

华东师范大学

硕士学位论文

排列、匹配和部分有向自回避路的统计量

姓名：谢瑾霞

申请学位级别：硕士

专业：运筹学与控制论

指导教师：杜若霞

201104

摘 要

自回避路径,即不会两次经过同一个点的格路径,是随机路径中的典型模型.对称部分有向自回避路和非对称部分有向自回避路作为两类特殊的自回避路径,分别和匹配、排列有着密切的关系,近年来在计数组合学的研究中受到广泛关注.本文主要研究了这两类路径与匹配、排列的统计量之间的一一对应关系.

本文的主要结果是给出了排列和非对称部分有向自回避路之间的两个双射 χ_1 和 χ_2 . 双射 χ_1 给出了排列和非对称部分有向自回避路上七组统计量的一一对应关系,如排列中的逆序数对应非对称部分有向自回避路与直线 $y = -x$ 所围区域中的方格数,排列中上升的个数对应非对称部分有向自回避路中拐角的个数等. 双射 χ_2 将排列的主指标对应到非对称部分有向自回避路中的方格数. 由此我们给出了排列中逆序数和主指标对称分布关系的一个新的证明.

另外我们用类似方法给出了匹配和对称部分有向自回避路的四组统计量间的一一对应关系.最后,综合相关的结论,提出三个可以继续研究和讨论的问题.

关键词: 排列, 匹配, 部分有向自回避路, 逆序数, 主指标, Stirling 排列.

ABSTRACT

Self-avoiding walks are lattice walks in the plane that do not pass a point more than once. They play an important role in the theory of random walks. In this paper we study symmetric partially directed self-avoiding walks (sPDSAWs) and asymmetric partially directed self-avoiding walks (asPDSAWs). These two classes of walks are closely related to matchings and permutations, respectively, and have drawn a lot of attention in enumerative combinatorics during recent years.

The main results of this paper are two bijections, χ_1 and χ_2 , between permutations and asPDSAWs. χ_1 provides the equi-distribution properties of seven pairs of statistics of permutations and asPDSAWs: the inversions of a permutation correspond to the squares enclosed by the walk and the line $y = -x$, the ascents of a permutation correspond to the corners of the walk, etc. χ_2 provides the equi-distribution property between major indices of permutations and squares enclosed by asPDSAWs and the line $y = -x$. From these two bijections we obtain a new proof that the two statistics of permutations, inversion and major index, are equi-distributed.

For sPDSAWs, we also give a bijection that provides one-to-one correspondences between four pairs of statistics on matchings and sPDSAWs. Finally we present three questions on sPDSAWs for future study.

Key words: Permutation, Matching, PDSAW, Inversion, Major Index, Stirling permutation.

谢瑾霞 硕士学位论文答辩委员会成员名单

姓 名	职 称	单 位	备注
任 韩	教 授	华东师范大学 数学系	主席
吕长虹	教 授	华东师范大学 数学系	
郭军伟	副教授	华东师范大学 数学系	

第一节 背景介绍和基本概念

1.1 背景介绍

D.André 在一百多年前首次提出了格路中随机路径的计数问题 [1]. 二维平面上的格路是平面上的一条只允许沿着由网线相交而成的格点向右或向上行进的路径. 格路计数主要研究的是在各种限制条件下格路的数目和性质, 例如有关狭缝平面、四分之一平面或其他一些有限制条件的几何平面中的随机路径计数问题 [17, 2, 9, 10, 11, 15, 21, 24, 28]. M. Bousquet-Méou 在这方面做了很多的工作 [3, 4, 6, 5]. 该类研究主要用于稀释溶液中聚合物模型, 特别是用来描述聚合物的随机路径.

自回避路径, 即不会两次经过同一个点的路径, 是随机路径中的典型模型 [22, 16, 18, 19]. 其中, 对称部分有向自回避路和非对称部分有向自回避路分别和匹配、排列有着密切的关系, 近年来在计数组合学的研究中受到广泛关注. E. J. Janse van Rensburg, Thomas Prellberg 和 Andrew Rechnitzer 在文章 [17] 中给出了东步步数为 n 的对称部分有向自回避路的生成函数, 这个生成函数恰好与表示长为 $2n$ 的匹配的个数的 Touchard - Riordan 公式一致, 从而从生成函数的角度证明了二者之间的一一对应关系, 同时说明了对称部分有向自回避路的北步与匹配的交叉一一对应. 后来, Robert J. Marsh 和 Paul Martin 在文章 [23] 中给出了这个结论的组合证明. 进一步地, Martin Rubey 在 [26] 中借助赋权的 Dyck 路给出了二者之间更细致的对应关系的双射证明, 且用类似的方法借助赋权的双色 Motzkin 路给出了非对称部分有向自回避路和排列之间对应关系的双射证明.

本文在 Martin Rubey 研究基础上, 给出了关于匹配和对称部分有向自回避路、排列和非对称部分有向自回避路的几个新的结论, 同时以非对称部分有向自回避路为中间桥梁给出了排列中逆序数和主指标之间对称分布关系的一个新的组合证明.

1.2 排列及其统计量

在组合数学中, 我们经常谈论 n 元素集合, 即由 n 个不同元素组成的集合. 为了方便, 我们称它们为 n 集合 (n -set). 一个 n 集合的排列 (permutation) 是这个集合中元素的按序排列.

我们用 $[n]$ 表示集合 $\{1, 2, \dots, n\}$, 用 \mathfrak{S}_n 表示集合 $[n]$ 的所有排列做成的集合. $[n]$ 的一个排列实际上是一个映射 $\pi: [n] \rightarrow [n]$.

例1. 给定一个排列 $\pi = 728963415$, 我们可以写成以下形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 8 & 9 & 6 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

很容易看出上下两行之间的一一对应关系.

给定一个排列 $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n \in \mathfrak{S}_n$, 如果 $i < j$ 并且 $\pi_i > \pi_j$, 则称序对 (π_i, π_j) 构成一个逆序 (inversion); 我们用符号 $|S|$ 表示集合 S 中元素的个数. 称 $I(\pi) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 为 π 的逆序表 (inversion table), 其中

$$a_i = |\{j \mid j < i \text{ 且 } \pi_j > \pi_i\}|.$$

并记逆序数 $\text{inv}(\pi) = \sum_{i=1}^n a_i$. 如果 $\pi_i > \pi_{i+1}$, 则称序对 (π_i, π_{i+1}) 构成一个下降 (descent). 同样的, 如果 $\pi_i < \pi_{i+1}$, 则称序对 (π_i, π_{i+1}) 构成一个上升 (ascent). 记所有下降做成的集合为 $D(\pi) = \{i \mid \pi_i > \pi_{i+1}\}$, 所有上升做成的集合为 $A(\pi) = \{i \mid \pi_i < \pi_{i+1}\}$, 定义主指标 $\text{maj}(\pi) = \sum_{i \in D(\pi)} i$, 副指标 $\text{asc}(\pi) = \sum_{i \in A(\pi)} i$.

例2. 引用例1所给的排列, $I(\pi) = (0, 1, 0, 0, 3, 4, 4, 7, 4)$, $\text{inv}(\pi) = 0 + 1 + 0 + 0 + 3 + 4 + 4 + 7 + 4 = 23$, $D(\pi) = \{1, 4, 5, 7\}$, $A(\pi) = \{2, 3, 6, 8\}$. 得到 $\text{maj}(\pi) = 17$, $\text{asc}(\pi) = 19$.

对于排列 $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n \in \mathfrak{S}_n$, 从右往左最小数 (right-to-left minimum) 指集合

$$\{\pi_i \mid \text{对任意 } j > i, \text{ 均有 } \pi_j > \pi_i\}$$

中的元素. 我们用 $\text{rlm}(\pi)$ 表示 π 的从右往左最小数的个数. 如排列 $\pi = 81246375$ 从右往左最小数分别为 5, 3, 2 和 1, 则 $\text{rlm}(\pi) = 4$.

排列 $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n$ 中, 给定 π_j , 若存在 k 满足 $k < j$ 且 $\pi_{k-1} > \pi_j > \pi_k$, 则称序列 $(\pi_{k-1}\pi_k\pi_j)$ 构成一个 (31-2)-型; 若存在 k 满足 $k < j$ 且 $\pi_{k-1} < \pi_j < \pi_k$, 则称序列 $(\pi_{k-1}\pi_k\pi_j)$

构成一个 (13-2)-型. 例如排列 $\pi = 728963415$ 中 (31-2)-型有 (72-6), (72-3), (72-4), (72-5), (63-4) 和 (63-5), (13-2)-型有 (28-6), (28-3), (28-4) 和 (28-5).

对于排列 $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n$, 称 (i, π_i) 为该排列的一条弧 (arc). 对于弧 (j, π_j) 和 (k, π_k) , 如果 $k < j \leq \pi_j < \pi_k$ 或 $k > j > \pi_j > \pi_k$, 称 (j, π_j) 和 (k, π_k) 形成一个嵌套 (nesting); 如果 $j < k \leq \pi_j < \pi_k$ 或 $j > k > \pi_j > \pi_k$, 称 (j, π_j) 和 (k, π_k) 形成一个交叉 (crossing). 我们用 $\text{nes}(\pi)$ 表示 π 的所有嵌套的个数, 用 $\text{crs}(\pi)$ 表示 π 的所有交叉的个数.

我们也可以用图表示一个排列, 例如 $\pi = 425198673$ 对应于下图:

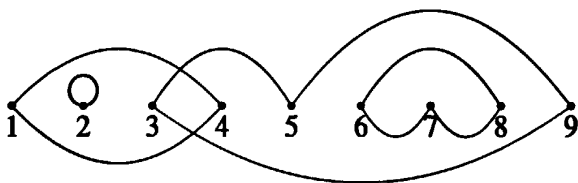


图 1: 排列的图形表示

按照定义, 图 1 中形成嵌套的弧有 (1, 4) 和 (2, 2), (5, 9) 和 (6, 8), (9, 3) 和 (8, 7), (9, 3) 和 (7, 6), 从而 $\text{nes}(\pi) = 4$. 同样, 形成交叉的弧有 (1, 4) 和 (3, 5), (3, 5) 和 (5, 9), (9, 3) 和 (4, 1), 从而 $\text{crs}(\pi) = 3$.

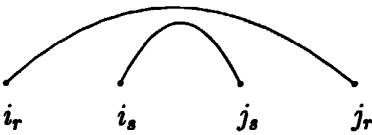
定义 1. 设 $\pi \in \mathfrak{S}_n$, π 的一个因子 (factor) 是一个极小子集合 $\{a, a+1, \dots, b\} (1 \leq a \leq b \leq n)$ 中元素的有序排列, 满足小于 a (大于 b) 的元素只能映射到小于 a (大于 b) 的元素.

例 3. 排列 314275698 有 3 个因子, 分别为 3142, 756 和 98.

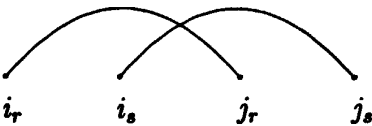
1.3 匹配及其统计量

$[n]$ 的一个分拆 (partition) 是集合 $[n]$ 的一些非空不交子集合, 且这些集合的并恰为 $[n]$. 例如 $[9]$ 的一个分拆为 $\{\{1, 2, 5\}, \{3, 4, 7, 9\}, \{6, 8\}\}$. 我们称这些子集合为块 (block). $[2n]$ 的一个匹配 (matching) 是 $[2n]$ 的由 n 个 2-元块组成的分拆. 可将这 n 个块记为 $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)$, 其中对任意 $1 \leq r \leq n$, $i_r < j_r$. 我们用 \mathcal{M}_n 表示 $[2n]$ 的所有匹配的集合.

给定匹配中的两个块 (i_r, j_r) 和 (i_s, j_s) . 如果 $i_r < i_s < j_s < j_r$, 则称它们形成了一个嵌套 (nesting). 如下图所示:



如果 $i_r < i_s < j_r < j_s$, 则称它们形成了一个交叉 (crossing). 如下图所示:



同排列中的定义类似, 给定一个匹配 M , 我们用 $\text{nes}(M)$ 表示 M 的所有嵌套的个数, 用 $\text{crs}(M)$ 表示 M 的所有交叉的个数.

定义 2. 设 $M \in \mathcal{M}_n$, M 的一个因子 (factor) 是一个极小子集合 $\{a, a + 1, \dots, b\} (1 \leq a \leq b \leq 2n)$ 中元素构成的一个子匹配, 满足其中所有元素都只与该区间内元素匹配, 且小于 a (大于 b) 的元素只能与小于 a (大于 b) 的元素匹配.

例4. 下面的匹配有 3 个因子:



这 3 个因子分别为 $\{(1, 3), (2, 4)\}, \{(5, 9), (6, 8), (7, 10)\}$ 和 $\{(11, 12)\}$.

1.4 部分有向自回避路

Martin Rubey 在文章 [26] 中给出下面的定义:

定义 3. 部分有向自回避路 (partially directed self-avoiding walk, 简称 PDSAW), 是指在直角坐标平面上从原点出发、只走单位东步、北步和南步的一条路径, 其中要求路径不能两次经过同一个点. 将满足上述条件但夹在直线 $y = x$ 和直线 $y = -x$ 之间、终止于 $y = -x$ 的路径称为对称部分有向自回避路 (symmetric partially directed self-avoiding walk, 简称 sPDSAW);

将满足上述条件但夹在 x -轴和直线 $y = -x$ 之间、终止于 $y = -x$ 的路径称为非对称部分有向自回避路 (*asymmetric partially directed self-avoiding walk*, 简称 *asPDSAW*).

特别地, 长为 $2n$ 的一条 Dyck 路 (Dyck path) 是直角坐标平面上从原点 $(0, 0)$ 出发、只走单位东步和南步、最终到达点 $(n, -n)$ 的一条路. Dyck 路显然是 *asPDSAW*. 我们用

\mathcal{P}_n 表示东步步数为 n 的所有 *sPDSAW* 的集合;

\mathcal{A}_n 表示东步步数为 n 的所有 *asPDSAW* 的集合;

\mathcal{D}_n 表示东步步数为 n 的所有 Dyck 路的集合.

同时, 设 $P \in \mathcal{P}_n$, 我们用 E, N 和 S 分别表示 P 的东步、北步和南步, 用 $E(P), N(P)$ 和 $S(P)$ 分别表示 P 的东步、北步和南步的个数, 用 $n_i(P)$ 和 $s_i(P)$ 分别表示 P 的第 $i (i \in [n])$ 列中北步和南步的个数. 这些记号在 *asPDSAW* 中也是有相同意义的.

sPDSAW 的一个方格 (square) 指由 *sPDSAW* 和 $y = -x$ 围成的区域中一个完整单位方形区域; *sPDSAW* 的一个拐角 (corner) 是由一个东步和紧跟其后的南步形成的尖角; *sPDSAW* 的一个子路 (subpath) 是指开始并终止于直线 $y = -x$ 且起点和终点之间没有其他点在 $y = -x$ 上的一段路径.

定义 4. 设 P 是一条 *sPDSAW*, P 的一个因子 (factor) 是指从点 $(a, -a)$ 出发、到点 $(b, -b)$ 结束的 P 的一条子路, 满足以下两个条件:

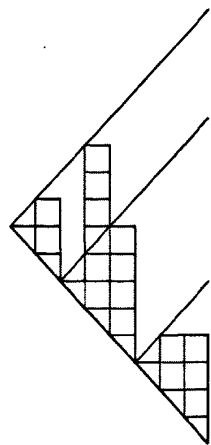
点 $(a, -a)$ 之后的所有东步都在直线 $y = x - 2a$ 之下,

点 $(b, -b)$ 之后的所有东步都在直线 $y = x - 2b$ 之下.

同理我们定义 *asPDSAW* 的因子为从点 $(a, -a)$ 出发、到点 $(b, -b)$ 结束且点 $(a, -a)$ 之后的所有东步都在直线 $y = -a$ 之下、点 $(b, -b)$ 之后的所有东步都在直线 $y = -b$ 之下的一条路径.

对于 $P \in \mathcal{P}_n$, 我们用 $\text{sqr}(P)$ 表示 P 的方格的个数, 用 $\text{cm}(P)$ 表示 P 的拐角的个数, 用 $\text{sbp}(P)$ 表示 P 的子路的个数, 同时用 $\text{fac}(P)$ 表示 P 的因子的个数. *asPDSAW* 的方格、拐角、子路和因子的定义及他们个数的表示方法也类似定义.

例 5. 给定一条 *sPDSAW*, 设为 P :



可知 $E(P) = 8, N(P) = 7, S(P) = 15, n_2(P) = 1, n_4(P) = 5, n_7(P) = 1, s_2(P) = 3, s_4(P) = 3, s_5(P) = 5, s_8(P) = 4$ 以及 $\text{sqr}(P) = 17, \text{cm}(P) = 4, \text{sbp}(P) = 3$, 而 $\text{fac}(P) = 2$.

第二节 关于排列、匹配和部分有向自回避路的已有结论

2.1 匹配和对称部分有向自回避路

每条 sPDSAW 由其所有 E 所在的纵坐标唯一确定, 由此得知 $E(P) = n$ 的 sPDSAW 共有 $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2n-3) \cdot (2n-1)$ 条, 而集合 $[2n]$ 的所有匹配的个数也为 $(2n-1)!!$, 这就意味着二者之间存在一定的关系. E. J. Janse van Rensburg, Thomas Prellberg 和 Andrew Rechnitzer 使用生成函数研究了上述问题. 生成函数的相关概念详见 [13].

文章 [17] 给出了东步个数为 n 的 sPDSAW 的生成函数:

$$\begin{aligned} M_n(q) &= \sum_{P \in \mathcal{P}_n} q^{N(P)} \\ &= \frac{1}{(1-q)^n} \sum_{i \geq 0} (-1)^i \left(\binom{2n}{n-i} - \binom{2n}{n-i-1} \right) q^{\binom{i+1}{2}}. \end{aligned}$$

而该式恰为著名的 Touchard - Riordan 公式, 是长为 $2n$ 且 q 的次数表示交叉个数的匹配的生成函数, 从而得知有 n 个 E 及 c 个 N 的 sPDSAW 与长为 $2n$ 且交叉个数为 c 的匹配具有一一对应关系.

Robert J. Marsh 和 Paul Martin 在文章 [23] 中给出了上述结论的一个组合证明. 以下给出一个例子.

首先, 将 sPDSAW 中包含的最大的 Dyck 路称为该 sPDSAW 的基底 Dyck 路. 例如下图中粗线描绘的 Dyck 路即为给定的 sPDSAW 的基底:

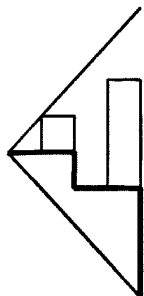
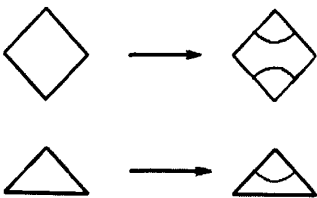


图 2: sPDSAW 的 Dyck 基底

引用下面三条变换规则:

- 在基底 Dyck 路中:



- 在基底 Dyck 路之外的区域:



例6. 给定一条 *sPDSAW*, 利用上面的三条规则将唯一得到一个匹配:

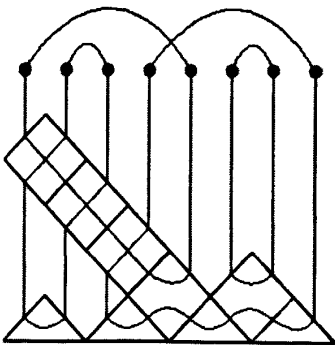


图 3: *sPDSAW* 到匹配的映射

注 在上述文章中, *sPDSAW* 被称为悬垂路 (overhang path).

更进一步地, Martin Rubey 在 [26] 中借助赋权的 Dyck 路给出了二者之间更细致的对应关系的双射证明.

定理 1. 设 $P \in \mathcal{P}_n$, $M \in \mathcal{M}_n$, 存在双射 $f: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$, 使得 $f(P) = M$ 且具有下列性质的 $sPDSAW$ P :

- $N(P) = n$,
- P 和直线 $y = -x$ 所围区域的面积为奇数(偶数),
- $s_n(P) = m - 1$

——对应于具有下列性质的匹配 M :

- $\text{nes}(M) = n$,
- $\text{crs}(M)$ 为奇数(偶数),
- 1 与 m 匹配

而且, 该双射保持因子的对应关系, 即 P 的最后一个因子被映射成 M 的第一个因子.

2.2 排列和非对称部分有向自回避路

关于排列和 $asPDSAW$, 一个显然的结论是 \mathfrak{S}_n 中排列的个数与 E 的个数为 n 的所有 $asPDSAW$ 的条数都为 $n!$, 二者之间具有一一对应关系, 其中 N 的个数对应于排列中嵌套的个数, 或对应于排列中 (31-2)-型 的个数 [8]. 我们用 P_n 表示长为 n 的排列的生成函数, 这个生成函数由 Lauren Williams 在 [30] 中给出:

$$\begin{aligned} P_n(q) &= \sum_{P \in \mathcal{A}_n} q^{\text{nes}(P)} \\ &= \sum_{k=1}^n nq^{-k^2} \sum_{i=0}^{k-1} k-1(-1)^i [k-i]_q^n q^{ki} \left(\binom{n}{i} q^{k-i} + \binom{n}{i-1} \right). \end{aligned}$$

类似于上节的结论, Martin Rubey 以赋权的双色 Motzkin 路为中间桥梁得到以下结论:

定理 2. 设 $P \in \mathcal{A}_n$, $\pi \in \mathfrak{S}_n$, 存在双射 $g: \mathcal{A}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$, 使得 $g(P) = \pi$ 且具有下列性质的 $asPDSAW$ P :

- $N(P) = n,$
- $s_n(P) = m$

——对应于具有下列性质的排列 π :

- $\text{nes}(\pi) = n,$
- 1 被映射到 $m.$

而且, 该双射保持因子的对应关系, 即 P 的最后一个因子被映射成 π 的第一个因子.

2.3 排列中逆序数和主指标的对称分布关系

逆序数和主指标是排列中两个相当重要的统计量, 在很多文献中都对它们以及它们之间的关系进行了研究. 一个已知的结论是排列中逆序数和主指标具有对称分布关系, 下面我们简单介绍 [27] 中给出的双射.

$\varphi: \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathfrak{S}_n$ 令 $w = \omega_1 \cdots \omega_n \in \mathfrak{S}_n$, 定义序列 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, 其中 γ_k 是 $\{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ 的一个排列.

首先令 $\gamma_1 = \omega_1$. 假定 γ_k 已经被定义, $1 \leq k < n$. 如果 γ_k 的最后一个数字 (也就是 ω_k) 大于 (或小于) ω_{k+1} , 则在每个比 ω_{k+1} 大 (或小) 的数字之后以插入隔板的形式将 γ_k 进行分割, 这些隔板将 γ_k 分割成几个隔间, 之后将其中元素在隔间内分别向右循环移动一位, 再将 ω_{k+1} 置于所得排列的末端. 记此时得到的序列为 γ_{k+1} . 重复上述步骤, 最终得到 $\varphi(\omega) = \gamma_n$.

例7. 设 $\omega = 683941725 \in \mathfrak{S}_9$. 首先有 $\gamma_1 = 6$. 不管 $6 < \omega_2$ 还是 $6 > \omega_2$, 由于 γ_1 只有一个元素, 所以不进行循环移动, 故 $\gamma_2 = 68$. 此时 $8 > \omega_3 = 3$, 我们分割 γ_1 得到 $6|8$, 每个隔间仍然只有一个元素, 故 $\gamma_3 = 683$. 重复上面的过程:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: 6 \\
\gamma_2 &: 6 \mid 8 \\
\gamma_3 &: 6 \mid 8 \mid 3 \\
\gamma_4 &: 6 \mid 8 \mid 3 \mid 9 \\
\gamma_5 &: 6 \mid 8 \mid 9 \mid 3 \mid 4 \\
\gamma_6 &: 6 \mid 8 \mid 9 \mid 3 \mid 4 \mid 1 \\
\gamma_7 &: 6 \mid 3 \mid 8 \mid 9 \mid 4 \mid 1 \mid 7 \\
\gamma_8 &: 6 \mid 3 \mid 8 \mid 9 \mid 4 \mid 7 \mid 1 \mid 2 \\
\gamma_9 &: 3 \mid 6 \mid 4 \mid 8 \mid 9 \mid 1 \mid 7 \mid 2 \mid 5
\end{aligned}$$

得到 $\varphi(\omega) = 364891725$ 且 $\text{maj}(\omega) = \text{inv}(\varphi(\omega)) = 18$.

首先在假定 φ 是一个双射的前提下用归纳法证明 $\text{maj}(\omega) = \text{inv}(\varphi(\omega))$.

令 $\eta_k = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_k$. 对 k 进行归纳证明 $\text{inv}(\gamma_k) = \text{maj}(\eta_k)$. 首先有 $\text{inv}(\gamma_0) = \text{maj}(\eta_0) = 0$. 假定对于某个 $k < n$ 有 $\text{inv}(\gamma_k) = \text{maj}(\eta_k)$, 进一步设 γ_k 的最后一个数字 ω_k 大于 ω_{k+1} (小于的情况可以类似证明).

由于 $\omega_k > \omega_{k+1}$, 故 $k \in D(\omega)$, 现在需要证明 $\text{inv}(\gamma_{k+1}) = k + \text{inv}(\gamma_k)$. 不难发现此时 γ_k 的任何一个间隔 C 中的最后一个数字是该间隔中最大的一个数字. 我们用 $\#C$ 表示隔间 C 中元素的个数, 则进行循环移位之后, 则会新增 $\sum_C (\#C - 1)$ 个逆序. 又每个间隔中有且只有一个数字大于 ω_{k+1} , 所以当把 ω_{k+1} 置于 γ_k 的末端, 再次新增的逆序数恰为 γ_k 中间隔的个数 $|C|$, 于是,

$$\sum_C (\#C - 1) + |C| = k,$$

说明 $\text{inv}(\gamma_{k+1}) = k + \text{inv}(\gamma_k)$.

最后证明 φ 是一个双射. 为此, 定义 φ^{-1} . 设 $\nu = \nu_1 \cdots \nu_n \in \mathfrak{S}_n$. 我们希望找到唯一一个 $w = \omega_1 \cdots \omega_n \in \mathfrak{S}_n$ 满足 $\varphi(w) = \nu$. 令 $\delta_{n-1} = \nu_1 \cdots \nu_{n-1}$ 且 $\omega_n = \nu_n$. 现在假定 δ_k 和 $\omega_{k+1}, \dots, \omega_n$ 已经确定, $1 \leq k < n$. 如果 δ_k 的第一个数字大于 (或小于) ω_{k+1} , 则在 δ_k 中每个比 ω_{k+1} 大 (或小) 的数字前进插入隔板, 这样便形成 δ_k 的各个间隔, 将其的元素在间隔内向

左循环移动一位,从而得到的最后一个数字即为 ω_k , 去掉该数字得到 δ_{k-1} . 很容易看出, 上述过程完全是从 ω 得到 ν 的过程的逆, 可见 φ 是一个双射.

例8. 取 ν 为例7中 $\varphi(\omega)$, 利用上述过程旨在得到 ω :

3 6 4 8 9 1 7 2 5	$\omega_9 = 5$
3 6 4 8 9 1 7 2	$\omega_8 = 2$
6 3 8 9 4 7 1	$\omega_7 = 7$
6 3 8 9 4 1	$\omega_6 = 1$
6 8 9 3 4	$\omega_5 = 4$
6 8 9 3	$\omega_4 = 9$
6 8 3	$\omega_3 = 3$
6 8	$\omega_2 = 8$
6	$\omega_1 = 6$

得到 $\omega = 683941725$.

第三节 关于非对称部分有向自回避路的主要结论

本节主要介绍两个新的双射 χ_1 和 χ_2 , 其中 χ_1 用来描述 asPDSAW 和排列的六组统计量之间的一一对应关系, χ_2 在 χ_1 的基础上间接证明了排列中逆序数和主指标的对称分布关系.

3.1 双射 χ_1

$\chi_1: \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathfrak{S}_n$ 设 $P \in \mathcal{A}_n$, 将 P 的各列从左往右分别编号为 l_n, l_{n-1}, \dots, l_1 . 从 l_1 开始, 自下往上依次在半格和方格中按照从小到大的顺序填入集合 $[n]$ 中的数字, 设 l_1 的最上面一个方格中填入 k_1 . 假设 $l_1, l_2, \dots, l_i (1 \leq i < n)$ 最上面的方格依次填入 k_1, k_2, \dots, k_i , 则在 l_{i+1} 中用同样的规则填入集合 $[n] \setminus \{k_1, k_2, \dots, k_i\}$ 中的数字, 找到 l_{i+1} 最上面方格中填写的 k_{i+1} . 重复上述过程直至考虑完每一列, 此时也用完了 $[n]$ 中所有数字, 令 $\chi_1(P) = k_1 k_2 \cdots k_n$.

例9. 设 $n = 9$ 并给出一条 $asPDSAW$ P :

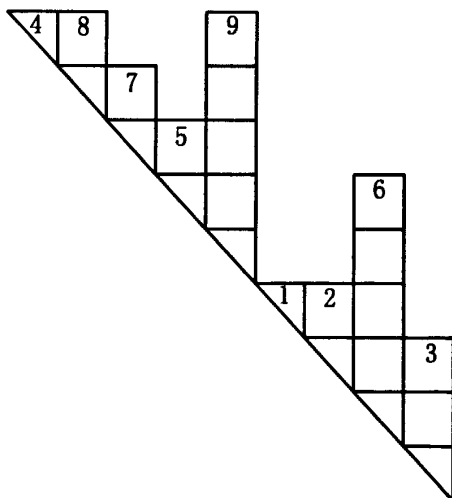


图 4: asPDSAW 到排列的映射

首先我们在 l_1 中填入 1, 2, 3, 之后在 l_2 中填入 1, 2, 4, 5, 6. 重复操作, 最终得到 $\chi_1(P) = 362195784$.

定理 3. 设 $P \in \mathcal{A}_n$, 且 P 具有下列性质:

- $s_n(P) = m$,
- $\text{sqr}(P) = s$,
- $\text{cm}(P) = p$,
- $N(P) = t$,
- $\sum_{i=1}^{n-1} \max\{s_i(P) - 1, 0\} = r$,
- $\text{sbp}(P) = c$,

设 $\pi = \chi_1(P) = \pi_1\pi_2 \cdots \pi_n \in \mathfrak{S}_n, \pi_0 = 0$, 则 π 具有下列性质:

- $\pi_1 = m$,
- $\text{inv}(\pi) = s$,
- $\text{asc}(\pi) = p$ (包括上升 (π_0, π_1)),
- t 个 (31-2)-型,
- r 个 (13-2)-型,
- $\text{rlm}(\pi) = c$.

而且, 该双射保持因子的对应关系, 即 P 的最后一个因子被映射成 π 的第一个因子.

证明 我们首先证明 χ_1 是一个双射, 即证明 χ_1 的逆存在. 给定排列 $\pi = \pi_1\pi_2 \cdots \pi_n$ 及一个直角坐标系, 在由 x 轴和直线 $y = -x$ 围成的区域内, 将各列从左往右依次标记为 l_n, l_{n-1}, \dots, l_1 . 从 l_1 开始, 自下往上依次在半格和方格中按照从小到大的顺序填入 $[n]$ 中的数字, 根据所给排列特征确定每个东步的位置. 在 l_1 中自下往上填入 $1, 2, \dots, \pi_1$, π_1 所在方格的上边界为第 n 个东步的位置. 假设列 l_1, \dots, l_j 中东步位置已确定, 在 l_{j+1} 中自下往上填入集合 $[n] \setminus \{\pi_1, \dots, \pi_j\}$ 中的数字, 至 π_{j+1} 止, π_{j+1} 所在方格的上边界为第 $n - j$ 个东步的位

置. 重复上述过程直至考虑完所有列. 此时, 每个东步的位置已经确定, 则对应的 asPDSAW 也唯一确定.

在例 9 中, 显然有 $\pi_1 = s_n(P) = 3$, $\text{inv}(\pi) = \text{sqr}(P) = 14$, $\text{asc}(\pi) = \text{crn}(P) = 5$. 而且 $N(P) = 4$, π 中有 4 个 (31-2)-型: (62-5), (62-4), (95-7), (95-8). 同时, $\sum_{i=1}^8 \max\{s_i(P) - 1, 0\} = 4 + 2 = 6$, 而 π 中也有 6 个 (13-2)-型: (36-5), (36-4), (19-5), (19-7), (19-8), (19-4). 此外, π 中从右往左最小数为 4 和 1, 显然有 $\text{rlm}(\pi) = \text{sbp}(P) = 2$. 且 $\text{fac}(P) = 0$, π 的因子的个数也为 0.

其次, $s_n(P) = m$ 说明 l_1 有 1 个半格 $m - 1$ 个方格, 显然有 $\pi_1 = m$, 而且说明了 π 中肯定有 $m - 1$ 个元素在 m 的右边且小于 m . 这就意味着 l_1 中的方格数恰好等于排列中 m 贡献的逆序数. 其它各列可以类似考虑, 最终得到 $\text{inv}(\pi) = \text{sqr}(P)$.

P 的一个拐角是由一个 E 和紧跟其后的一个 S 共同形成的, 这说明如果 l_i ($i \in [n]$) 中 E 的后面紧跟一个 S, 则有 $\pi_i > \pi_{i-1}$, 即 (π_{i-1}, π_i) 是 π 中的一个上升. 特别地, l_1 必贡献一个拐角, 恰好对应于上升 (π_0, π_1) . 从而 $\text{crn}(P) = \text{asc}(\pi)$. l_i 中有 $s_i(P)$ 个 S, 则在 π_{i-1} 和 π_i 之间还有 $s_i(P) - 1$ 个元素没有使用, 且这 $s_i(P) - 1$ 个元素贡献 $s_i(P) - 1$ 个 (13-2)-型. 不难得到 $\sum_{i=1}^{n-1} \max\{s_i(P) - 1, 0\} = r$ 时, 排列中共有 r 个 (13-2)-型.

而且, 如果 l_i 中 E 的后面紧跟有 t_i 个 N, 说明比 π_{i-1} 小、比 π_i 大的元素有 t_i 个, 则它们在 π 中贡献 t_i 个 (31-2)-型. 综合各列, 如果路中共有 t 个 N, 排列中就有 t 个 (31-2)-型.

另外, 如果 l_i 中 E 开始于直线 $y = -x$, 则可以肯定的是 π_i 是我们还没有用过的数字中最小的那一个. 因此, $\text{sbp}(P) = c$ 时, π 中从右往左最小数字也有 c 个, 即 $\text{rlm}(\pi) = c$.

最后, 假设从 $(a, -a)$ 到 $(b, -b)$ 的路径是 P 的一个因子, 该因子经过平移, 实际上为从 $(0, 0)$ 到 $(b - a, -(b - a))$ 的一条 asPDSAW, 这条 asPDSAW 对应集合 $[b - a]$ 的一个排列. 由此, 不难理解 P 的这个因子恰好对应 π 中长为 $b - a$ 的一个因子.

■

设 $k \leq n$, $\tau \in \mathfrak{S}_k$, $\pi \in \mathfrak{S}_n$, 我们说 π 是避免 τ 的 (τ -avoiding) 是指 π 中没有与 τ 型相同的子排列 $\pi_{i_1}\pi_{i_2}\cdots\pi_{i_k}$ ($i_1 < i_2 < \cdots < i_k$). 由该定义我们不难得到以下推论:

推论 4. 从原点 $(0, 0)$ 出发、终止于 $(n, -n)$ 的 Dyck 路与 $[n]$ 的避免 312 的排列一一对应.

我们把形如

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \\ \pi_2 & \pi_3 & \cdots & \pi_1 \end{pmatrix}$$

的一个排列称为圈排列 (cycle), 记为 $(\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n)$. 每个排列都能写成一些圈的乘积. 例如 $328947615 = (138)(2)(495)(67)$. 我们用 $\text{cyc}(\pi)$ 表示 π 的圈的个数.

我们将排列 π 的圈排列重新进行排序, 使得 (a) 每个圈内最小数字排在最后, (b) 圈和圈之间以最后一个数字为标准自左往右、从小到大依次排列. 将所得结果称为 π 的标准型 (standard representation). 在此基础上去掉括号得到一个新的排列, 记为 $\hat{\pi}$. 相反地, 我们以 $\hat{\pi}$ 的从右往左最小数为界限添加括号, 便回到了 π 的标准型, 也就找到了 π . 可见映射 $\pi \rightarrow \hat{\pi}$ 是一个双射, 且 $\text{cyc}(\pi) = \text{rlm}(\hat{\pi})$.

注 有些教材中将排列的标准型定义为 (a) 每个圈内的最大数放在第一个位置, (b) 将所有的圈按照第一个数字从小到大依次排列. 本文为方便证明而作出不同的定义.

结合定理 3, 得到如下结论:

推论 5. 设 $P \in \mathcal{A}_n$, 存在双射 $I: \mathcal{A}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$, 使得 $I(P) = \pi$ 时, $\text{sbp}(P) = \text{cyc}(\pi)$.

3.2 双射 χ_2

一个已知的结论是排列中逆序数和主指标具有对称分布关系, 结合定理 3, 我们很容易想到 asPDSAW 的方格数和排列的主指标具有对称分布关系. 以下建立双射 χ_2 来证明这个结论. 在建立双射的过程中, 我们总会将给定的 asPDSAW 的列从左往右依次标记为 l_n, l_{n-1}, \dots, l_1 .

$\chi_2: \mathcal{A}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$ 给定 $P \in \mathcal{A}_n$. 我们对自然序 $12 \cdots n$ 进行如下操作: 如果 P 的 l_1 中有 s_1 个方格, 则将 $n - s_1 + 1, n - s_1 + 2, \dots, n$ 整体移至子排列 $12 \cdots n - s_1$ 的前面. 之后, 如果 l_2 中有 s_2 个方格, 则将 $n - s_1 - 1$ 和它前面相邻的 $s_2 - 1$ 个数字整体移至排列剩余部分的最前面. 假定我们已经考虑完 l_i 且此刻得到的排列为 $\pi = \pi_{j_1} \pi_{j_2} \cdots \pi_{j_n}$. 如果 l_{i+1} 中有 s_{i+1} 个方格, 则将 π_{j_n-i} 和它前面相邻的 $s_{i+1} - 1$ 个数字整体移至排列剩余部分的前面; 如果 l_{i+1} 中没有方格, 则保持排列不变化. 重复上述过程, 直到考虑完 l_n . 我们用 $w^i (i = 1, 2, \dots, n)$ 表示每

步操作时的排列且 $w^1 = 12 \cdots n$, 则 w^n 为我们要求的排列 $\chi_2(P)$.

例10. 考虑例9中所给的 *asPDSAW*, 进行如下操作:

$$w^1 : 123456789$$

$$w^2 : 891234567$$

$$w^3 : 345689127$$

$$w^4 : 134568927$$

$$w^5 : 134568927$$

$$w^6 : 345618927$$

$$w^7 : 634518927$$

$$w^8 : 463518927$$

$$w^9 : 643518927.$$

w^9 即为我们要求的排列, 容易验证 $\text{maj}(w^9) = 14 = \text{sqr}(P)$.

我们可以证明 χ_2 是一个双射, 以下给出 χ_2 的逆:

$\chi_2^{-1}: \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathcal{A}_n$ 给定一个排列 $\pi = \pi_1\pi_2 \cdots \pi_n$, 设 $\pi_0 = \pi_{n+1} = 0$, 同时给定数组 $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. 我们对 π 进行如下操作:

1 记录 $c_1 = 0$, 因为 l_n 永远不会贡献方格数, 也就是说 $\pi_1 > \pi_2 > \pi_0$ 或 $\pi_2 > \pi_1 > \pi_0$ 时, l_n 为所求的 *asPDSAW* 贡献 0 个方格.

2 假定我们已经得到了 c_{i-1} , 即已经考虑完 $l_{n-i+2}(i = 2, 3, \dots, n)$, 且此时得到的排列为 $\pi_1^{i-1}\pi_2^{i-1} \cdots \pi_n^{i-1}$:

- 如果 $\pi_1^{i-1} > \pi_i^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1}$,

将 $\pi_1^{i-1}\pi_2^{i-1} \cdots \pi_t^{i-1}\pi_{t+1}^{i-1} \cdots \pi_s^{i-1}$ 整体移动到 π_i^{i-1} 和 π_{i+1}^{i-1} 之间, 其中 t 和 s 是满足 $\pi_i^{i-1} < \pi_1^{i-1} < \cdots < \pi_t^{i-1}$, $\pi_t^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1}$, $\pi_{i+1}^{i-1} < \pi_{t+1}^{i-1} < \cdots < \pi_s^{i-1} < \pi_{i+1}^{i-1}$ 的最大下标. 此时得到一个新的排列并记录 $c_i = s$.

- 如果 $\pi_i^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1} > \pi_1^{i-1}$ 或 $\pi_{i+1}^{i-1} > \pi_1^{i-1} > \pi_i^{i-1}$,

将 $\pi_1^{i-1} \pi_2^{i-1} \dots \pi_s^{i-1}$ 捆绑并整体移动到 π_i^{i-1} 和 π_{i+1}^{i-1} 之间, 其中 s 是满足 $\pi_1^{i-1} < \pi_2^{i-1} < \dots < \pi_s^{i-1} < \pi_{i+1}^{i-1}$ 的最大下标. 此时得到一个新的排列并记录 $c_i = s$.

- 否则, 即 $\pi_1^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1} > \pi_i^{i-1}$ 或 $\pi_i^{i-1} > \pi_1^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1}$ 或 $\pi_{i+1}^{i-1} > \pi_i^{i-1} > \pi_1^{i-1}$ 时,

保持排列不变化并记录 $c_i = 0$.

重复操作, 直到考虑完 l_1 . 通过上述步骤, 可得到唯一确定的数组 $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. 我们用 $c_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 表示 l_{n-i+1} 中方格数, 从而唯一确定一条 asPDSAW.

我们用 $p^i (i = 1, 2, \dots, n)$ 表示每步操作时的排列, 其中 p^1 为给定的排列 π .

例11. 考虑例10中的排列 w^9 , 我们进行如下操作:

$$\begin{aligned}
 \pi_1 > \pi_2 > \pi_0 &\longrightarrow p^1 : \underline{6}43518927 \longrightarrow c_1 = 0 \\
 \pi_1 > \pi_2 > \pi_3 &\longrightarrow p^2 : \underline{4}63518927 \longrightarrow c_2 = 1 \\
 \pi_4 > \pi_1 > \pi_3 &\longrightarrow p^3 : \underline{6}34518927 \longrightarrow c_3 = 1 \\
 \pi_1 > \pi_4 > \pi_5 &\longrightarrow p^4 : \underline{3}45618927 \longrightarrow c_4 = 1 \\
 \pi_6 > \pi_1 > \pi_5 &\longrightarrow p^5 : 134568927 \longrightarrow c_5 = 4 \\
 \pi_7 > \pi_6 > \pi_1 &\longrightarrow p^6 : \underline{1}34568927 \longrightarrow c_6 = 0 \\
 \pi_7 > \pi_8 > \pi_1 &\longrightarrow p^7 : \underline{3}45689127 \longrightarrow c_7 = 1 \\
 \pi_9 > \pi_1 > \pi_8 &\longrightarrow p^8 : \underline{8}91234567 \longrightarrow c_8 = 4 \\
 \pi_1 > \pi_9 > \pi_{10} &\longrightarrow p^9 : 123456789 \longrightarrow c_9 = 2.
 \end{aligned}$$

利用数组 $c = (0, 1, 1, 1, 4, 0, 1, 4, 2)$, 我们可以确定 asPDSAW 中每列贡献的方格数, 从而确定每个 E 的位置, 所得结果与例9中的 P 一致, 且显然有 $\text{maj}(\pi) = 14 = \text{sqr}(P)$.

定理 6. 对任意的 $P \in \mathcal{A}_n$, 设 $\chi_2(P) = \pi$, 则 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ 且 $\text{sqr}(P) = \text{maj}(\pi)$.

为证明定理 6, 我们首先要证明一个引理:

引理 7. 对任意 $i, i \in [n]$, 排列 $p^i = \pi_1^i \pi_2^i \cdots \pi_n^i$ 的子排列 $\pi_1^i \pi_2^i \cdots \pi_{i+1}^i$ 最多只有一个下降; 如果这个子排列有下降, 那么 $\pi_1^i > \pi_{i+1}^i$.

证明 我们用归纳法证明这个引理. 首先, 初始条件成立, 因为 p^1 中, $\pi_0^1 \pi_1^1 \pi_2^1$ 最多只有一个下降; 且如果有下降, 必有 $\pi_1^1 > \pi_2^1$. 现在考虑 p^2 .

(i) $\pi_2^1 > \pi_1^1$ 时,

- 如果 $\pi_3^1 > \pi_2^1 > \pi_1^1$,

保持排列不变, $p^2 = p^1$, 子排列 $\pi_1^1 \pi_2^1 \pi_3^1$ 中没有下降;

- 如果 $\pi_2^1 > \pi_3^1 > \pi_1^1$,

将 π_1^1 移动到 π_2^1 和 π_3^1 之间, 得到 $p^2 = \pi_2^1 \pi_1^1 \pi_3^1 \pi_4^1 \cdots \pi_n^1$, 子排列 $\pi_2^1 \pi_1^1 \pi_3^1$ 中有一个下降 (π_2^1, π_1^1) 且 $\pi_2^1 > \pi_3^1$;

- 如果 $\pi_2^1 > \pi_1^1 > \pi_3^1$,

保持排列不变, $p^2 = p^1$, 子排列 $\pi_1^1 \pi_2^1 \pi_3^1$ 中有一个下降 (π_2^1, π_3^1) 且 $\pi_1^1 > \pi_3^1$.

(ii) $\pi_1^1 > \pi_2^1$ 时,

- 如果 $\pi_3^1 > \pi_1^1 > \pi_2^1$,

将 π_1^1 移动到 π_2^1 和 π_3^1 之间, 得到 $p^2 = \pi_2^1 \pi_1^1 \pi_3^1 \pi_4^1 \cdots \pi_n^1$, 子排列 $\pi_2^1 \pi_1^1 \pi_3^1$ 中没有下降;

- 如果 $\pi_1^1 > \pi_3^1 > \pi_2^1$,

保持排列不变, $p^2 = p^1$, 子排列 $\pi_1^1 \pi_2^1 \pi_3^1$ 中有一个下降 (π_1^1, π_2^1) 且 $\pi_1^1 > \pi_3^1$;

- 如果 $\pi_1^1 > \pi_2^1 > \pi_3^1$,

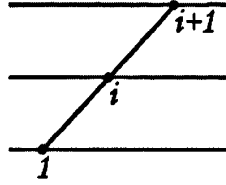
将 π_1^1 移动到 π_2^1 和 π_3^1 之间, 得到 $p^2 = \pi_2^1 \pi_1^1 \pi_3^1 \pi_4^1 \cdots \pi_n^1$, 子排列 $\pi_2^1 \pi_1^1 \pi_3^1$ 中有一个下降 (π_1^1, π_3^1) 且 $\pi_2^1 > \pi_3^1$.

可见 p^2 时结论成立. 现在假设 $p^{i-1} = \pi_1^{i-1} \pi_2^{i-1} \cdots \pi_n^{i-1}$ ($1 < i < n+1$) 时结论成立, 以下考虑 p^i :

(i) 子排列 $\pi_1^{i-1} \pi_2^{i-1} \cdots \pi_i^{i-1}$ 中没有下降时,

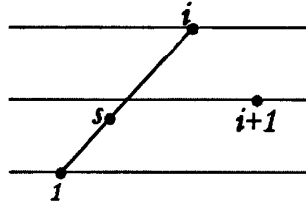
- 如果 $\pi_{i+1}^{i-1} > \pi_i^{i-1} > \pi_1^{i-1}$,

保持排列不变, $p^i = p^{i-1}$, 子排列 $\pi_1^{i-1} \pi_2^{i-1} \dots \pi_{i+1}^{i-1}$ 中没有下降; 图示如下:



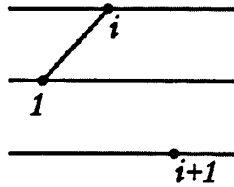
- 如果 $\pi_i^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1} > \pi_1^{i-1}$,

我们可以找到满足操作条件的 s ($1 < s < i$), 将 $\pi_1^{i-1} \pi_2^{i-1} \dots \pi_s^{i-1}$ 移动到 π_i^{i-1} 和 π_{i+1}^{i-1} 之间, 得到 $p^i = \pi_{s+1}^{i-1} \dots \pi_i^{i-1} \pi_1^{i-1} \dots \pi_s^{i-1} \pi_{i+1}^{i-1} \dots \pi_n^{i-1}$, 子排列 $\pi_{s+1}^{i-1} \dots \pi_i^{i-1} \pi_1^{i-1} \dots \pi_s^{i-1} \pi_{i+1}^{i-1}$ 中有一个下降 $(\pi_i^{i-1}, \pi_1^{i-1})$ 且 $\pi_{s+1}^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1}$; 图示如下:



- 如果 $\pi_i^{i-1} > \pi_1^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1}$,

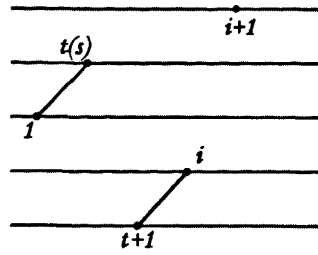
保持排列不变, $p^i = p^{i-1}$, 子排列 $\pi_1^{i-1} \pi_2^{i-1} \dots \pi_{i+1}^{i-1}$ 中有一个下降 $(\pi_i^{i-1}, \pi_{i+1}^{i-1})$ 且 $\pi_1^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1}$. 图示如下:



(ii) 子排列 $\pi_1^{i-1} \pi_2^{i-1} \dots \pi_i^{i-1}$ 中有一个下降时, $\pi_1^{i-1} > \pi_i^{i-1}$. 设该下降为 $(\pi_t^{i-1}, \pi_{t+1}^{i-1})$, $1 \leq t \leq i-1$, 得到 $\pi_t^{i-1} > \pi_1^{i-1} > \pi_i^{i-1} > \pi_{t+1}^{i-1}$.

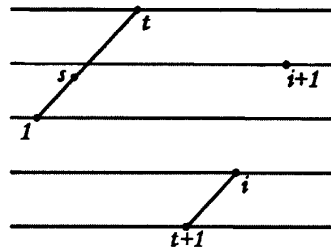
- 如果 $\pi_{i+1}^{i-1} > \pi_t^{i-1} > \pi_1^{i-1} > \pi_i^{i-1} > \pi_{t+1}^{i-1}$,

满足映射条件的 $s = t$, 将 $\pi_1^{i-1} \pi_2^{i-1} \dots \pi_t^{i-1}$ 移动到 π_i^{i-1} 和 π_{i+1}^{i-1} 之间, 得到 $p^i = \pi_{t+1}^{i-1} \dots \pi_i^{i-1} \pi_1^{i-1} \dots \pi_t^{i-1} \pi_{i+1}^{i-1} \dots \pi_n^{i-1}$, 子排列 $\pi_{t+1}^{i-1} \dots \pi_i^{i-1} \pi_1^{i-1} \dots \pi_t^{i-1} \pi_{i+1}^{i-1}$ 中没有下降; 图示如下:



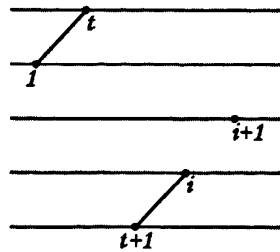
- 如果 $\pi_t^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1} > \pi_1^{i-1} > \pi_i^{i-1} > \pi_{t+1}^{i-1}$,

我们可以找到满足操作条件的 $s(1 < s < t)$, 将 $\pi_1^{i-1} \pi_2^{i-1} \dots \pi_s^{i-1}$ 移动到 π_i^{i-1} 和 π_{i+1}^{i-1} 之间, 得到 $p^i = \pi_{s+1}^{i-1} \dots \pi_t^{i-1} \pi_{t+1}^{i-1} \dots \pi_i^{i-1} \pi_1^{i-1} \dots \pi_s^{i-1} \pi_{i+1}^{i-1} \dots \pi_n^{i-1}$, 子排列 $\pi_{s+1}^{i-1} \dots \pi_t^{i-1} \pi_{t+1}^{i-1} \dots \pi_i^{i-1} \pi_1^{i-1} \dots \pi_s^{i-1} \pi_{i+1}^{i-1}$ 中有一个下降 $(\pi_t^{i-1}, \pi_{t+1}^{i-1})$ 且 $\pi_{s+1}^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1}$; 图示如下:



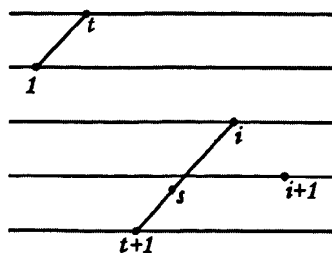
- 如果 $\pi_t^{i-1} > \pi_1^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1} > \pi_i^{i-1} > \pi_{t+1}^{i-1}$,

保持排列不变, $p^i = p^{i-1}$, 子排列 $\pi_1^{i-1} \dots \pi_t^{i-1} \pi_{t+1}^{i-1} \dots \pi_{i+1}^{i-1}$ 中有一个下降 $(\pi_t^{i-1}, \pi_{t+1}^{i-1})$ 且 $\pi_1^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1}$; 图示如下:



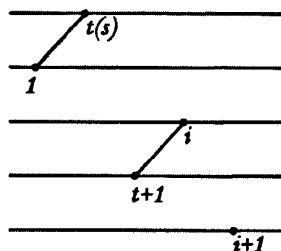
- 如果 $\pi_t^{i-1} > \pi_1^{i-1} > \pi_i^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1} > \pi_{t+1}^{i-1}$,

我们可以找到满足操作条件的 $s(t < s < i)$, 将 $\pi_1^{i-1} \dots \pi_t^{i-1} \pi_{t+1}^{i-1} \dots \pi_s^{i-1}$ 移动到 π_i^{i-1} 和 π_{i+1}^{i-1} 之间, 得到 $p^i = \pi_{s+1}^{i-1} \dots \pi_i^{i-1} \pi_1^{i-1} \dots \pi_t^{i-1} \pi_{t+1}^{i-1} \dots \pi_s^{i-1} \pi_{i+1}^{i-1} \dots \pi_n^{i-1}$, 子排列 $\pi_{s+1}^{i-1} \dots \pi_i^{i-1} \pi_1^{i-1} \dots \pi_t^{i-1} \pi_{t+1}^{i-1} \dots \pi_s^{i-1} \pi_{i+1}^{i-1}$ 中有一个下降 $(\pi_t^{i-1}, \pi_{t+1}^{i-1})$ 且 $\pi_{s+1}^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1}$; 图示如下:



- 如果 $\pi_t^{i-1} > \pi_1^{i-1} > \pi_i^{i-1} > \pi_{t+1}^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1}$,

满足映射条件的 $s = t$, 将 $\pi_1^{i-1} \pi_2^{i-1} \dots \pi_t^{i-1}$ 移动到 π_i^{i-1} 和 π_{i+1}^{i-1} 之间, 得到 $p^i = \pi_{i+1}^{i-1} \dots \pi_i^{i-1} \pi_1^{i-1} \dots \pi_t^{i-1} \pi_{i+1}^{i-1} \dots \pi_n^{i-1}$, 子排列 $\pi_{i+1}^{i-1} \dots \pi_i^{i-1} \pi_1^{i-1} \dots \pi_t^{i-1} \pi_{i+1}^{i-1}$ 中有一个下降 $(\pi_t^{i-1}, \pi_{i+1}^{i-1})$ 且 $\pi_{t+1}^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1}$. 图示如下:



综上所述, 结论成立. 在 p^n 中, 由于 $\pi_n^n > \pi_{n+1}^n = 0$, 故排列 $\pi_1^n \pi_2^n \dots \pi_n^n$ 没有下降, 这个排列即为自然序 $12 \dots n$.

■

定理 6 的证明 以下只要说明映射的每一步恰使主指标减少 s 或没有发生改变即可, 此时每一步记录的方格数恰好等于主指标的减少量.

- $\pi_1^{i-1} > \pi_i^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1}$ 时, 子排列 $\pi_1^{i-1} \pi_2^{i-1} \dots \pi_i^{i-1}$ 中必有一个下降, 因为 $\pi_1^{i-1} > \pi_i^{i-1}$.

(i) 如果子排列 $\pi_1^{i-1} \pi_2^{i-1} \dots \pi_s^{i-1}$ 中没有下降, 则 p^{i-1} 中必有 $\pi_s^{i-1} > \pi_{s+1}^{i-1}$, 否则 $\pi_s^{i-1} > \pi_s^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1}$, π_{s+1}^{i-1} 也应该一起被移动, 矛盾. 由引理 7, 子排列 $\pi_{s+1}^{i-1} \pi_{s+2}^{i-1} \dots \pi_i^{i-1}$ 中没有下降. 此时 p^{i-1} 中有 $\pi_s^{i-1} > \pi_{s+1}^{i-1}$, $\pi_i^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1}$, 操作后, p^i 中有 $\pi_i^{i-1} < \pi_1^{i-1}$, $\pi_s^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1}$, 其余下降保持不变. 可见操作只破坏了下降 $(\pi_s^{i-1}, \pi_{s+1}^{i-1})$, 此时

$$\text{maj}(p^{i-1}) - \text{maj}(p^i) = s;$$

(ii) 如果子排列 $\pi_1^{i-1}\pi_2^{i-1}\dots\pi_s^{i-1}$ 中有一个下降, 设为 $(\pi_t^{i-1}, \pi_{t+1}^{i-1})$, $1 \leq t < s$. 由引理 7, 子排列 $\pi_{s+1}^{i-1}\pi_{s+2}^{i-1}\dots\pi_i^{i-1}$ 中没有下降. 此时, p^{i-1} 中有 $\pi_s^{i-1} < \pi_{s+1}^{i-1}$, $\pi_i^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1}$, 操作后, p^i 中有 $\pi_i^{i-1} < \pi_1^{i-1}$, $\pi_s^{i-1} < \pi_{i+1}^{i-1}$, 其余下降保持不变,

$$\text{maj}(p^{i-1}) - \text{maj}(p^i) = (t + i) - (i - s + t) = s.$$

- $\pi_i^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1} > \pi_1^{i-1}$ 时, 由引理 7, 子排列 $\pi_1^{i-1}\pi_2^{i-1}\dots\pi_i^{i-1}$ 中没有下降. 此时, p^{i-1} 中有 $\pi_s^{i-1} < \pi_{s+1}^{i-1}$, $\pi_i^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1}$, 操作后, p^i 中有 $\pi_i^{i-1} > \pi_1^{i-1}$, $\pi_s^{i-1} < \pi_{i+1}^{i-1}$, 其余下降保持不变,

$$\text{maj}(p^{i-1}) - \text{maj}(p^i) = i - (i - s) = s.$$

- $\pi_{i+1}^{i-1} > \pi_1^{i-1} > \pi_i^{i-1}$ 时, 子排列 $\pi_1^{i-1}\pi_2^{i-1}\dots\pi_i^{i-1}$ 中必有一个下降, 且 $\pi_1^{i-1}\pi_2^{i-1}\dots\pi_s^{i-1}$ 中没有下降.

(i) 如果 $\pi_s^{i-1} < \pi_{s+1}^{i-1}$, 则唯一一个下降属于子排列 $\pi_{s+1}^{i-1}\pi_{s+2}^{i-1}\dots\pi_i^{i-1}$, 设为 $(\pi_t^{i-1}, \pi_{t+1}^{i-1})$, $s + 1 \leq t < i$. 此时, p^{i-1} 中有 $\pi_s^{i-1} < \pi_{s+1}^{i-1}$, $\pi_i^{i-1} < \pi_{i+1}^{i-1}$, 操作后, p^i 中有 $\pi_i^{i-1} < \pi_1^{i-1}$, $\pi_s^{i-1} < \pi_{i+1}^{i-1}$, 其余下降保持不变,

$$\text{maj}(p^{i-1}) - \text{maj}(p^i) = t - (t - s) = s;$$

(ii) 如果 $\pi_s^{i-1} > \pi_{s+1}^{i-1}$, 则子排列 $\pi_{s+1}^{i-1}\pi_{s+2}^{i-1}\dots\pi_i^{i-1}$ 中没有下降. 此时, p^{i-1} 中有 $\pi_s^{i-1} > \pi_{s+1}^{i-1}$, $\pi_i^{i-1} < \pi_{i+1}^{i-1}$, 操作后, p^i 中有 $\pi_i^{i-1} < \pi_1^{i-1}$, $\pi_s^{i-1} < \pi_{i+1}^{i-1}$, 其余下降保持不变, 操作只破坏了下降 $(\pi_s^{i-1}, \pi_{s+1}^{i-1})$,

$$\text{maj}(p^{i-1}) - \text{maj}(p^i) = s.$$

- 否则, 即 $\pi_1^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1} > \pi_i^{i-1}$ 或 $\pi_i^{i-1} > \pi_1^{i-1} > \pi_{i+1}^{i-1}$ 或 $\pi_{i+1}^{i-1} > \pi_i^{i-1} > \pi_1^{i-1}$ 时,

$$\text{maj}(p^{i-1}) - \text{maj}(p^i) = 0.$$

■

结合定理 3 及定理 6, 我们可以得到如下结论:

推论 8.

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} q^{\text{inv}(\pi)} = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} q^{\text{maj}(\pi)}.$$

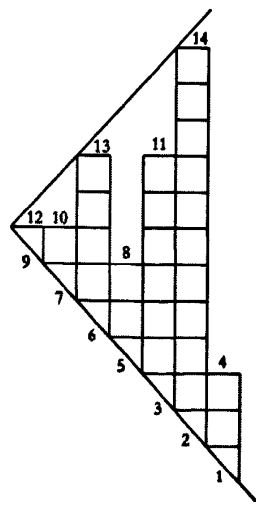
第四节 关于对称部分有向自回避路的进一步探讨

4.1 双射 ψ

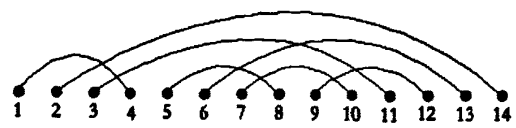
类似于 4.1 节方法, 我们寻找匹配和 $sPDSAW$ 之间的双射, 目的是在一个双射中同时给出二者更多的统计量之间的一一对应关系.

$\psi: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$ 设 $P \in \mathcal{P}_n$, 将 P 的各列从左往右依次编号为 l_n, l_{n-1}, \dots, l_1 . 从 l_1 开始, 自下往上依次给每个半格和方格的分割线按照从小到大的顺序填入 $[2n]$ 中的数字. 假设 l_1 的最上面一个分割线标记为数字 k_1 , 则连接 1 和 k_1 . 之后在 l_2 中用同样规则填入 $[2n] \setminus \{1, k_1\}$ 中的数字, 假设 l_2 的最上面一个方分割线标记为数字 k_2 , 则连接 $[2n]$ 中还未用的最小数字和 k_2 . 重复上述过程直至用完 $[2n]$ 中所有数字, 最终得到需要的匹配 $\psi(P)$. 从匹配返回到对应的 $sPDSAW$ 的过程是完全可逆的.

例12. 设 $n = 7$, 给定一条 $sPDSAW$:



按照标号我们很容易得到对应的匹配:



我们定义匹配的相邻弧 (adjacent arc) 为左端点间没有其它左端点的两条弧. 依照上述映射, 我们可以得到下面的一个定理:

定理 9. 设 $P \in \mathcal{P}_n$ 且 P 具有下列性质:

- $s_n(P) = m - 1$,
- 有 t 列贡献 N ,
- $\text{sqr}(P)$ 为奇数 (偶数),

设 $M = \chi_2(P) \in \mathcal{M}_n$, 则 M 具有以下性质:

- 1 与 m 匹配,
- 有 t 组相邻弧形成嵌套,
- $\text{crs}(M)$ 为奇数 (偶数).

而且, 该双射保持因子的对应关系, 即 P 的最后一个因子被映射成 M 的第一个因子.

证明 给定一条 sPDSAW P , 我们将其各列从左到右依次标记为 l_n, l_{n-1}, \dots, l_1 , 将其对应的匹配中各弧按照左端点从小到大的顺序编号为 e_1, e_2, \dots, e_n .

首先, 如果 l_1 有 $m - 2$ 个完整方格, 即该列下降 $m - 1$ 步, 说明该列中半格和方格的分割线共 m 条, 显然有 1 与 m 匹配, 即 $e_1 = (1, m)$. 此时, 匹配中 1 与 m 之间还有 $m - 2$ 个点没有匹配. 进一步假设所有与 e_1 嵌套的弧为 e_{k_1}, \dots, e_{k_t} , 则剩余 $m - 2 - 2t$ 个点将作为弧的左端点, 且这些弧均与 e_1 交叉, 换句话说, e_1 贡献 $m - 2 - 2t$ 个交叉. 从而, l_1 贡献的方格数 $m - 2$ 与匹配中 e_1 贡献的交叉数 $m - 2 - 2t$ 有相同的奇偶性. 按照相同的方法考虑 $l_i (i = 2, 3, \dots, n)$. 设 l_i 贡献 k 个完整方格, 即该列中有 $k + 2$ 条分割线, 说明匹配中弧 e_i 的左右两个端点间还有 k 个点没有匹配. 设 e_{j_1}, \dots, e_{j_n} 与 e_i 嵌套, 则剩余 $k - 2n$ 个点作为其它弧的左端点, 这些弧均与 e_i 交叉, 即 e_i 又贡献了 $k - 2n$ 个交叉, 且 k 与 $k - 2n$ 奇偶性相同. 综合各列, 我们不难得知 $\text{sqr}(P)$ 与 $\text{crs}(M)$ 的奇偶性相同.

其次, 假设 l_i 贡献了 N 且弧 $e_i = (j_i, k_i)$, 则 e_i 右边的相邻弧 $e_{i+1} = (j_{i+1}, k_{i+1})$ 满足 $j_i < j_{i+1} < k_{i+1} < k_i$, 即 e_i 与 e_{i+1} 形成嵌套. 综合各列, 则如果 P 中共有 t 列贡献 N , 则对应的匹配中共有 t 组相邻弧形成嵌套.

最后, 假设从 $(a, -a)$ 到 $(b, -b)$ 的路径是 P 的一个因子, 该因子经过平移, 实际上为从 $(0, 0)$ 到 $(b-a, -(b-a))$ 的一条 sPDSAW, 这条 sPDSAW 对应 $[2(b-a)]$ 的一个匹配. 由此, 不难理解 P 的这个因子恰好对应匹配中长为 $2(b-a)$ 的一个因子.

■

在 [25] 中, 作者通过两个双射建立了 sPDSAW 的 N 和匹配的嵌套之间的一一对应关系.

(1) 从 \mathcal{P}_n 到 \mathcal{M}_n 的双射 ψ

任意一条 sPDSAW $P \in \mathcal{P}_n$ 都是由其每个 E 的纵坐标唯一确定, 也就是由 n 个整数组成的序列 a_1, a_2, \dots, a_n (其中 $-(i-1) \leq a_i \leq i-1$) 唯一确定. 令 $b_i = a_{n+1-i} + n + 1 - i$, 则有 $1 \leq b_i \leq 2(n+1-i)$. 此时, 我们按照以下规则定义 $[2n]$ 的一个匹配: 连接 $2n$ 个点中左边第一个可用点和它右边第 b_i 个点, $i = 1, 2, \dots, n$, 以此类推, 得到 $[2n]$ 的一个匹配. 注意到在进行第 i 步之前, 还有 $2(n+1-i)$ 个点没有使用, 故上述操作一定可行. 该双射与上面通过给半方格和方格的分割线标号方法建立双射的实质是一样的.

定义 5. 取 $M \in \mathcal{M}_n$, 假定 M 中各弧依照左端点数字从小到大的顺便编号为 e_1, e_2, \dots, e_n . 设 $e_i = (a, b)$, $e_{i+1} = (c, d)$, 定义

$$st_i(M) = \begin{cases} |\{v : d \leq v \leq b, v \text{ 是边 } e_k \text{ 的一个端点, } k > i\}|, & \text{如果 } e_i \text{ 和 } e_{i+1} \text{ 是嵌套的,} \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases}$$

同时令 $st(M) = \sum_{i=1}^{n-1} st_i(M)$.

作者证明了如下引理:

引理 10. $N(P) = st(\psi(P))$.

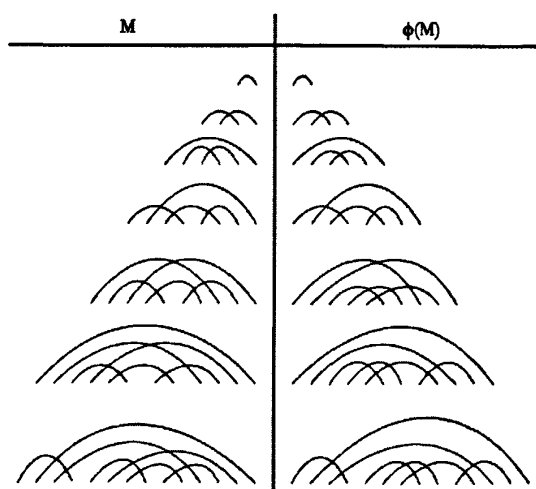
(2) 从 \mathcal{M}_n 到 \mathcal{M}_n 的双射 ϕ

该双射始终保持匹配的第一条弧不变. 设 $M \in \mathcal{M}_n$, 按照以下递推步骤构造 $M' \in \phi(M)$. 如果 $n = 1$ 则令 $\phi(M) = M'$. 如果 $n > 1$, 则从 M 中去掉第一条弧 $e_1 = (1, r)$ 得到匹配 M_1 ,

同时令 $M'_1 = \phi(M_1)$. 此时按照 e_1 在 M 中的位置将 e_1 加到 M'_1 中得到 M'_2 . 记 M'_2 的第二条弧为 e_2 (实际上也为 M 的第二条弧). 此时分为三种情况进行构造:

- e_1 和 e_2 既不交叉也不相互嵌套, 则令 $M' = \phi(M) = M'_2$.
- e_1 和 e_2 相互交叉. 令 $f_2 = e_2 = (l_2, r_2), f_3 = (l_3, r_3), \dots, f_k = (l_k, r_k)$ 为 M'_2 中与 e_1 交叉的所有弧且规定 $2 = l_2 < l_3 < \dots < l_k$. 重新连接这些端点使得: r_2 到 l_3, r_3 到 l_4, \dots, r_{k-1} 到 l_k . 在 r 前加入一点并将其与 r_k 连接起来. 最后去掉点 2 并给所有点重新标号. 可以看出 M' 的第一条弧的位置和 M 的第一条弧的位置保持一致. 此时令 $\phi(M) = M'$.
- e_1 和 e_2 相互嵌套. 将 M'_2 中与 $e_1 = (1, r)$ 和 $e_2 = (2, q)$ 都交叉的弧记作 $f_1 = (l_1, r_1), \dots, f_p = (l_p, r_p)$, 只与 e_1 相交但不与 e_2 相交的弧记作 $f_{p+1} = (l_{p+1}, r_{p+1}), \dots, f_{p+s} = (l_{p+s}, r_{p+s})$, 其中 $l_1 < \dots < l_p < q < l_{p+1} < \dots < l_{p+s}$. 为方便起见, 将上述点重新标记为 $v_1 < \dots < v_p < v_{p+1} < v_{p+2} < \dots < v_{p+s+1}$. 在 r 前加一点并将其与 v_{s+1} 连接起来. 并将 r_1, \dots, r_{p+s} 分别与 $v_1, \dots, v_s, v_{s+2}, \dots, v_{p+s+1}$ 连接. 最后去掉点 2 并给所有点重新标号, 令 $\phi(M) = M'$.

例13. 我们以例 12 中匹配为例, 映射过称如下:



作者证明了以下定理:

定理 11. 映射 ϕ 是个双射且 $nes(\phi(M)) = st(M)$.

文章 [20] 证明了匹配中的嵌套和交叉具有对称分布性质. 结合 [25] 中结论, 这就表明 sPDSAW 的 N 和匹配的交叉之间也存在一一对应关系, 故产生一个可以进一步研究的问题

问题 1 寻找一个双射, 使得匹配的交叉和 sPDSAW 的 N 一一对应.

文章 [7] 定义了匹配的一个新的统计量—部分主指标 (pmaj). 给定 $M \in \mathcal{M}_n$, 我们首先将 M 的弧按照其左端点由大到小依次编号为 $1, 2, \dots, n$, 也就是说如果设所有的弧为 $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)$, 其中 $i_1 > i_2 > \dots > i_n$, 则将弧 (i_r, j_r) 标记为 r ($1 \leq r \leq n$). 以下我们将给每个弧的右端点 $r_1 > r_2 > \dots > r_n$ 从大到小依次递归定义 $\sigma(r_i)$: 如果 r_1 是标记为 a 的弧的右端点, 则令 $\sigma(r_1) = a$. 一般地, 当定义完 $\sigma(r_i)$ 之后, 假定弧 a_1, \dots, a_t 的左端点恰位于 r_i 与 r_{i+1} 之间, 则将序列 $\sigma(r_i)$ 中元素 a_1, \dots, a_t 去掉, 并将右端点为 r_{i+1} 的弧的标号加到所得序列的最前面, 此时得到 $\sigma(r_{i+1})$. 依次类推, 给出所有右端点对应的序列, 同时定义

$$pmaj(M) = \sum_{r_i} des(\sigma(r_i)).$$

例14. 以例12中的匹配为例, 设该匹配为 M , 则有 $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7) = (14, 13, 12, 11, 10, 8, 4)$, 下图显示了 M 的部分主指标的计算过程:

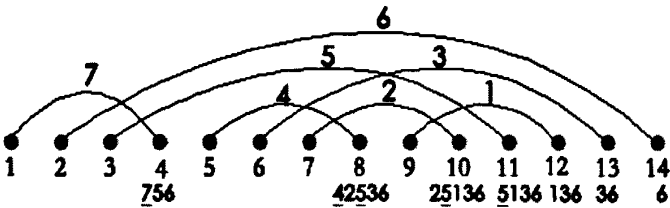


图 5: 匹配的部分主指标

得到 $\sigma(14) = (6), \sigma(13) = (36), \sigma(12) = (136), \sigma(11) = (5136), \sigma(10) = (25136), \sigma(8) = (42536)$, 以及 $\sigma(4) = 756$, 于是 $pmaj(M) = 1 + 1 + 2 + 1 = 5$.

文章中证明了 $[2n]$ 的匹配中部分主指标和交叉的个数具有对称分布关系. 结合问题 1 中的描述, 给我们提出一个新的问题:

问题 2 sPDSAW 的 N 的个数和匹配的部分主指标具有对称分布关系.

4.2 Stirling 排列和对称部分有向自回避路

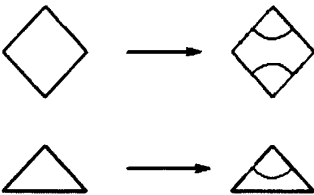
定义 6. 多重集 $\{1, 1, 2, 2, \dots, n, n\}$ 的 *Stirling 排列*(*Stirling permutation*) 是一个 $2n$ 元排列 $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_{2n}$, 满足对任意的 $i, j \in [2n], \pi_i = \pi_j = s$ 时, $\pi_k > s, k = i + 1, i + 2, \dots, j - 1$.

例15. 取 $n = 3$, 多重集 $\{1, 1, 2, 2, 3, 3\}$ 的所有 *Stirling 排列*如下:

112233, 113322, 221133, 223311, 331122,
332211, 122133, 331221, 133122, 221331,
112332, 233211, 122331, 133221, 123321.

Ira Gessel 和 Richard P. Stanley 在 [14] 中证明了多重集 $\{1, 1, 2, 2, \dots, n, n\}$ 的 *Stirling 排列* 的个数为 $(2n - 1)!!$. 由此, 我们想给出 *Stirling 排列*和 *sPDSAW* 之间一一对应关系的组合证明. 借鉴 Robert J. Marsh 和 Paul Martin 在文章 [23] 中建立的双射, 我们建立了二者之间的一个映射 \mathcal{Y} :

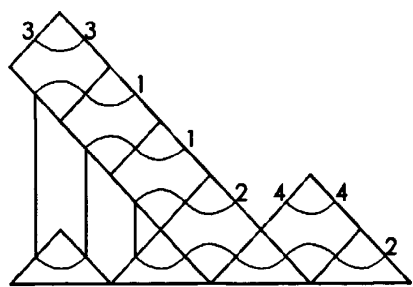
1 首先给出下面两条变换规则:



2 给定一条 *sPDSAW* 并将其所有东步自左往右标号为 $1, 2, \dots, n$. 利用 1 中所给规则将得到 n 条曲线且每条曲线都只与一个东步有关, 我们将每条曲线的两端标上所在东步的编号.

3 将 n 条曲线的标号从上到下、自左往右依次写成 *Stirling 排列*.

例16. 给定例 6 中的 *sPDSAW*, 依照上述步骤, 我们可以得到:



由此, 写出 Stirling 排列 33112442.

有如下猜想:

猜想 映射 γ 是一个双射.

参 考 文 献

- [1] D. André, Solution directe du problème résolu par M. Bertrand, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* 105 (1887), 436 – 437.
- [2] E. Barcucci, E. Pergola, R. Pinzani, and S. Rinaldi, A bijection for some paths on the slit plane, *Adv. in Appl. Math.* 26 (2001), 89 – 96.
- [3] M. Bousquet-Méou, Walks on the slit plane: Other approaches, *Adv. in Appl. Math.* 27 (2001), 243 – 288.
- [4] M. Bousquet-Méou, Counting walks in the quarter plane, in *Math. Comput. Sci.: Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities*, Trends in Mathematics, Birkhäuser (2002), 49 – 67.
- [5] M. Bousquet-Méou, G. Schaeffer, Walks on the slit plane, *Probab. Theory Related Fields* 124 (2002), 305 – 344.
- [6] M. Bousquet-Méou, M. Petkovšek, Walks confined in a quadrant are not always D-finite, *Theoret. Comput. Sci.* 307 (2) (2003), 257 – 276.
- [7] W. Y. C. Chen, I. M. Gessel, C. H. Yan and A. L. B. Yang, A major index for matchings and set partitions, *arXiv: math/0701096v1 [math.CO]* 3 Jan 2007.
- [8] S. Corteel, Crossings and alignments of permutations, *Adv. in Appl. Math.* 38 (2007), no. 2, 149 – 163, *math.CO/0601469*.
- [9] P. Duchon, On the enumeration of generation of generalized Dyck words, *Discrete Math.* 225 (2000), 121 – 135.
- [10] B. Duplantier, H. Saleur, Exact surface and wedge exponents for polymers in two dimensions, *Phys. Rev. Lett.* 57 (1986), 3179 – 3182.

- [11] G. Fayolle, R. Iasnogorodski and V. Malyshev, Random Walks in the Quarter Plane: Algebraic Methods, Boundary Value Problems and Applications, Appl. Math., vol. 40, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [12] 冯速 (译), 应用组合数学 (原书第 2 版) [M]. 北京: 机械工业出版社, 2007.5.
- [13] 付梅, 侯庆虎, 辛国策, 杨立波 (译), 计数组合学 (第一卷) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2009.6.
- [14] I. Gessel, R. P. Stanley, Stirling polynomials, J. Combin. Theory, Ser A 24 (1978), 24 – 33.
- [15] D. J. Grabiner, Random walk in an alcove of an affine Weyl group, and non-colliding random walks on an interval, J. Combin. Theory, Ser. A 97 (2) (2002), 285 – 306.
- [16] J. M. Hammersley, S. G. Whittington, Self-avoiding walks in wedges, J. Phys. A 18 (1985), 101 – 111.
- [17] E. J. Janse van Rensburg, T. Prellberg and A. Rechnitzer, Partially directed paths in a wedge, J. Combin. Theory, Ser. A 115 (2008), 623 – 650.
- [18] H. Kesten, On the number of self-avoiding walks, J. Math. Phys. 4 (1963), 960 – 969.
- [19] H. Kesten, On the number of self-avoiding walks II, J. Math. Phys. 5 (1964), 1128 – 1137.
- [20] M. Klazar, On identities concerning the numbers of crossings and nestings of two edges in matchings, preprint, math.CO/0510676, 2005.
- [21] C. Krattenthaler, Asymptotics for random walks in alcoves of affine Weyl groups, preprint, arXiv: math.CO/0301203, 2003.
- [22] N. Madras, G. Slade, The Self-Avoiding Walk, Birkhäuser, London, 1993.
- [23] R. J. Marsh, P. Martin, Tiling bijections between paths and brauer diagrams, arXiv: 0906.0912v1, 2009.

- [24] W. K. McCrae, F. J. W. Whipple, Random paths in two and three dimensions, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 60 (1940), 281 – 298.
- [25] S. Poznanović, A bijection between partially directed paths in the symmetric wedge and matchings, *arXiv*: 0803.4233v1, 2008.
- [26] M. Rubey, Nestings of Matchings and Permutations and North Steps in sPDSAWs, *arXiv*: 0712.2804v4, 2008.
- [27] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics (Vol. 1)* [M]. 北京: 机械工业出版社, 2004.
- [28] C. Vanderzande, *Lattice Models of Polymers (Cambridge Lecture Notes in Phys.), (vol. 11)* [M]. Cambridge University Press, 1998.
- [29] 王天明, 马欣荣, 格路与组合恒等式, *大连理工大学学报*, 34(6) (1994), 628 – 632.
- [30] L. K. Williams, Enumeration of totally positive Grassmann cells, *Adv. Math.*, 190 (2005), no. 2, 319 – 342, *math.CO/0307271*.

致 谢

记不清是从哪一刻,我开始强烈的感觉到毕业的脚步越来越近,声音越来越真,味道越来越浓.许是注册时红章填补了最后一个空白的那一刹那,亦或是用键盘敲出毕业论文第一个字的那一瞬间.短短长长的三年,在我生命中留下了或欣喜,或悲伤,或激动,或怀念的点点滴滴,它们是一生的财富,是最深刻的念想.

衷心地感谢我的导师杜若霞副教授.是她将刚入校时迷茫无助的我拉着站起来,让我找到了自己的学习方向;是她在课堂上教导我们一定要谦虚谨慎、善于思考;是她细致地讲解、不断地启发,让我们每每恍然大悟;是她敏捷的思维、不断地提问,让我们丝毫不敢懈怠;是她在我最痛苦的时候用无言却充满力量的拥抱给我最大的鼓励;是她在课后空闲的时间里给我们讲逸闻趣事,给我们教智力游戏,还总惦记着我们的生活.在我心里,杜老师对我们严格要求又万般宽容,不断鼓励也从来没有丢过对我们的期望和信任;在我心里,不论是学术上,工作上,还是生活上,杜老师都是我的榜样和导师.

真诚地感谢郭军伟老师悉心耐心的教导,给予我无私的鼓励和宽容;感谢任韩老师富有激情的授课带给我收获的愉悦;感谢詹兴致老师在孜孜授课的同时启发我不断完善人格;感谢其他很多老师,无论何时何地,都是那么谦和热情,给我巨大的鼓励;感谢徐洁老师、辅导员于国妮老师和邹佳晨老师以及所有教务老师给我们营造了温馨、便捷的学习及生活环境.

感谢同门丁云及同方向的杨丹梅一直以来对我的督导和鼓励;感谢相识七年的谭松龄同学用她对学习的态度、对生活的热爱、对挫折的无所畏惧深深的影响着我;感谢舍友汪家录同学在生活上给予我太多的迁就和照顾;感谢博士师兄曹倪很多次无私的帮助;感谢班上每位同学,无论是研会和班级工作,还是个人私事,他们表现出来的信任和支持,都会让我深深铭记.

最后,深深的感谢我的家人,因为有你们,我就能坚强勇敢的踏出每一步.感激在我心间.我相信,无论你们离我多近多远,都一定能感受得到.

谢瑾霞

2011年4月于华东师大闵行校区