THU-70250403, Convex Optimization (Fall 2018) **Homework: 2**

L1-TWSVM

Lecturer: 王书宁，李力 swang@tsinghua.edu.cn li-li@tsinghua.edu.cn

Student: 张芙作 zhangfz15@mails.tsinghua.edu.cn

1 TWSVM

TWSVM(孪生支持向量机)是Jayadeva等人于2007年提出的一种改进的双分界面支持向量机，用于解决二分类问题。与传统的支持向量机(SVM)不同，TWSVM为每一类的数据点单独建立一个分类面，其优化策略为，使同一类的数据点尽可能集中的围绕在该类分类面的周围，并且远离另一类数据的分类面。所以TWSVM需要解决两个二次规划问题，得到两个不平行的分类面，但是同一类的数据要作为另一个二次规划问题的约束条件，反之亦然。

TWSVM需要求解以下两个二次优化问题：

$$\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{w}_1,b_1}\ \frac{1}{2}||\mathbf{A}\mathbf{w}_1+\mathbf{e}_1b_1||_2^2+c_1\mathbf{e}_2^T\mathbf{q}_1 \\
&s.t.\ -(\mathbf{B}\mathbf{w}_1+\mathbf{e}_2b_1)+\mathbf{q}_1\geq\mathbf{e}_2,\mathbf{q}_1\geq 0 \qquad (1)\\
&\min_{\mathbf{w}_2,b_2}\ \frac{1}{2}||\mathbf{B}\mathbf{w}_2+\mathbf{e}_2b_2||_2^2+c_2\mathbf{e}_1^T\mathbf{q}_2 \\
&s.t.\ (\mathbf{A}\mathbf{w}_2+\mathbf{e}_1b_2)+\mathbf{q}_2\geq\mathbf{e}_1,\mathbf{q}_2\geq 0 \qquad (2)
\end{aligned}$$

其中，$\mathbf{A}_{m_1\times n}=(\mathbf{a}_1^{(1)},\mathbf{a}_2^{(1)},...,\mathbf{a}_{m_1}^{(1)})^T$表示$m_1$个正样本，$\mathbf{B}_{m_2\times n}=(\mathbf{b}_1^{(2)},\mathbf{a}_2^{(2)},...,\mathbf{a}_{m_2}^{(2)})^T$表示$m_2$个负样本，$\mathbf{e}_1$和$\mathbf{e}_2$表示相应维数的单位变量，$||\cdot||_2$表示L2范数，$\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2$是松弛向量，$c_1,c_2$是非负惩罚系数，分别为正样本和负样本的平衡因子，可以用来解决正负样本个数不同的问题。通过求解以上两个优化问题，可以分别得到两个不平行的超平面：

$$\mathbf{x}^T\mathbf{w}_1+b_1=0,\mathbf{x}^T\mathbf{w}_2+b_2=0 \qquad (3)$$

当有一个新的点$\mathbf{x}$，计算其到两个超平面的垂直距离，如果它距离超平面$\mathbf{x}^T\mathbf{w}_1+b_1=0$的距离小于它到超平面$\mathbf{x}^T\mathbf{w}_2+b_2=0$的距离，则将该点归入正类，否则它属于负类。

我们也可以得到问题(1)、(2)的Wolfe对偶问题：

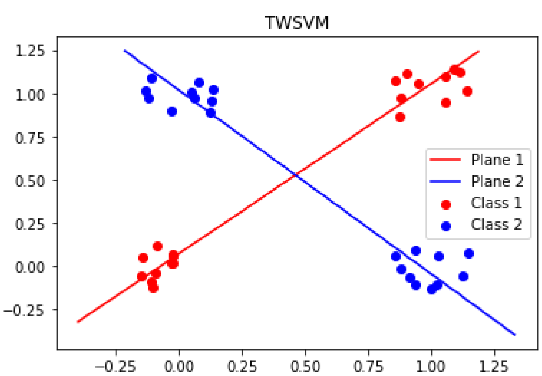
$$
\begin{aligned}
&\max_{\boldsymbol{\alpha}}\ \mathbf{e}_2^T\boldsymbol{\alpha}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{G}(\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{G}^T\boldsymbol{\alpha}\\
&s.t.\ 0\leq\boldsymbol{\alpha}\leq c_1\mathbf{e}_2 \qquad (4)\\
&\max_{\boldsymbol{\beta}}\ \mathbf{e}_1^T\boldsymbol{\beta}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{H}(\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}\mathbf{H}^T\boldsymbol{\beta}\\
&s.t.\ 0\leq\boldsymbol{\beta}\leq c_2\mathbf{e}_1 \qquad (5)
\end{aligned}
$$

其中$\alpha\in R^{m_2}$和$\beta\in R^{m_1}$ 是拉格朗日乘子，可以利用α和β得到两个不平行的超平面：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{z}_1&=(\mathbf{w}_1^T b_1)^T=-(\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{G}^T\boldsymbol{\alpha}\\
\mathbf{z}_2&=(\mathbf{w}_2^T b_2)^T=-(\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}\mathbf{H}^T\boldsymbol{\beta} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

由于逆矩阵$(\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}$和$(\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}$可能带来奇异问题，为防止矩阵奇异，可以加入一个正则项$\varepsilon\mathbf{I}$，ε是一个足够小的正数。这样可以保证$(\mathbf{H}^T\mathbf{H}+\varepsilon\mathbf{I})^{-1}$和$(\mathbf{G}^T\mathbf{G}+\varepsilon\mathbf{I})^{-1}$正定，从而不会出现奇异问题。

图1是对TWSVM的几何解释。



(a)

图1. TWSVM