Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(3), 232-237
Published Online May 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.63027

Hans汉斯

K-L-Nim Game

Rongxing Xu, Xinzhong Lv, GuiXian Tian

Department of Mathematics Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: xurongxing@yeah.net

Received: Apr. 29th, 2017; accepted: May 12th, 2017; published: May 22nd, 2017

Abstract

Perhaps the most famous combinatorial game is Nim, which was completely analyzed by C.L. Bouton in 1902. From then on, the variant of Nim game is getting more and more popular. This paper introduces a new variant of Nim game, K-L-Nim game, one player's illegal move is to remove *k* stones from one pile, while the other player's illegal move is to remove *l* stones from one pile. This paper gives a complete solution for the game by using Sprague-Grundy Theorem, Bouton Theorem and mathematical induction.

Keywords

Nim Game, Sprague-Grundy Theorem, Bouton Theorem, P-position

K-L-Nim博弈

徐荣兴，吕新忠，田贵贤

浙江师范大学数理与信息工程学院，浙江 金华
Email: xurongxing@yeah.net

收稿日期：2017年4月25日；录用日期：2017年5月12日；发布日期：2017年5月22日

摘 要

Nim博弈是博弈论中最经典的模型之一，1902年C.L. Bouton给出其完全解。其变形版本的玩法日益受到人们的喜爱，这篇文章介绍了一个Nim博弈的变形玩法，K-L-Nim博弈。其中一个玩家每次不能拿走k个石子(但可拿走多于或者少于k个石子)，而另外一个玩家不能拿走l个石子(但可拿走多于或者少于l个石子)。这篇文章巧妙地借助了Sprague-Grundy定理研究了$k=l$时的组合解。并用数学归纳法和Bouton定理给出了$k \neq l$时所有组合解。

文章引用: 徐荣兴, 吕新忠, 田贵贤. K-L-Nim 博弈[J]. 应用数学进展, 2017, 6(3): 232-237.
https://doi.org/10.12677/aam.2017.63027

关键词

Nim博弈，Sprague-Grundy定理，Bouton定理，P态

1. 引言

Nim 博弈是博弈论中最经典的模型，它有着十分简单的规则和无比优美的结论。它的规则如下：

有若干堆石子，每堆石子的数量都是有限的，两人交替拿走石子，合法的移动是“选择一堆石子并拿走若干颗(不能不拿)”，如果轮到某个人时所有的石子堆都已经被拿空了，则判负(因为他此刻没有任何合法的移动)。

1902 年，Bouton [1]给出了这个游戏的所有组合解。从此以后，通过修改 Nim 博弈的规则，各种各样的 Nim 类型的博弈就产生了，更多的可以参考[2] [3] [4] [5] [6] [7]-[12]。首先我们先来回忆一些组合游戏里的定义。

定义 1 假设双方都采取最明智的策略，则对于一些状态，刚刚做完决策的游戏者有一定胜利的策略的状态(Previous Player wins the game)叫做 P 态。下一个做出决策的游戏者有一定获胜的策略的状态(Next Player wins the game)叫 N 态。

在有限的公平组合游戏中，P 态和 N 态有如下的性质：

1) 所有终止状态都是 P 态；

2) 能一步到达 P 态的状态为 N 态；

3) 每一步都将到达 N 态的状态为 P 态。

要证明一个状态是 N 态，只需要证明它在一个合法的移动内可以变成一个 N 态，而要证明一个状态是 P 态，则需要证明它的任意一个下一步状态都是 N 态，所以寻找一个 Nim 类型组合游戏的 P 态就显得尤为重要。

定义 2 两个非负整数的 Nim 和是指将这两个数换算成二进制以后的不进位相加所得到的值。更详细地，

$$(x_s\cdots x_0)_2\oplus(y_s\cdots y_0)_2=(z_s\cdots z_0)_2,$$

其中 $z_i=(x_i+y_i)\bmod 2$，也即当 x_i+y_i 为偶数时，z_i 等于 0，x_i+y_i 为奇数时，z_i 等于 1。

例 3 $3=11_2$，$4=100_2$，$5=101_2$。所以

$$3\oplus4\oplus5=11_2+100_2+101_2=0_2.$$

符号 在本文中，我们假设初始状态有 n 堆石子，每堆数目分别是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ (数目可以重复，为了方便我们假设其为非降序排列)。我们用 $S=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示其初始状态。另外为了表述方便，我们用 P_1 表示先手，P_2 表示后手。

下面这个定理对普通的 Nim 博弈的所有的 P 态进行了一个刻画，那显然其所有对立面的状态就是 N 态。

Bouton 定理[1] 对于一个在 $S=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 状态上进行的 Nim 博弈，它是 P 态当且仅当

$$\oplus_{i=1}^{n} x_i = 0_2 .$$

在这篇文章中，我们考虑一种新的游戏，K-L-Nim 博弈，其规则如下。

有若干堆石子，每堆石子的数量都是有限的，两人交替移走石子，合法的移动是“选择一堆石子并拿走若干颗，不能不拿”，但是先手 P_1 每次不能拿走 k 个石子(但可拿走多于或者少于 k 个石子)，后手 P_2 不能拿走 l 个石子(但可拿走多于或者少于 l 个石子)，如果轮到某个人时所有的石子堆都已经被拿空了，则判负。

在第二部分，我们介绍当 $k = l$ 时该博弈的解；在第三部分，我们介绍当 $k \neq l$ 时的解。

2. *K* 等于 *L*

在介绍我们的主要结论之前，我们先给出一些定义，以便我们能方便的证明我们的结论。

定义 4 用 $G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$ 表示由单堆上进行的 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 的 Nim 博弈组成的组合博弈。其中每个玩家可以在每一次走步中选择其中一个子游戏上进行。

定义 5 对于任意一个仅含一堆的 Nim 博弈 G 来讲，其 Sprague-Grundy 函数 $g(x)$ 定义如下：对于其终止状态 t， $g(t) = 0$，对于其他状态，

$$g(x) = mex\{g(y) : x \to y 是个合法的走步\},$$

其中 $mex(S) = \min\{n \ge 0 : n \notin S, 有限集S \subseteq \{0,1,2,\cdots\}\}$ 表示局外最小序数。

Sprague-Grundy 定理[10] 假设 $(G_1, x_1), (G_2, x_2), \cdots, (G_n, x_n)$ 是 n 个单堆的 Nim 博弈及其初始状态。$G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$，那么对于博弈 G 而言，其 Sprague-Grundy 函数 $g(x)$ 满足

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n).$$

其中 g, g_i 分别表示 G 和 G_i 的 Sprague-Grundy 函数，其中 $i = 1, 2, \cdots, n$ 。

所以一旦知道一个博弈的 Sprague-Grundy 函数，我们就很容易的去分析与其相关的博弈。满足使得 $g(S) = 0$ 的状态 S 为 P 态，否则，为 N 态。

现在我们来考虑 K-L-Nim 博弈，其中 $k = l$ 。

定理 6 假设 K-L-Nim 博弈在石子数为 x 的单堆上进行，其中 $k = l$ 。那么我们有

$$\begin{aligned} g(2ks) &= g(2ks + k) = ks, \\ g(2ks + 1) &= g(2ks + k + 1) = ks + 1, \\ &\vdots \\ g(2ks + k - 1) &= g(2ks + 2k - 1) = ks + k - 1, \end{aligned}$$

其中 $k \ge 1, s \ge 0$ 。

证明：我们主要对石子的总数采用数学归纳法。

假设 $k = l = t$ ，所以对两个玩家来说，他们的合法移动是每次拿走 $[x] \backslash t$ 个石子。表 1 是 x 较小的时候的一些 Sprague-Grundy 函数值。

也即，

Table 1. The Sprague-Grundy function values of some small **x**s
表 1. x **较小的时候的一些 Sprague-Grundy 函数值**

x	0	1	2	...	$t-1$	t	$t+1$	$t+2$	...	$2t-1$
$g(x)$	0	1	2	...	$t-1$	0	1	2	...	$t-1$

$$g(i)=mex\{0,1,2,\cdots,i-1\}=i\text{，其中 } i=1,2,\cdots,t-1\text{；}$$

$$g(j)=mex\{0,1,2,\cdots j-t-1,j-t+1,\cdots,j-1\}=j-t\text{，其中 } j=t,t+1,\cdots,2t-1\text{。}$$

对于更一般的情形，我们有

$$\begin{aligned}g(2st+i)=mex\{&0,1,2,\cdots,2(s-1)t+t-1,2(s-1)t+t,2(s-1)t+t+1,\\&2st+i-t-1,2st+i-t+1,\cdots,2st-1,2st,2st+1,\cdots,2st+i-1\};\end{aligned}$$

$$g(2st+j)=mex\{0,1,2,\cdots,2st-1,2st,2st+1,\cdots,2st+j-t-1,2st+j-t+1,\cdots,2st+j-1\};$$

其中 $i=1,2,\cdots,t-1$； $j=t,t+1,t+2,\cdots,2t-1$。

根据归纳假设，我们知道

$$\begin{aligned}&g(2mt)=g(2mt+t)=mt,\\&g(2mt+1)=g(2mt+t+1)=mt+1,\\&\qquad\vdots\\&g(2ms+t-1)=g(2mt+2t-1)=mt+t-1.\end{aligned}$$

其中 $t\ge1,0\le m\le s-1$。

所以 $\{g(0),g(1),g(2),\cdots,g(2(s-1)t+t-1)\}=[st-1]$。

由于 $g(2st+i-t)=g(2(s-1)+t+i)=g(2(s-1)t+i)=(s-1)t+i$，所以我们得到 $g(2st+i)=st+i$，其中 $i=0,1,\cdots,t-1$。同理，我们可以得到 $g(2st+j)=st+j-t$，其中 $i=t,t+1,\cdots,2t-1$。由 t 的选择的任意性我们完成了该定理的证明。□

推论 7：假设 K-L-Nim 博弈在石子数为 x 的单堆上进行，且 $k=l=t$。那么 Sprague-Grundy 函数值如下

$$g_t(x)=\begin{cases}\lfloor x/2t\rfloor t+\mathrm{mod}(x,2k), & 0\le\mathrm{mod}(x,2k)\le k-1\\ \lfloor x/2t\rfloor t+\mathrm{mod}(x,2k)-k, & k\le\mathrm{mod}(x,2k)\le 2k-1.\end{cases}$$

其中 $\mathrm{mod}(a,b)$ 表示 a 除以 b 后的余数。

所以对于任意一个在状态 $S=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 上进行的 K-L-Nim 博弈($k=l$),我们可以将其看成是 n 个单堆的 Nim 博弈的结合，并分别算出这 n 个初始状态的 Sprague-Grundy 函数值。如果这 n 个值的 nim 和为 0，则其初始状态为 P 态，否则为 N 态。

例 8 假设 K-L-Nim 博弈在初始态 $S=(3,5,8)$ 上进行，并且 $k=l=2$。所以 $g_2(3)=1$， $g_2(5)=3$， $g_2(8)=4$， $g_2(3,5,8)=1\oplus3\oplus4=(110)_2\ne0_2$，因此这是一个 N 态。

3. *K* 与 *L* 不相等

我们假设 $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\ge\min\{k,l\}$。否则这个游戏就变成了普通的 Nim 博弈。

定义 9 如果一个状态在普通的 Nim 博弈中是 N 态，而它在 K-L-Nim 博弈的规则下不能在下一步转化成普通 Nim 博弈里的 P 态，那么我们说该状态是 K-L-Nim 博弈里的有缺陷的 N 态。

例 10 假设 K-L-Nim 博弈在一个初始状态为 $(4,5)$ 的状态上进行，其中 $k=1,l=2$。显然 $(4,5)$ 对于 K-L-Nim 博弈中的 P_1 来说就是一个有缺陷的 N 态，因为 $(4,5)$ 如果想变成普通 Nim 博弈里的一个 P 态，需要 P_1 在第一步中从石子数为 5 的堆里拿走一颗石子，然而很显然，P_1 并不能做到。

接下来，我们先看一下 $k<l$ 的情形。

引理 11 对于 K-L-Nim 博弈，其中 $k<l$，如果 P_2 在一个有缺陷的 N 态上进行，那么他也有一个合

法的移动，去留下一个有缺陷的 N 态给 P_1。

证明：假设 P_2 面对的状态为 $S=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，由于它是有缺陷的 N 态，故有

$$\oplus_{i=1}^{n} x_i \neq 0_2,$$

并且存在一 j 和 x_j' 满足，

$$\left(\oplus_{i=1,i\neq j}^{n} x_i\right) \oplus x_j' = 0_2,$$

其中 $x_j - x_j' = l$，否则与缺陷的 N 态的定义相矛盾。这时 P_2 可以从 x_j 中拿走 $l-k$ 个石子，此时剩余状态为 $S'=(x_1,x_2,\cdots,x_j'+k,\cdots,x_n)$，显然这对 P_1 来说是一个有缺陷的 N 态。□

定理 12 对于 K-L-Nim 博弈，其中 $k<l$，如果 P_1 面对一个有缺陷的 N 态或者普通 Nim 博弈中是 P 态的状态，那么 P_2 有必胜的策略。

证明：我们对石子的总数采用数学归纳法。无论 P_1 面对一个有缺陷的 N 态还是普通 Nim 意义下的 P 态，在 P_1 移动完以后，剩余的状态一定是普通状态里的 N 态，所以根据引理 11 以及 Bouton 定理，P_2 一定有策略使得他做完移动后剩余一个 P 态或者有缺陷的 N 态，由归纳假设可知，P_2 有必胜的策略。□

引理 13 对于 K-L-Nim 博弈，其中 $k<l$，如果 P_2 面对一个 P 态 $S=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。只要 $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\geq k$，那么 P_2 就有一个策略去留下一个带缺陷的 N 态给 P_1。

证明：由于 $S=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个普通 Nim 博弈里的 P 态，所以有

$$\oplus_{i=1}^{n} x_i = 0_2,$$

不失一般性，我们假设 $x_n=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$。$P_2$ 的策略是从 x_n 中拿走 k 个石子。留下状态 $(x_1,x_2,\cdots,x_n-k)$ 给 P_1，不难证明这个状态对于 P_1 来讲是一个有缺陷的 N 态，因为 P_1 若是想将状态 $(x_1,x_2,\cdots,x_n-k)$ 转化成普通 Nim 博弈里的 P 态，他必须在某一堆里拿走 k 个石子，显然这是对于 P_1 来讲是个不合法的移动。□

定理 14 对于 K-L-Nim 博弈，其中 $k<l$，如果在 P_1 走完第一步以后，剩余状态是在普通的 Nim 博弈里的一个 P 态，并且 $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}<k$，那么 P_1 有必胜的策略,否则 P_2 有必胜的策略。

证明：如果 P_1 留下一个普通的 Nim 博弈里的一个 P 态给 P_2，并且 $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}<k$，那么无论 P_2 做出怎样的决策，既不能留下一个有缺陷的 N 态，也不能留下一个普通 Nim 博弈意义下的 P 态给 P_1，所以此时 P_1 有必胜的策略。

定理的后半部分皆可由引理 11，定理 12 以及引理 13 证明出来，在此不再赘述。□

参照上述几个引理及定理的 P_2 的策略，不难得到下面这个推论。

推论 15 对于 K-L-Nim 博弈，其中 $k>l$，P_1 总有必胜的策略。

至此，我们给出了该博弈在所有状态下的 N 态和 P 态。

致 谢

感谢浙江师范大学“千人计划”朱绪鼎教授给本文的很多指导性的意见，也感谢审稿人给出了很多宝贵的修改意见。

基金项目

国家自然科学基金项目资助(KYZKJY11186)。

参考文献 (References)

[1] Bouton, C.L. (1902) Nim, a Game with a Complete Mathematical Theory. *Annals of Mathematics*, **3**, 35-39.

https://doi.org/10.2307/1967631

[2] Albert, M.H. and Nowakowski, R.J. (2001) The Game of End-Nim. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **8**, Research Paper 1, 12p.

[3] Albert, M.H. and Nowakowski, R.J. (2004) Nim Restrictions, Integers. *Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, **4**, #G 01.

[4] Fukuyama, M. (2003) A Nim Game Played on Graphs. *Theoretical Computer Science*, **304**, 387-399. https://doi.org/10.1016/S0304-3975(03)00292-5

[5] Li, S.-Y.R. (1978) N-Person Nim and N-person Moore's Games. *International Journal of Game Theory*, **7**, 31-36. https://doi.org/10.1007/BF01763118

[6] Lim, C.-W. (2005) Partial Nim, *INTEGERS*: *Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, **5**, # G 02.

[7] Moore, E.H. (1910) A Generalization of a Game Called Nim. *Annals of Mathematics*, **11**, 93-94. https://doi.org/10.2307/1967321

[8] Schwartz, B.L. (1971) Some Extensions of Nim. *Mathematics Magazine*, **44**, 252-257. https://doi.org/10.2307/2688631

[9] Schwenk, A.J. (1970) Take-Away Games. *Fibonacci Quarterly*, **8**, 225-234.

[10] Sprague, R.P. (1936) Uber Mathematische Kampfspiele. *Tohoku Mathematical Journal*, **41**, 438-444.

[11] Wythoff, W.A. (1907) A Modification of the Game of Nim. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, **7**, 199-202

[12] Xu, R. and Zhu, X. (2016) Bounded Greedy Nim Game. *Theoretical Computer Science*, Submitted.