“切比雪夫距离”下的轨迹探究

201499 上海市奉贤中学 张益明

唐代诗人韩愈曾作诗:“天街小雨润如酥,草色遥看近却无”,作者认为距离能够产生美.在数学中距离作为一种度量亦能带来很多美的公式及美的图形.上海夏德凡老师在文[1]中研究了“直角距离”下的轨迹探究,得到很多漂亮的图像.本文将从“切比雪夫距离”出发,研究相应的轨迹问题.另一方面,国际象棋中“王”从一个位置移动到另一个位置所需要走的步数也满足切比雪夫距离,切比雪夫距离也会应用在仓储物流中.因此,“切比雪夫距离”的研究非常有意义.

一、平面上点与点的切比雪夫距离

在平面直角坐标系中,设点$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$,称$d(P_1,P_2)=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$为两点的切比雪夫距离.

则 $d(P_1,P_2)\leqslant\sqrt{|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2}=|P_1P_2|$(其中$|P_1P_2|$为两点间普通距离).

二、平面上点到直线的切比雪夫距离公式

设点$P(x_0,y_0)$及直线$l:ax+by+c=0$(a、b不全为0)上任一点$Q(x,y)$,称$\min d(P,Q)$为点P到直线l的切比雪夫距离,记作$d(P,l)$.

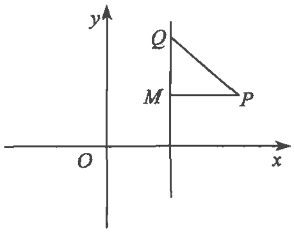

图1

1. 当$b=0$时(如图1),作直线$PM\perp l$于点$M\left(-\dfrac{c}{a},y_0\right)$,则

$d(P,Q)=\max\left\{\left|x_0+\dfrac{c}{a}\right|,|y-y_0|\right\}\geqslant\left|x_0+\dfrac{c}{a}\right|=d(P,M)$,所以

$$d(P,l)=\left|x_0+\frac{c}{a}\right|=\frac{|ax_0+c|}{|a|}.$$

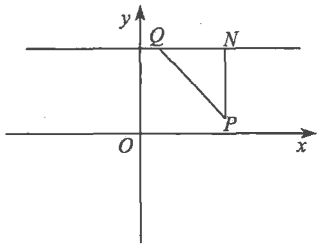

图2

2. 当$a=0$时(如图2),作直线$PN\perp l$于点$N\left(x_0,-\dfrac{c}{b}\right)$,则

$d(P,Q)=\max\left\{|x-x_0|,\left|y_0+\dfrac{c}{b}\right|\right\}\geqslant\left|y_0+\dfrac{c}{b}\right|=d(P,N)$,所以

$$d(P,l)=\left|y_0+\frac{c}{b}\right|=\frac{|by_0+c|}{|b|}.$$

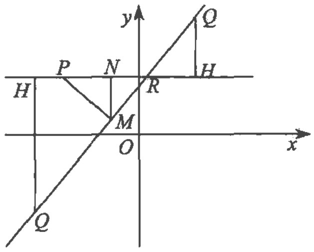

图3

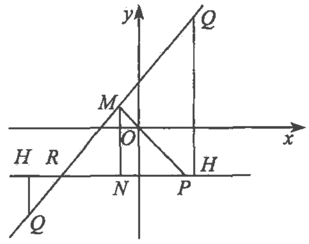

图4

3. 当$-\dfrac{a}{b}>0$时(如图3、图4),在图3中过点P作y轴的垂线,交直线l于点R,过点P作斜率为-1的直线交直线l于点M,过点M作$MN\perp PR$于点N,同时过直线l上任一

点Q作$QH\perp PR$于点H(图4中方法类似). 设直线l的倾斜角为α.

(1) 点Q在点M右上方时, $d(P,Q)=\max\{|PH|,|HQ|\}\geqslant|PH|>|PN|$;

(2) 点Q在点M左下方时, $d(P,Q)=\max\{|PH|,|HQ|\}\geqslant|HQ|>|MN|$.

因此$d(P,l)=d(P,M)=|PN|=|MN|$(设为d), 则$\angle PRM=\alpha$, 则$|NR|=d\cot\alpha=-\dfrac{db}{a}$, 所以$|PR|=d-\dfrac{db}{a}=\left|x_0+\dfrac{by_0+c}{a}\right|=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{|a|}$, 故$d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{|a-b|}$.

4. 当$-\dfrac{a}{b}<0$时(如图5), 过点P作与y轴的垂线交直线l于点R, 过点P作斜率为1的直线交直线l于点M, 过点M作$MN\perp PR$于点N, 由3的方法得到$d(P,l)=d(P,M)=|PN|=|MN|$(设为d, 直线l的倾斜角为α), 则$\angle PRM=\pi-\alpha$, 则$|NR|=-d\cot\alpha=\dfrac{db}{a}$.

所以, $|PR|=d+\dfrac{db}{a}=\left|x_0+\dfrac{by_0+c}{a}\right|=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{|a|}$, 故$d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{|a+b|}$.

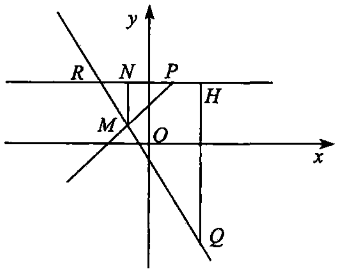

图5

综上所述, 点到直线的切比雪夫距离公式为: $d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{|a|+|b|}\leqslant\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

推论　设$l_1: ax+by+c_1=0$和$l_2: ax+by+c_2=0$, 则两平行线间的切比雪夫距离为: $d=\dfrac{|c_1-c_2|}{|a|+|b|}$.

三、切比雪夫距离下的若干轨迹

1. 到定点的切比雪夫距离等于定长的点的轨迹

设定点$C(x_0,y_0)$、动点$P(x,y)$满足$d(C,P)=r(r>0)$, 则

$$\max\{|x-x_0|,|y-y_0|\}=r.\cdots\cdots①$$

①式等价于$\begin{cases}|x-x_0|=r,\\|y-y_0|\leqslant r\end{cases}$ 或$\begin{cases}|y-y_0|=r,\\|x-x_0|\leqslant r,\end{cases}$ 则点P的轨迹是以点C为中心、边长为$2r$的正方形(见图6).

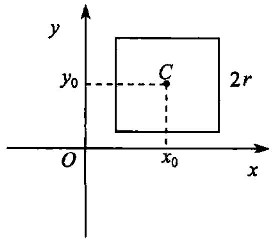

图6

2. 到两定点的切比雪夫距离之和是常数的点的轨迹

设定点$F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$、动点$P(x,y)$满足$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a\,(a>c)$, 则

$$\max\{|x+c|,|y|\}+\max\{|x-c|,|y|\}=2a.\cdots\cdots②$$

显然方程②所表示的曲线关于原点对称, 故不妨设$x\geqslant0$, $y\geqslant0$.

(1) 当$\begin{cases}|x+c|\geqslant y,\\|x-c|\geqslant y\end{cases}$ 时, 有$|x+c|+|x-c|=2a$, 得$\begin{cases}x=a,\\0\leqslant y\leqslant a-c.\end{cases}$

(2) 当$\begin{cases}|x+c|\leqslant y,\\|x-c|\leqslant y\end{cases}$ 时, 有$2|y|=2a$, 得$\begin{cases}y=a,\\0\leqslant x\leqslant a-c.\end{cases}$

(3) 当$\begin{cases}|x+c|>y,\\|x-c|<y\end{cases}$ 时, 有$x+c+y=2a$, $a-c<x<a$.

则点P的轨迹是以原点为中心的八边形(见图7).

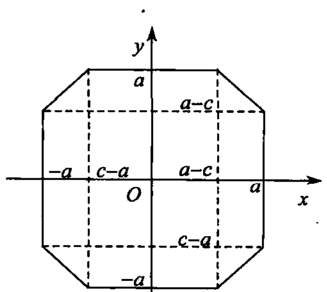

图7

特别地, 当$a=c$时, 点P的轨迹是以原点为中心的正方形(见图8).

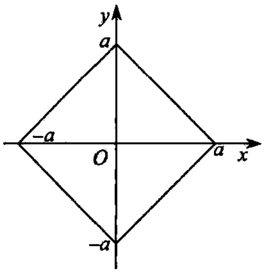

图8

3. 到两定点的切比雪夫距离之差的绝对值是常数的点的轨迹

设定点$F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$、动点$P(x,y)$满足$|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a\,(a<c)$, 则

$|\max\{|x+c|,|y|\}-\max\{|x-c|,|y|\}|=2a.$ ......③

显然方程③所表示的曲线关于原点对称, 故不妨设$x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

(1) 当$\begin{cases}|x+c|\geqslant y,\\|x-c|\geqslant y\end{cases}$时, 有$||x+c|-|x-c||=2a$, 得$\begin{cases}x=a,\\0\leqslant y\leqslant a-c.\end{cases}$

(2) 当$\begin{cases}|x+c|\leqslant y,\\|x-c|\leqslant y\end{cases}$时, 有$0=2a$, 无解.

(3) 当$\begin{cases}|x+c|>y,\\|x-c|<y\end{cases}$时, 有$x+c-y=2a$, $a<x$.

则点P的轨迹是以原点为中心的两支折线(见图9).

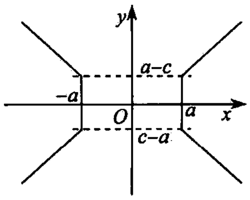

图9

特别地, 当$a=c$时, 点P的轨迹是以原点为中心的四条射线(见图10).

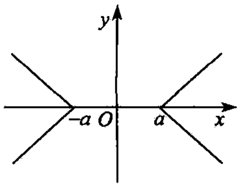

图10

4. 到定点的切比雪夫距离与定直线的切比雪夫距离相等的点的轨迹

设定点$F\left(\frac{p}{2},0\right)$、直线$l: x=-\frac{p}{2}$、动点$P(x,y)$满足$d(P,F)=d(P,l)$, 则

$\max\left\{\left|x-\frac{p}{2}\right|,|y|\right\}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$ ......④

显然方程④所表示的曲线关于x轴对称, 故不妨设$y\geqslant 0$.

(1) 当$\left|x-\frac{p}{2}\right|\geqslant y$时, 有$\left|x-\frac{p}{2}\right|=\left|x+\frac{p}{2}\right|$, 得$\begin{cases}x=0,\\0\leqslant y\leqslant \frac{p}{2}.\end{cases}$

(2) 当$\left|x-\frac{p}{2}\right|<y$时, 有$x+\frac{p}{2}=y$, $x>0$.

则点P的轨迹是以x轴为对称轴的折线(见图11).

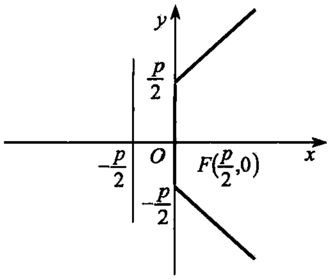

图11

5. 到两定点的切比雪夫距离相等的点的轨迹

设定点$F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$、动点$P(x,y)$满足$d(P,F_1)=d(P,F_2)$, 则

$\max\{|x+c|,|y|\}=\max\{|x-c|,|y|\}.$ ....⑤

显然方程⑤所表示的曲线关于x轴对称, 故不妨设$y\geqslant 0$.

(1) 当$\begin{cases}|x+c|\geqslant y,\\|x-c|\geqslant y\end{cases}$时, 有$|x+c|=|x-c|$, 得$\begin{cases}x=0,\\0\leqslant y\leqslant c.\end{cases}$

(2) 当$\begin{cases}|x+c|\leqslant y,\\|x-c|\leqslant y\end{cases}$时, 有$|y|=|y|$, 恒成立.

(3) 当$\begin{cases}|x+c|>y,\\|x-c|<y\end{cases}$时, 有$x+c=y$, $x\geqslant 0$.

则点P的轨迹是以原点为中心的"双酒杯型"图形(见图12).

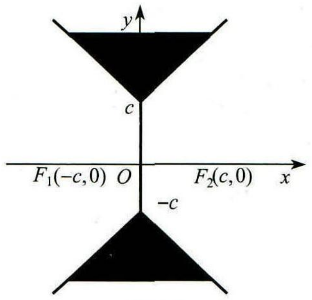

图12

四、切比雪夫距离考题赏析

例1 在平面直角坐标系中, 定义$d(P_1,P_2)=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$为两点$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$的"切比雪夫距离". 则点$P(3,1)$到直线$y=2x-1$上一点的"切比雪夫距离"的最小值为________.

解法一: 由点到直线切比雪夫距离公式知: $d=\dfrac{|2\times 3-1-1|}{|2|+|1|}=\dfrac{4}{3}$.

解法二: 设$Q(x,2x-1)$为已知直线上任一点, 则$d(P,Q)=\max\{|x-3|,|2x-2|\}=f(x)$, 在直角坐标系中同时画出函数$y_1=|x-3|$, $y_2=|2x-2|$的图像, 并从图像高低处得到$y=f(x)$图像(图13中粗线部分), 易得$x=\dfrac{5}{3}$的时候, 函数有最小值$\dfrac{4}{3}$.

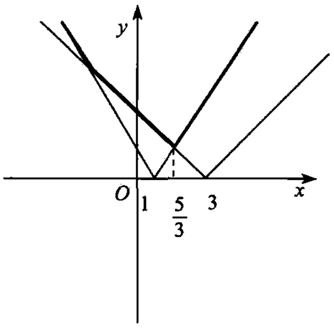

图13

例2 在平面直角坐标系中, 定义$d(P_1,P_2)=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$为两点$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$的"切比雪夫距离". 若点$P$到点$(2014,2015)$的切比雪夫距离为2, 则点$P$的轨迹长度之和为________.

解: 由前文知点P的轨迹是边长为4的正方形, 则轨迹长度之和为16.

例3 在平面直角坐标系中, 称$d(P,Q)$为点P、Q两点间的距离, 若$d(P,Q)$满足下列三个性质: (1)非负性: $d(P,Q)\geqslant 0$; (2)对称性: $d(P,Q)=d(Q,P)$; (3)三角不等式: $d(P_1,P_2)+d(P_2,P_3)\geqslant d(P_1,P_3)$. 设点$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$、$P_3(x_3,y_3)$, 则下列能够作为距离公式的有________.

① $d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$;

② $d(P_1,P_2)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$;

③ $d(P_1,P_2)=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$;

④ $d(P_1,P_2)=\min\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$.

解: ①、②显然能够作为距离公式; 而③易证得满足非负性及对称性, 下证③也满足三角不等式.

$d(P_1,P_2)+d(P_2,P_3)=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}+\max\{|x_2-x_3|,|y_2-y_3|\}\geqslant|x_1-x_2|+|x_2-x_3|$, 由绝对值不等式性质得

$$|x_1-x_2|+|x_2-x_3|\geqslant|x_1-x_3|.$$

同理可得

$$d(P_1,P_2)+d(P_2,P_3)\geqslant|y_1-y_3|,$$

则

$$d(P_1,P_2)+d(P_2,P_3)\geqslant\max\{|x_1-x_3|,|y_1-y_3|\}=d(P_1,P_3).$$

对于④, 设点$P_1(1,2)$、$P_2(1,3)$、$P_3(2,3)$, 则$d(P_1,P_2)=d(P_2,P_3)=0$, $d(P_1,P_3)=1$, 不满足三角不等式.

综上可知: 能够作为距离公式的有①、②、③.

参考文献

[1] 夏德凡. "直角距离"下的轨迹探究 [J]. 数学教学, 2011 (12): 16–20.