38.http://opentrains.snarknews.info/~ejudge/team.cgi?contest_id=10433 E题

注：经典问题：求高维空间两直线间最小距离，目前已知本题有4种做法

做法1：二次型，换主元思想

设直线AB与CD上各有一点P和Q，则$P:a\overrightarrow{A}+b\overrightarrow{B},a+b=1$

同理，Q的参数设为c,d；故

$$
\begin{gathered}
|PQ|^2=(a\overrightarrow{A}+b\overrightarrow{B}-c\overrightarrow{C}-d\overrightarrow{D})^2\\
=a^2\overrightarrow{A}^2+b^2\overrightarrow{B}^2+c^2\overrightarrow{C}^2+d^2\overrightarrow{D}^2\\
+2ab\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}+2cd\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{D}\\
-2ac\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}-2bd\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{D}\\
-2bc\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C}-2ad\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{D}\\
=x_1a^2+x_2b^2+x_3c^2+x_4d^2\\
+2abx_5+2cdx_6-2acx_7-2bdx_8-2bcx_9-2adx_{10}\\
\text{将}b=1-a,d=1-c\text{带入得：}\\
=X_1a^2+X_2a+X_3c^2+X_4c+X_5ac+X_6
\end{gathered}
$$

其中：

$$
\begin{gathered}
X_1=x_1+x_2-2x_5\\
X_2=2x_5+2x_8-2x_{10}-2x_2\\
X_3=x_3+x_4-2x_6\\
X_4=2x_6+2x_8-2x_9-2x_4\\
X_5=2x_9+2x_{10}-2x_7-2x_8\\
X_6=x_2+x_4-2x_8
\end{gathered}
$$

考虑拉格朗日极值法，令其偏导为0得到方程组：

$$
\begin{gathered}
2aX_1+X_2+X_5c=0\\
2cX_3+X_4+X_5a=0\\
\text{解得：}\\
a=\frac{2X_2X_3-X_4X_5}{X_5^2-4X_1X_3}\\
c=\frac{2X_1X_4-X_2X_5}{X_5^2-4X_1X_3}
\end{gathered}
$$

带入得到一般情况答案：

$$
ans=\frac{-X_2^2X_3-X_1X_4^2+X_2X_4X_5+4X_1X_3X_6-X_5^2X_6}{4X_1X_3-X_5^2}
$$

注意当原题意两直线平行时，要特判：因为a,c解出来分母为0，此种情况可以用向量点积直接求出答案

做法2：二次型化为标准型

需要二次型的线代模板

做法3：推广三维情形，寻找法向量求点积；这是一种几何与代数结合的方法，计算量较小

三维情形:

当两直线平行时，即$|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|$，令$l=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}|, d^2=\overrightarrow{AC}^2-l^2$

当两直线不平行时，过其中一条做平行于另一条的平面，将问题转化为求直线到与其平行(或共面)的一平面距离，令该平面法向量$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}, d=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}$

推广:

平行时，可以推广；不平行时，由于我们对于高维空间内两向量叉积定义不明晰，所以不利于推广

我们从三维情形，发现不平行时，最短距离满足一个几何性质：如果我们可以找到$p\in AB, q\in CD$且$pq\perp AB, pq\perp CD$，则$d=|pq|$

故代数化：令$p=a\overrightarrow{A}+b\overrightarrow{B}, a+b=1$，$q=c\overrightarrow{C}+d\overrightarrow{D}, c+d=1$

$$
\begin{gathered}
\overrightarrow{pq}\perp\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{pq}\perp\overrightarrow{CD} \\
\text{等价于} \\
a\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{AB}-c\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{AB}-d\overrightarrow{D}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \\
a\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{CD}+b\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{CD}-c\overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{CD}-d\overrightarrow{D}\cdot\overrightarrow{CD}=0 \\
\text{换元并代入消元：} \\
p_1a+p_2(1-a)+p_3c+p_4(1-c)=0 \\
q_1a+q_2(1-a)+q_3c+q_4(1-c)=0 \\
\text{整理并换元：} \\
s_1a+s_2c=s_3 \\
t_1a+t_2c=t_3 \\
\text{解得：} \\
a=\frac{s_2t_3-s_3t_2}{s_2t_1-s_1t_2}=\frac{r_1}{p} \\
c=\frac{s_3t_1-s_1t_3}{s_2t_1-s_1t_2}=\frac{r_2}{p} \\
\text{代入}|\overrightarrow{pq}|^2\text{中计算答案：} \\
ans=\frac{|r_1\overrightarrow{A}+(p-r_1)\overrightarrow{B}-r_2\overrightarrow{C}-(p-r_2)\overrightarrow{D}|^2}{p^2}
\end{gathered}
$$

做法4:

二分+$SternBrocot$树，目前尚不明晰其具体做法

总结

对于这种偏向量表述的几何题，有时候也是很受算法竞赛欢迎的；

最好是可以结合几何与代数的方法，几何上寻找一些明显的性质，代数上用细致的推理；

这样有利于得到精确解，如果对精度要求不高的话，可以用二分三分等逼近算法

39.http://opentrains.snarknews.info/~ejudge/team.cgi?contest_id=10433 K题

注：简单的高斯消元模板题，构造方案

40.https://ac.nowcoder.com/acm/contest/881/C

注：拉格朗日乘子法/水桶贪心

给定a_i，求点A到有界超平面最短欧几里得距离平方$||A-P||_2^2=\sum_{i=1}^{n}(a_i/m-p_i)^2$;

有界超平面满足如下约束：

- $p_1,p_2,\cdots,p_n\geq 0$且$\in R$
- $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$

贪心的做法是：现寻找一个点A在上述平面的投影点，直接按比例分配坐标和的差值即可；然后要使得所有坐标非负，相当于排序后，从负到正逐维贪心，每次将本维强制改为非负，代价均摊在后面各维

拉格朗日乘子法：

由于同时存在等式约束和不等式约束条件，直接使用拉格朗日乘子法与KKT条件的纯代数方法比较复杂，不如只考虑等式约束，保留不等式约束，将一些特殊性的分析和代数方法结合，从而减少计算量

引拉格朗日乘子λ，构造拉格朗日函数$f(\overrightarrow{p},\lambda)=\sum_{i=1}^{n}(a_i-p_i)^2+2\lambda(\sum_{i=1}^{n}p_i-1)$，本来该函数是要对所有变量都求偏导，构成一个方程组，但是由于存在不等式约束，所以意义不大，因为驻点很可能不符合条件

但是注意由于等式约束的存在，故$\partial f/\partial\lambda=0$必须成立，因为我们将其放入了构造的函数中，拉格朗日乘子法的主要思想就是将限制条件，想办法放入函数中，是一种惩罚机制求最值或者优化问题的思想

$$f(\overrightarrow{p},\lambda)-\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sum_{i=1}^{n}p_i^2-2\sum_{i=1}^{n}a_ip_i+2\lambda\sum_{i=1}^{n}p_i-2\lambda$$
$$=\sum_{i=1}^{n}p_i^2+\sum_{i=1}^{n}2(\lambda-a_i)p_i-2\lambda$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(p_i+(\lambda-a_i))^2-2\lambda-\sum_{i=1}^{n}(\lambda-a_i)^2$$
$$\text{注意到}p_i\text{是独立的，且分析前面的平方项：}$$
$$\text{当}\lambda-a_i<0\text{时，可以取到}0;$$
$$\text{当}\lambda-a_i\geq 0\text{时，可以取到}\lambda-a_i;$$
$$\text{即平方项可以取到}max(\lambda-a_i,0)^2$$
$$\text{将}a_i\text{从小到大排序，逐段考虑}\lambda\text{取值，是个分段二次函数}$$
$$\text{不妨设}\lambda\in[a_k,a_{k+1})\text{：}$$
$$f(\overrightarrow{p},\lambda)-\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sum_{i=1}^{k}(\lambda-a_i)^2-\sum_{i=1}^{n}(\lambda-a_i)^2-2\lambda$$
$$=-\sum_{i=k+1}^{n}(\lambda-a_i)^2-2\lambda$$
$$\text{上式是个关于}\lambda\text{的二次函数，注意一定要在对称轴处取极值}$$
$$\text{即如果对称轴不在区间}[a_k,a_{k+1})\text{中，则此段极值不合法}$$
$$\text{最后在所有极值中取最小值}$$

总结：这种分析关键在于，把不等式约束通过调整和分类的方法转化掉，在一种情况中，拉格朗日函数的最值与参数$\overrightarrow{p}$无关，只与参数λ有关，便可以直接对λ求导，注意只能在导函数为0的点处求最值，最终合并所有情况的最值

41.https://ac.nowcoder.com/acm/contest/881/H

注：前后缀线性基合并，线性空间值的分布基本性质

42.https://ac.nowcoder.com/acm/contest/884/B

注：线性基求交+线段树，模板题

43.https://loj.ac/problem/2409

注：难题，牛顿恒等式+生成函数+分治ntt

44.http://hihocoder.com/problemset/problem/1876

注：难题，2018北京区域赛G题；牛顿恒等式

45.https://www.51nod.com/Challenge/Problem.html#problemId=1343

注：基础题，转化为计算矩阵行列式，$|A| = |A^T|$

46.https://codeforces.com/problemset/problem/963/E

注：难题，网格图随机游走问题，单一起点；直接消元法/列主元法

47.https://codeforces.com/gym/102268/problem/E

或者 http://opentrains.snarknews.info/~ejudge/team.cgi?contest_id=001531 E题

注：难题，平面图随机游走，由于边数是$O(|V|)$的，所以是稀疏图；直接消元法$O(n^2)$

47.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=5755

注：有多种做法，网格图的三进制高斯消元，主元法、直接消元法、bitset优化三进制向量等方法都可以通过。

48.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=4920

注：bitset优化三进制矩阵乘法

49.https://codeforces.com/gym/102394/problem/G

注：通过nim-K博弈转化后需要维护三进制带权最大线性基，用bitset优化

50.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=4818

注：图上稳定状态可以用高斯消元求解，但是这题还要对n号点每次加一条边求解一下，发现方程组只改变了一列，所以可以把这一列放在最后，后边接这一列的变化，一起消元，注意消元时枚举列号不能超过真实的最后一列，这个优化是普适的，什么方程组都可使用

【题目：积分/多项式/概率期望】

1.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=4808

2.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=6305

3.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=6410

4.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=6362

5.http://cogs.pro:8080/cogs/problem/problem.php?pid=2189

6.https://loj.ac/problem/151

7.http://codeforces.com/problemset/problem/1096/F

8.http://codeforces.com/problemset/problem/1139/D

注：概率期望+容斥原理

经典的概率期望问题，维护一个多重集合S，开始为空，每次从$[1,m]$中随机生成一个数，插入到S中

该过程直到$gcd(S)=1$停止，求$E(sz(S))$

非负整数随机变量数学期望的性质：期望转概率和

$$E(X)=\sum_{i\geq 1}P(X\geq i)$$

$$\text{直接用定义证明：}$$

$$E(X)=\sum_{x\geq 1}x*P(X=x)=\sum_{x\geq 1}P(X=x)\sum_{i=1}^{x}1=\sum_{i\geq 1}\sum_{x\geq i}P(X=x)=\sum_{i\geq 1}P(X\geq i)$$

莫比乌斯函数$O(nlogn)$容斥预处理：代码短

$$\sum_{d|n}\mu(d)=[n=1]\ \Rightarrow\ \mu(n)=-\sum_{\substack{d|n\\d<n}}\mu(d),n>1$$

$$\mu(j)-=\mu(i),i|j,j>i$$

本题思路

$$\text{令停止时}sz(S)-1\text{为随机变量}X,\text{其中}1\text{为停止所花的代价}$$

$$P(X\geq i)\text{表示长度为}i\text{的}gcd>1\text{的序列概率},$$

$$p(i)\text{表示一次随机生成一个}i\text{的倍数的元素概率：}$$

$$p(i)=\lfloor\frac{m}{i}\rfloor/m$$

$$P(X\geq i)=-\sum_{k\geq 2}\mu(k)p(k)^i$$

$$E(X)=\sum_{i\geq 1}P(X\geq i)=-\sum_{i\geq 1}\sum_{k\geq 2}\mu(k)p(k)^i=-\sum_{k\geq 2}\mu(k)\sum_{i\geq 1}p(k)^i=-\sum_{k\geq 2}\mu(k)\frac{p(k)}{1-p(k)}$$

9.https://ac.nowcoder.com/acm/contest/882/B

注：基础的概率论模型

一维单方向等概率随机游走问题，每次随机向右走$1\cdots k$步，问从0走到x的概率

本身是个简单的线性递推模板题，但是题目追加了一问，求$x\to\infty$的概率极限

下面采用几种不同的方法得到极限意义下的概率：

- 感性认识
  - 每次向右走的期望步数是$\frac{k+1}{2}$
  - 在极限意义下，周边点看成是等概率的，答案是期望步数的倒数

    感性的理解为，x被经过，需要是期望步数的倍数，这概率就是那个倒数
- 概率生成函数方法
  - 计算其生成函数

$$f(x)=\frac{1}{1-\frac{x^k+x^{k-1}+\ldots+x}{k}}=\frac{k}{k-(x^k+x^{k-1}+\ldots+x)}$$

  - 令其分母为$g(x)$，分析其根的情况，共有k个根

- 显然$x_0=1$为一个根
- 其他根$|x_i|>1, i\in[1,k-1]$

  由绝对值不等式知：当$|x|<1$有：

  $$\left|1-\frac{x^k+x^{k-1}+\ldots+x}{k}\right|\geq 1-\left|\frac{x^k+x^{k-1}+\ldots+x}{k}\right|\geq 1-\frac{|x^k|+|x^{k-1}|+\ldots+|x|}{k}\geq 0$$

- 无重根

  假设有重根，则$g(x)=0, g'(x)=0$:

  $$(1-x)\left(x^{k-1}+2x^{k-2}+\ldots+(k-1)x+k\right)=0$$
  $$kx^{k-1}+(k-1)x^{k-2}+\ldots+1=0$$

  很快推得：$x^k=1$，这与前面$|x_i|>1$矛盾

- 分解为部分分式：

  $$f(x)=\frac{a_0}{x-x_0}+\frac{a_1}{x-x_1}+\ldots+\frac{a_{k-1}}{x-x_{k-1}}$$

  其中$x_0=1$，$|x_m|>1$故有：

  $$\frac{1}{x-x_m}=-\frac{1}{x_m}\frac{1}{1-\frac{x}{x_m}}=-\frac{1}{x_m}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_m}\right)^j=-\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_m}\right)^{j+1}x^j$$

  可以看到当$j\to\infty$时，系数极限为0，故只要求a_0:

  两边同乘$x-a_0$，令$x=a_0$，转化为求极限，用洛必达得到：$a_0=-\frac{k+1}{2}$

- 答案是$-a_0=\frac{k+1}{2}$
- 推广
  - 期望步数为$E=\sum_{i=1}^k ip_i$
  - 答案$P=\frac{1}{E}$适用于任何概率分布

- 补集转化，从反面列非齐次线性方程
  - 假设不经过x，而x之前最后走到点y，显然$y\in[x-k+1,x-1]$
    - 这里注意y一步必须严格超过x
  - 令$p(x)$表示经过x概率，显然有：

    $$1-p(x)=\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{k-1}p(x-(k-i))$$
    $$\text{令这些序列项}p\text{都等于}ans$$
    $$\text{即有：}ans=\frac{2}{k+1}$$

  - 推广
    - $1-p(x)=\sum_{i=1}^k p(x-(k-i))\sum_{j=k-i+1}^k p_j$，数列$p_j$表示走$j$步的概率
    - $ans=\frac{1}{\sum_{i=1}^k ip_i}$

10.http://opentrains.snarknews.info/~ejudge/team.cgi?contest_id=1483 E题

注：概率期望中档题，给定$n(n\leq 10^4)$，随机生成n个有序的无限长01串，令两两lcp的最大值为随机变量，求其数学期望；分析：化期望为概率之和，级数求和

$$E(L)+1=\sum_{k\geq 0}P(L\geq k)=\sum_{k\geq 0}(1-\frac{\binom{2^k}{n}n!}{2^{nk}})$$

$$\text{其中}\frac{\binom{2^k}{n}n!}{2^{nk}}=\frac{\prod_{i=0}^{n-1}(2^k-i)}{2^{nk}}=\prod_{i=1}^{n-1}(1-\frac{i}{2^k})=\sum_{t=0}^{n-1}(-1)^t2^{-kt}\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_t\leq n-1}\prod_{j=1}^{t}i_j$$

$$=\sum_{t=0}^{n-1}(-1)^t2^{-kt}f(n-1,t),\text{其中}f(n,k)\text{表示}[1,n]\text{中任选}k\text{个元素乘积之和}$$

$$f(n,k)=S[n+1][n-k+1]\text{为第一类斯特林数}$$

$$E(L)+1=\sum_{k\geq 0}\sum_{t=1}^{n-1}(-1)^{t+1}2^{-kt}f(n-1,t)=\sum_{t=1}^{n-1}(-1)^{t+1}f(n-1,t)\frac{1}{1-2^{-t}}$$

11.http://opentrains.snarknews.info/~ejudge/team.cgi?contest_id=1459 F题

注：与全期望有关的有趣的概率期望中档题，随机线性递推序列：$a_0=1$，$\forall n\geq 1,a_n=a_i+a_j,i,j\in[0,n-1]$，这里$i,j$均独立随机等概率选取，求方差$V(a_n)$

分析：等价于求期望$E(a_n)$和平方期望$E(a_n^2)$，为叙述方便，引入几个定义：

$$S_n=\sum_{i=0}^{n}a_i$$
$$E(n)=E(a_n)$$
$$E_2(n)=E(a_n^2)$$
$$E_2S(n)=\sum_{i=0}^{n}E_2(i)$$
$$ES(n)=\sum_{i=0}^{n}E(i)$$
$$ES_2(n)=E(S_n^2)$$

先求期望：

$$E(n)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}E(a_i+a_j)=\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}E(i)=\frac{2}{n}ES(n-1)=\frac{2}{n}E(S_{n-1})$$
$$2ES(n-1)=nE(n),2ES(n)=(n+1)E(n+1)$$
$$2E(n)=(n+1)E(n+1)-nE(n),\frac{E(n)}{n+1}=\frac{E(n+1)}{n+2}=\frac{E(0)}{1}=1,\text{故}E(n)=n+1$$
$$\text{另一方面：}E(a_n|S_{n-1})=\frac{2}{n}S_{n-1}$$
$$E(a_nS_{n-1})=E(E(a_nS_{n-1}|S_{n-1}))=E(S_{n-1}E(a_n|S_{n-1}))=\frac{2}{n}E(S_{n-1}^2)=\frac{2}{n}ES_2(n-1)$$

再求平方的期望：

$$E_2(n)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}E((a_i+a_j)^2)=\frac{2}{n}E_2S(n-1)+\frac{2}{n^2}ES_2(n-1)$$
$$ES_2(n)=E(S_{n-1}^2)+E(a_n^2)+2E(a_nS_{n-1})=\frac{n+4}{n}ES_2(n-1)+E_2(n)$$

递推即可

12.https://hihocoder.com/problemset/problem/1876

注：多项式相关理论，韦达定理

13.http://www.51nod.com/Challenge/Problem.html#problemId=1144

或者 http://acm.timus.ru/problem.aspx?space=1&num=1677

注：中档题，概率期望/随机过程基本结论：对于一个长度为n的字符串S，字符集为m，若从空开始每次随机在末尾插入等概率字符集中的一个字符，以S结尾即停止；期望长度(插入次数)为$ans=\sum_{k=1}^{n} m^k[k\text{为公共前后缀即}border]$，可视为一个$m$进制数，那些$border$的$bit$为取1

【基础题集合】

1.http://codeforces.com/problemset/problem/929/C

2.http://codeforces.com/problemset/problem/938/C

3.http://codeforces.com/problemset/problem/954/E

4.http://codeforces.com/contest/145/problem/D

注：简单枚举+容斥+线段判交，整点线段上整点个数公式：$gcd(|x1-x2|,|y1-y2|)+1$

【签到级别数学题】

1.https://nanti.jisuanke.com/t/30990

2.https://nanti.jisuanke.com/t/31716

3.https://vjudge.net/contest/274500#problem/C

4.http://codeforces.com/problemset/problem/1093/D

5.http://codeforces.com/problemset/problem/1096/C

6.http://codeforces.com/problemset/problem/1152/C

注：gcd/lcm的性质+约数枚举

7.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=6600

注：最优的方案必然是每次询问一个位的具体值，一共有 n 个二进制位，方案数显然为 $n!$。

复杂度 $O(min(n,P)),P=1e6+3$ 。

【基础几何】

1.http://codeforces.com/problemset/problem/958/E1

【递归数列专题】

1.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=6304

【二进制按位贪心】

1.https://vjudge.net/contest/274676#problem/G

【表达式计算】

1.https://nanti.jisuanke.com/t/31443

2.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3360

3.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1237

4.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1296

5.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=4192

6.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=5553

7.http://codeforces.com/group/aUVPeyEnI2/contest/243686 J题

【游戏状态设计和转移】

1.http://codeforces.com/gym/101955/problem/K

【区间背包和/多项式区间乘积】

1.http://codeforces.com/gym/101955/problem/M

【容斥原理小专题：邻接型容斥】

1.http://codeforces.com/gym/102012/problem/G

2.https://vjudge.net/contest/274676#problem/J

【群论基础】

1.http://codeforces.com/problemset/problem/1091/C

注：置换的乘方，等差数列求和

【括号序列】

1.http://codeforces.com/problemset/problem/1095/E

8.高级暴力

cf上的题目建议多看写别人的代码，如果我以前有做的，可以看我的：

【1】分块思想（重点）

1.http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2141

2.http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2120

3.http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3798

4.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=5213

5.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=3333

6.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=4391

7.https://vjudge.net/problem/CodeChef-FNCS

8.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=4677

9.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=5840

10.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=5110

11.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=6035

12.http://acm.zju.edu.cn/onlinejudge/showProblem.do?problemCode=1654

13.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=4676

14.http://codeforces.com/contest/551/problem/E

15.http://codeforces.com/contest/19/problem/E

16.http://codeforces.com/contest/103/problem/D

17.http://codeforces.com/contest/101/problem/E

18.http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3674（用分块做）

19.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=1086

20.https://nanti.jisuanke.com/t/31451

21.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=4366

22.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=4858

23.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=5919

24.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=6394

25.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=5057

26.https://loj.ac/problem/6278

27.https://loj.ac/problem/6281

28.https://loj.ac/problem/6283

29.https://loj.ac/problem/6284

30.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=4960

31.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1166

32.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=5145

33.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=4787

34.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=5412

35.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=5087

36.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3585

37.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3343

38.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=4765

39.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2388

40.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=4216

41.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3236

42.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=4241

43.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=4537

44.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=5089

45.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=4867

46.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=5016

47.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2741

48.http://codeforces.com/problemset/problem/1093/E

注：分块+二维树状数组(主要解决二维树状数组空间太大的问题)

49.http://codeforces.com/problemset/problem/13/E

注：简单分块+并查集，也可以用lct(注意模板中rev标记不能删除)

50.https://ac.nowcoder.com/acm/contest/883/A

注：维护集合是否相等通过对每个元素随机初始值用异或和表示，然后通过对边分块来实现，但这时空间还比较大，通过对度分类讨论可以将空间缩小为O(M)

51.https://ac.nowcoder.com/acm/contest/881/G

题解：可持久化分块。

考虑经典的求本质不同子串的问题是先将所有后缀进行排序，相邻两个后缀的 lcp 之和就是答案。

考虑本题的每个后缀，用每个元素与其上次出现的距离的差（如果上次没出现就记为 0 ）表示这个串。因为后缀 [i, n] 与 后缀 [i + 1, n] 只会有两个位置不一样，因此可持久化分块即可。

实现时需注意：（代码见比赛记录）

每个后缀只用到整个串的后半部分，但是都存下来会比较好写。

查询子串应该用两个前缀相减。

52.http://opentrains.snarknews.info/~ejudge/team.cgi?contest_id=1477 F题

注：不错的题目，分块+高维前缀和；给定$n \le 2 \times 10^5$个$d \le 16$的d维01向量(即二进制串)，求非空子序列的不严格$\le$的偏序子序列个数；偏序$\le$定义为前者是后者子集。考虑以块大小B对序列进行分块，考虑一个暴力dp：$dp[i] = 1 + \sum_{j<i且 a_j \in a_i} dp[j]$；考虑优化转移，对当前$i$前面且和$i$在同一个块的所有元素$j$，暴力扫描转移；对每个块求高维前缀和(叠加$dp$值)，再将$i$之前的整块叠加到数组$S[s]$中，则与$i$不再同一个块的$j$直接通过取$S[a_j]$获取到。一个块计算完了，立刻求高维前缀和，然后更新S；可以列出复杂度方程，解出B。

【2】莫队算法（重点）

http://hzwer.com/category/c/data-structure/basic-data-structure/piecemeal/

1.http://codeforces.com/contest/86/problem/D

2.http://codeforces.com/contest/13/problem/E

3.http://codeforces.com/contest/785/problem/E

4.http://codeforces.com/group/mbTSbPlZPV/contest/100513/problem/A

5.http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3289

6.http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3757

7.http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2038

8.http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=4358

9.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=6333

10.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=4638

【带修改】

1.http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2120

2.http://codeforces.com/problemset/problem/940/F

3.uva12345

4.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=1878

【树上莫队】

子树树上莫队

一个子树对应的是dfs序上连续的一段

路径树上莫队

我们假设要询问一条路径a-b，设lca为p=lca(a,b)。不妨设st[a]<=st[b]（否则交换一下）。

当p=a时，这应该是一个比较简单的情形：a-b是一段父子链。

我们考虑这个新dfs序上[st[a],st[b]]的点，我们可以发现，a-b上的点被算了一遍，其他点都被算了2遍或0遍！那么我们统计的时候注意一下就可以了。

当p≠a时，我们也要一样统计[ed[a], st[b]]/[st[b], ed[a]]的点（从ed[a]开始为保证a不会被排除掉），但是这回lca不会被统计到，所以要另外算一下。

1.http://uoj.ac/problem/58

2.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3052

3.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=6291

4.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=4129

5.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3757

6.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3460

7.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2589

8.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=4940

9.https://vjudge.net/contest/274676#problem/E

【3】高维前缀和（重点）

1.http://codeforces.com/contest/449/problem/D

注： 问一堆数有多少种方案and起来是0，用容斥转化为求有结果不为0的方案数，然后这个要用高维前缀和来处理有多少数字可选。

(非)2.http://codeforces.com/problemset/problem/799/F

注： 求所有和给定区间是不交或交长度是奇数的区间和，应该有数据结构的做法，不过有做法是用随机数加xor搞过去，和高维前缀和没什么关系，只是有不少前缀和而已

3.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=5092

注： 符合前缀性质的都可以这样做，可以维护前缀min，这样可以知道固定几位的那种数字最早什么时候出现。

【4】常数优化论文（了解）

【5】整体二分和cdq分治

论文：

《浅谈数据结构题的几个非经典解法》

学习：http://blog.163.com/bill125_zjh/blog/static/2318010062014124101819643/

https://www.cnblogs.com/shanxieng/p/10175731.html

https://www.cnblogs.com/HQHQ/p/5966453.html

https://blog.csdn.net/fo0Old/article/details/78284212

1.http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3262

2.http://codeforces.com/contest/678/problem/F

3.http://codeforces.com/contest/607/problem/E

4.http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2683

5.http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3110

6.http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=1492

7.http://codeforces.com/contest/396/problem/C

8.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2001

9.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2253

10.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2716

11.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=1935

12.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=4700

13.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=4170

14.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3263

15.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2989

16.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2773

17.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2244

18.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=4137

19.http://codeforces.com/problemset/problem/762/E

20.http://codeforces.com/problemset/problem/938/G

21.http://codeforces.com/problemset/problem/669/E

22.http://codeforces.com/problemset/problem/848/C

23.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3524

24.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=1901

25.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2674

26.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2738

27.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=4237

28.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2527

29.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3110

30.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=1146

31.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2251

32.http://tsinsen.com/A1381

【6】二进制分组算法

1.http://codeforces.com/problemset/problem/710/F

注：经典的强制在线ac自动机，维护一个字符串集合，支持动态插入串，动态删除串，在线查询给定串在集合中子串数目

消除动态删除：维护两个ac自动机森林in和out，插入串插入到in，删除串插入到out，因为此种数目满足减法性质，分别查询相减即可(代价为一个2)

消除在线插入：ac自动机不可在线插入串，采用二进制分组算法，在线转离线，每次插入一个串，新建一个ac自动机，阶为1，如果与上一个ac自动机阶相同，就合并到上一个，暴力重构合并之后的自动机fail树和维护的相关信息(每个串最多合并log次)，此步本质上是一种离线做法(代价为一个log)

在线查询：在森林中每个自动机上分别查询，叠加即可；ac自动机查询是在线的

技巧与注意点：

1)0号点设立为森林中所有点共用的超级虚拟节点，每个自动机空串节点插入时再自己维护

2)设S=rt[k]为第k个自动机的根，也是当前要操作的根节点，千万注意在插入完之后的构建build过程和对每个自动机的查询过程中，都要初始化一下此自动机：将0号点的每一个转移都设为S，即：go[0][c]=S

3)特别注意不要构造trie图，保留节点的每个空转移

关于ac自动机的合并

1)本质是DAG的合并

2)注意合并的时候，不要忘记合并节点的标记，考虑标记合并时到底是或还是加的关系，也有可能是多规则合并

本题其他参考做法:

1)二进制分组+后缀自动机，思路类似

2)采用分类算法，对串长设立阈值，长一点的暴力插入ac自动机中并维护，短一点的存起来暴力kmp匹配，速度较快

3)字符串hash：用到基本思想，总串长为一定规模的若干字符串，其长度种类不超过根号种

对每种长度利用一个set维护插入串的hash值，查询时扫描所有不同长度种类，再扫描此种长度的所有子串，去指定set中查询此子串hash值是否存在，其总复杂度暂不明晰

2.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=4787

【分治综合训练】

1.http://codeforces.com/contest/888/problem/G

2.http://codeforces.com/problemset/problem/1140/F

注：经典的线段树分治，提取每个插入操作的存活周期，抹除删除操作

线段树标记永久化思想(一个周期分成log段)，在线段树上dfs，递归时执行插入操作，回溯时撤销

使用可撤销并查集(按秩启发式合并)，在叶节点状态回答询问

维护答案：刚开始每个横坐标和纵坐标单独一个集合，每个集合维护其中横纵坐标个数；

插入一条边，即可能合并两个集合，对答案贡献为numx[p]*numy[q] + numy[p]*numx[p]

注意撤销时的操作顺序，不要忘了维护并查集结构

3.http://opentrains.snarknews.info/~ejudge/team.cgi?contest_id=001423 g

S = A + k * T + B

如果进行分治，那么 **k * T** 一定跨过某个分治中心。

对于每个分治中心，枚举 **|T|** ，计算 **k** 。

【6】模拟退火算法

学习网站：http://blog.csdn.net/acdreamers/article/details/10019849 http://blog.csdn.net/zk_j1994/article/details/53711410

1.http://poj.org/problem?id=2420

2.http://acm.split.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=4717

3.http://poj.org/problem?id=1379

4.http://acm.split.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=2297

5.http://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3680

6.http://acm.split.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=3932

7.http://acm.split.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1109

8.http://acm.split.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=3644

9.http://acm.split.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=5017

【7】bitset优化专题

1.http://codeforces.com/problemset/problem/914/F

2.http://codeforces.com/problemset/problem/1097/F

3.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=5245

4.http://opentrains.snarknews.info/~ejudge/team.cgi?contest_id=1477 B题

注：基础题，给定$n \leq 2000$个点的边不带权无向图，求两两最短路平方和；$bitset$优化BFS

5.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=5529

注：中档题，二人博弈，给定一个字符串字典，和初始串s，每人每次可以在s的开头或者结尾删除一个字符，第一个将s转化为字典中的串的人获胜；给定S，多次询问，每次选取$S[l..r]$作为s，回答先手是否必胜。考虑使用NP状态定理设计dp，$dp[l][r]=!(dp[l][r-1]\&dp[l+1][r])$，稍加改造$dp[len][i]=!(dp[len-1][i]\&dp[len-1][i+1])$，用$bitset$表示$dp[len]$，则$dp[len]=!(dp[len-1]\&(dp[len-1]<<1))$。初始值可以使用$trie$图求出每个串的每次出现下标，设置初值为0。由于只会有根号种长度，也可以独立考虑每种字典串长度，做字符串$hash$暴力求出所有初始下标。

【8】三分专题

1.http://codeforces.com/problemset/problem/939/E

2.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=5531

注：中档题，先求出可行区间，三分计算二次函数区间最值

【9】多重二分

1.http://codeforces.com/problemset/problem/965/C

【10】Method of Four Russians

维基百科

9.随机化算法

1.http://codeforces.com/problemset/problem/1091/G

2.https://ac.nowcoder.com/acm/contest/884/H

注：奇怪的数学题，线性递推BM模板+采样hash

采样hash：判定长度为2000的01串是否是长度为2^{29}的01圈的子串，在圈上每隔1600设置一个树桩，然后每个树桩向后取60项，构成01状态，加入集合S；以串中是否存在长度为60的子串在集合S中判定

该圈由一阶线性模递推序列给定，该算法在概率意义下正确

3.https://www.51nod.com/Challenge/Problem.html#problemId=1143

注：随机化构造题，构造$M*N$的矩阵，使得每个元素不超过10^{17}且是完全平方数，每行和、每列和均为完全平方数，且没有重复元素。

4.https://www.51nod.com/Challenge/Problem.html#problemId=1140

注：随机向量法，基础题，判断矩阵$AB=C$是否成立，$O(n^2)$

10.分治

1.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=4449

给一个多边形的三角剖分，询问两点最短路，用分治每次选一条边尽可能把两边点集分成一样大，然后裂成两个图，然后询问如果在两边肯定会结果选的边的一个端点，分别去bfs即可

2.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2001

动态最小生成树，离线有分治做法，考虑如果有m条边权值不确定，图可以同过reduction和contraction操作缩减到O(m)，这样对询问序列去分治即可，这个过程和在二叉树上dfs差不多，所以直接求出下一层的边集并覆盖是没有问题的。

3.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3897

应用贪心思想，每次可以抠掉最大值那个点，然后分别到两边去做，由于要查询区间最大值，所以是O(nlogn)的，可能有O(n)的做法。

4.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2287

其实直接对背包做逆操作就可以了，但是像这种去掉一个点算剩下贡献可以用分治去实现。

5.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=2961

6.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=4979

对于全局查询有多少对区间符合一个限制，这个限制和区间端点和区间最值之类有关可以分治转成双指针维护

7.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3745

求所有区间长度乘区间最大值最小值的和，分治后转为枚举一边另一边分类讨论求和

8.https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=3181

不太算分治，就是对数据范围分类用不同的做法

9.https://ac.nowcoder.com/acm/contest/883/G

注：与最值有关的经典问题，统计一类区间个数，也可以通过2 * max > sum 这个限制来直接对每个最大值暴力计算区间，因为对每个端点只会被log个max计算到，所以复杂度可以优化到O(nlogn)

10.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=5517

注：中档题，贪心+三维偏序

11.交互题

1.http://opentrains.snarknews.info/~ejudge/team.cgi?contest_id=10433 I题

注：与初等数论相关的概率意义下交互题，可以证明暴力的复杂度在概率意义下正确

2.http://opentrains.snarknews.info/~ejudge/team.cgi?contest_id=10433 J题

注：有趣的思维题，利用01串汉明距离做2−聚类分析，化归为简单单串情形

12.模拟题/题意题/细节题

1.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=5515

注：分类讨论，$2015icpc$沈阳。

2.https://hihocoder.com/problemset/problem/1250?sid=1544860

注：蜂窝象棋，复杂模拟题。求红方下次可以移动哪些棋子。

3.http://poj.org/problem?id=3765

注：蜂窝象棋，简单模拟题。给定棋子，画出棋盘。

4.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=4120

注：差分+分类讨论+枚举

5.http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=4801

注：魔方暴搜模拟题

13.其他专题专项

【1】小型思维题/小型带数学证明题

1.http://codeforces.com/problemset/problem/930/A

2.http://codeforces.com/problemset/problem/940/B

3.http://codeforces.com/problemset/problem/1092/D1

4.http://codeforces.com/problemset/problem/1092/D2

注：经典问题：翻硬币，只能翻相邻两个同色的硬币，最终使得所有硬币正面朝上，或者同时反面朝上

5.https://codeforces.com/contest/1252/problem/C

注：基础题，给定长度为n的数组$a[],b[]$，令$n*n$的加法表$c[i][j]=a[i]+b[j]$，现在删除c中所有的奇数格子；每次询问两个偶数格子是否联通。只能走偶数格子，且自己也是偶数，故奇偶性不变，而每次4联通只改变横坐标或者纵坐标中的一个，故显然两维坐标独立，即两维坐标分别联通；想办法判定区间内有无奇数即可。

【2】递归式处理(半数学)题

1.http://codeforces.com/problemset/problem/949/B

2.http://www.51nod.com/Challenge/Problem.html#problemId=1617

【3】搜索优化：dancing links精确覆盖/可重复覆盖

【4】搜索优化：其他优化

1.http://www.51nod.com/Challenge/Problem.html#problemId=1109

注：基础题，采用同余性质进行bfs剪枝

2.http://www.51nod.com/Challenge/Problem.html#problemId=1111

注：难题，双向搜索