



Chapitre 1

Espaces vectoriels

L'ensemble \mathbb{K} désigne toujours \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

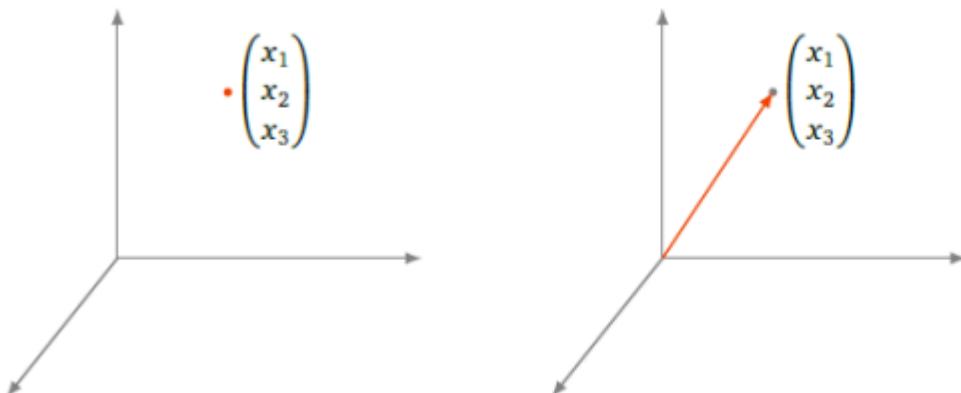
1.1 Espaces vectoriels de \mathbb{R}^n

1.1.1 Opérations sur les vecteurs de \mathbb{R}^n

L'ensemble des nombres réels \mathbb{R} est souvent représenté par une droite. C'est un espace de **dimension 1**.

- Le plan est formé des couples $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de nombres réels. Il est noté \mathbb{R}^2 . C'est un espace à **deux dimensions**.
- L'espace de **dimension 3** est constitué des triplets de nombres réels $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Il est noté \mathbb{R}^3 .

Le symbole $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ a deux interprétations géométriques : soit comme un point de l'espace (figure de gauche), soit comme un vecteur (figure de droite) :



On généralise ces notions en considérant des espaces de dimension n pour tout entier positif

$n = 1, 2, 3, 4, \dots$. Les éléments de l'espace de dimension n sont les n -uples $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de nombres réels.

L'espace de **dimension n** est noté \mathbb{R}^n .

Soient $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de \mathbb{R}^n .

Définition 1.1.1.1

1. **Somme de deux vecteurs** : Leur somme est par définition le vecteur

$$u + v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

2. **Produit d'un vecteur par un scalaire** : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ (appelé un scalaire) :

$$\lambda \cdot u = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

3. **Vecteur nul** de \mathbb{R}^n est le vecteur $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. **Vecteur opposé** de $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est le vecteur $-u = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$.

Théorème 1.1.1.2 (Espaces vectoriels de \mathbb{R}^n) Soient $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ des vecteurs de \mathbb{R}^n et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ on dit que \mathbb{R}^n est un espace vectoriel si et seulement si :

1. $u + v = v + u$,
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$,
3. $u + 0 = 0 + u = u$,
4. $u + (-u) = 0$,
5. $1 \cdot u = u$,
6. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$,
7. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
8. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$.

1.1.2 Produit scalaire et Produit vectoriel

Définition 1.1.2.1 Soient $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de \mathbb{R}^n . On définit leur **produit scalaire** par :

$$\langle u | v \rangle = \langle u, v \rangle = (u, v) = u^T v = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

c'est un scalaire (un nombre réel).

Proposition 1.1.2.2 Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

1. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$,
2. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$.

Proposition 1.1.2.3 (Produit vectoriel) Soient $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 ,

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Exemple 1.1.2.4 Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . Calculer le produit scalaire et le produit vectoriel des vecteurs u et v .

Calculons les deux produits pour les vecteurs :

$$\langle u, v \rangle = u^T v = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + (-3) \times (-2) + 2 \times 4 = 14.$$

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3) \times 4 - 2 \times (-2) \\ 2 \times 0 - 1 \times 4 \\ 1 \times (-2) - (-3) \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1.2 Espace vectoriel

1.2.1 Terminologie et notation

- E est appelé un **espace vectoriel**.
- Les éléments de E sont appelés **vecteurs**. Au lieu de \mathbb{K} -espace vectoriel, on dit aussi espace vectoriel sur \mathbb{K} .
- \mathbb{K} est le **corps** de base de l'espace vectoriel E .
- Les éléments de $\mathbb{K} (= \mathbb{R}, \mathbb{C})$ sont appelés **scalaires**.
- L' **élément neutre** 0_E s'appelle aussi le **vecteur nul**. Il ne doit pas être confondu avec l'élément 0 de \mathbb{K} . Lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion, 0_E sera aussi noté 0.
- Le **symétrique** $-u$ d'un vecteur $u \in E$ s'appelle aussi l'**opposé**.

1.2.2 Définition d'un espace vectoriel

Un espace vectoriel est un ensemble formé de vecteurs, de sorte que l'on puisse additionner (et soustraire) deux vecteurs u, v pour en former un troisième $u + v$ (ou $u - v$) et aussi afin que l'on puisse multiplier chaque vecteur u d'un facteur $\lambda \cdot u$ pour obtenir un vecteur .

Définition 1.2.2.1 On appelle \mathbb{K} -espace vectoriel tout ensemble non vide E muni :

- d'une **loi de composition interne**(LCI), c'est-à-dire d'une application de $E \times E$ dans E :

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (u, v) & \mapsto & u + v. \end{array}$$

- d'une **loi de composition externe**(LCE), c'est-à-dire d'une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda \cdot u. \end{array}$$

1. $(E, +)$ est un groupe abélien.
2. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E$, on a $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda u + \mu u$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E$, on a $\lambda \cdot (u + v) = \lambda u + \lambda v$.
4. Il existe un **élément neutre** $0_E \in E$ tel que $u + 0_E = u$.
5. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E$, on a $\lambda \cdot (\mu u) = (\lambda \mu) \cdot u$.

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés vecteurs et les éléments de \mathbb{K} sont appelés scalaires.

1.3 Sous-espace vectoriel

1.3.1 Définition d'un sous-espace vectoriel

Dans toute la suite l'ensemble E désignera un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

Définition 1.3.1.1 Soit F un sous-ensemble de E . On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F possède les propriétés suivants :

1. $0_E \in F$,
2. $\forall u, v \in F$, on a $u + v \in F$.
3. $\forall u \in F$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda \cdot u \in F$.

Étant que u et v sont des vecteurs de F .

Remarque 1.3.1.2

- La première condition signifie que le vecteur nul de E doit aussi être dans F . En fait il suffit même de prouver que F est non vide.
- La deuxième condition, c'est dire que F est stable pour l'addition : la somme $u + v$ de deux vecteurs u, v de F est bien sûr un vecteur de E (car E est un espace vectoriel), mais ici on exige que $u + v$ soit un élément de F .
- La troisième condition, c'est dire que F est stable pour la multiplication par un scalaire.

Exemple 1.3.1.3 L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ est-elle un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

1. $(0, 0) \in F$ car $0 + 0 = 0$.
2. Soient $u = (x, y) \in F$ et $v = (x', y') \in F$, d'où $u + v = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$. On a $(x + x') + (y + y') = x + y + x' + y' = 0 + 0 = 0$, donc $u + v \in F$.
3. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (x, y) \in F$, d'où $\lambda \cdot u = \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$. On a $\lambda x + \lambda y = \lambda(x + y) = \lambda \cdot 0 = 0$. Alors $\lambda \cdot u \in F$.

1.4 Familles des vecteurs

1.4.1 familles génératrices

Définition 1.4.1.1 (Famille génératrice) On dit qu'une famille $\mathcal{F} = \{x_1, \dots, x_n\}$ des vecteurs de E est génératrice de E , si tout vecteur x de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille \mathcal{F} , c'est-à-dire $\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, tel que

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k.$$

Autrement dit que $E = Vect\{x_1, \dots, x_n\}$.

Exemple 1.4.1.2 Deux vecteurs non colinéaires forment une famille génératrice.

1.4.2 Familles libres et liés

Définition 1.4.2.1 (Familles libre ou liée)

1. On dit que la famille (x_1, \dots, x_n) de vecteur de E est **libre** si elle vérifie $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

On dit que les vecteurs x_1, \dots, x_n sont **linéairement indépendant**.

2. On dit que la famille (x_1, \dots, x_n) de vecteur de E est **liée** si elle n'est pas libre ce qui signifie $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \text{ et } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0).$$

Une égalité $\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \dots + \lambda_nx_n = 0$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nul est appelé combinaison linéaire sur les vecteurs x_1, \dots, x_n . On dit que les vecteurs x_1, \dots, x_n sont **linéairement dépendant**.

Exemple 1.4.2.2

1. soient $u = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$. La famille $\{u, v\}$ est génératrice de \mathbb{R}^2 car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
2. Soient $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, -1, 0)$ et $w = (2, 1, 1)$. Est-ce que la famille $\{u, v, w\}$ est libre ou liée ?

Résolvons le système linéaire correspondant à l'équation :

$$\lambda_1u + \lambda_2v + \lambda_3w = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & (L1) \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (L2) \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 & (L3) \end{cases}$$

En appliquant la méthode combinaison : On fixe pour la première équation comme référence, en faisant $(L1) - (L2)$, on obtient $3\lambda_2 + \lambda_3 = 0$, puis $(L1) - (L3)$, on obtient $2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

D'où,

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & (L1) \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & ((L1) - (L2)) \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & ((L1) - (L3)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & (L1) \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & ((L1) - (L2)) \\ \lambda_3 = 0 & (3(L3) - 2(L2)) \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Alors la famille $\{u, v, w\}$ est libre.