# 关于操作变换类组合数学问题“青蛙跳”的研究

北京中国人民大学附属中学 (100080) 曾 天

笔者在学习组合数学过程中,发现 1996 年第 37 届 IMO 预选题第 29 题[1][2] 很有趣,经过文献调研和向老师请教探讨,萌发了研究动机.

本文改进、推广了该题,深化了原始命题的难度,将其定义为“青蛙跳”问题.创造性地提出了“跳跃交换定理”,给出了较原始问题不同的、更为简化的证明方法;给出了只青蛙在直线和圆周上跳跃的推广版本;并找到了“同向跳跃”时满足无限跳的最少青蛙数.

## 1 原始问题

IMO 原始预选问题摘录如下:

将有限多颗豆子放在一排正方形中,假设正方形的个数是无限的.一个移动序列按以下规则进行:在每一步,先选取一个至少含有两颗豆子的正方形,从中取出两颗豆子,一颗放在该正方形的左边,一颗放在该正方形的右边.当每个正方形至多只含有一颗豆子时,移动序列终止.给定某个初始状态,证明:任何一个满足规则的移动序列,都将在同样的移动步数之后终止,并且具有相同的最终状态[2].

原始问题的证明分为三步:1.无论初始状态如何,移动序列必将终止.2.对于某个初始状态,经任何移动序列后都具有相同的最终状态.3.对于某个初始状态,任何移动序列都将在同样的移动步数后停止[2].

经研究发现,原始证明过程较为繁琐抽象.为方便下文叙述(尤其是后续推广问题),我们把原始问题改进为“青蛙跳”:设有 $n$ 只青蛙,其坐标为 $x_1$, $x_2,\cdots,x_n(x_i\in\mathbf{Z})$.位于坐标 $x$ 处的两只青蛙向左右两侧各跳一步,坐标变为 $x+1$ 与 $x-1$.考虑半不变量(变化过程中单调增或减的量)$S=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$,由于 $(x+1)^2+(x-1)^2-2x^2=2$,故每次跳跃会使这 $n$ 只青蛙坐标的平方和 $S$ 增加 2.如果青蛙无限跳下去,$S$ 将不断增大,但 $S$ 不能无限增大.

对任意一条长度为 2 的线段,如果其上原来有青蛙,则无论如何跳,该线段上一直会有青蛙(若其上的青蛙跳跃,两只青蛙中一定会有一只落在该线段上),其在数轴上的分布总能被长度为 2 的线段有限覆盖.这说明每个 $x_i$ 均是有界的,故 $S$ 也是有界的,不能无限增大.故青蛙在跳跃有限步后,必然停止跳跃.

**定理 1 跳跃交换定理**

青蛙在每步都可跳的情况下,对于相邻的前后两次跳跃,先在 $A$ 处跳,后在 $B$ 处跳,与先在 $B$ 处跳,后在 $A$ 处跳,这两种情况效果相同.

在 $A$ 处跳导致 $A$ 处的青蛙数少两只,在 $A+1$ 处与 $A-1$ 处的青蛙各多一只;在 $B$ 处跳导致 $B$ 处的青蛙数少两只,在 $B+1$ 处与 $B-1$ 处的青蛙各多一只.故先 $A$ 后 $B$ 和先 $B$ 后 $A$ 的跳法最终效果相同.

相邻两次跳跃可以交换.那么,连续多步跳跃结果类似,也可交换.可用递推法证明:

**推论**:若对某个初始状态 $P$,经过一系列在点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 上的跳跃,得到状态 $Q$.把这些点 $x_1,x_2$, $\cdots,x_n$ 交换顺序变为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$,从状态 $P$ 开始,一步步按点 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的顺序来跳.如果每一步都可跳,则将得到相同的结束状态 $Q$.

引入“借青蛙”概念,即可让某些点的青蛙数为负数.若需要青蛙在某个点上跳跃,该点没有青蛙可先借两只,青蛙数为 $-2$,之后左右两侧的点发生跳跃时,该点青蛙数加 1,之后还回青蛙即可.

对于同一初始状态 $P_0$,考虑两种不同的跳法 $X,Y$:

$$X:T_1\to T_2\to\cdots\to T_m$$

$$Y:J_1\to J_2\to\cdots\to J_n$$

其中 $T_i$ 表示 $x_i$ 点处的跳,$J_i$ 表示位置 $y_i$ 点处的跳.

$X$ 的第一跳为 $T_1$,在跳法 $Y$ 中,$x_1$ 处的青蛙必然会跳,否则跳跃无法结束.则 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 中必有等于 $x_1$ 的数,设其中下标最小的等于 $x_1$ 的为 $y_{k_1}$,即 $y_{k_1}=x_1$, $J_{k_1}=T_1$.

对跳法 $Y$ 做调整,把 $y_{k_1}=x_1$ 处的跳 $J_{k_1}$ 挪到最开始处跳,即把跳法 $Y$ 中前半部分的 $J_1\to J_2\to\cdots\to J_{k_1-1}\to J_{k_1}$ 换成 $J_{k_1}\to J_1\to J_2\to\cdots\to J_{k_1-1}$.由于 $J_{k_1}$ 是第一次在 $x_1$ 处的跳,而先在 $x_1$ 处跳,其他点处的青蛙数目不减少,不会出现原来能跳现在由于青蛙数目不够而不能跳的情形.根据定理 1,这两种跳法结果相同,这样,在跳法 $Y$ 中把 $J_{k_1}$ 前移,而得到另一

种跳法 $Y':J_{k_1}\to J_1\to J_2\to\cdots\to J_{k_1-1}\to J_{k_1+1}\to\cdots\to J_n$. $Y'$ 与 $Y$ 的结局相同. 类似可得 $Y''$,…,最终将和跳法 $X$ 相同. 整个过程只是在不断交换跳跃顺序,即 $Y$ 是把 $X$ 的那些跳跃重新排列,只是顺序不同而已. 即 $x_m = y_n, m = n$. 证毕!(见图 1)

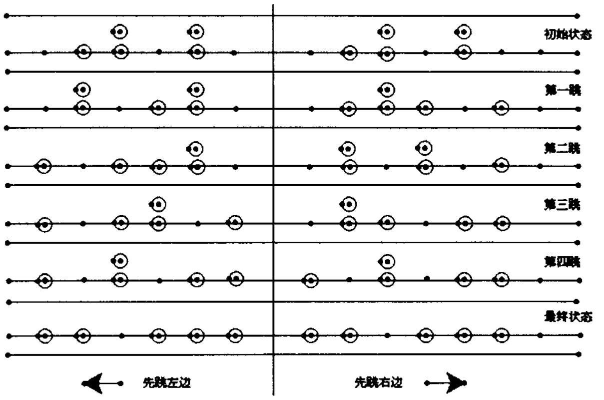


图 1　同一初始状态按不同的跳法,得到相同的终结状态(“先跳左边”表示先进行左侧的跳跃)

## 2　只青蛙的左右不等距跳跃

以下做两点推广:

1. 两只青蛙跳跃步长推广为“左跳 $a$,右跳 $b$”:

坐标为 $x$ 点处的两只青蛙,分别跳到 $x+b$ 与 $x-a$ 点处. 可证青蛙仍然不能无限跳跃下去:

设 $n$ 只青蛙的坐标为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,考虑变量 $S = x_1 + x_2 + \cdots x_n$,由于 $(x-a)+(x+b)-2x=(b-a)$,设 $a > b$,上式表示每跳一次,$S$ 就减少 $(a-b)$. 但 $S$ 是有界的:对于一段长为 $(a+b)$ 的线段,若该线段上有青蛙,以后一直会有. 这说明不管怎样跳,所有青蛙的位置可以被长度为 $n(a+b)$ 的线段覆盖,即 $x_i$ 是有界的,$S$ 也是有界的,从而 $S$ 不能无限减少.

2. 起跳条件由至少两只青蛙在一起时,两只起跳推广为至少 $k$ 只青蛙在一起时,这 $k$ 只分别跳向别处:

假设位于坐标 $x$ 点处的 $k$ 只青蛙每次跳跃后坐标变为 $x+a_1, x+a_2,\cdots,x+a_k$($a_i$ 可正可负,负值代表向左跳),不妨设 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_k$. 仍考虑青蛙向两侧跳的情况,即 $a_1 < 0, a_k < 0$. 对于一段长度为 $a_k - a_1 = a_k + |a_1|$ 的线段,仿上可证 $x_i$ 有界,$S$ 也有界. 每次跳跃 $S$ 的变化:

$$\Delta S = (x+a_1)+(x+a_2)+\cdots+(x+a_k)-kx = a_1+a_2+\cdots+a_k.$$

当 $a_1+a_2+\cdots+a_k\neq 0$ 时,意味着 $S$ 不断增大或减小. 而 $S$ 是有界的,矛盾!

当 $a_1+a_2+\cdots+a_k=0$ 时,考虑新变量 $K = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$,每次跳跃 $K$ 的变化为:

$$\Delta K = (x+a_1)^2+(x+a_2)^2+\cdots+(x+a_k)^2-kx^2 = a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2 > 0,$$

意味着 $K$ 不断增大,而 $K$ 是有界的,矛盾!

综上,$k$ 只青蛙,如果双向跳动,仍不能无限跳下去.

## 3　同向跳跃

假设同一位置的两只青蛙,分别向右跳一步和两步,有三只青蛙,两只位于 $x=1$ 处,一只位于 $x=2$ 处,记此状态为 $(1,1,2)$. 两只在 $x=1$ 处的青蛙分别跳 1 和 2 步,其位置变为 $(2,2,3)$,这相当于把 3 只青蛙整体平移了一步. 如此移动,则这些青蛙可以无限跳跃.

若两只青蛙分别向右跳 $p$ 步和 $q$ 步,至少需要多少只青蛙才可无限跳?

**定义 1**　好态:某种状态,从此状态开始,存在至少一种无限跳跃的方案. 反之称为坏态. 如果一种状态已经无法进行任何跳跃,将之称为死态.

**定理 2**　从好态开始的任意跳跃方案,都可以实现无限跳跃.

**证明**:如果存在一个跳跃方案,使得某个好态变为死态,考虑过程中第一个坏态. 设好态 $P_1$ 经过跳 $T_0$ 而变为坏态 $P_2$. 再设好态 $P_1$ 的一个无限跳为 $J_1\to J_2\to\cdots\to J_n\to\cdots$,设 $T_0$ 是在位置 $x_0$ 处跳跃,下面考虑 $J_1, J_2$ 中是否存在位于 $x_0$ 处的跳跃.

若存在,设第一个出现的是 $J_k$,把 $J_k$ 挪到最前,因为先跳 $J_k$ 并不能使除 $x_0$ 处之外的青蛙数目减少而出现无法跳的情况,因而跳动可以交换. 所以状态 $P_1$ 可由跳法 $J_k\to J_1\to J_2\to\cdots\to J_{k-1}\to J_{k+1}\cdots$ 达成无限跳跃,即 $P_2$ 可经过跳动 $J_1\to J_2\to\cdots\to J_{k-1}\to J_{k+1}\cdots$ 达成无限跳跃. 这与 $P_2$ 为坏态矛盾.

若不存在,则先在 $x_0$ 处跳,不影响其他的跳跃顺序,$P_2$ 可经过跳跃 $J_1\to J_2\to\cdots\to J_n\to\cdots$ 达成无限跳跃. 这同样与 $P_2$ 为坏态矛盾. 定理证毕.

**定义 2**　队形多项式:设 $n$ 只青蛙的坐标为 $a_1, a_2,\cdots,a_n$(它们中有些相同),则定义 $f(x) = x^{a_1} + x^{a_2} + \cdots + x^{a_n}$ 为此时的队形多项式. 点 $a_i$ 处的青蛙数为 $x^{a_i}$ 的系数.

当同向跳 $p$ 步与 $q$ 步时,先假设 $p > q$,且设 $p, q$ 互素,这因为步长可扩大或缩小同一倍数,情况等价.

对于青蛙队列的长度,即从最左到最右的距离,可通过持续跳动最左侧的“青蛙对”使长度缩

短,直到队列长度小于等于 $q$. 由于 $n$ 只青蛙的队列在 $q$ 之内的队形只有有限种,所以必然经过一段跳跃后得到相似的队形(即状态 $P$ 和状态 $Q$ 仅是平移了一下队列). 因此状态 $P$ 的队形多项式 $f(x)$ 与状态 $Q$ 的队形多项式 $g(x)$ 满足:$g(x) = x^L \cdot f(x)$.

若某次跳跃是把在位置 $x = a$ 的两点跳至 $x = a + p$ 与 $x = a + q$ 处,则队形多项式的变化量为 $\Delta f = x^{a+p} + x^{a+q} - 2x^a = x^a(x^p + x^q - 2)$. 记 $h(x) = x^p + x^q - 2$,则每次跳跃后,队形多项式的改变量为 $h(x)$ 的倍数. 故从 $P$ 到 $Q$ 的跳跃中,队形多项式总的改变量也是 $h(x)$ 的倍数. 即:$h(x) \mid g(x) - f(x) = (x^L - 1) \cdot f(x)$.

下面求 $h(x)$ 和 $(x^L - 1)$ 的最大公因式,即它们有什么样的公共根. $(x^L - 1)$ 的根均为单位根,在单位圆上. 考虑 $h(x) = x^p + x^q - 2$ 在单位圆上的根,若 $x$ 为单位圆上的根,$|x| = 1$. $\because h(x) = x^p + x^q - 2 = 0$, $x^p + x^q = 2$. 而 $|x| = 1$, $|x^p| = 1$, $|x^q| = 1$, $|x^p + x^q| \leq |x^p| + |x^q| = 1 + 1 = 2$. 等号成立当且仅当 $x^p = x^q = 1$,而 $p,q$ 互素, $x = 1$.

这样,$h(x)$ 在单位圆周上的根仅有 $x = 1$, $(h(x), x^L - 1) = (x - 1)$,故 $\frac{h(x)}{x-1} \mid f(x)$.

考虑青蛙只数,即 $x = 1$ 时的情况,$f(1) = 1^{a_1} + 1^{a_2} + \cdots + 1^{a_n} = n$. 而 $\frac{h(x)}{x-1} = (1 + x + \cdots + x^{p-1}) + (1 + x + \cdots + x^{q-1}) = (2 + 2x + \cdots + 2x^{p-1} + x^p + \cdots + x^{q-1})$. 当 $x = 1$ 时,上式的值为 $p + q$. 故 $(p + q) \mid n$, $n$ 的最小值为 $p + q$.

事实上,$n$ 可取到 $p + q$:

此时,队形多项式 $f(x) = \frac{h(x)}{x-1} = (2 + 2x + \cdots + 2x^{p-1} + x^p + \cdots + x^{q-1})$. 即在 $1,\cdots,p$ 这 $p$ 个点上各有两只,$(p + 1),\cdots,q$ 上各有一只. 跳跃时,两只坐标在 1 处的青蛙跳到 $p + 1$ 与 $q + 1$ 处,队形变为 $2,\cdots,(p + 1)$ 处各两只,$(p + 2),\cdots,(q + 1)$ 处各一只. 相当于青蛙队列整体向右平移了一个整点,如此循环则可无限跳下去.

上述结论同样适用于"$k$ 只青蛙在一起跳"时的情形:

设这 $k$ 只青蛙分别向右跳 $a_1,\cdots,a_k$ 个单位,设 $a_1,\cdots,a_k$ 是一组最大公约数为 1 的正整数,且 $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$,则最小只数为 $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. 这 $n$ 只青蛙在 $1,\cdots,a_1$ 处各有 $k$ 只,在 $(a_1 + 1),\cdots,a_2$ 处各有 $k - 1$ 只,$\cdots,(a_{k-1} + 1),\cdots,a_k$ 处各有 1 只,这样每次跳跃相当于整体队形向右移一位,这样可无限跳下去. 图 2 为 $k = 3, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$ 时的情形.

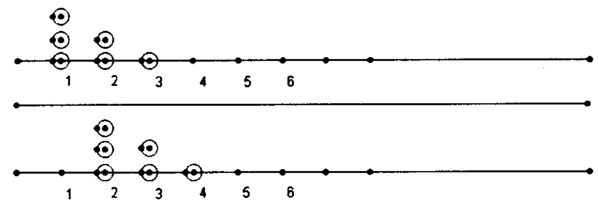


图 2 直线上无限跳跃示意图

## 4 圆周上的跳跃

假设圆周的长度为 $n$(记圆周上的点为 $1,2,\cdots,n$),两只青蛙在一起时将向左右两侧各跳一步. 仍然考虑相同问题:至少需要多少只青蛙才能无限跳?

结果是 $n$ 只. 由于圆周上向左跳一步相当于向右跳 $n - 1$ 步,问题类似于直线上的同向跳 1 步和 $n - 1$ 步,由上节结论可知,$1 + (n - 1) = n$ 只可无限跳. 下面证明 $n - 1$ 只青蛙不能满足无限跳跃:

若不然,如果 $n - 1$ 只青蛙能无限跳,由于有限只青蛙分布在有限点上的状态为有限种. 由抽屉原理,在跳跃过程中必会出现相同状态. 设从状态 $P_0$ 经若干跳又跳回到原状态. 对于这一系列状态中的某个状态(如 $P_0$),其上任何相邻两点上至少有一只青蛙. 若不然,设 1,2 两点上无青蛙,则这两点上一直无(如果某时有,由于跳跃是双向各跳一步,故这两点上一直会有青蛙). 既然在所有状态中 1,2 两点均无青蛙,这相当于圆周在此"断开",圆周变为直线,由上节结论知这 $n - 1$ 只青蛙不能无限跳.

再证 $P_0$ 中任何相邻的三个点上至少有两只青蛙. 假设 1,2,3 三点上仅有一只,则这只必然在位置 2 处. 考虑这一状态的由来,1,2,3 三点上的青蛙数不能一直为(0,1,0),否则也相当于圆周"断开",无法构成无限跳跃. 此时 1,3 点处没有青蛙,故前一跳不能发生在 0,2,4 处. 而在更远处位置的跳跃不影响 1,3 点的情况,故前一跳发生在 1 或 3 这两点之一,不妨假设发生在位置 1,即这三点的青蛙分布由(2,0,0)变为(0,1,0). 而(2,0,0)这一分布说明在 2,3 位置上没有青蛙,这与上段证明的"任何相邻两点上至少有一只青蛙"矛盾!

进一步证明:任何相邻四点上至少有三只. 若不然,设 1,2,3,4 四点上只有两只,由于 1,2,3 上至少有两只,2,3,4 上至少有两只,则必然是 1,4 上无青蛙,2,3 上有. 考虑此状态的由来,由于这四点上不会一直仅有这两只青蛙(否则仍然相当于圆周在此"断开"),故此状态的产生是由"四点上不止两

只”变为“四点上只有两只”. 那么此跳跃只能发生在位置1或4. 不妨假设发生在位置1上,即在位置1的两只青蛙跳到位置 0 和 2,则在此跳之前位置 2,3,4 上只有一只青蛙,与上段证明的“任何相邻三点间至少有两只青蛙”矛盾!

类似,可归纳证明连续的 $k$ 个点上至少有 $k-1$ 只青蛙. 而状态 $P_0$ 中必有某点有两只或更多的青蛙(保证发生跳跃),其余 $n-1$ 个点连续,这些连续点上至少有 $n-2$ 只青蛙,这样一共至少是 $n$ 只. 证毕!

## 5　圆周上跳跃的再推广

圆周上青蛙跳“左 $a$ 右 $b$” 的情况,至少需要多少只青蛙才有可能无限跳?

假设圆周长为 $n$,记最小需要的只数为 $f(a,b,n)$. 此问题较困难,我们未能精确求出最少只数,只给出了一个估计.

如同时把 $a,b,n$ 扩大同一倍数,青蛙的跳法完全相似,无限跳跃所需的最小青蛙数相同,所以 $f(ka,kb,kn)=f(a,b,n)$. 这样,如果 $a,b,n$ 不互素,可同时除以它们的最大公因数,结果不变.

假设 $(a,b,n)=1$,再看 $a,b$ 是否互素,若不互素,将其化归为互素情况. 圆周上 $n$ 个点的坐标构成模 $n$ 的完全剩余系. 在模 $n$ 的意义下,青蛙向左跳 $a$ 相当于坐标减 $a$,向右跳 $b$ 相当于坐标加 $b$. 将模 $n$ 的所有余数均乘以一个和 $n$ 互素的数 $k$ 之后,仍构成模 $n$ 的完全剩余系[3]. 坐标减 $a$ 变为坐标减 $ka$,坐标加 $b$ 变为坐标加 $kb$,“左 $a$ 右 $b$” 变成了“左 $ka$ 右 $kb$”. 这样,在长为 $n$ 的圆周上,两种跳法恰好对应,则两种情况下最小值相等. 即当 $(k,n)=1$ 时,$f(ka,kb,n)=f(a,b,n)$. 假设 $a,b$ 有最大公约数 $d$,则 $(d,n)=1$,$f(a,b,n)=f(d\times a/d,d\times a/d),n)=f(a/d,b/d,n)$,这样化归为 $a,b$ 互素的情形.

对于互素的 $a,b$,不妨设 $a\leqslant b$. 假设有若干青蛙无限跳,由于它们仅有有限个排列,必会重复出现循环. 类比直线部分的“左 $a$ 右 $b$”,圆周上的情况也一样,连续 $a+b$ 个点构成的弧(记为弧 $a+b$)上如果至少有一只青蛙,则将至少留守一只. 若某时刻弧 $a+b$ 上无青蛙,则一直无,圆周将在此“断开”,无法无限跳. 因此可知,对任意弧 $a+b$,其上一直均会至少有一只青蛙.

下面用归纳法证明连续的 $a+kb$ 个点上至少有 $k$ 只青蛙. 若不然,如果只有 $k-1$ 只,由归纳假设,这些青蛙必然集中在弧 $b+(a+(k-2)b)+b$ 的中间 $a+(k-2)b$ 部分上. 由于两端 $b$ 段上不能一直无青蛙(否则圆周将断开,不能无限跳),故这条 $a+kb$ 的弧上不能一直少于 $k$ 只. 考虑造成这一状态的最后一跳,该弧上在跳跃前有 $k$ 只青蛙,之后为 $k-1$ 只. 这一跳不能发生在 $a+kb$ 之外,否则使得 $a+kb$ 上青蛙的数只会增多,不会减少. 同理,这一跳也不能发生在中间的弧 $a+(k-2)b$ 上,因为这样会出现中间少 2 只,两侧各多 1 只的情况,在弧内交换,总数不变. 故这一跳只能发生在两端的弧 $b$ 上,不妨假设这一跳发生在左边的弧 $b$ 上. 在此跳之前,必为左侧弧 $b$ 上有两只,中间有 $k-2$ 只,右侧弧 $b$ 上无. 这样,中间和右侧一段 $(a+(k-2)b)+b=a+(k-1)b$ 上只有 $k-2$ 只青蛙,与归纳假设矛盾. 证毕.

做带余除法 $n\div b=q\cdots r,(0\leqslant r<b)$,则 $n=bq+r$. 取某个开始至少有两只青蛙的点,剩下 $n-1$ 个点,由于 $n-1=bq+r-1\geqslant bq-1\geqslant b(q-1)+a$,$n-1$ 个点上至少有 $q-1$ 只青蛙,这样一共至少有 $q+1$ 只. 则 $f(a,b,n)\geqslant q+1=[n/b]+1$.

对于与 $n$ 互素的 $k$,$f(ka,kb,n)=f(a,b,n)$. “左 $a$ 右 $b$” 同时乘 $k$ 之后,有可能使得向左跳 $ka$ 与向右跳 $kb$ 都代表向右移动较小的距离(可以是转过几圈后的情况). 向左跳 $ka$ 相当于向右跳 $-ka\equiv A(\bmod n)$;向右跳 $kb$ 相当于 $db\equiv B(\bmod n)$. 其中 $0<A,B<n$,这种情况下可知 $A+B$ 只青蛙足够,$f(ka,kb,n)\leqslant A+B$. 以下任务是找到合适的 $k$,使得 $A+B$ 不大.

$A\equiv -ka(\bmod n)$,$B\equiv kb(\bmod n)$,则 $bA+aB\equiv b(-ka)+a(kb)=0(\bmod n)$

$bA+aB$ 是 $n$ 的倍数,最小是 $n$,$bA+aB\geqslant n$. 则 $b(A+B)\geqslant bA+aB\geqslant n$. $A+B\geqslant n/b$,此处的 $A+B$ 至少是 $n/b$. 希望找出合适的 $k$,使得 $A+B$ 近似是 $n/b$. 有如下几个不等式:$A+B$ 近似是 $n/b$,$b(A+B)$ 近似是 $n$,而 $bA+aB$ 是 $n$ 的倍数,至少是 $n$. 这样 $b(A+B)-(bA+aB)=(b-a)B$ 近似为0.

由于 $B\equiv kb(\bmod n)$,设 $kb=cn+B$,$k=\dfrac{cn+B}{b}$,则:

$$A\equiv -ak=\frac{-a(cn+B)}{b}=\frac{-ac}{b}n-\frac{aB}{b}(\bmod n)$$

$A$ 比 $[n/b]$ 小,故 $\dfrac{-ac}{b}$ 的小数部分为 $1/b$. 因为 $(a,b)=1$,一定可以取到这样的 $c$,使 $ac+1\equiv 0(\bmod b)$ 并满足 $0<c<b$. 而 $k=\dfrac{cn+B}{b}$,它是一个比 $c/bn$ 略大的整数,需要使 $(k,n)=1$,从 $[cn/b]+1$ 开始找,设最小的与 $n$ 互素的为 $k=[cn/b]+L$,则 $B=b\cdot([cn/b]+L)$ 关于 $n$ 的余数小于 $b\cdot L$.

# 用 Cauchy 不等式证明一道竞赛题

安徽省和县沈巷中学 (238271) 胡 浩

设 $a,b,c\in\mathbf{R}^{+}$，且 $abc=1$，证明：$\dfrac{1}{a^{3}(b+c)}+\dfrac{1}{b^{3}(c+a)}+\dfrac{1}{c^{3}(a+b)}\geqslant 3/2$

这是一道第26届IMO竞赛题，试题简洁、对称、和谐，给人以美感，广大数学教育工作者从不同角度思考，给出了多种证法. 笔者尝试用 Cauchy 不等式加以证明.

原不等式 $\Leftrightarrow \dfrac{b^{2}c^{2}}{a(b+c)}+\dfrac{a^{2}c^{2}}{b(a+c)}+\dfrac{a^{2}b^{2}}{c(a+b)}\geqslant 3/2$.

利用 Cauchy 不等式得：$[(\sqrt{a(b+c)})^{2}+(\sqrt{b(a+c)})^{2}+(\sqrt{c(a+b)})^{2}]\cdot\left[\left(\dfrac{bc}{\sqrt{a(b+c)}}\right)^{2}+\left(\dfrac{ac}{\sqrt{b(a+c)}}\right)^{2}+\left(\dfrac{ab}{\sqrt{c(a+b)}}\right)^{2}\right]\geqslant\left[\sqrt{a(b+c)}\cdot\dfrac{bc}{\sqrt{a(b+c)}}+\sqrt{b(a+c)}\cdot\dfrac{ac}{\sqrt{b(a+c)}}+\sqrt{c(a+b)}\cdot\dfrac{ab}{\sqrt{c(a+b)}}\right]^{2}=(bc+ac+ab)^{2}$.

因而有：$\left(\dfrac{bc}{\sqrt{a(b+c)}}\right)^{2}+\left(\dfrac{ac}{\sqrt{b(a+c)}}\right)^{2}+\left(\dfrac{ab}{\sqrt{c(a+b)}}\right)^{2}\geqslant\dfrac{(bc+ac+ab)^{2}}{a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)}=\dfrac{1}{2}(bc+ac+ab)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}\cdot 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{abc}}=\dfrac{3}{2}$. 即 $\dfrac{b^{2}c^{2}}{a(b+c)}+\dfrac{a^{2}c^{2}}{b(a+c)}+\dfrac{a^{2}b^{2}}{c(a+b)}\geqslant\dfrac{3}{2}$，故原不等式得证.

Cauchy 不等式 —— 人们称之为经典不等式，是高中数学课标教材选修课的新增内容，应用十分广泛，能解决诸如求函数最值、证明不等式等问题. 在人教 $A$ 版选修 4—5“不等式选讲”中若以此题为案例组织教学，不仅可以提高学生构造性推理的思维能力，而且还可以极大地调动学生的学习热情，增强学好数学的自信心.

---

由于 $b(A+B)-n=b(A+B)-(bA+aB)=(b-a)\cdot B\leqslant(b-a)\cdot bL$，故 $A+B\leqslant[n/b]+(b-a)\cdot L$.

**定义 3** $c(n)$：为 $1\cdots n$ 中最多连续的与 $n$ 不互素的数的个数.

由于 $[n/b]+1\cdots[n/b]+(L-1)$ 都与 $n$ 互素，故有 $L-1\leqslant c(n)$，$L\leqslant c(n)+1$. 随着 $n$ 的增大，$c(n)$ 相对 $n$ 无穷小，即 $\lim\limits_{n\to\infty}c(n)/n=0$. 这样就可得出 $f(a,b,n)$ 的阶为 $f(a,b,n)=[n/b]+o(n)$. 限于时间和能力所限，我们还没能精确求解 $f(a,b,n)$，只求解了阶.

## 6 总结与展望

本文原始问题的本质是把聚集的点分散，通过引入变量记录坐标和平方和，利用无穷递降(增)思想证明在同一条直线上，青蛙向两个方向跳时不能无限跳；同向跳跃时，可以保持队形循环前进，无限跳跃. 问题是需要多少只青蛙才可保证出现无限跳，通过研究求得这一数字为 $n=p+q$(其中 $p$ 和 $q$ 分别为青蛙同向跳的步数). 通过归纳法证明在长度为 $n$ 的圆周上至少需要 $n$ 只青蛙才可保证无限跳.

“青蛙跳”问题很复杂，有很多方面值得继续深入研究. 比如直线上两侧跳跃时假设把青蛙的总数固定为 $n$ 只，视不同开局状态所对应的跳跃步数最大是多少呢？肯定是 $n$ 只青蛙最初在同一点上开局时最佳. 即起初有 $n$ 只青蛙在同一点上，每次两只青蛙往两侧跳，最后能跳多少步呢？这类由竞赛题到研究的问题值得我们进一步探索.

**致谢** 感谢王菘研究员对本文提出的宝贵意见和建议！

**参考文献**

[1] 中国数学奥林匹克委员会，南开大学数学系. 世界数学奥林匹克解题大辞典 — 组合卷[M]. 石家庄：河北少年儿童出版社，2002 年.

[2] 刘江枫，李学武. 第 37 届 IMO 预选题[J]. 中等数学，1997(5)，1998(1).

[3] 冷岗松，沈文选，张垚. 奥赛经典 — 奥林匹克数学中的代数问题[M]. 长沙：湖南师范大学出版社，2004 年.