格子图中具有一定限制条件的非降路径数

李占兰

(青海师范大学 数学与信息科学系,青海 西宁 810008)

摘 要:格子图中从点(p,q)到(r,s)的非降路径是指从点(p,q)出发通过垂直向上或向右到达(r,s)的路径.本文给出了从(0,0)点到达(n,n)点的不接触 y=x+k 非降路径数的计算公式,k 是正整数.

关键词:非降路径;组合;格子图

中图分类号:O150.0 **文献标识码**:A **文章编号**:1001-7542(2007)03-0006-02

1 引言

在图1中从点(0,0)开始向右水平或向上垂直每次走一步,共走 $n+m$ 步可达点(m,n),每一条路径称为一条非降路径;按指定路径从点(0,0)到点(m,n)的所有非降路径个数称为从(0,0)到点(m,n)的非降路径数.关于非降路径数的研究可参见文[1,2,3].

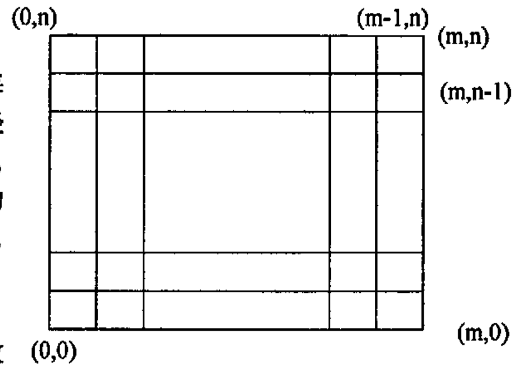

图1

例1 参见文[1]

文[1,2]有,从(0,0)到(m,n)的非降路径数$\binom{m+n}{n}$.下面结果在文献[1,2,3]中找到

1.从(s,t)点到(m,n)点的非降路径数为$\binom{m-s+n-t}{m-s}$.

2.从(0,0)点到(n,n)点的除端点外不接触直线 $y=x$ 的非降路径数是$\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

本文将考虑下面更一般的问题:

问题1 研究从(0,0)点到(n,n)点的不接触直线 $y=x+k$ 的非降路径数,k 是正整数.

问题2 研究从(s,t)点到(n,n)点的不接触直线 $y=x+k$ 的非降路径数,k 是整数.

2 主要结果

定理1 从(0,0)点到(n,n)点不接触 $y=x+k$ 的非降路径数是$\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-k}$,$k$ 是正整数.

证明 当 $k=1$ 时,不接触直线 $y=x+1$ 的非降路径必须经过(1,0)点和$(n,n-1)$点到达(n,n)点且不接触 $y=x+1$ 的非降路径.注意到从(1,0)点到$(n,n-1)$点的所有非降路径数是$\binom{2n-2}{n-1}$.对任意一条接触 $y=x+1$ 的非降路径,把它最后离开对角线的点 A 到(1,0)点之间的部分作关于 $y=x+1$ 做一个反射,就得到一条从(-1,2)点出发经过 A 点到达$(n,n-1)$点的非降路径;反之,任何一条从(-1,2)点出发经过 A 点到达$(n,n-1)$点的非降路径可以通过这样的反射对应一条从(1,0)点出发

收稿日期:2007-05-21

作者简介:李占兰(1966-),女(土族),青海大通人,青海师范大学讲师,从事组合数学的研究.

接触到 $y = x + 1$ 而到达 $(n, n-1)$ 点的非降路径. 显然从 $(-1,2)$ 点到达 $(n, n-1)$ 点的非降路径是 $\binom{2n-2}{n-3}$. 故不接触 $y = x + 1$ 的非降路径数是 $\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-3} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$.

当 $k \geq 2$ 时, 从 $(0,0)$ 点到 (n,n) 点的所有非降路径数是 $\binom{2n}{n}$. 对任意一条接触 $y = x + k$ 的非降路径, 把它最后离开对角线的点 B 到 $(0,0)$ 点之间的部分作关于 $y = x + k$ 做一个反射, 就得到一条从 $(-k,k)$ 点出发经过 B 点到达 (n,n) 点的非降路径; 反之, 任何一条从 $(-k,k)$ 点出发经过 B 点到达 (n,n) 点的非降路径可以通过这样的反射对应一条从 $(0,0)$ 点出发接触到 $y = x + k$ 而到达 (n,n) 点的非降路径. 显然从 $(-k,k)$ 点到达 (n,n) 点的非降路径是 $\binom{2n}{n-k}$. 故不接触 $y = x + k$ 的非降路径数是 $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-k}$.

推论　从 $(0,0)$ 点到达 (n,n) 点的不接触 $y = x + 2$ 的非降路径数是 $\frac{4n+2}{(n+1)(n+2)}\binom{2n}{n}$.

定理 2　从 (s,t) 点到达 (n,n) 点的不接触 $y = x + k$ 的非降路径数是 $\binom{2n-s-t}{n-s} - \binom{2n-s-t}{n-t+k}$, k 为整数且 $k > t - s$.

证明　由 $k > t - s$ 得, 点 (s,t) 在直线 $y = x + k$ 下方. 点 (s,t) 关于直线 $y = x + k$ 的对称点为 $(t-k, s+k)$. 从 (s,t) 点到 (n,n) 点的所有非降路径数是 $\binom{2n-s-t}{n-s}$. 对任意一条接触 $y = x + k$ 的非降路径, 把它最后离开对角线的点 C 到 (s,t) 点之间的部分作关于 $y = x + k$ 做一个反射, 就得到一条从 $(t-k, s+k)$ 点出发经过 C 点到达 (n,n) 点的非降路径. 反之, 任何一条从 $(t-k, s+k)$ 点出发经过 C 点到达 (n,n) 点的非降路径可以通过这样的反射对应一条从 (s,t) 点出发接触到 $y = x + k$ 而到达 (n,n) 点的非降路径. 而 $(t-k, s+k)$ 点到达 (n,n) 点的非降路径是 $\binom{2n-t-s}{n-t+k}$.

故不接触 $y = x + k$ 的非降路径数是 $\binom{2n-s-t}{n-s} - \binom{2n-s-t}{n-t+k}$.

参考文献：

[1] 孙淑玲, 许胤龙. 组合数学引论[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1999, 2.
[2] 李乔. 组合数学基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993, 11.
[3] 孙世新, 张先迪. 组合原理及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2006, 3.

On the Number of Non – decrease Paths of Lattice Square

LI Zhan-lan

(Department of Mathematics, Qinghai Normal University, Xining 810008, China)

Abstract: The integral lattice has points in the coordinate plane with integer coordinates. A non – decrease path of the integral Lattice is the path from (p, q) to (r, s) with either an up step or a right step. In this paper, we give some formula of the number of non – decrease paths that doesn't touch the line with y = x + k, where k is an integer.

Key words: non – decrease paths; combinatorics; inlegroal Lattice