



# Chapitre 1

## Espaces vectoriels

L'ensemble  $\mathbb{K}$  désigne toujours  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 1.1 Espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

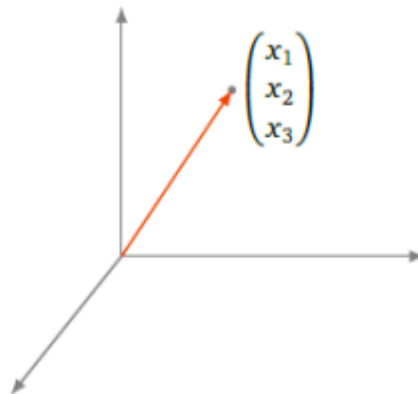
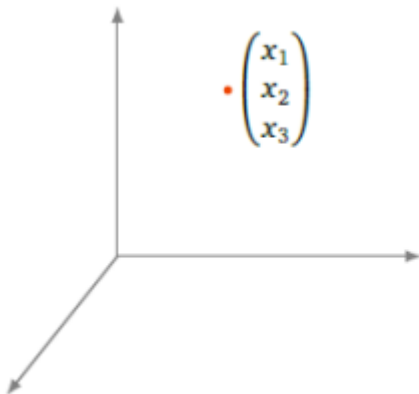
#### 1.1.1 Opérations sur les vecteurs de $\mathbb{R}^n$

L'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  est souvent représenté par une droite. C'est un espace de **dimension 1**.

– Le plan est formé des couples  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  de nombres réels. Il est noté  $\mathbb{R}^2$ . C'est un espace à **deux dimensions**.

– L'espace de **dimension 3** est constitué des triplets de nombres réels  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ . Il est noté  $\mathbb{R}^3$ .

Le symbole  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  a deux interprétations géométriques : soit comme un point de l'espace (figure de gauche), soit comme un vecteur (figure de droite) :



On généralise ces notions en considérant des espaces de dimension  $n$  pour tout entier positif

$n = 1, 2, 3, 4, \dots$ . Les éléments de l'espace de dimension  $n$  sont les  $n$ -uplets  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$  de nombres réels.

L'espace de **dimension  $n$**  est noté  $\mathbb{R}^n$ .

Soient  $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

#### Définition 1.1.1.1

1. **Somme de deux vecteurs** : Leur somme est par définition le vecteur

$$u + v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

2. **Produit d'un vecteur par un scalaire** : Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  (appelé un scalaire) :

$$\lambda \cdot u = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

3. **Vecteur nul** de  $\mathbb{R}^n$  est le vecteur  $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$ .

4. **Vecteur opposé** de  $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$  est le vecteur  $-u = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ -x_n \end{pmatrix}$ .

**Théorème 1.1.1.2 (Espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$ )** Soient  $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$  et  $w = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{pmatrix}$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  on dit que  $\mathbb{R}^n$  est un espace vectoriel si et seulement si :

1.  $u + v = v + u$ ,
2.  $u + (v + w) = (u + v) + w$ ,
3.  $u + 0 = 0 + u = u$ ,
4.  $u + (-u) = 0$ ,
5.  $1 \cdot u = u$ ,
6.  $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$ ,
7.  $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
8.  $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ .

### 1.1.2 Produit scalaire et Produit vectoriel

**Définition 1.2.1** Soient  $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . On définit leur **produit scalaire** par :

$$\langle u | v \rangle = \langle u, v \rangle = (u, v) = u^T v = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

c'est un scalaire (un nombre réel).

**Proposition 1.1.2.2** Soient  $u, v, w \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  on a :

1.  $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ ,
2.  $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ .

**Proposition 1.1.2.3 (Produit vectoriel)** Soient  $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ ,

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

**Exemple 1.1.2.4** Soient  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Calculer le produit scalaire et le produit vectoriel des vecteurs  $u$  et  $v$ .  
Calculons les deux produits pour les vecteurs :

$$\langle u, v \rangle = u^T v = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + (-3) \times (-2) + 2 \times 4 = 14.$$

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3) \times 4 - 2 \times (-2) \\ 2 \times 0 - 1 \times 4 \\ 1 \times (-2) - (-3) \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

## 1.2 Espace vectoriel

### 1.2.1 Terminologie et notation

- $E$  est appelé un **espace vectoriel**.
- Les éléments de  $E$  sont appelés **vecteurs**. Au lieu de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, on dit aussi espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .
- $\mathbb{K}$  est le **corps** de base de l'espace vectoriel  $E$ .
- Les éléments de  $\mathbb{K}(=\mathbb{R}, \mathbb{C})$  sont appelés **scalaires**.
- L'**élément neutre**  $0_E$  s'appelle aussi le **vecteur nul**. Il ne doit pas être confondu avec l'élément 0 de  $\mathbb{K}$ . Lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion,  $0_E$  sera aussi noté 0.
- Le **symétrique**  $-u$  d'un vecteur  $u \in E$  s'appelle aussi l'**opposé**.

### 1.2.2 Définition d'un espace vectoriel

Un espace vectoriel est un ensemble formé de vecteurs, de sorte que l'on puisse additionner (et soustraire) deux vecteurs  $u, v$  pour en former un troisième  $u + v$  (ou  $u - v$ ) et aussi afin que l'on puisse multiplier chaque vecteur  $u$  d'un facteur  $\lambda \cdot u$  pour obtenir un vecteur.

**Définition 1.2.2.1** On appelle  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel tout ensemble non vide  $E$  muni :

- d'une **loi de composition interne**(LCI), c'est-à-dire d'une application de  $E \times E$  dans  $E$  :

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow E \\ (u, v) &\mapsto u + v. \end{aligned}$$

- d'une **loi de composition externe**(LCE), c'est-à-dire d'une application de  $\mathbb{K} \times E$  dans  $E$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda \cdot u. \end{aligned}$$

1.  $(E, +)$  est un groupe abélien.
2.  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E$ , on a  $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda u + \mu u$ .
3.  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E$ , on a  $\lambda \cdot (u + v) = \lambda u + \lambda v$ .
4. Il existe un **élément neutre**  $0_E \in E$  tel que  $u + 0_E = u$ .
5.  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E$ , on a  $\lambda \cdot (\mu u) = (\lambda \mu) \cdot u$ .

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés vecteurs et les éléments de  $\mathbb{K}$  sont appelés scalaires.

## 1.3 Sous-espace vectoriel

### 1.3.1 Définition d'un sous-espace vectoriel

Dans toute la suite l'ensemble  $E$  désignera un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

**Définition 1.3.1.1** Soit  $F$  un sous-ensemble de  $E$ . On dit que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si  $F$  possède les propriétés suivantes :

1.  $0_E \in F$ ,
  2.  $\forall u, v \in F$ , on a  $u + v \in F$ .
  3.  $\forall u \in F$  et  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ , on a  $\lambda \cdot u \in F$ .
- Étant que  $u$  et  $v$  sont des vecteurs de  $F$ .

### Remarque 1.3.1.2

- La première condition signifie que le vecteur nul de  $E$  doit aussi être dans  $F$ . En fait il suffit même de prouver que  $F$  est non vide.
- La deuxième condition, c'est dire que  $F$  est stable pour l'addition : la somme  $u + v$  de deux vecteurs  $u, v$  de  $F$  est bien sûr un vecteur de  $E$  (car  $E$  est un espace vectoriel), mais ici on exige que  $u + v$  soit un élément de  $F$ .
- La troisième condition, c'est dire que  $F$  est stable pour la multiplication par un scalaire.

**Exemple 1.3.1.3** L'ensemble  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$  est-elle un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .

1.  $(0, 0) \in F$  car  $0 + 0 = 0$ .
2. Soient  $u = (x, y) \in F$  et  $v = (x', y') \in F$ , d'où  $u + v = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ . On a  $(x + x') + (y + y') = x + y + x' + y' = 0 + 0 = 0$ , donc  $u + v \in F$ .
3. Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $u = (x, y) \in F$ , d'où  $\lambda \cdot u = \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ . On a  $\lambda x + \lambda y = \lambda(x + y) = \lambda \cdot 0 = 0$ . Alors  $\lambda \cdot u \in F$ .

## 1.4 Familles des vecteurs

### 1.4.1 familles génératrices

**Définition 1.4.1.1 (Famille génératrice)** On dit qu'une famille  $\mathcal{F} = \{x_1, \dots, x_n\}$  des vecteurs de  $E$  est génératrice de  $E$ , si tout vecteur  $x$  de  $E$  s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire  $\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ , tel que

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k.$$

Autrement dit que  $E = \text{Vect}\{x_1, \dots, x_n\}$ .

**Exemple 1.4.1.2** Deux vecteurs non colinéaires forment une famille génératrice.

### 1.4.2 Familles libres et liés

**Définition 1.4.2.1 (Familles libre ou liée)**

1. On dit que la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  de vecteur de  $E$  est **libre** si elle vérifie  $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

On dit que les vecteurs  $x_1, \dots, x_n$  sont **linéairement indépendant**.

2. On dit que la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  de vecteur de  $E$  est **liée** si elle n'est pas libre ce qui signifie  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \text{ et } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0).$$

Une égalité  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$  avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  non tous nul est appelé combinaison linéaire sur les vecteurs  $x_1, \dots, x_n$ . On dit que les vecteurs  $x_1, \dots, x_n$  sont **linéairement dépendant**.

### Exemple 1.4.2.2

1. soient  $u = (1, 0)$  et  $v = (0, 1)$ . La famille  $\{u, v\}$  est génératrice de  $\mathbb{R}^2$  car les deux vecteurs ne sont pas colinéaire.
2. Soient  $u = (1, 1, 1)$ ,  $v = (2, -1, 0)$  et  $w = (2, 1, 1)$ . Est-ce que la famille  $\{u, v, w\}$  est libre ou liée ?

Résolvons le système linéaire correspond à l'équation :

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & (L1) \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (L2) \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 & (L3) \end{cases}$$

En appliquant la méthode combinaison : On fixe pour le premier équation comme référence, en faisant  $(L1) - (L2)$ , on obtient  $3\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ , puis  $(L1) - (L3)$ , on obtient  $2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ .

D'où,

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & (L1) \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & ((L1) - (L2)) \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & ((L1) - (L3)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & (L1) \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & ((L1) - (L2)) \\ \lambda_3 = 0 & (3(L3) - 2(L2)) \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Alors la famille  $\{u, v, w\}$  est libre.