另辟蹊径证明组合恒等式

刘桥连[1, 2] 陈清华[1] 柯跃海[1]
1 福建师范大学数学与计算机科学学院（350007） 2 福建省长汀县第一中学(366300)

排列与组合是与现实生活息息相关的数学知识，随着现代技术，特别是计算机的飞速发展，使得组合学得到蓬勃发展，成为近若干年来非常活跃的数学分支．在中学数学中排列、组合是一块相对独立的内容，学好这部分知识对提高学生的数学思维能力有积极的促进作用，而解决这类问题的思考方法与其它代数内容有所不同，不能仅靠代数的逻辑推理．组合恒等式是组合教学的重要内容之一，也是研究“概率论”与“组合计数”的重要工具，因此，研究组合恒等式具有深刻的实际意义．虽然组合恒等式的证明在近几年高考试题中出现较少，但在教材及参考书中却屡见不鲜，其证明方法比较常见的是代数法；但由于它综合了二项式、组合数性质、代数恒等变形等内容，其技巧性强，解题方法独特，因此学生解决这类问题往往感到困难．本文将运用格点路径法（蚂蚁爬格法)，去探讨若干组合恒等式，期望能帮助读者体会具体问题具体分析和解决问题多样化的思想．

1．预备知识

定理 1 在 n 个不同的元素中取 r 个进行组合，其组合数为 C_n^r．

定理 2 允许元素重复出现的排列，叫做有重复的排列．包括以下两种情形：

①在 m 个不同的元素里，取出 n 个元素（可重复），按照一定的顺序排成一排，那么第一，第二，……，第 n 位上各选取元素的方法都是 m 个，故由乘法原理知，从 m 个不同的元素里取出 n 个元素的可重复排列数为 m^n．

②有相同元素的全排列：如果 n 个元素里，第一类相同元素有 q_1 个，第二类相同元素有 q_2 个元素相同，……，第 t 类相同元素有 q_t $(q_1+q_2+\cdots+q_t\le n)$，则这 n 个元素全取的排列叫做 n 个有相同元素的全排列，它的排列数为：$\dfrac{n!}{q_1!q_2!\cdots q_t!}$．

定理 3 在格点平面上从点 $O(0,0)$ 到点 $A(m,n)$ 的最短路径数即格点路径(所谓“最短路径”指的是不允许后退，即不允许逆着 x，y 的正方向走) 为：C_{m+n}^m （或 C_{m+n}^n）．

解析 如图 1 所示， 无论怎样走法，在 x 方向上总共走 m 步，在 y 方向上总共走 n 步．若用一个 x 表示 x 方向的一步，一个字母 y 表示 y 方向的一步，则 $O(0,0)$ 到点 $A(m,n)$ 的每一条路径可表示为 m 个 x 与 n 个 y 的一个有重排列，将每一个有重排列的 x 和 y 分别编号，可得 $m!n!$ 个 $m+n$ 元的无重排列，由定理 2 可知，则共有 $\dfrac{(m+n)!}{m!n!}=C_{m+n}^m$ 路径数．

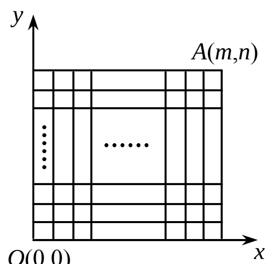

图1

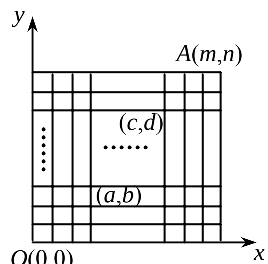

图2

上述定理 3 可推广到一般：如图 2 所示，设 $c\ge a\ge 0$，$d\ge b\ge 0$ 则 (a,b) 到 (c,d) 的最短路径为：$C_{(c-a)+(d-b)}^{(c-a)}$．

定理 3 实际上告诉我们，任何一个组合数均可看成是一种格点路径 (组合数的几何解释)．例如：C_n^r 可看做是点 $O(0,0)$ 到点 $P(n-r,r)$ 的格点路径数．

2．关于几个重要组合恒等式的格点路径证法

例 1 (Pascal 公式) $C_n^r=C_{n-1}^r+C_{n-1}^{r-1}$．

解析 先从组合的几何意义看这个公式；如图 3 所示，

C_n^r 可看做是点 $O(0,0)$ 到点 $A(n-r,r)$ 的格点路径数；

C_{n-1}^r 可看做是点 $O(0,0)$ 到点 $C(n-r-1,r)$ 的格点路径数；

C_{n-1}^{r-1} 可看做是点 $O(0,0)$ 到点 $B(n-r,r-1)$ 的格点路径数．

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

显然，从点 $O(0,0)$ 到点 $A(n-r,r)$ 的格点路径数由两部分组成：一部分是从 $O(0,0)$ 到点 $B(n-r,r-1)$ 的路径再向 y 轴的正方向走一步；另一部分是点 $O(0,0)$ 到点 $C(n-r-1,r)$ 的路径再向 x 轴的正方向走一步，因此等式成立.

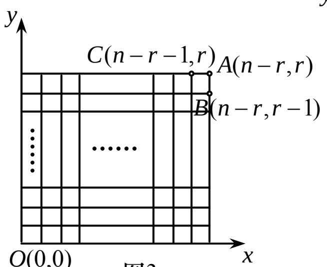

图3

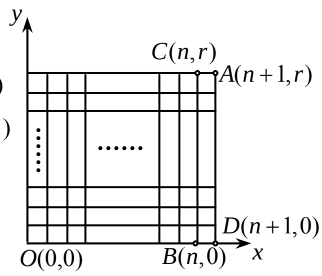

图4

例 2 $C_n^0+C_{n+1}^1+C_{n+2}^2+\cdots+C_{n+r-1}^{r-1}+C_{n+r}^r=C_{n+r+1}^r$.

解析 如图 4 所示，

左端第一项 C_n^0 是从点 $O(0,0)$ 到点 $B(n,0)$ 的格点路径数；

左端第二项 C_{n+1}^1 是从点 $O(0,0)$ 到点 $(n,1)$ 的格点路径数；

……

左端倒数第二项 C_{n+r-1}^{r-1} 是从点 $O(0,0)$ 到点 $(n,r-1)$ 的格点路径数；

左端最后一项 C_{n+r}^r 是从点 $O(0,0)$ 到点 (n,r) 的格点路径数；

因为从 $O(0,0)$ 点出发到达 $A(n+1,r)$ 的路径数就是从点 $O(0,0)$ 点出发，途经 (n,i) 点的边到达 $A(n+1,r)$ 的路径数 $(i=0,1,2,3\cdots\cdots r)$. 故从 $O(0,0)$ 点出发到达 $A(n+1,r)$ 的路径数为 $C_n^0+C_{n+1}^1+C_{n+2}^2+\cdots+C_{n+r-1}^{r-1}+C_{n+r}^r$，等式得证.

例 3 $C_m^0+C_m^1+C_m^2+C_m^3+\cdots\cdots+C_m^m=2^m$.

解析 如图 5 所示：

C_m^0 表示从 $O(0,0)$ 到 $P(0,m)$ 的格点路径数；

C_m^1 表示从 $O(0,0)$ 到 $(1,m-1)$ 的格点路径数；

C_m^2 表示从 $O(0,0)$ 到 $(2,m-2)$ 的格点路径数；

……

C_m^{m-1} 表示从 $O(0,0)$ 到 $(m-1,1)$ 的格点路径数；C_m^m 表示从 $O(0,0)$ 到 $Q(m,0)$ 的格点路径数；

而这所有的格点路径数之和就是从 $O(0,0)$ 点到斜边 PQ 上的整点的路径数；另一方面从 $O(0,0)$ 点到斜边 PQ 上的整点的路径数是 m 步长，每一步是 x 或者是，有两种选择，由乘法法则，m 步的不同选择方法的总数为 2^m，所以等式成立.

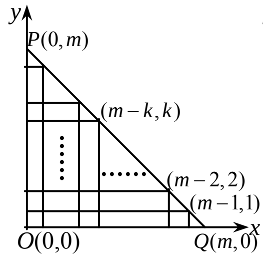

图5

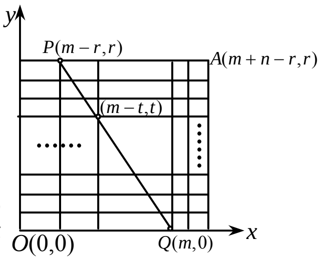

图6

例 4 (Vandermonde 恒等式)

$C_m^0C_n^r+C_m^1C_n^{r-1}+\cdots\cdots+C_m^{r-1}C_n^1+C_m^rC_n^0=C_{m+n}^r$ $(r\le\min(m,\ n))$.

解析 由图 6 可知，

等式右边表示从 $O(0,0)$ 到 $A(m+n-r,r)$ 的格点路径数；

而由于从 $O(0,0)$ 到 $A(m+n-r,r)$ 必须穿过 PQ 上的整点，

其中 $P(m-r,r)$，$Q(m,0)$，PQ 上任意一整点坐标为 $(m-t,t)$，$t=0,1,2,\cdots r$.

而从 $O(0,0)$ 到点 $(m-t,t)$ 的格点路径数为 C_m^t，而从点 $(m-t,t)$ 到 $A(m+n-r,r)$ 的格点路径数为 $C_{m+n-r-(m-t)+r-t}^{r-t}=C_n^{r-t}$，

由分步计数原理可知：

从点 $O(0,0)$ 到点 $(m-t,t)$ 再到 $A(m+n-r,r)$ 的格点路径数为 $C_m^tC_n^{r-t}$，其中 $t=0,1,2,\cdots r$.

由加法法则可得：

$C_m^0C_n^r+C_m^1C_n^{r-1}+\cdots\cdots+C_m^{r-1}C_n^1+C_m^rC_n^0=C_{m+n}^r$.

本文介绍的主要是格点路径法（亦即几何法），而关于组合恒等式的证明方法还有很多，例如，递归关系法，数学归纳法，微积分法，二项式反演公式法，概率方法(构造适当的概率模型)等等. 每一种证明方法都有其自身的特点，选择合适的证明方法，有时会起到事半功倍的效果，而且以上的方法是以高中知识为基础，也可以说是组合恒等式证明的初等方法. 顺便指出以上例题的解法不是唯一的，细心读者可以留意到，各种方法之间也存在着一定的联系，有时一道题可以同时使用几种方法，思路很活，有兴趣的读者可以研究一下.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net