,2,6,22,90,394,1086,\ldots\}$.

如果上述格路的每一步可以走到 $x-$ 轴下方, 则我们说这些格路是自由的. 例如自由 $Motzkin$ 路,自由 $schröder$ 路.

如果将格路的每一步赋一个值, 我们称为带权格路, 这条路的权是所有步的权的乘积. 若将 $Motzkin$ 路的上升步和下降步赋权 1, 水平步赋权 $t$, 则称这条路为 $t-Motzkin$ 路. 同样, 我们有 大(小) $t-Schröder$ 路. 令 $p$ 表示从点 $(x_1, y_1)$ 到点 $(x_2, y_2)$ 的步, 则点 $(x_2, y_2)$ 是 $p$ 的终点, 而 $p$ 的高度就是它的终点的纵坐标. 若将 $Motzkin$ 路中上升步赋权 $x$, 高度大于 0 的下降步赋权 1, 高度为 0 的下降步赋权 $y$, 不在 $x-$ 轴上的水平步赋权 $u$, 在 $x-$ 轴上的水平步赋权 $v$, 则这条路称为 $(x, y, u, v)-Motzkin$ 路, 这是一般的带权 $Motzkin$ 路. 当 $x = y = 1, u = v = t$ 时, $(x, y, u, v)-Motzkin$ 路就是一条 $t-Motzkin$ 路. 类似的, $(x, u, v)-Schröder$ 路是指将 $Schröder$ 路中上升步赋权 $x$，下降步赋权 1，不在 $x$-轴上的水平步赋权 $u$, $x-$ 轴上的水平步赋权 $v$. 特别的，如果 $x = 1, u = v = t$ 我们得到一条大$t-Schröder$ 路. 当 $x = 1, u = t, v = 0$, 我们得到一条小 $t-Schröder$ 路. 本文中所说的带权 $Motzkin$ 数或者带权 $Schröder$ 数是指所有 $n$ 长的带权 $Motzkin$ 路或者带权 $Schröder$ 路的权和.

此外, 还有一些特殊的格路. 比如, 在$Z \times Z$ 平面上, 从起点 (0,0) 到终点 $(n, k)$ 的 使用对角线步 $D = (1, 1)$, 水平步 $H = (1, 0)$, 垂直步 $V = (0, 1)$, 倾斜步 $L = (-1, 1)$ 的格路.在本文中我们称为第四类格路. (注: 这里的对角线步与前面的上升步是一样的, 这里为了区分第四种格路故用不同的名称和表示法)

最后介绍在自由格路和第四类路中缺陷的定义. 自由 $Dyck$ 路中, $x-$ 轴下方的一个上升步是一个缺陷; 自由 $Motzkin$ 路中, $x-$ 轴下方的任何一步是一个缺陷; 自由 $Schröder$ 路中, $x-$ 轴下方的一个水平步或上升步是一个缺陷; 第四类路中, $y-$ 轴左边的一个非水平步是一个缺陷. 缺陷数是所有缺陷的个数.

### 1.1.2 $Hankel$ 矩阵和 $Hankel$ 行列式

令 $\{a_l\}_{l\geq 0}$ 是一个序列,对于一个非负整数 $k$, 序列 $\{a_l\}_{l\geq 0}$ 的 $Hankel$ 矩阵 $A_n^k$

是一个具有如下形式的矩阵

$$A_n^k=(a_{k+i+j-2})_{i,j=1}^n.$$

则它的 $n\times n$ *Hankel* 行列式为

$$det(A_n^{(k)})=det_{1\le i,j\le n}(a_{k+i+j-2})=\begin{vmatrix} a_k & a_{k+1} & \cdots & a_{k+n-1} \\ a_{k+1} & a_{k+2} & \cdots & a_{k+n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k+n-1} & a_{k+n} & \cdots & a_{k+2n-2} \end{vmatrix}$$

本文将计算 *Motzkin* 数, *Schröder* 数的如下形式的 *Hankel* 行列式: $det_{1\le i,j\le n}(\alpha a_{k+i+j-2}+\beta a_{k+i+j-1})$, 表示两个连续数的线性组合序列的 *Hankel* 行列式.

## 1.2 格路的 *Hankel* 行列式和 *Chung – Feller* 性质的研究概况

组合计数是组合数学中一个最基本的研究方向, 主要研究满足一定条件的安排方式的数目及其计数问题, 主要包括一般的排列, 组合的计算以及生成函数, 容斥原理, 反演原理, *Polya* 计数定理等等. 格路计数是组合计数中的经典问题, 几百年来数学家们关于格路的研究得出了很多结果, 本文主要研究的是格路的 *Hankel* 行列式的计算问题以及 *Chung – Feller* 性质.

### 1.2.1 *Hankel* 行列式的研究概况

对于 *Catalan* 数, *Motzkin* 数和 *Schröder* 数的 *Hankel* 行列式的计算问题, 数学家们已经做了大量的研究. 例如非常著名的等式 $det_{1\le i,j\le n}(c_{i+j-2})=1$, $det_{1\le i,j\le n}(c_{i+j-1})=1$ 和 $det_{1\le i,j\le n}(c_{i+j})=n+1$, 其中 $c_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ 是第 $n$ 个 *Catalan* 数. *Desainte–Catherine* 和 *Viennot* [8] 得到等式 $det_{1\le i,j\le n}(c_{i+j+k-2})=\prod_{1\le i\le j\le k-1}\frac{i+j+2n}{i+j}$. *Gessel* 和 *Viennot* [16] 算出对任意的正整数 $n$ 和非负整数

$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$,

$$det_{0\leq i,j\leq n-1}(c_{\alpha_i+j}) = \prod_{0\leq i<j\leq n-1}(\alpha_j-\alpha_i)\prod_{i=0}^{n-1}\frac{(i+n)!(2\alpha_i)!}{(2i)!\alpha_i!(\alpha_i+n)!}$$

对于 $Motzkin$ 数, 我们知道的有 $det_{1\leq i,j\leq n}(m_{i+j-2}) = 1$ 对任意的正整数 $n$ 都成立, 以及

$$det_{1\leq i,j\leq n}(m_{i+j-1}) = \begin{cases} 1, & \text{若 n=0,1 (mod 6);} \\ 0, & \text{若 n=2,5 (mod 6);} \\ -1, & \text{若 n=3,4 (mod 6).} \end{cases}$$

其中 $m_n$ 是第 $n$ 个 $Motzkin$ 数, [1, 22]. $Krattenthaler$ [17] 和 $Sulanke$ 和 $Xin$ [21] 计算了 $Hankel$ 行列式 $det_{1\leq i,j\leq n}(m^{(t)}_{k+i+j-2})$ 和 $det_{1\leq i,j}(m^{(t)}_{k+i+j-1})$, 其中 $m^{(t)}_n$ 是所有 $n$ 长的 $t-Motzkin$ 路的权和.

对于大小 $Schröder$ 数, $Eu$ 和 $Fu$ [12] 证明了

$$det_{1\leq i,j\leq n}(r_{i+j-2}) = 2^{\binom{n}{2}},\ det_{1\leq i,j\leq n}(r_{i+j-1}) = 2^{\binom{n+1}{2}},$$

和

$$det_{1\leq i,j\leq n}(s_{i+j-2}) = 2^{\binom{n}{2}},\ det_{1\leq i,j\leq n}(s_{i+j-1}) = 2^{\binom{n}{2}},$$

其中 $r_n$ 是 $n$ 长的大 $Schröder$ 数, $s_n$ 是 $n$ 长的小 $Schröder$ 数. $Brualdi$ 和 $Kirklan$ [3] 用线性代数的方法也得到了大 $Schröder$ 数的结果. 类似于 $Motzkin$ 数的权重的 $Hankel$ 行列式的结果, $Sulanke$ 和 $Xin$ [21] 证明了 $det_{1\leq i,j\leq n}(r^{(t)}_{i+j+2}) = (1+t)^{\binom{n}{2}}$ 和 $det_{1\leq i,j\leq n}(r^{(t)}_{i+j+1}) = (1+t)^{\binom{n+1}{2}}$, 其中 $r^{(t)}_n$ 表示所有长为 $n$ 的大 $t-Schröder$ 路的权和.

一些作者计算了 $Hankel$ 行列式的变式 $det_{n\leq i,j\leq n}(a_{k+i+j-2}+a_{k+i+j-1})$. 对于

$Catalan$ 数, $Cvetković$, $Rajković$ 和 $Ivković$ [7] 得到了如下好的等式

$$det_{1\le i,j\le n}(c_{i+j-2}+c_{i+j-1})=F_{2n+1}, \quad 和 \quad det_{1\le i,j\le n}(c_{i+j-1}+c_{i+j})=F_{2n+2}.$$

其中 $F_n$ 是第 $n$ 个斐波那契数. 对于 $Motzkin$ 数, $Cameron$ 和 $Yip$ [4] 发现了 $det_{1\le i,j\le n}(m^{(t)}_{i+j-2}+m^{(t)}_{i+j-1})$ 和 $det_{1\le i,j\le n}(m^{(t)}_{i+j-1}+m^{(t)}_{i+j})$ 与第二类切比雪夫多项式有着密切的联系, 即

$$det_{1\le i,j\le n}(m^{(t)}_{i+j-2}+m^{(t)}_{i+j-1})=S_n(t+1),$$

$$det_{1\le i,j\le n}(m^{(t)}_{i+j-1}+m^{(t)}_{i+j})=\sum_{k\ge 0}S_k(t)S_k(1+t).$$

对于 $Schröder$ 数, $Rajković$, $Petković$ 和 $Barry$ [19] 利用正交多项式算出了 $Hankel$ 行列式 $det_{1\le i,j\le n}(r^{(t)}_{i+j-2}+r^{(t)}_{i+j-1})$ 的显性公式 $det_{1\le i,j\le n}(r^{(t)}_{i+j-2}+r^{(t)}_{i+j-1})=\frac{L^{\binom{n}{2}}}{2^{n+1}\sqrt{L^2+4}}((\sqrt{L^2+4}+L)(\sqrt{L^2+4}+L+2)^n+(\sqrt{L^2+4}-L)(L+2-\sqrt{L^2}+4)^n)$ 其中 $L=1+t$.

近来, $Eu$, $Wong$ 和 $Yen$ [15] 计算出了如下等式对 $n\ge 1$ 和两个常数 $\alpha,\beta$, 令 $f_n=\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{2m-n}\sum_{l=0}^{k}(-1)^{n-m}\binom{m}{2m-n}\binom{2m-n}{k}\binom{k}{l}\alpha^l\beta^{n-l}(1+t)^{m-k}$. 则有,

1. $det_{1\le i,j\le n}(\alpha r^{(t)}_{i+j-2}+\beta r^{(t)}_{i+j-1})=(1+t)^{\binom{n}{2}}(f_n-\beta f_{n-1})$.
2. $det_{1\le i,j\le n}(\alpha r^{(t)}_{i+j-1}+\beta r^{(t)}_{i+j})=(1+t)^{\binom{n+1}{2}}f_n$.
3. $det_{1\le i,j\le n}(\alpha s^{(t)}_{i+j-2}+\beta s^{(t)}_{i+j-1})=(1+t)^{\binom{n}{2}}(f_n-\beta(1+t)f_{n-1})$.
4. $det_{1\le i,j\le n}(\alpha s^{(t)}_{i+j-1}+\beta s^{(t)}_{i+j})=(1+t)^{\binom{n}{2}}f_n$.

其中 $s^{(t)}_n$ 表示所有长为 $n$ 小 $t-Schröder$ 路的权和.

带权的 $Motzkin$ 路的其他形式, 在 $Chen$, $Li$, $Shapiro$ 和 $Yan$ [5] 证明 $Hankel$ 矩阵的一些特性与某一类 $Riordan$ 矩阵相关联时被用到.

### 1.2.2 $Chung - Feller$ 性质

$Chung - Feller$ 定理是计数组合学中的一个经典结果, 即: 长为 $2n$ 的自由 $Dyck$ 路中的缺陷数是均匀分布的. 由 $MacMahon$ 于1909年首次发现. 关于 $Dyck$ 路, $Motzkin$ 路, 以及 $Schröder$ 路的 $Chung - Feller$ 性质已经得到了广泛的研究.

1949年, $K.L.Chung$ 和 $K.Feller$[6] 用分析的方法证明并且命名该定理:

**定理** 1.1 [6] 在 $\binom{2n}{n}$ 条包含有 $n$ 个上升步和 $n$ 个下降步的所有路中, 有 $2k$ 步 $(0 \le k \le n)$ 在 $x-$ 轴上方的路的个数为卡特兰数 $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

**定理** 1.2 [6] 所有 $2n$ 长的 $2^{2n}$ 条路中, 有 $2k$ 步 $(0 \le k \le n)$ 在 $x-$ 轴上方的路的个数为 $\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$.

之后, $Narayana$ [18] 等人利用路的循环序列给出了证明; 关于 $Dyck$ 路上一些参数的 $Chung - Feller$ 定理形式的结果, 文章 [20] 和 [23] 中给出了证明;

$S.P.Eu$, $T.S.Fu$ 和 $Y.N.Yeh$ [13] [14]在2005年研究了不同格路生成函数的泰勒展式后, 细化了该定理, 并且证明了赋权自由 $Schröder$ 路也具有 $Chung - Feller$ 性质:

**定理** 1.3 [14] 对任意的从 $(0,0)$ 到 $(m,m)$ 的路 $\pi$ ,若 $\pi$ 的最后一步是竖直步, 则给 $\pi$ 赋权 2, 否则 $\pi$ 赋权 1 .则长为 $m$ 的有 $n$ 个缺陷的 $Schröder$ 路的权重为 $Schröder$ 数.

2007 年,陈永川教授等依据双根平面树中的蝴蝶分解, 重新证明了 $Chung - Feller$ 定理以及$S.P.Eu$, $T.S.Fu$ 和 $Y.N.Yeh$ 的发现.

## 1.3 本文的主要结果

本文在前人的工作基础上, 研究了格路径上的 $Hankel$ 行列式以及 $Chung - Feller$ 性质.

在第二章中,

(I) 研究了 $(x,y,u,v)-Motzkin$ 路的 $Hankel$ 行列式 $det_{1\le i,j\le n}(\alpha a_{k+i+j-2}+\beta a_{k+i+j-1})$, (1)当$k=0$时, 得到了 $Hankel$ 行列式的表达式; (2)当$k=1$时, 算出了 $Hankel$ 行列式的生成函数.

(II) 建立 $(x,y,u,v)-Motzkin$ 路与 自由 $t-Motzkin$ 路之间的联系, 通过等量代换得出了自由 $t-Motzkin$ 路的一些 $Hankel$ 行列式的表达式, 证明了两个连续的自由 $t-Motzkin$ 数的和的 $Hankel$ 行列式 与第二类切比雪夫多项式有着密切的联系, 是 $Cameron$ 和 $Yip$ [4] 关于 $t-Moztkin$ 数的结果的平行结果.

(III) 通过建立带权 $Motzkin$ 路与带权 $Schröder$ 路之间的联系, 用一种新的方法算出了带权 $Schröder$ 路 的 $Hankel$ 行列式的生成函数和显性公式.与此同时, 我们还算出了两个连续二项式系数 $b_n=\binom{2n}{n}$ 的和的 $Hankel$ 行列式的显性公式.

在第三章中, 发现了第四种格路上的 $Chung-Feller$ 性质, 进而解决了 $Dziemiańczuk$ [11] 提出的公开问题.

# 2 带权 $Motzkin$ 数和带权 $Schröder$ 数的 $Hankel$ 行列式

## 2.1 本章概述

本章主要研究两个数的线性组合序列的 $Hankel$ 行列式 $det_{1\leq i,j\leq n}(\alpha a_{k+i+j-2}+\beta a_{k+i+j-1})$, $Eu$, $Wong$ 和 $Yen$ 在文献 [15] 中计算了大小 $t-Schröder$ 数的上述形式的 $Hankel$ 行列式, 而本章在此基础上研究一般的带权 $Motzkin$ 数, 自由 $Motzkin$ 数以及一般的带权 $Schröder$ 数的一些 $Hankel$ 行列式, 算出了他们的生成函数以及显性公式.

我们知道所有 $n$ 长的 $(x,y,u,v)-Motzkin$ 路的权和称为 $(x,y,u,v)-Motzkin$ 数, 记做 $m_n(x,y,u,v)$. 所有 $n$ 长的大小 $(x,u,v)-Schröder$ 路的权和称为大小 $(x,u,v)-Schröder$ 数, 分别记做 $r_n(x,u,v)$ 和 $s_n(x,u,v)$. 所有 $n$ 长的 $t-Motzkin$ 路的权和称为 $t-Motzkin$ 数, 记做 $m_n(t)$. 所有 $n$ 长的自由 $t-Motzkin$ 路的权和称为自由 $t-Motzkin$ 数, 记做 $\widetilde{m}_n(t)$.

在 $Motzkin$ 路或者 $Schröder$ 路中, 若第一步为上升步 $U$, 找第一次返回到 $x-$ 轴的下降步 $D$ 与之对应, 则这条路可以分解成 $P=UP_1DP_2$, 这里 $P_1,P_2$ 为 $Motzkin$ 路或者 $Schröder$ 路. 这样的分解称为第一次返回分解.

## 2.2 带权 $Motzkin$ 数的 $Hankel$ 行列式

在本节中，我们将要计算两个连续 $(x,y,u,v)-Motzkin$ 数的线性组合序列 $\alpha m_{k+i+j-2}(x,y,u,v)+\beta m_{k+i+j-1}(x,y,u,v)$ 的 $Hankel$ 行列式. 任意的 $n\geq 1$, 定义

$$H_n^{(k)}(x,y,u,v,\alpha,\beta)=det_{1\leq i,j\leq n}(\alpha m_{k+i+j-2}(x,y,u,v)+\beta m_{k+i+j-1}(x,y,u,v)) \tag{2.1}$$

其中 $k=0$ 和 1. 令初始值 $H_0^{(k)}(x,y,u,v,\alpha,\beta)=1$.

### 2.2.1 格路的模式

我们考虑如下有向图. 令 $\mathcal{G}$ 是一个有向图，边集 $V = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{Z}\}$ 有如下几种形式:

1. 上升步 $U = (1,1)$, 高度大于 0, 权为 $x$;
2. 下降步 $D = (1,-1)$, 高度大于 0, 权为 1;
3. 下降步 $D = (1,-1)$, 高度为 0, 权为 $y$;
4. 下降步 $D = (1,-1)$, 高度小于0, 权为 $\alpha$;
5. 水平步 $H = (1,0)$, 在$x$-轴上方, 权为 $u$;
6. 水平步 $H = (1,0)$, 在$x$-轴上, 权为 $v$;
7. 向南步 $S = (0,-1)$, 高度小于0,权为 $\beta$.

$n$ 元路组 $P = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$, 其中 $P_i$ 是从起点 $o_i$ 到终点 $d_{\sigma_i}$ 的路, $\sigma$ 是 $\mathcal{S}_n$ 中的一个排列. 在此, 我们可以说这个 $n$ 元路组 $P$ 是由 $\sigma$ 诱导的. 这个 $n$ 元路组 $P$ 的符号, 记为 $sgn(P)$, 也是排列 $\sigma$ 的符号 $sgn(\sigma)$. 如果 $\sigma$ 是偶的(或者. 奇的), 则说这个 $n$ 元路组 $P$ 是偶的(或者. 奇的) . 如果 $n$ 元路组 $P$ 中有两条路 $P_r, P_s$ 在图 $\mathcal{G}$ 中的某个点相交,则我们说 $P$ 是交叉的.

**引理 2.1** ($Lindström - Gessel - Viennot$ ). 令 $o_1, o_2, \ldots, o_n$ 和 $d_1, d_2, \ldots, d_n$ 是 $\mathcal{G}$ 中的格点. 令 $w_{ij}$ 表示所有从点 $o_i$ 到 $d_j$ 的路的总权重. 则

$$\begin{aligned} det(w_{ij})_{1\le i,j\le n} &= \textstyle\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} sgn(\sigma)\prod_{i=1}^{n} w_{i\sigma(i)} \\ &= (\text{所有偶的非交叉 } n\text{-路的总权重}) \\ &\quad -(\text{所有奇的非交叉 } n\text{-路的总权重}). \end{aligned}$$

记 $\Pi_n^k$ 为 $\mathcal{G}$ 中非交叉带权 $n$ 元路组的集合, 其中这些路的起点为 $o_n =$

$(-n+1,0),\ldots,o_2=(-1,0),o_1=(0,0)$, 终点为 $d_1=(k+1,-1),d_2=(k+2,-1),\ldots,d_n=(k+n,-1)$. 由 $Lindström-Gessel-Viennot$ 引理, 我们有

$$H_n^{(k)}(x,y,u,v,\alpha,\beta)=\sum_{P\in\Pi_n^k} sgn(P)w(P).$$

### 2.2.2 $k=0$的情形

在这一节中, 我们计算行列式 $det_{1\le i,j\le n}(\alpha m_{i+j-2}(x,y,u,v)+\beta m_{i+j-1}(x,y,u,v))$ 的生成函数和显性公式. 为了方便, 令 $H_n^{(k)}:=H_n^{(k)}(x,y,u,v,\alpha,\beta)$.

**定理 2.1** 对于 $n\ge 2$, 我们有

$$H_n^{(0)}=x^{n-1}y(\beta u+\alpha)H_{n-1}^{(0)}-\beta^2x^{2(n-1)}y^2H_{n-2}^{(0)}, \tag{2.2}$$

并且 $H_0^{(0)}=1$， $H_1^{(0)}=\beta v+\alpha$.

**证明**: 当 $n=0$ 和 1 时显然成立. 考虑当 $n\ge 2$ 的情况. 令 $\sigma=\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ 是 $\mathcal{S}_n$ 中的一个排列. 假设 $(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n)$ 是 $\Pi_n^0$ 中非交叉的 $n$ 元路组, 其中 $\pi_i$ 从起点 $o_i$ 到终点 $d_{\sigma(i)}$. 由于每条路不交叉, 我们可以推断出每条路 $\pi_i$ 前 $i-1$ 步都是上升步.

我们把 $\Pi_n^0$ 划分为三个子集 $X,Y$ 和 $Z$. 集合 $X$ 包含 $n$-元路组 $(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n)$ 并且 $\pi_n=U^{n-1}HD^{n-1}S$. 集合 $Y$ 包含 $n$ 元路组 $(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n)$ 并且 $\pi_n=\pi_{n-1}=U^{n-1}D^{n-1}S$. 集合 $Z$ 包含 $n$ 元路组 $(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n)$ 并且 $\pi_1=D$, 当 $i\ge 2$ 时, $\pi_i=U^{i-1}D\pi_i'$, 其中 $(\pi_2',\ldots,\pi_n')$ 是 $\mathcal{G}$ 中一个不交叉的 $n$ 元路组, 每一条路 $\pi_i'$ 从起点 $(1,i-2)$ 出发到达终点 $d_{\sigma(i)}$.

(i)集合 $X$ 与集合 $\Pi_{n-1}^0$ 之间有一个一一映射, 对任意的 $i\ge 1$, $(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n)\in X$ 对应到 $(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1})\in\Pi_{n-1}^0$, 其中 $\omega_i=\pi_i$ . 因此, $(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n)$ 的权重等于 $\beta x^{n-1}yu$ 乘以 $(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1})$ 的权重. 假设 $(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1})$ 是由 $\tau$ 诱导出来的. 很

容易看出 $\sigma=\tau n$, 从而有 $sgn(\sigma)=sgn(\tau)$. 因此我们有

$$\sum_{P\in X} sgn(P)w(P)=\beta x^{n-1}yu\sum_{P\in\Pi^0_{n-1}} sgn(P)w(P)=\beta x^{n-1}yuH^{(0)}_{n-1}.$$

(ii) 集合 $Y$ 与集合 $\Pi^0_{n-2}$ 之间有一个一一映射, 对任意的 $i\geq 1$,$(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n)\in Y$ 对应到 $(\omega_1,\ldots,\omega_{n-2})\in\Pi^0_{n-2}$, 其中 $\omega_i=\pi_i$. 因此, $(\pi_1,\pi_2,\ldots\pi_n)$ 的权重等于 $\beta^2x^{2(n-1)}y^2$ 乘以 $(\omega_1,\ldots,\omega_{n-2})$ 的权重. 假设 $(\omega_1,\ldots,\omega_{n-2})$ 由 $\tau$ 诱导出来的. 显然, $\sigma=\tau n(n-1)$. 从而 $sgn(\sigma)=-sgn(\tau)$. 因此得到

$$\sum_{P\in Y} sgn(P)w(P)=-\beta^2x^{2(n-1)}y^2\sum_{P\in\Pi^0_{n-2}} sgn(P)w(P)=-\beta^2x^{2(n-1)}y^2H^{(0)}_{n-2}.$$

(iii) 集合 $Z$ 和集合 $\Pi^0_{n-1}$ 之间有一个一一映射, 对任意的 $i\geq 1$, $(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n)\in Z$ 对应到 $(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1})\in\Pi^0_{n-1}$, 其中 $\omega_i=U^{i-1}\pi'_{i+1}$. 因此, $(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n)$ 的权重等于 $x^{n-1}y\alpha$ 乘以 $(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1})$ 的权重. 假设 $(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1})$ 由 $\tau$ 诱导的. 显然 $\tau(i)=\sigma(i+1),\sigma(1)=1$. 从而有 $sgn(\sigma)=sgn(\tau)$. 因此得出

$$\sum_{P\in Y} sgn(P)w(P)=\alpha x^{n-1}y\sum_{P\in\Pi^0_{n-1}} sgn(P)w(P)=\alpha x^{n-1}yH^{(0)}_{n-1}.$$

由上述三种情况, 我们可以得出等式 (2.2)成立. □

定义 $\Theta_n(x,y,u,v,\alpha,\beta)=x^{-\binom{n}{2}}H^0_n(x,y,u,v,\alpha,\beta),n\geq 1$ 和$\Theta_0(x,y,u,v,\alpha,\beta)=1$. 由等式 (2.2), 我们可以推出, 对 $n\geq 2$,

$$\Theta_n(x,y,u,v,\alpha,\beta)=y(\beta u+\alpha)\Theta_{n-1}(x,y,u,v,\alpha,\beta)-\beta^2xy^2\Theta_{n-2}(x,y,u,v,\alpha,\beta) \tag{2.3}$$

初始值为 $\Theta_1(x,y,u,v,\alpha,\beta)=\beta v+\alpha$ , $\Theta_0(x,y,u,v,\alpha,\beta)=1$.

由等式 (2.3), 可以导出 $\Theta_n(x,y,u,v,\alpha,\beta)$ 有如下生成函数.

**定理** 2.2

$$\sum_{n\geq 0}\Theta_n(x,y,u,v,\alpha,\beta)z^n=\frac{1-\beta(uy-v)z-\alpha(y-1)z}{1-y(\beta u+\alpha)z+\beta^2xy^2z^2}. \tag{2.4}$$

由上述定理,可以导出如下显性公式.

**定理** 2.3 对于常数 $\alpha$ 和 $\beta$, 令

$$f_n=y^n\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{2m-n}(-1)^{n-m}\binom{m}{2m-n}\binom{2m-n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}x^{n-m}u^{2m-n-k}.$$

则对于 $n\geq 1$, 有

$$\Theta_n(x,y,u,v,\alpha,\beta)=y^{n-1}(yf_n-(\beta(uy-v)+\alpha(y-1))f_{n-1}), \tag{2.5}$$

和

$$H_n^{(0)}(x,y,u,v,\alpha,\beta)=x^{\binom{n}{2}}y^{n-1}(yf_n-(\beta(uy-v)+\alpha(y-1))f_{n-1}). \tag{2.6}$$

### 2.2.3 $k=1$ 的情形

在本节, 我们将要计算 $H_n^{(1)}$. 首先, 考虑一类路. 图 $\mathcal{G}$ 中从起点 $o_n=(0,n-1),\ldots,o_2=(0,1),o_1=(0,0)$ 到终点 $d_1=(1,0),d_2=(1,1),\ldots,d_n=(1,n-1)$ 的带权的 $n$ 元路组的集合记为 $\mathcal{G}_n$. 定义 $\Omega_n=\sum_{P\in\mathcal{G}_n}sgn(P)w(P)$.

**引理** 2.2 对于 $n\geq 3$, 有

$$\Omega_n=u\Omega_{n-1}-x\Omega_{n-2}, \tag{2.7}$$

初始值为 $\Omega_0=1,\Omega_1=v$ , $\Omega_2=uv-xy$.

**证明**: 显然,初始值成立. 当$n\geq 3$ 时. 令 $\sigma=\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)\in\mathcal{S}_n$. 假设 $(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n)\in\mathcal{G}_n$ 是一个不交叉 $n$ 元路组, 其中 $p_i$ 从起点 $o_i$ 到终点 $d_{\sigma(i)}$.

我们将 $\mathcal{G}_n$ 划分为两个子集 $X$ 和 $Y$. 集合 $X$ 包含所有 $n$ 元路组 $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ 其中 $\pi_n = H$. 集合 $Y$ 包含所有 $n$ 元路组 $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ 其中 $\pi_n = D$ 和 $\pi_{n-1} = U$.

集合 $X$ 和集合 $\mathcal{G}_{n-1}$ 之间有一个一一映射, 将 $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n) \in X$ 对应到 $(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) \in \mathcal{G}_{n-1}$, 其中对所有 $i \geq 1$, 都有 $\omega_i = \pi_i$. 很容易得出, $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ 的权重为 $u$ 乘以 $(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$ 的权重. 假设 $(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$ 由是 $\tau$ 诱导的. 由于 $\sigma = \tau n$, 则有 $sgn(\sigma) = sgn(\tau)$. 因此.我们可以得出

$$\sum_{P \in X} sgn(P)w(P) = u \sum_{P \in \mathcal{G}_{n-1}} sgn(P)w(P) = u\Omega_{n-1}.$$

集合 $Y$ 和集合 $\mathcal{G}_{n-2}$ 之间有一个一一映射, 将 $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n) \in X$ 对应到 $(\omega_1, \ldots, \omega_{n-2}) \in \mathcal{G}_{n-2}$, 其中对所有的 $i \geq 1$,$\omega_i = \pi_i$. 容易得出 $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ 的权重等于 $x$ 乘以 $(\omega_1, \ldots, \omega_{n-2})$ 的权重. 假设 $(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$ 是由 $\tau$ 诱导的. 由于 $\sigma = \tau n(n-1)$, 则有 $sgn(\sigma) = -sgn(\tau)$. 因此就有



$$\sum_{P \in Y} sgn(P)w(P) = -x \sum_{P \in \mathcal{G}_{n-2}} sgn(P)w(P) = -x\Omega_{n-2}.$$

□

由引理2.2, 我们可以推出如下生成函数.

**性质 2.1** 我们有如下生成函数:

$$\sum_{n \geq 0} \Omega_n z^n = \frac{1 - (u-v)z - x(y-1)z^2}{1 - uz + xz^2}. \tag{2.8}$$

我们有如下显性公式.

**性质** 2.2 对 $n \geq 0$, 令

$$\chi_n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \binom{m}{n-m} u^{2m-n} x^{n-m}.$$

则对 $n \geq 2$, 有

$$\Omega_n = \chi_n - (u-v)\chi_{n-1} - x(y-1)\chi_{n-2}$$

初始值为 $\Omega_0 = 1$ 和 $\Omega_1 = v$.

接下来我们计算行列式 $H_n^{(1)}$.

**定理** 2.4 对于 $n \geq 1$, 我们有

$$H_n^{(1)} = x^{\binom{n}{2}} \sum_{k=0}^{n} \beta^{n-k} x^{n-k} y^{n-k} \Omega_k \Theta_k. \tag{2.9}$$

**证明**: 令 $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n) \in \mathcal{S}_n$. 假设 $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n) \in \Pi_n^1$, 其中 $\pi_i$ 从起点 $o_i$ 到终点 $d_{\sigma(i)}$. 很容易看出每条路 $\pi_i$ 的前 $i-1$ 步应该是上升步.

首先, 我们找到最大的常数 $k$ 使得对所有的 $i \geq k+1$, 路 $\pi_i = U^i D^i S$. 令 $X^{(k)}$ 表示 $\Pi_n^1$ 中所有这些路的集合. 直线 $x=1$ 将 $k$ 元路组 $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$ 分成两个子集 $X$ 和 $Y$. 直线 $x=1$ 的左边部分是集合 $X$ ,右边部分是集合 $Y$, $X$ 和 $Y$ 分别与 $\mathcal{G}_k$ 和 $\Pi_k^0$ 一一对应. 则由定理2.3, 我们得到

$$\sum_{P \in X^{(k)}} sgn(P) w(P) = \beta^{n-k} x^{\binom{n}{2}+n-k} y^{n-k} \Omega_k \Theta_k.$$

□

## 2.3 自由 $t-Motzkin$ 数的 $Hankel$ 行列式

我们知道 $m_n^{(t)}$ 和 $\widetilde{m}_n^{(t)}$ 分别是 $t-Motzkin$ 路和自由 $t-Motzkin$ 路的总权重. 并且 $m_n^{(t)} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k+1}\binom{n}{2k}\binom{2k}{k} t^{n-2k}$, $\widetilde{m}_n^{(t)} = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k} t^{n-2k}$.

$Cameron$ 和 $Yip$ 证明了 $det_{1\leq i,j\leq n}(m_{i+j-2}^{(t)}+m_{i+j-1}^{(t)})$ 以及 $det_{1\leq i,j\leq n}(m_{i+j-1}^{(t)}+m_{i+j}^{(t)})$ 与第二类切比雪夫多项式有着密切的联系. 回想第二类切比雪夫多项式的定义, 对于 $n\geq 2$, 有 $U_n(x)=2xU_{n-1}-U_{n-2}(x)$, 其初始值为 $U_0(x)=1$, $U_1(x)=2x$. 令 $S_n(x)=U_n(\frac{x}{2})$. 显然, $S_n(x)$ 满足下列递推式:

$$S_n(x)=xS_{n-1}(x)-S_{n-2}(x) \tag{2.10}$$

$n\geq 2$ 初始值为 $S_0(x)=1, S_1(x)=x$. 因此可以得到

$$\sum_{n\geq 0} S_n(x)z^n=\frac{1}{1-zx+z^2}. \tag{2.11}$$

$Cameron$ 和 $Yip$ [4] 证明了对于 $n\geq 1$ 时, 有,

$$det_{1\leq i,j\leq n}(m_{i+j-2}^{(t)})=1,$$



$$det_{1\leq i,j\leq n}(m_{i+j-1}^{(t)})=S_n(t),$$

$$det_{1\leq i,j\leq n}(m_{i+j}^{(t)})=\sum_{k=0}^{n}(S_k(t))^2,$$

$$det_{1\leq i,j\leq n}(m_{i+j-2}^{(t)}+m_{i+j-1}^{(t)})=S_n(t+1),$$

$$det_{1\leq i,j\leq n}(m_{i+j-1}^{(t)}+m_{i+j}^{(t)})=\sum_{k=0}^{n}S_k(t)S_k(1+t).$$

关于自由 $t-Motzkin$ 数, 我们将要推出类似的结果.

令 $M(x,y,u,v;z)=\sum_{n\geq 0}m_n(x,y,u,v)z^n$ , $f(z)=\sum_{n\geq 0}\widetilde{m}_n^{(t)}z^n$ 是生成函数.

由第一次返回分解, 很容易得出关于 $M(x,y,u,v;z)$ 的 $f(z)$ 如下递推式:

$$M(x,x,u,u;z) = 1 + uzM(x,x,u,u;z) + xz^2M^2(x,x,u,u;z), \tag{2.12}$$

$$M(x,y,u,v;z) = 1 + vzM(x,y,u,v;z) + xyz^2M(x,y,u,v;z)M(x,x,u,u;z), \tag{2.13}$$

和

$$f(z) = 1 + tzf(z) + 2z^2M(1,1,t,t;z)f(z). \tag{2.14}$$

通过类似的计算, 有

$$M(x,x,u,u;z) = \frac{1 - uz - \sqrt{(1-uz)^2 - 4xz^2}}{2xz^2}, \tag{2.15}$$



$$M(x,y,u,v;z) = \frac{2}{2 - 2vz - y(1 - uz - \sqrt{(1-uz)^2 - 4xz^2})}, \tag{2.16}$$

和

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-tz)^2 - 4z^2}}. \tag{2.17}$$

则有 $f(z) = M(1,2,t,t;z)$, 从而得出 $\widetilde{m}_n^{(t)} = m_n(1,2,t,t)$.

**推论 2.1** 对于 $n \geq 1$, 有

(i)

$$det_{1\leq i,j\leq n}(\widetilde{m}_{i+j-2}^{(t)}) = 2^{n-1};$$

(ii)

$$det_{1\leq i,j\leq n}(\widetilde{m}_{i+j-1}^{(t)}) = 2^{n-1}(S_n(t) - S_{n-2}(t));$$

(iii)

$$det_{1\leq i,j\leq n}(\widetilde{m}_{i+j-2}^{(t)}+\widetilde{m}_{i+j-1}^{(t)})=2^{n-1}(S_n(1+t)-S_{n-2}(1+t));$$

(iv)

$$det_{1\leq i,j\leq n}(\widetilde{m}_{i+j-1}^{(t)}+\widetilde{m}_{i+j}^{(t)})=2^n+2^{n-1}\sum_{k=1}^{n}(S_k(t)-S_{k-2}(t))(S_k(1+t)-S_{k-2}(1+t));$$

(v)

$$det_{1\leq i,j\leq n}(\widetilde{m}_{i+j}^{(t)})=2^n+2^{n-1}\sum_{k=1}^{n}(S_k(t)-S_{k-2}(t))^2.$$

证明: (i) 定理2.2中取 $\alpha=1,\beta=0,x=1,y=2,u=v=t$, 则

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{n\geq 0}\Theta_n(1,2,t,t,1,0)z^n &= \tfrac{1-z}{1-2z}=1+\tfrac{z}{1-2z}\\ &= 1+\tfrac{z(1-2^nz^n)}{1-2z}\\ &= 1+z+2z^2+2^2z^3+\cdots\\ &= 1+\textstyle\sum_{n\geq 1}2^{n-1}z^n\end{aligned}$$



故, 当 $n\geq 1$ 时, $\Theta_n(1,2,t,t,1,0)=2^{n-1}z^n$.

由于 $x^{\binom{n}{2}}\Theta_n(x,y,u,v,1,0)=det_{1\leq i,j\leq n}(m_{i+j-2}(x,y,u,v))$, 则有

$$det_{1\leq i,j\leq n}(\widetilde{m}_{i+j-2}^{(t)})=det_{1\leq i,j\leq n}(m_{i+j-2}(1,2,t,t))=2^{n-1}.$$

(ii) 令定理2.2中 $\alpha=0,\beta=1,x=1,y=2,u=v=t$, 则

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{n\geq 0}\Theta_n(1,2,t,t,0,1)z^n &= \tfrac{1-tz}{1-2tz+4z^2}\\ &= \textstyle\sum_{n\geq 0}S_n(t)(2z)^n(1-tz)\\ &= \textstyle\sum_{n\geq 0}2^nS_n(t)z^n-\sum_{n\geq 0}2^ntS_n(t)z^{n+1}\\ &= \textstyle\sum_{n\geq 0}2^nS_n(t)z^n-\sum_{n\geq 1}2^{n-1}tS_{n-1}(t)z^n.\end{aligned}$$

从而有当 $n \geq 1$ 时

$$\Theta_n(1, 2, t, t, 0, 1) = 2^n S_n(t) - 2^{n-1} S_{n-1}(t)$$

由于 $x^{\binom{n}{2}}\Theta_n(x, y, u, v, 0, 1) = det_{1 \leq i,j \leq n}(m_{i+j-1}(x, y, u, v))$, 由等式(2.11), 得到

$$det_{1 \leq i,j \leq n}(\widetilde{m}_{i+j-1}^{(t)}) = det_{1 \leq i,j \leq n}(m_{i+j-1}(1, 2, t, t)) = 2^n S_n(t) - 2^{n-1} t S_{n-1}(t).$$

再由等式 (2.10), 我们就能得出 (ii).

(iii) 定理2.2 中, 令 $\alpha = \beta = 1, x = 1, y = 2, u = v = t$ , 则有

$$\sum_{n \geq 0} \Theta_n(1, 2, t, t, 1, 1) z^n = \frac{1 - (1 + t)z}{1 - 2(1 + t)z + 4z^2}.$$

同 (ii), 可以得到当 $n \geq 1$ 时, 有



$$\Theta_n(1, 2, t, t, 1, 1) = 2^n S_n(1 + t) - 2^{n-1}(1 + t) S_{n-1}(1 + t)$$

又由于

$$\begin{aligned}\Theta_n(1, 2, t, t, 1, 1) &= det_{1 \leq i,j \leq n}(m_{i+j-2}(1, 2, t, t) + m_{i+j-1}(1, 2, t, t)) \\ &= det_{1 \leq i,j \leq n}(\widetilde{m}_{i+j-2}^{(t)} + \widetilde{m}_{i+j-1}^{(t)})\end{aligned}$$

根据等式 (2.11), 得到

$$det_{1 \leq i,j \leq n}(\widetilde{m}_{i+j-2}^{(t)} + \widetilde{m}_{i+j-1}^{(t)}) = 2^{n-1}(2S_n(1 + t) - (1 + t) S_{n-1}(1 + t)).$$

再由等式 (2.10), 即可得到 (iii) .

(iv) 命题2.1 中, 令 $x=1, y=2, u=v=t$, 则有

$$\sum_{n\geq 0}\Omega_n z^n=\frac{1-z^2}{1-tz+z^2}. \tag{2.18}$$

同 (ii), 可以得到当 $n\geq 0$ 时, 有 $\Omega_n(1,2,t,t)=S_n(t)-S_{n-2}(t)$. 再由 (iii), 有当 $n\geq 1$ 时, $\Theta_n(1,2,t,t)=2^{n-1}(S_n(1+t)-S_{n-2}(1+t))$, 初始值 $\Theta_0(1,2,t,t)=1$. 因此, 由定理2.4, 能够推出等式 (iv).

(v) 在定理2.2 中, 令 $\alpha=0, \beta=1, x=1, y=2, u=v=t$, 则有

$$\sum_{n\geq 0}\Theta_n(1,2,t,t,0,1)z^n=\frac{1-tz}{1-2tz+4z^2}.$$

从而, 当 $n\geq 1$ 时, $\Theta_n(1,2,t,t,0,1)=2^{n-1}(S_n(t)-S_{n-2}(t))$, 初始值 $\Theta_0(1,2,t,t,0,1)=1$. 由于对 $n\geq 0, \Omega_n(1,2,t,t)=S_n(t)-S_{n-2}(t)$. 因此, 由定理2.4, 可以推出 (v). □

## 2.4 带权 $Schröder$ 数的 $Hankel$ 行列式

在本节中, 我们将要计算两个连续带权 $Schröder$ 数的线性组合序列 $\alpha r_{k+i+j-2}(x,y,u,v)+\beta r_{k+i+j-1}(x,y,u,v)$ 的 $Hankel$ 行列式. 首先, 我们需要构造带权 $Motzkin$ 路和带权 $Schröder$ 路的关系, 这是计算带权 $Schröder$ 路的 $Hankel$ 行列式至关重要的一步.

令 $R(x,u,v;z)=\sum_{n\geq 0}r_n(x,u,v)z^n$ 和 $\widetilde{R}(x,u,v;z)=\sum_{n\geq 0}\widetilde{r}_n(x,u,v)z^n$ 表示生成函数. 利用第一次返回分解, 有

$$R(x,u,u;z)=1+uzR(x,u,u;z)+xz(R(x,u,u;z))^2,$$

$$R(x,u,v;z)=1+vzR(x,u,v;z)+xzR(x,u,u;z)R(x,u,v;z),$$

和

$$\widetilde{R}(x,u,v;z)=1+vz\widetilde{R}(x,u,v;z)+2xzR(x,u,u;z)\widetilde{R}(x,u,v;z).$$

通过计算, 有

$$R(x,u,u;z)=\frac{1-uz-\sqrt{1-2(u+2x)z+u^2z^2}}{2xz},$$

$$R(x,u,v;z)=\frac{2}{1+(u-2v)z+\sqrt{1-2(u+2x)z+u^2z^2}},$$

$$\widetilde{R}(x,u,v;z)=\frac{1}{(u-v)z+\sqrt{1-2(u+2x)z+u^2z^2}}.$$

由于

$$M(x,y,u,v;z)=\frac{2}{2-2vz-y(1-uz-\sqrt{(1-uz)^2-4xz^2})}.$$

因此有

$$R(x,u,v;z)=M(x(u+x),1,u+2x,v+x;z),$$

$$\widetilde{R}(x,u,v;z)=M(x(u+x),2,u+2x,v+2x;z),$$

$$R(x,u,0;z)=1+xzM(x(u+x),1,u+2x,u+2x;z),$$

$$\widetilde{R}(x,u,0;z)=1+2xzM(x(u+x),1,u+2x,u+3x;z),$$

$$(x+u)(R(x,u,0;z)-1)=x(R(x,u,u;z)-1).$$

从而, 对 $n\geq 0$, 有

$$r_n(x,u,v)=m_n(x(u+x),1,u+2x,v+x), \tag{2.19}$$

和

$$\widetilde{r}_n(x,u,v)=m_n(x(u+x),2,u+2x,v+2x). \tag{2.20}$$

对 $n\geq 1$, 有

$$r_n(x,u,0)=xm_{n-1}(x(u+x),1,u+2x,u+2x), \tag{2.21}$$

$$\widetilde{r}_n(x,u,0)=2xm_{n-1}(x(u+x),1,u+2x,u+3x), \tag{2.22}$$

$$(u+x)r_n(x,u,0)=xr_n(x,u,u). \tag{2.23}$$

定义

$$G_n^{(k)}(x,u,v,\alpha,\beta)=det_{1\le i,j\le n}(\alpha r_{k+i+j-2}(x,u,v)+\beta r_{k+i+j-1}(x,u,v))$$

和

$$\widetilde{G}_n^{(k)}(x,u,v,\alpha,\beta)=det_{1\le i,j\le n}(\alpha\widetilde{r}_{k+i+j-2}(x,u,v)+\beta\widetilde{r}_{k+i+j-1}(x,u,v))$$

, 其中 $n\ge 1$. 结合等式(2.19)-(2.23), 我们容易看出对 $n\ge 1$, 有

$$\begin{aligned}G_n^{(0)}(x,u,v,\alpha,\beta) &= H_n^{(0)}(x(u+x),1,u+2x,v+x,\alpha,\beta)\\ &= x^{\binom{n}{2}}(x+u)^{\binom{n}{2}}\Theta_n(x(u+x),1,u+2x,v+x,\alpha,\beta),\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}G_n^{(1)}(x,u,0,\alpha,\beta) &= x^nH_n^{(0)}(x(u+x),1,u+2x,u+2x,\alpha,\beta)\\ &= x^{\binom{n+1}{2}}(x+u)^{\binom{n}{2}}\Theta_n(x(u+x),1,u+2x,u+2x,\alpha,\beta),\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}G_n^{(1)}(x,u,u,\alpha,\beta) &= x^{-n}(u+x)^nG_n^{(1)}(x,u,0,\alpha,\beta)\\ &= x^{\binom{n}{2}}(x+u)^{\binom{n+1}{2}}\Theta_n(x(u+x),1,u+2x,u+2x,\alpha,\beta),\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_n^{(0)}(x,u,v,\alpha,\beta) &= H_n^{(0)}(x(u+x),2,u+2x,v+2x,\alpha,\beta)\\ &= x^{\binom{n}{2}}(x+u)^{\binom{n}{2}}\Theta_n(x(u+x),2,u+2x,v+2x,\alpha,\beta),\end{aligned}\tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_n^{(1)}(x,u,0,\alpha,\beta) &= 2^n x^n H_n^{(0)}(x(u+x),1,u+2x,u+3x,\alpha,\beta)\\ &= 2^n x^{\binom{n+1}{2}}(x+u)^{\binom{n}{2}}\Theta_n(x(u+x),1,u+2x,u+3x,\alpha,\beta).\end{aligned}\tag{2.28}$$

对于 $n\geq 1$, 定义

$$\begin{aligned}\Phi_n &= x^{-\binom{n}{2}}(x+u)^{-\binom{n}{2}}det_{1\leq i,j\leq n}(\alpha r_{i+j-2}(x,u,v)+\beta r_{i+j-1}(x,u,v)),\\ \Psi_n &= x^{-\binom{n+1}{2}}(x+u)^{-\binom{n}{2}}det_{1\leq i,j\leq n}(\alpha r_{i+j-1}(x,u,0)+\beta r_{i+j}(x,u,0)),\\ \Gamma_n &= x^{-\binom{n}{2}}(x+u)^{-\binom{n+1}{2}}det_{1\leq i,j\leq n}(\alpha r_{i+j-1}(x,u,u)+\beta r_{i+j}(x,u,u)),\\ \widetilde{\Phi}_n &= x^{-\binom{n}{2}}(x+u)^{-\binom{n}{2}}det_{1\leq i,j\leq n}(\alpha\widetilde{r}_{i+j-2}(x,u,v)+\beta\widetilde{r}_{i+j-1}(x,u,v)),\\ \widetilde{\Psi}_n &= 2^{-n}x^{-\binom{n+1}{2}}(x+u)^{-\binom{n}{2}}det_{1\leq i,j\leq n}(\alpha\widetilde{r}_{i+j-1}(x,u,0)+\beta\widetilde{r}_{i+j}(x,u,0)).\end{aligned}$$

令 $\Phi_0=\Psi_0=\Gamma_0=\widetilde{\Phi}_0=\widetilde{\Psi}_0=1$.

再结合等式 (2.24)-( 2.28)和定理2.2, 我们可以得到关于上述五个变量的生成函数.

**定理 2.5** 有如下生成函数:

(i) $\sum_{n\geq 0}\Phi_n z^n=\frac{1-\beta(u-v+x)z}{1-(\beta(u+2x)+\alpha)z+\beta^2x(x+u)z^2}$;

(ii) $\sum_{n\geq 0}\Psi_n z^n=\frac{1}{1-(\beta(u+2x)+\alpha)z+\beta^2x(x+u)z^2}$;

(iii) $\sum_{n\geq 0}\Gamma_n z^n=\frac{1}{1-(\beta(u+2x)+\alpha)z+\beta^2x(x+u)z^2}$;

(iv) $\sum_{n\geq 0}\widetilde{\Phi}_n z^n=\frac{1-\beta(2u-v+2x)z-\alpha z}{1-2(\beta(u+2x)+\alpha)z+4\beta^2x(x+u)z^2}$;

(v) $\sum_{n\geq 0}\widetilde{\Psi}_n z^n=\frac{1+\beta z}{1-(\beta(u+2x)+\alpha)z+\beta^2x(x+u)z^2}$.

对定理2.5中, 等式 (i), (ii) 和 (iii), 取 $x=1, u=v=t$, 我们可以计算出文献[15] 和文献[19]中两个连续大 $t-Schröder$ 数的和的 $Hankel$ 行列式 以及两个连续小 $t-Schröder$ 数的和的 $Hankel$ 行列式.

**推论** 2.2 对 $n\geq 1$, 有

(i)

$$det_{1\leq i,j\leq n}(\widetilde{r}_{i+j-2}(x,u,v))=2^{n-1}x^{\binom{n}{2}}(x+u)^{\binom{n}{2}};$$

(ii)

$$det_{1\leq i,j\leq n}(\widetilde{r}_{i+j-1}(x,u,v))=x^{\binom{n}{2}}(x+u)^{\binom{n}{2}}(2^nx^n+2^{n-1}v\frac{(u+x)^n-x^n}{u});$$

(iii)

$$det_{1\leq i,j\leq n}(\widetilde{r}_{i+j-1}(x,u,u))=2^{n-1}x^{\binom{n+1}{2}}(x+u)^{\binom{n}{2}}+2^{n-1}x^{\binom{n}{2}}(x+u)^{\binom{n+1}{2}}.$$

**证明**: 对于定理2.5中的等式 (iv), 令 $\alpha=1, \beta=0$, 有

$$\sum_{n\geq 0}\widetilde{\Phi}_n z^n=\frac{1-z}{1-2z}. \tag{2.29}$$

当 $\alpha=1$ 和 $\beta=0$ 时, 我们有 $\widetilde{\Phi}_n=x^{-\binom{n}{2}}(x+u)^{-\binom{n}{2}}det_{1\leq i,j\leq n}(\widetilde{r}_{i+j-2}(x,u,v))$. 因此,由公式 (2.29) 很容易推出 (i).

当 $\alpha=0$ , $\beta=1$ 时, 定理2.5中的等式 (iv) 变为

$$\sum_{n\geq 0}\widetilde{\Phi}_n z^n=\frac{1-(2u-v+2x)z}{1-2(u+2x)z+4x(x+u)z^2}=\frac{1}{1-2xz}(1+\frac{vz}{1-2(u+x)z}).$$

因此,

$$\begin{aligned} det_{1\le i,j\le n}(\widetilde{r}_{i+j-1}(x,u,v)) &= x^{\binom{n}{2}}(x+u)^{\binom{n}{2}}(2^n x^n + 2^{n-1}v\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}x^k(u+x)^{n-1-k}) \\ &= x^{\binom{n}{2}}(x+u)^{\binom{n}{2}}(2^n x^n + 2^{n-1}v\frac{(u+x)^n-x^n}{u}). \end{aligned}$$

(iii) 可以由 (ii) 推出. □

我们知道斐波那契数定义如下:

$$\sum_{n\ge 0} F_{2n+2}z^n = \frac{1}{1-3z+z^2},$$

和

$$\sum_{n\ge 0} F_{2n+1}z^n = \frac{1-z}{1-3z+z^2}.$$

由于

$$\widetilde{R}(1,0,0;z) = \frac{1}{\sqrt{1-4z}} = \sum_{n\ge 0}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-4)^n z^n = \sum_{n\ge 0}\binom{2n}{n}z^n.$$

因此, $\widetilde{r}_n(1,0,0) = \binom{2n}{n} = b_n$,$b_n$ 是二项式系数. 若令定理2.5等式 (iv)中, $x=1$, $u=v=0, \alpha=1, \beta=0$ , 则能算出二项式系数的 $Hankel$ 行列式:

$$det_{1\le i,j\le n}(b_{i+j-2}) = 2^{n-1}. \tag{2.30}$$

若令定理2.5等式 (iv)中 $x=1, u=0, \alpha=1$ , $\beta=0$ ,则有:

$$det_{1\le i,j\le n}(b_{i+j-1}) = 2^n. \tag{2.31}$$

若令定理2.5等式 (iv)和 (v)中 $x=1, u=v=0, \alpha=1$ , $\beta=1$ , 则有:

**推论** 2.3 当 $n\ge 1$ 时,

$$det_{1\le i,j\le n}(b_{i+j-2}+b_{i+j-1}) = 2^{n-1}(F_{2n+1}+F_{2n-1}), \tag{2.32}$$

和

$$det_{1\le i,j\le n}(b_{i+j-1}+b_{i+j})=2^n(F_{2n+2}+F_{2n}). \tag{2.33}$$

由定理2.5,很容易得到两个连续带权 $schröder$ 数的线性组合序列的 $Hankel$ 行列式的显性公式 .

**定理** 2.6 对于 $n\ge 0$, 令

$$g_n=\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{2m-n}\sum_{l=0}^{k}(-1)^{n-m}\binom{m}{2m-n}\binom{2m-n}{k}\binom{k}{l}\alpha^l\beta^{n-l}x^{n-m+k-l}(x+u)^{m-k}.$$

则当 $n\ge 1$时, 有

(i)

$$\begin{aligned}&det_{1\le i,j\le n}(\alpha r_{i+j-2}(x,u,v)+\beta r_{i+j-1}(x,u,v))\\&=x^{\binom{n}{2}}(x+u)^{\binom{n}{2}}(g_n-\beta(u-v+x)g_{n-1});\end{aligned}$$

(ii)

$$det_{1\le i,j\le n}(\alpha r_{i+j-1}(x,u,0)+\beta r_{i+j}(x,u,0))=x^{\binom{n+1}{2}}(x+u)^{\binom{n}{2}}g_n;$$

(iii)

$$det_{1\le i,j\le n}(\alpha r_{i+j-1}(x,u,u)+\beta r_{i+j}(x,u,u))=x^{\binom{n}{2}}(x+u)^{\binom{n+1}{2}}g_n;$$

(iv)

$$\begin{aligned}&det_{1\le i,j\le n}(\alpha\widetilde{r}_{i+j-2}(x,u,v)+\beta\widetilde{r}_{i+j-1}(x,u,v))\\&=2^{n-1}x^{\binom{n}{2}}(x+u)^{\binom{n}{2}}(2g_n-(\beta(2u-v+2x)+\alpha)g_{n-1});\end{aligned}$$

(v)

$$det_{1\le i,j\le n}(\alpha\widetilde{r}_{i+j-1}(x,u,0)+\beta\widetilde{r}_{i+j}(x,u,0))=2^nx^{\binom{n+1}{2}}(x+u)^{\binom{n}{2}}(g_n+\beta g_{n-1}).$$

# 3 格路径上的 $Chung-Feller$ 性质

## 3.1 本章概述

文章开头介绍过, 在 $Z\times Z$ 平面上, 从起点 $(0,0)$ 到终点 $(n,k)$, 且每一步属于集合 {对角线 $D=(1,1)$, 水平步 $H=(1,0)$, 垂直步 $V=(0,1)$, 倾斜步 $L=(-1,1)$ } 之中的格路, 在本文中我们称为第四类格路. 记 $\mathcal{S}(n,k)$ 是这些格路的集合. *Delannoy* 路 [2] 就是上述中不含有倾斜步的路. 一条路 $\pi$ 称为正的(负的), 如果这条路在 $y$-轴右侧(左侧)或者 $y$-轴上. 令 $\mathcal{P}(n)$ 是集合 $\mathcal{S}(0,n)$ 中的正路的集合. 令 $P(n)$ 和 $S(n,k)$ 表示集合 $\mathcal{P}(n)$ 和 $\mathcal{S}(n,k)$ 的基数, 即集合中元素的个数.容易看出, 当把负路中对角线步和倾斜角步顺时针旋转 90 度会得到 *Dyck* 路 [9]. 同样的, 我们可以顺时针旋转负路中对角线步, 倾斜步, 竖直步 90 度得到 *Motzkin* 路 [10]. *Dziemiańczuk* [11]通过计算生成函数得到下面的公式

$$P(n)=\frac{1}{n+1}(S(-2,n)+S(-1,n)+S(0,n)), \tag{3.1}$$

并且提出公开问题, 能否用双射的方法来证明这个等式.

本章用双射的方法证明了这个等式, 同时也证明了正路与 $m$-缺陷路关于数量的一个双射关系.

## 3.2 证明方法

我们知道在第四种格路中 $y-$ 轴左侧的一个非水平步是一个缺陷, 则上述的正路就是不含有缺陷的路. 令 $\mathcal{A}(n,m)$ 表示集合 $\mathcal{S}(0,n)$ 中的所有 $m$ 缺陷的路的集合. 集合 $\mathcal{B}(n,m)\subseteq\mathcal{A}(n,m)$, 表示 $\mathcal{A}(n,m)$ 中所有第一步和最后一步都为水平步的格路的集合. 集合 $\mathcal{C}(n,m)\subseteq\mathcal{A}(n,m)$, 表示 $\mathcal{A}(n,m)$ 中所有最后一步是水平步的格路的集合. $A(n,m),B(n,m),C(n,m)$ 分别表示 $\mathcal{A}(n,m),\mathcal{B}(n,m)$ , 和

$\mathcal{C}(n,m)$ 的基数. 因此, 我们有

$$\sum_{m=0}^{n} A(n,m) = S(0,n), \tag{3.2}$$

$$\sum_{m=0}^{n} B(n,m) = S(-2,n), \tag{3.3}$$

和

$$\sum_{m=0}^{n} C(n,m) = S(-1,n). \tag{3.4}$$

结合公式 (3.2)-(3.4), 我们能将公式 (3.1)改写为如下形式:

$$(n+1)P(n) = \sum_{m=0}^{n}(A(n,m) + B(n,m) + C(n,m)). \tag{3.5}$$

为了证明 (3.5), 我们只需证明对任意的 $0 \le m \le n$,

$$P(n) = A(n,m) + B(n,m) + C(n,m), \tag{3.6}$$

成立即可. 可以看出 (3.6)与 $Dyck$ 路和 $Schröder$ 路上的 $Chung-Feller$ 定理公式相似, 因此 (3.6)就是上述集合 $\mathcal{S}(0,n)$ 中的格路上的 $Chung-Feller$ 定理公式.

我们将要用双射的方法来证明公式 (3.6). 首先, 介绍一下对正格路的标号规则, 这个规则在我们后面构造一一映射的过程中起着重要的作用. 我们先来介绍几个定义和符号. 对一条从 $(0,0)$ 到 $(0,n)$ 的正格路, 它的标号序列用 $L(\pi)$ 来表示, 则, $L(\pi)=l_1l_2\dots l_n$ , 其中 $l_i$ 是从下向上的第 $i$ 个非水平步的标号. (说明：对 $\pi$ 标号只对非水平步标号). 对一个整数 $k$ 和一个序列 $S=S_1S_2\dots S_n$, $k+S$ 表示 $S$ 中的每一个元素加 $k$.

接下来, 我们来介绍正格路的标号规则. 格路中第一次返回到与起点在同一垂直线上的步, 我们把它称为返回步, 我们将路 $\pi$ 在返回步分解, 有如下三种形

式:

$$\pi = V\pi',\ \pi = D\pi'L\pi'' \text{ or } \pi = H\pi'L\pi'',$$

其中 $\pi'$ 和 $\pi''$ 都是正格路(也可以为空). 因此我们分别将 $\pi$ 标号如下:

- 如果 $\pi = V\pi'$, 则, $L(\pi) = 1(1 + L(\pi'))$;
- 如果 $\pi = D\pi'L\pi''$, 则, $L(\pi) = 1(2 + L(\pi'))2(|\pi'| + 2 + L(\pi''))$;
- 如果 $\pi = H\pi'L\pi''$, 则, $L(\pi) = (1 + L(\pi'))1(|\pi'| + 1 + L(\pi''))$,

其中 $|\pi'|$ 表示 $\pi'$ 中非水平步的个数.

例如, 给定一条正路 $\pi = DHLHDVLDLLVLHL$, 如图1, 我们可以得到它的标号序列为 $L(\pi) = 13576894(10)2(11)$.

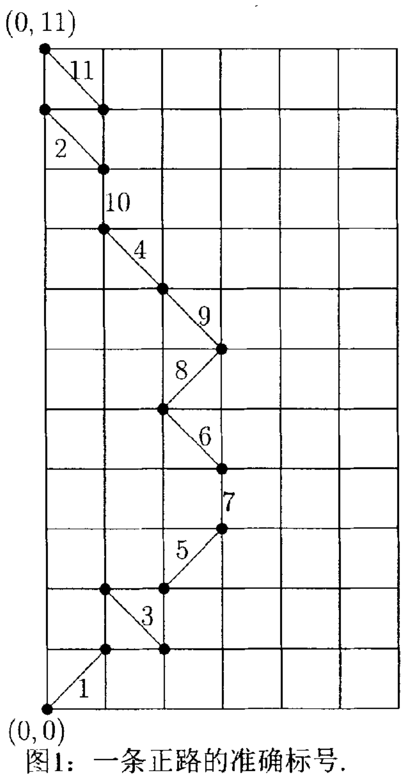


图1: 一条正路的准确标号.

令 $1 \leq m \leq n$. 我们可以把 $\mathcal{P}(n)$ 划分成三个子集 $X, Y$ 和 $Z$, 其中 $X, Y$ 和 $Z$ 分别是对角线步, 垂直步和倾斜步的标号为 $m$ 的正格路的集合.

我们通过构造集合 $X$ 和集合 $\mathcal{B}(n,m)$, 集合 $Y$ 和集合 $\mathcal{C}(n,m)$, 以及集合 $Z$ 和集合 $\mathcal{A}(n,m)$ 的一一映射 来证明公式 (3.6).

在构造这个一一映射之前, 先来介绍一些定义和符号. 对于一个正格路 $\pi = \pi_1\pi_2\ldots\pi_n$, 它的倒置记为 $\widehat{\pi} = \pi_n\ldots\pi_2\pi_1$. 例如, 对于一条路 $\pi = DVHDVLLLHL$, 它的倒置 $\widehat{\pi} = LHLLLVDHVD$. 显然, 一个正路的倒置是一个负路.

**命题 3.1** 对任意的 $1 \leq m \leq n$, 集合 $Z$ 和集合 $\mathcal{A}(n,m)$ 之间存在一个一一映射.

**证明**: 首先, 我们构造一个从集合 $Z$ 到集合 $\mathcal{A}(n,m)$ 的映射 $\alpha_m$. 给定一条正路 $\pi$,$\pi \in Z$, 假设从点 $(k+1,y)$ 到点 $(k,y+1)$ 的倾斜步标号为 $m$. 把路 $\pi$ 中从点 $(0,0)$ 到点 $(k+1,y)$ 的部分记为 $\pi'$, 点 $(k,y+1)$ 到点 $(0,n)$ 的部分记为 $\pi''$. 对任意的 $1 \leq i \leq k+1$, 记 $S_i$ 为 $\pi'$ 中最后一个从直线 $x = i-1$ 到直线 $x = i$ 的步. 对任意的 $1 \leq i \leq k$, 记 $L_i$ 为 $\pi''$ 中第一个从直线 $x = i$ 到直线 $x = i-1$ 的步. 显然, 每个 $S_i$ 是一个对角线步或者是一个水平步, 而每个 $L_i$ 是一个倾斜步. 因此,格路 $\pi$ 可以唯一的分解为如下形式:

$$\pi = \pi^{(1)}S_1\pi^{(2)}\ldots S_k\pi^{(k+1)}S_{k+1}\tau^{(k+2)}L^*\tau^{(k+1)}L_k\ldots\tau^{(2)}L_1\tau^{(1)},$$

其中, $L^*$ 是标号为 $m$ 的倾斜步, 每一个 $\pi^{(i)}$ (或$\tau^{(i)}$) 都是正路,也可以为空. 令

$$\alpha_m(\pi) = \tau^{(k+2)}\sigma^{(1)}\sigma^{(2)}\ldots\sigma^{(k+1)}, \tag{3.7}$$

其中每一个 $\sigma^{(i)} = L_i\widehat{\pi^{(i)}}S_i\tau^{(i)}$.

由前面的标号规则,我们可以看出, (i)$\tau^{(i)}$ 中非水平步的标号大于 $m$ ;(ii) 其他不在 $\tau^{(i)}$ 中的步的标号不大于 $m$. 因此, 我们有 $\alpha_m(\pi) \in \mathcal{A}(n,m)$. 由于 $\mathcal{A}(n,m)$

中的每一条路能够唯一的分解为 (3.7)的形式, 因此上述过程是可逆的. 因而, $\alpha_m$ 是一个一一映射. □

例如, 令 $n=11, m=6$, 正路 $\pi=DHLHDHLDLLVLHL \in \mathcal{P}(11)$, 如图1. 显然, 从 $(3,4)$ 到 $(2,5)$ 的倾斜步标号为 6. 从而, 正路 $\pi$ 能够唯一的分解为

$$\pi=\pi^{(1)}D\pi^{(2)}H\pi^{(3)}D\tau^{(4)}L^{*}\tau^{(3)}L\tau^{(2)}L\tau^{(1)},$$

其中, $\pi^{(1)}$ 和 $\pi^{(3)}$ 是空的, $\pi^{(2)}=HL, \tau^{(4)}=V, \tau^{(3)}=DL, \tau^{(2)}=V, \tau^{(1)}=HL$. 由 $\alpha_m$ 的定义, 我们得到正路 $\pi$ 的对应路

$$\alpha_6(\pi)=VLDHLLLHHVLDDL$$

, 如图2.

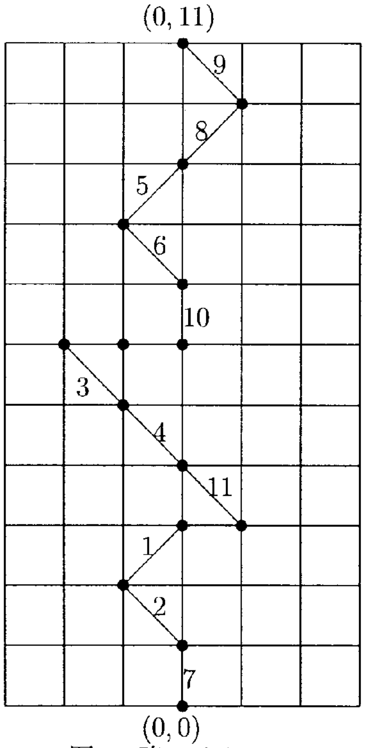


图2: 路 $\phi_6(\pi)$.

**命题 3.2** 对任意的 $1\le m\le n$, 集合 $Y$ 和集合 $\mathcal{C}(n,m)$ 之间存在一个一一映射.

**证明**: 首先, 我们构造一个从集合 $Y$ 到集合 $\mathcal{C}(n,m)$ 的映射 $\beta_m$. 给定一条正路 $\pi$,$\pi \in Y$, 假设从点 $(k,y)$ 到点 $(k,y+1)$ 的垂直步标号为 $m$. 把路 $\pi$ 中从点 $(0,0)$ 到点 $(k,y)$ 的部分记为 $\pi'$, 点 $(k,y+1)$ 到点 $(0,n)$ 的部分记为 $\pi''$. 对任意的 $1 \le i \le k$, 记 $S_i$ 为 $\pi'$ 中最后一个从直线 $x = i-1$ 到 $x = i$ 的步. 对任意的 $1 \le i \le k$, 记 $L_i$ 为 $\pi''$ 中第一个从直线 $x = i$ 到直线 $x = i-1$ 的步. 显然, 每个 $S_i$ 是一个对角线步或者是一个水平步, 而每个 $L_i$ 是一个倾斜步. 因此,格路 $\pi$ 可以唯一的分解为如下形式:

$$\pi = \pi^{(1)} S_1 \pi^{(2)} \dots \pi^{(k)} S_k \pi^{(k+1)} V^* \tau^{(k+1)} L_k \dots \tau^{(2)} L_1 \tau^{(1)},$$

其中, $L^*$ 是标号为 $m$ 的垂直步, 每一个 $\pi^{(i)}$ (或$\tau^{(i)}$) 都是正路, 也可以为空. 令

$$\beta_m(\pi) = \tau^{(k+1)} \sigma^{(1)} \sigma^{(2)} \dots \sigma^{(k)} L\widehat{\pi^{(k+1)}} H, \tag{3.8}$$

其中每一个 $\sigma^{(i)} = L_i \widehat{\pi^{(i)}} S_i \tau^{(i)}$.

由前面的标号规则,我们同样可以看出, (i) $\tau^{(i)}$ 中非水平步的标号大于 $m$ ;(ii) 其余不在 $\tau^{(i)}$ 中的步的标号不大于 $m$. 因此, 我们有 $\beta_m(\pi) \in \mathcal{C}(n,m)$. 由于 $\mathcal{C}(n,m)$ 中的每一条路能够唯一的分解为 (3.8)的形式, 因此上述过程是可逆的. 因而, $\beta_m$ 是一个一一映射. □

例如, 令 $n = 11, m = 10$, 正路 $\pi = DHLHDVLDLLVLHL \in \mathcal{P}(11)$ 如图1. 由于从点 $(1,8)$ 到点 $(1,9)$ 的垂直步标号为 10, 路 $\pi$ 能唯一的分解为:

$$\pi = \pi^{(1)} D \pi^{(2)} V^* \tau^{(2)} L \tau^{(1)},$$

其中 $\pi^{(1)}$ 和 $\tau^{(2)}$ 是空的, $\pi^{(2)} = HLHDVLDLL$, $\tau^{(1)} = HL$. 由 $\beta_m$ 的定义, 我们得到正路 $\pi = DHLHDVLDLLVLHL$ 的对应路

$$\beta_{10}(\pi) = LDHLLLLDLVDHLHH$$

, 如图3.

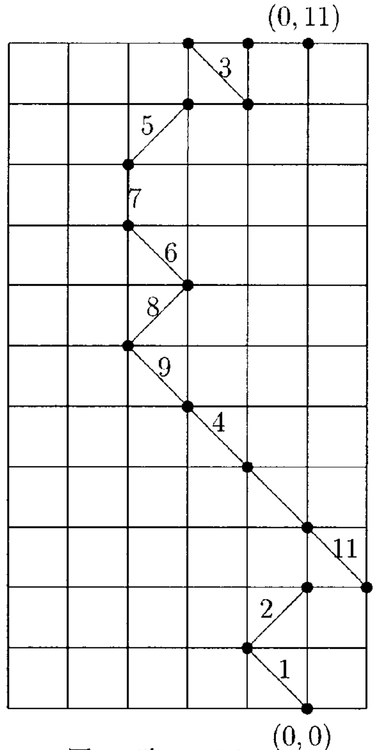


图3：路 $\psi_{10}(\pi)$.

**命题** 3.3 对任意的 $1 \le m \le n$, 集合 $X$ 和集合 $\mathcal{B}(n,m)$ 之间存在一个一一映射.

**证明**: 当 $m=n$ 时, 集合 $X$ 和集合 $\mathcal{B}(n,m)$ 都是空集. 因此对于 $m=n$, 命题显然成立. 令 $1 \le m < n$. 首先, 我们构造一个从集合 $X$ 到集合 $\mathcal{B}(n,m)$ 的映射 $\gamma_m$. 给定一条正路 $\pi$,$\pi \in X$, 假设从点 $(k,y)$ 到点 $(k+1,y+1)$ 的对角线步标号为 $m$. 把路 $\pi$ 中从点 $(0,0)$ 到点 $(k,y)$ 的部分记为 $\pi'$, 点 $(k+1,y+1)$ 到点 $(0,n)$ 的部分记为 $\pi''$. 对任意的 $1 \le i \le k$, 记 $S_i$ 为 $\pi'$ 中最后一个从直线 $x=i-1$ 到 $x=i$ 的步. 对任意的 $1 \le i \le k$, 记 $L_i$ 为 $\pi''$ 中第一个从直线 $x=i$ 到直线 $x=i-1$ 的步. 显然, 每个 $S_i$ 是一个对角线步或者是一个水平步, 而每个 $L_i$ 是一个倾斜步.

因此, 格路 $\pi$ 可以唯一的分解为如下形式:

$$\pi = \pi^{(1)}S_1\pi^{(2)}\dots\pi^{(k)}S_k\pi^{(k+1)}D^*\tau^{(k+2)}L_{k+1}\tau^{(k+1)}L_k\dots\tau^{(2)}L_1\tau^{(1)},$$

其中, $L^*$ 是标号为 $m$ 的垂直步, 每一个 $\pi^{(i)}$ (或$\tau^{(i)}$) 都是正路, 也可以为空. 令

$$\gamma_m(\pi) = H\tau^{(k+2)}L_{k+1}\tau^{(k+1)}\sigma^{(1)}\sigma^{(2)}\dots\sigma^{(k)}L\widehat{\pi^{(k+1)}}H, \tag{3.9}$$

其中每一个 $\sigma^{(i)} = L_i\widehat{\pi^{(i)}}S_i\tau^{(i)}$.

由前面的标号规则, 我们同样可以看出, (i) $\tau^{(i)}$ 中非水平步的标号大于 $m$ ;(ii) 倾斜步 $L_{k+1}$ 标号为 $m+1$; (iii) 余下的步的标号不大于 $m$. 因此, 我们有 $\gamma_m(\pi) \in \mathcal{B}(n,m)$.

给定一条正路 $\pi \in \mathcal{B}(n,m)$, 它能唯一的分解成 (3.9)的形式. 因此我们能用上述过程的逆运算 $\gamma_m^{-1}$ 将 $\pi$ 返回到集合 $X$ 中. 因此映射 $\gamma_m$ 是一个一一映射. □

例如, 令 $n = 11, m = 5$, 正路 $\pi = DHLHDVLDLLVLHL \in \mathcal{P}(11)$ 如图1. 由于从点 $(2,2)$ 到点 $(3,3)$ 的对角线步标号为 5, 路 $\pi$ 能唯一的分解为:

$$\pi^{(1)}D\pi^{(2)}H\pi^{(3)}D^*\tau^{(4)}L\tau^{(3)}L\tau^{(2)}L\tau^{(1)}$$

, 其中 $\pi^{(1)}$ 和 $\pi^{(3)}$ 是空的, $\pi^{(2)} = HL, \tau^{(4)} = V, \tau^{(3)} = DL, \tau^{(2)} = V, \tau^{(1)} = HL$. 由 $\gamma_m$ 的定义, 我们能得到路 $\pi$ 的对应路 $\gamma_5(\pi) = HVLDLLDHLLLHHVLH$ 如图4.

结合命题 3.1, 3.2 和 3.3, 我们可以推出对任意的 $1 \le m \le n$

$$P(n) = |X| + |Y| + |Z| = A(n,m) + B(n,m) + C(n,m).$$

注意到 $B(n,0) = C(n,0) = 0$, $|X| = |Y| = 0$ 和 $|Z| = A(n,0) = P(n)$. 因此,

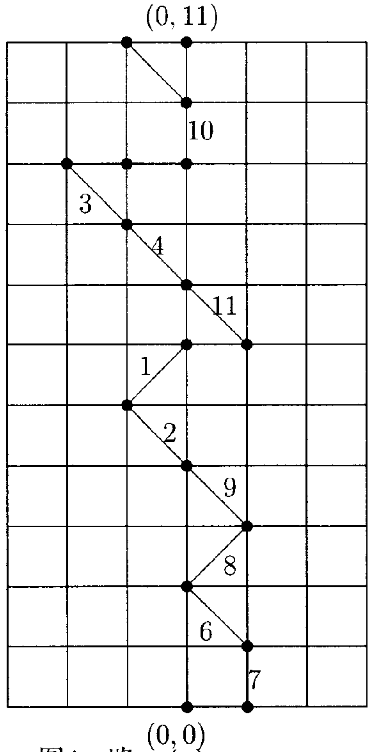


图4：路 $\gamma_5(\pi)$.

我们用双射的方法证明了公式 (3.6).

# 参考文献


[1] M. Aigner. Motzkin numbers.[J] *Europ. J. Combin.* 19 (1998), 663–675.

[2] C. Banderier, S. Schwer. Why Delannoy numbers.[J] *Journal of Statistical Planning and Inference.* 135 (2005), 40–54.

[3] R. A. Brualdi, S. Kirkland. Aztec diamonds and digraphs, and Hankel determinants of schröder numbers.[J] *J. Combin. Theory Ser B.* 94 (2005), 334–351.

[4] N. T. Cameron, A. C. M. Yip. Hankel determinants of sums of consecutive Motzkin numbers.[J] *Linear Algebra Appl.* 434 (2011), 712–722.

[5] W. Y. C. Chen, N. Y. Li, L. W. Shapiro, and S. H. F. Yan. Matrix identities on weighted partial Motzkin paths.[J] *Europ. J. Combin.* 28 (2007), 1196-1207.

[6] K. L. Chung, K. Feller. On fluctuations in coin-tossing.[J] *Proc.Nat.Acad.Sci.USA.* 35 (1949), 605-608.

[7] A. Cvetković, P. Rajković, M. Ivković. Catalan numbers, the Hankel transform, and Fibonacci numbers.[J] *J. Integer Seq.* 5 (2002)

[8] M. Desainte-Catherine, G. Viennot. Enumeration of certain Young tableaux with bounded height.[J] *Lecture Notes in Mathematics.* 1234 (1986), 58-67.

[9] E. Deutsch. Dyck path enumeration.[J] *Discrete Math.* 204 (1999), 167-202.

[10] R. Donaghey, L. W. Shapiro. Motzkin numbers.[J] *J. Combin. Theory Ser. A.* 23 (1977), 291-301.

[11] M. Dziemiańczuk. Counting lattice paths with four types of steps.[J] *Graphs Combin.* DOI 10.1007/s00373-013-1357-1.

[12] S.-P. Eu, T.-S. Fu. A simple proof of the Aztec diamond theorem.[J] *Electron. J. Combin.* 12 (2005),18.

[13] S-P. Eu, T-S. Fu,and Y-N. Yeh. Taylor expansion for Catalan and Motzkin numbers.[J] *Adv.Appl.Math.* 29 (2002), 345-357

[14] S-P. Eu, T-S. Fu,and Y-N. Yeh. Refined Chung-Feller theorems for lattice paths.[J] *J,Combin.Theory Ser.A.* 112 (2005),143-162

[15] S.-P. Eu, T.-L. Wong, P.-L. Yen. Hankel determinants of sums of consecutive weighted schröder numbers.[J] *Linear Algebra Appl.* 437 (2012), 2285-2299.

[16] I. Gessel, X.G. Viennot. Determinants, paths, and plane partitions.[J] Available at:http://people.brandeis.edu/ gessel/homepage/papers/pp.pdf(1989)

[17] C. Krattenthaler. Advanced determinant calculus: a complement.[J] *Linear Algebra Appl.*411 (2005), 68-166.

[18] T. V. Narayana. Cyclic permutation of lattice paths and the Chung-Feller theorem,[J] *Skand.Aktuarietidskrift.* 50 (1967),23-30

[19] P. M. Rajković, M. D. Petković, P. Barry. The Hankel transform of the sum of consecutive generalized Catalan numbers.[J] *Integral Transform. Spec. Funct.* 18 (2007), 285-296.

[20] N. J. A. Sloan and S. Plouffe. The Encyclopedia of Integer Sequences.[J] *Academic Press, San Diego.*(1995)

[21] R. A. Sulanke, G. Xin. Hankel determinants for some common lattice paths.[J] *Adv. Appl. Math.* 40 (2008), 149-167.

[22] X.G. Viennot, Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux.[J] *Adv. Appl. Math.* Available at:http://web.mac.com/xgviennot. 1983.

[23] W. Woan. Uniform partitions of lattice paths and Chung-Feller generalizations.[J] *Amer.Math.Monthly*. 108 (2001), 556-559

# 在学期间的研究成果及发表的论文

[1] Sherry H. F. Yan, Yaqiu Zhang. On Lattice Paths with Four Types of Steps.*Graphs and Combinatorics*. DOI 10.1007/s00373-014-1424-2.

[2] Sherry H. F. Yan, Huiyun Ge, Yaqiu Zhang. On a refinement of Wilf-equivalence for permutation.*Electronic Journal of combinatorics*. 22(1), 2015,P1.20.

[3] Sherry H. F. Yan, Yaqiu Zhang. Hankel determinants of sums of consecutive weighted Motzkin and Schrőder numbers.Submitted

# 致谢

时光荏苒, 岁月如梭, 转眼间在浙师大数信学院三年的研究生生涯即将结束, 在离校之际, 向三年来对我悉心指导和细致关怀的良师益友 们表示最诚挚的感谢, 谢谢你们!

首先, 我要由衷地感谢我的导师严慧芳副教授. 这三年来, 严老师不仅在学术上对我精心指导, 倾囊相授, 而且在生活上也对我关怀备至. 从开始的理论学习, 到后来的问题研究, 再到论文的撰写, 严老师总是孜孜不倦的教导着我, 看不懂的证明过程, 不会计算的公式, 严老师总是会不厌其烦的给我讲解, 不仅如此,严老师还教导我如何查阅文献资料, 对于使用latex软件写论文时遇到的问题会耐心的指导, 使我三年的学习生活获益匪浅. 严老师一直和蔼可亲, 平易近人,每周的讨论班上我们可以像朋友那样激烈地讨论, 在生活当中也像姐姐一样给予我关怀. 严老师严谨的治学态度, 勤奋的工作作风以及精益求精的科研精神,时时刻刻影响着我. 师恩如山, 像这样一位亦师亦友的老师对于我的恩情, 我会一直铭记于心. 在此致以真诚的感谢!

同时, 我还要感谢王维凡老师, 卜月华老师, 朱绪鼎老师, 王应前老师, 吕新忠老师, 金泽民老师, 马美杰老师, 张华军老师, 田贵贤老师,郝建修老师, 黄丹君老师, 陈敏老师等及其他任课老师对我学习上的悉心指导和帮助, 他们的博学广才, 丰富了我的学识, 开拓了我的眼界.

此外, 还要感谢我的师姐, 同门, 师妹们以及共同学习的同学们, 你们对我的帮助和照顾, 我会铭记于心.最后要感谢的是我的父母, 感谢他们对我学业的支持.

最后对为本文审阅的和参加笔者论文答辩的专家教授表示诚挚的谢意,是您们的辛勤劳动, 使得本文画上圆满的句号. 还有很多帮助过我的人,在此一并表示衷心的感谢, 谢谢大家近三年来对我的关心与帮助. 谢谢!

## 浙江师范大学学位论文独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得 的研究成果.论文中除了特别加以标注和致谢的地方外,不包含其他人或其他机 构已经发表或撰写过的研究成果.其他同志对本研究的启发和所做的贡献均已在 论文中作了明确的声明并表示了谢意.

作者签名：张雅秋　　　　日期：2015年 6月 6 日

### 学位论文使用授权声明

本人完全了解浙江师范大学有关保留、使用学位论文的规定,即：学校有权 保留送交论文的复印件和电子文档,允许论文被查阅和借阅,可以采用影 印、缩印或扫描等手段保存、汇编学位论文.同意浙江师范大学可以用不同方式在不同 媒体上发表、传播论文的全部或部分内容.保密的学位论文在解密后遵守此协议.

作者签名：张雅秋　导师签名：[illegible]　日期：2015 年 6月 6日

# 浙江师范大学学位论文诚信承诺书

我承诺自觉遵守《浙江师范大学研究生学术道德规范管理条例》. 我的学位论文中凡引用他人已经发表或未发表的成果、数据、观点等，均已明确注明并详细列出有关文献的名称、作者、年份、刊物名称和出版文献的出版机构、出版地和版次等内容. 论文中未注明的内容为本人的研究成果.

如有违反，本人接受处罚并承担一切责任.

承诺人 (研究生): 张雅秋

指 导 教 师: 马慧芳