第46卷第1期
2003年1月

数 学 学 报
ACTA MATHEMATICA SINICA

Vol.46, No.1
Jan., 2003

文章编号:0583-1431(2003)01-0007-04　　文献标识码：A

偏序集上 Smith 行列式的显式表达式

王伯英

（北京师范大学数学系　北京　100875）
(E-mail: bywang@bnu.edu.cn)

摘　要　本文在偏序集的子集上引进交 - 函数和并 - 函数，利用它们给出 Smith 行列式的多种显式表达式.

关键词　偏序集；交 - 半格；并 - 半格；交 - 函数；并 - 函数
MR(2000) 主题分类　15A36, 15A09
中图分类　O151.21

Explicit Expression of Smith's Determinant on Poset

Bo Ying WANG

(Department of Mathematics, Beijing Normal University, Beijing 100875, P. R. China)
(E-mail: bywang@bnu.edu.cn)

Abstract　We introduce meet-function and join-function on a subset of a poset and use them to give some explicit expressions of Smith's determinant.

Keywords　Poset; Meet-semilattice; Join-semilattice; Meet-function; Join-function
MR(2000) Subject Classification　15A36, 15A09
Chinese Library Classification　O151.21

设 $(P,\leq)$ 是一个偏序集. 如果对任意 $x,y\in P$ 存在唯一的 $z\in P$, 使得 $z\leq x$ 和 $z\leq y$, 且当某 $w\in P$ 满足 $w\leq x$ 和 $w\leq y$ 时，必有 $w\leq z$, 则称 z 为 x 与 y 的交，记作 $z=x\wedge y$, 而 P 被称作交 - 半格 (见文 [1, 第 103 页]). 类似地，若上述条件换为 $x\leq z$ 和 $y\leq z$, 且当某 $w\in P$ 满足 $x\leq w$ 和 $y\leq w$ 时，必有 $z\leq w$, 则称 $z=x\vee y$ 为 x 与 y 的并，称 P 为并 - 半格.

设 S 是交 - 半格 (并 - 半格) P 的一个子集，如果对任何 $x,y\in S$, 有 $x\wedge y\in S(x\vee y\in S)$, 则称 S 为交 - 闭集 (并 - 闭集), 而此时 S 本身也是一个交 - 半格 (并 - 半格).

设 $S=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ 是交 - 半格 P 上取不同元素的子集，f 为 P 上取值复数的函数，n 阶矩阵 $[f(x_i\wedge x_j)]_S$ 被称作 S 上关于 f 的交 - 矩阵. 对应于并 - 半格 P 的不同元素 $S=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ 及函数 f, 则称矩阵 $[f(x_i\vee x_j)]_S$ 为 S 上关于 f 的并 - 矩阵. 以上这些矩阵通常称作 Smith 矩阵.

若偏序集 P 上的子集 $S=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ 排列成使得当 $x_i<x_j$ 必有 $i<j$, 则称 S 具有拟线性序 (这里 $x_i<x_j$ 意味着 $x_i\leq x_j$ 且 $x_i\neq x_j$). 它是容易看出偏序集 P 上任何有限子集 S 都可重新排列使之具有拟线性序.

* 本文翻译并压缩于本刊英文版 (2001)17 卷 1 期 161–168 页
收稿日期：1998-09-28; 接受日期：1999-02-04
基金项目：国家自然科学基金资助项目 (19671013)

关于 Smith 矩阵的行列式已经有一百多年的发展历史，下面是比较典型的结果：

定理 1[2–4] 设 $S=\{x_1,\ldots,x_n\}$ 是一个交 - 闭集，f 是 S 上取复值的任意函数，则

$$\det\,[f(x_i\wedge x_j)]_S=\prod_{m=1}^{n}\Psi_{S,f}(x_m).$$

上式函数 $\Psi_{S,f}(x_m)$ 可有多种计算方法，例如可用归纳推导 [2]

$$\Psi_{S,f}(x_m)=f(x_m)-\sum_{\substack{x_k<x_m\\ x_k\in S}}\Psi_{S,f}(x_k)\quad 或\quad \Psi_{S,f}(x_m)=\sum_{\substack{x_k\le x_m\\ x_k\in S}}f(x_k)\mu_S(x_k,x_m),$$

其中 μ_S 是 S 的 Möbius 函数 [5]；也有当偏序集 P 上的交 - 闭集 S 具有拟线性序，且 μ_P 是 P 的 Möbius 函数时，则可表示为 [6]

$$\Psi_{S,f}(x_m)=\sum_{\substack{z\le x_m\\ z\not\le x_t\\ t<m}}\sum_{w\le z}f(w)\mu_P(w,z),$$

而此式的好些特殊情形也先后出现在例如文 [7–9] 上.

一般说来，上定理中要找到 μ_S 或 μ_P 的简单表达式是不大容易的. 本文的目的是引进简单计算式交 - 函数和并 - 函数以给出有关 Smith 行列式的直接的显式表达式，而它们不包含 Möbius 函数 (μ_S 或 μ_P).

设 P 是交 - 半格，f 是 P 上任意复函数，我们定义 P 上多变量对称函数 $f_\wedge=f_\wedge(y_1,\ldots,y_k)$ 为 $f_\wedge(\emptyset)=0$, $f_\wedge(y_1)=f(y_1)$, $f_\wedge(y_1,y_2)=f(y_1)+f(y_2)-f(y_1\wedge y_2),\ldots$, $f_\wedge(y_1,\ldots,y_k)=\sum_{t=1}^{k}(-1)^{t-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_t\le k}f(y_{i_1}\wedge\cdots\wedge y_{i_t})$.

在计算和证明中要用到对称函数 $f_\wedge$ 的如下有用性质：

引理 1 (i) $f_\wedge(y_1,\ldots,y_k)=f_\wedge(y_1,\ldots,f_{k-1})+f(y_k)-f_\wedge(y_1\wedge y_k,\ldots,y_{k-1}\wedge y_k)$;

(ii) 如果 $i<k$ 且 $y_k\le y_i$, 则 $f_\wedge(y_1,\ldots,y_k)=f_\wedge(y_1,\ldots,y_{k-1})$;

(iii) 如果 $\{y_1,\ldots,y_k\}=\{z_1,\ldots,z_m\}$, 则 $f_\wedge(y_1,\ldots,y_k)=f_\wedge(z_1,\ldots,z_m)$.

证明 (i) 注意到 $y_{j_1}\wedge\cdots\wedge y_{j_s}\wedge y_k=(y_{j_1}\wedge y_k)\wedge\cdots\wedge(y_{j_s}\wedge y_k)$, 我们有

$$\begin{aligned}
f_\wedge(y_1,\ldots,y_k)&=\sum_{t=1}^{k}(-1)^{t-1}\sum_{1\le i_1<\cdots i_t\le k}f(y_{i_1}\wedge\cdots\wedge y_{i_t})\\
&=\sum_{t=1}^{k-1}(-1)^{t-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_t\le k-1}f(y_{i_1}\wedge\cdots\wedge y_{i_t})\\
&\quad+\sum_{t=1}^{k}(-1)^{t-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_{t-1}<i_t=k}f(y_{i_1}\wedge\cdots\wedge y_{i_t})\\
&=\sum_{t=1}^{k-1}(-1)^{t-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_t\le k-1}f(y_{i_1}\wedge\cdots\wedge y_{i_t})+f(y_k)\\
&\quad-\sum_{s=1}^{k-1}(-1)^{s-1}\sum_{1\le j_1<\cdots<j_s\le k-1}f(y_{j_1}\wedge\cdots\wedge y_{j_s}\wedge y_k)\\
&=f_\wedge(y_1,\ldots,y_{k-1})+f(y_k)-f_\wedge(y_1\wedge y_k,\ldots,y_{k-1}\wedge y_k).
\end{aligned}$$

(ii) 因为 $(y_i \wedge y_k) = y_k$ 和 $y_j \wedge y_k \le y_k$, $j = 1, \ldots, k-1$, 使用简单的归纳法可得

$$\begin{aligned} f_\wedge(y_1, \ldots, y_k) &= f_\wedge(y_1, \ldots, y_{k-1}) + f(y_k) \\ &\quad - f_\wedge(y_1 \wedge y_k, \ldots, y_{i-1} \wedge y_k, y_k, y_{i+1} \wedge y_k, \ldots, y_{k-1} \wedge y_k) \\ &= f_\wedge(y_1, \ldots, y_{k-1}) + f(y_k) - f(y_k) = f_\wedge(y_1, \ldots, y_{k-1}). \end{aligned}$$

(iii) 用结论 (ii) 即得，例如 $f_\wedge(a, b, a, c, c) = f_\wedge(a, b, c)$.

现在设 $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 是交 - 半格 P 的子集，我们在 S 上定义交 - 函数为 $f_\wedge^S(x_i) = f(x_i) - f_\wedge(x_1 \wedge x_i, \ldots, x_{i-1} \wedge x_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

用性质 1 也可写为 $f_\wedge^S(x_i) = f_\wedge(x_1, \ldots, x_i) - f_\wedge(x_1, \ldots, x_{i-1})$.

不难看出交 - 函数 $f_\wedge^S(x_i)$ 是线性依赖于函数 f, 具有显式表达式而且用性质 1 可使计算简化. 这个可从文 [10] 中看出，本文的交 - 函数就是从那里起关键作用的初始形式扩展而来的.

类似地，设 P 是并 - 半格， $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 是 P 的子集，定义 S 上的并 - 函数为 $f_\vee^S(x_i) = f(x_i) - f_\vee(x_i \vee x_{i+1}, \ldots, x_i \vee x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, 其中 P 上的对称函数 $f_\vee$ 定义为

$$f_\vee(y_1, \ldots, y_k) = \sum_{t=1}^{k} (-1)^{t-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_t \le k} f(y_{i_1} \vee \cdots \vee y_{i_t}).$$

对称函数 $f_\vee$ 也有类似的有用性质 (证明与引理 1 类似，略去).

引理 2 (i) $f_\vee(y_1, \ldots, y_k) = f_\vee(y_1, \ldots, y_{k-1}) + f(y_k) - f_\vee(y_1 \vee y_k, \ldots, y_{k-1} \vee y_k)$;

(ii) 如果 $i < k$ 且 $y_i \le y_k$, 则 $f_\vee(y_1, \ldots, y_k) = f_\vee(y_1, \ldots, y_{k-1})$;

(iii) 如果 $\{y_1, \ldots, y_k\} = \{z_1, \ldots, z_m\}$, 则 $f_\vee(y_1, \ldots, y_k) = f_\vee(z_1, \ldots, z_m)$.

有了交 - 函数和并 - 函数，现在可以用它们来给出和证明 Smith 行列式的显式表达式.

定理 2 设 $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 是具有拟线性序的交 - 闭集， f 是 S 上的任意复值函数，则 $\det[f(x_i \wedge x_j)]_S = \prod_{m=1}^{n} f_\wedge^S(x_m)$.

证明 我们首先证明如下构造公式： $[f(x_i \wedge x_j)]_S = EDE^\top$. 这里 $E = (e_{ij})$, 如果 $x_j \le x_i$, 则 $e_{ij} = 1$, 不然 $e_{ij} = 0$, 而 $D = \mathrm{diag}\left(f_\wedge^S(x_1), \ldots, f_\wedge^S(x_n)\right)$.

注意到 S 是具有拟线性序的交 - 闭集，故对 $x_i, x_j \in S$, 就存在 $x_q \in S$, 使得 $x_i \wedge x_j = x_q$.

我们排列 $\{x_k : x_k \le x_q, x_k \in S\} = \{y_1, \ldots, y_t, \ldots, y_p\}$, 使得后者具拟线性序，那么 $y_t \le y_p = x_q$ 和

$$\{y_1, \ldots, y_t, \ldots, y_p\} = \{x_1 \wedge x_q, x_2 \wedge x_q, \ldots, x_q \wedge x_q\}.$$

现在固定 y_t, 那么存在 $x_s \in S$, 使得 $y_t = x_s$, 而从上式容易看出 $\{y_1 \wedge y_t, \ldots, y_{t-1} \wedge y_t\} = \{x_1 \wedge x_s, \ldots, x_{s-1} \wedge x_s\}$. 故应用引理 1 就有 $f_\wedge^S(y_t) = f_\wedge^S(x_s) = f(x_s) - f_\wedge(x_1 \wedge x_s, \ldots, x_{s-1} \wedge x_s) = f(y_t) - f_\wedge(y_1 \wedge y_t, \ldots, y_{t-1} \wedge y_t) = f_\wedge(y_1, \ldots, y_t) - f_\wedge(y_1, \ldots, y_{t-1})$. 因此

$$\begin{aligned} (EDE^\top)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} e_{i,k} f_\wedge^S(x_k) e_{j,k} = \sum_{x_k \le x_i \wedge x_j} f_\wedge^S(x_k) = \sum_{x_k \le x_q} f_\wedge^S(x_k) \\ &= \sum_{t=1}^{p} f_\wedge^S(y_t) = \sum_{t=1}^{p} (f_\wedge(y_1, \ldots, y_t) - f_\wedge(y_1, \ldots, y_{t-1})) \\ &= f_\wedge(y_1, \ldots, y_p) = f_\wedge(y_p) = f(x_q) = f(x_i \wedge x_j). \end{aligned}$$

这证明了上述构造公式. 再注意到 E 是对角元素为 1 的三角矩阵，定理 2 即被证明.

关于并 - 闭集用并 - 函数表达也有相应的结论 (证明与定理 2 类似, 略去).

定理 3 设 $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ 是具有拟线性序的并 - 闭集, f 是 S 上的任意复值函数, 则

$$\det\left[f(x_i\vee x_j)\right]_S=\prod_{m=1}^{n}f_\vee^S(x_m).$$

在 Smith 矩阵的多种发展形式中例如文 [3, 4, 6, 11], 我们也可以用交 - 函数 (并 - 函数) 显式表达出来, 下面列举两个但略去证明.

定理 4 设 $T=\{y_1,y_2,\ldots,y_m\}$ 是偏序集 P 的子集, 是具有拟线性序的交 - 闭集且包含子集 $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$. 又 f 是 P 上任意复值函数, 则

$$[f(x_i\wedge x_j)]_S=F\mathrm{diag}\left(f_\wedge^T(y_1),\ldots,f_\wedge^T(y_m)\right)F^\top,$$

$$\det\left[f(x_i\wedge x_j)\right]_S=\sum_{1\le k_1<\cdots<k_n\le m}\det\left(F_{(k_1,\ldots,k_n)}\right)^2\prod_{t=1}^{n}f_\wedge^T(y_{k_t}),$$

其中 F 是 $n\times m$ 矩阵, 它的 i,j 元素当 $y_j\le x_i$ 时是 1, 不然是 0; $F_{(k_1,\ldots,k_n)}$ 是 F 中包含列 $k_1<\cdots<k_n$ 的子矩阵.

定理 5 设 $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ 是拟线性序的交 - 闭集, $f^1,\ldots,f^n$ 是 S 上的任意复值函数, 则

$$\left[f^i(x_i\wedge x_j)\right]_S=GE^\top,\quad \det\left[f^i(x_i\wedge x_j)\right]_S=\prod_{m=1}^{n}f_\wedge^{m,S}(x_m),$$

其中 E 与定理 2 证明中的矩阵相同, 矩阵 $G=(g_{ij})$, 当 $x_j\le x_i$ 时 $g_{ij}=f_\wedge^{i,S}(x_j)$, 不然为 0, 而

$$f_\wedge^{i,S}(x_j)=f^i(x_j)-f_\wedge^i(x_1\wedge x_j,\ldots,x_{j-1}\wedge x_j).$$

关于 Smith 矩阵的常见形式, 例如最大公约数 (GCD) 矩阵, 最小公倍数 (LCM) 矩阵以及相应的函数形式, 自然也可以用相应的交 - 函数或并 - 函数以显式表达出来. 这里从略.

参 考 文 献

[1] Stanley R. P., Enumerative combinatorics, Vol.I. Monterey, Calif: Wasworth and Brooks/Cole, 1986.

[2] Rajarama Phat B. V., On greatest common divisor matrices and their applications, *Linear Algebra Appl.*, 1991, **158**: 77–97.

[3] Lindström B., Determinants on semilattices, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1969, **20**: 207–208.

[4] Wilf H. S., Hadamard detrminants, Möbius functions, and the chromatic number of a graph, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1968, **74**: 960–964.

[5] Aigner M., Combinatorial theory, New York: Springer-Verlag, 1979.

[6] Haukkanen P., On meet matrices on posets, *Linear Algebra Appl.*, 1996, **249**: 111–123.

[7] Smith H. J. S., On the value of a certain arithmetical determinant, *Proc. London Math. Soc.*, 1975/1976, **7**: 208–212.

[8] Beslin S., Ligh S., Another generalization of smith's determinant, *Bull. Austral Math. Soc.*, 1989, **40**(3): 413–415.

[9] Bourque K., Ligh S., On GCD and LCM matrices, *Linear Algebra Appl.*, 1992, **174**: 65–74.

[10] Wang B. Y., On the singularity of LCM matices, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 1998, **18**: 1040–1044.

[11] Haukkanen P., Sillanpää J., Some analogue of smith's detrminant, *Linear and Multilinear Algebra*, 1996, **41**: 233–244.