DOI:10.16217/j.cnki.szxbsk.2002.04.018
第19卷第4期 苏州教育学院学报 Vol.19.No.4
2002年12月 Journal of Suzhou Education College Dec.2002

用矩阵变换求最大公约数和连分数的渐近分数

唐 宗 明

（苏州教育学院 数学系，江苏 苏州 215002）

摘 要：给出了用矩阵初等行变换求最大公约数和连分数的渐近分数与文[1]不同的方法.

关键词：矩阵初等行变换；最大公约数；连分数；渐近分数

中图分类号：D156.1 文献标识码：A 文章编号：1008－7931(2002)04－0073－02

一、求最大公约数

结论1 设 a,b 为两个正整数，$a>b$，$b\nmid a$ 进行矩阵的初等行变换：

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\xrightarrow{(1)+(2)\times\left(-\left[\frac{a}{b}\right]\right)}\begin{pmatrix}r_1\\b\end{pmatrix}\xrightarrow{(2)+(1)\times\left(-\left[\frac{b}{r_1}\right]\right)}\cdots\cdots\begin{pmatrix}r_K\\r_{K-1}\end{pmatrix}\xrightarrow{(2)+(1)\times\left(-\left[\frac{r_{K-1}}{r_K}\right]\right)}\begin{pmatrix}r_K\\0\end{pmatrix},$$

则有 a,b 的最大公约数 $(a,b)=r_K$，其中$\left[\frac{a}{b}\right]$是不大于$\frac{a}{b}$的最大整数，必要时，最后再作一次两行对换，使第二行元素为0.

证 由带余除法得

$$a=\left[\frac{a}{b}\right]b+r_1,0<r_1<b;\ b=\left[\frac{b}{r_1}\right]r_1+r_2;0<r_2<r_1;\ \cdots\cdots;$$

$$r_{K-2}=\left[\frac{r_{K-2}}{r_{K-1}}\right]r_{K-1}+r_K,0<r_K<r_{K-1};r_{K-1}=\left[\frac{r_{K-1}}{r_K}\right]r_K+0$$

$\therefore (a,b)=r_K$

例一 求288与158的最大公约数.

解：$\begin{pmatrix}288\\158\end{pmatrix}\xrightarrow{(1)+(2)\times(-1)}\begin{pmatrix}130\\158\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{依次}(2)+(1)\times(-1),(1)+(2)\times(-4),(2)+(1)\times(-1),(1)+(2)\times(-1),(1)+(2)\times(-4)}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$,

$\therefore (288,158)=2$.

二、求连分数的渐近分数

因为任一实数 α 都可表为一个简单连分数，$\alpha=[a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots]=a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\cdots$，而它的第 K 个渐近分数$\frac{P_K}{q_K}=[a_1,a_2,\cdots,a_K]$，$1\leqslant K\leqslant n$. 在分母 $\leqslant q_K$ 的一切有理数中，$\frac{P_K}{q_K}$ 是 α 的最好的有理近似值.

下面给出用矩阵初等行变换求连分数的第 K 个渐近分数的与文[1]不同的方法.

① 收稿日期：2002－06－05
作者简介：唐宗明(1954－)，男，四川资阳人，苏州教育学院数学系讲师。

结论 2　设连分数$[a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots] = a_1 + \frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots+\frac{1}{a_n+}\cdots$的第 K 个渐近分数为$\frac{P_K}{q_K} = [a_1, a_2, \cdots, a_K]$, $1 \leqslant K \leqslant n$, 则 P_K, q_K 可由下面方法得到. 从单位矩阵 $C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 开始作初等行变换:

$$C_0 = \xrightarrow{(1)+(2)\times(-a_1)} C_1 \xrightarrow{(2)+(1)\times(-a_2)} C_2 \xrightarrow{(1)+(2)\times(-a_3)} \cdots$$

当 K 为奇数时, 第 K 步为 $C_{K-1} \xrightarrow{(1)+(2)\times(-a_K)} C_K = \begin{pmatrix} q_K & -P_K \\ -q_{K-1} & P_{K-1} \end{pmatrix}$

当 K 为偶数时, 第 K 步为 $C_{K-1} \xrightarrow{(2)+(1)\times(-a_K)} C_K = \begin{pmatrix} q_{K-1} & -P_{K-1} \\ -q_K & P_K \end{pmatrix}$

事实上, 若连分数$[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 的渐近分数是$\frac{P_1}{q_1}, \frac{P_2}{q_2}, \cdots, \frac{P_n}{q_n}$, 则在这些渐近分数之间, 下列关系成立:

$P_1 = a_1, P_2 = a_2 a_1 + 1, \cdots, P_K = a_K P_{K-1} + P_{K-2}$; $q_1 = 1, q_2 = a_2, \cdots, q_K = a_K q_{K-1} + q_{K-2}$; $3 \leqslant K \leqslant n$, 并规定 $P_0 = 1$, $q_0 = 1$.

对 K 用数学归纳法,

当 $K = 1$ 时, $C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)\times(-a_1)} \begin{pmatrix} 1 & -a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C_1 = \xrightarrow{(2)+(1)\times(-a_2)} \begin{pmatrix} 1 & -P_1 \\ -a_1 & 1+a_1a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & -P_1 \\ q_2 & P_2 \end{pmatrix} = C_2$, 即 $K = 1, 2$ 时结论 2 为真.

设 $K-1$ 时结论 2 成立. 当 K 为奇数时, 有 $K-1$ 为偶数, 所以

$$C_{K-1} = \begin{pmatrix} q_{K-2} & -P_{K-2} \\ -q_{K-1} & P_{K-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)\times(-a_K)} \begin{pmatrix} q_{K-2} + a_K q_{K-1} & -P_{K-2} - P_{K-1} a_K \\ -q_{K-2} & P_{K-1} \end{pmatrix} = C_K$$

当 K 为偶数时, 有 $K-1$ 为奇数, 所以

$$C_{K-1} = \begin{pmatrix} q_{K-1} & -P_{K-1} \\ -q_{K-2} & P_{K-2} \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+(1)\times(-a_K)} \begin{pmatrix} q_{K-1} & -P_{K-1} \\ -q_{K-2} - a_K q_{K-1} & P_{K-2} + P_{K-2} a_K \end{pmatrix} = C_K$$

∴当 $K \in Z^+$, 结论 2 成立.

例 2　π 写成连分数为 $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \cdots]$, 试计算其前 5 个渐近分数.

解: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)\times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+(1)\times(-7)} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -7 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)\times(-15)} \begin{pmatrix} 106 & -333 \\ -7 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+(1)\times(-1)} \begin{pmatrix} 106 & -333 \\ -133 & 355 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)\times(-292)} \begin{pmatrix} 33102 & -103993 \\ -133 & 355 \end{pmatrix}$

∴得 π 的前 5 个渐近分数为$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}$.

参考文献:

[1] 李复中. 初等数论选讲[M]. 长春: 东北师范大学出版社, 1984.