第 35 卷　第 5 期
2013 年 5 月

系统工程与电子技术
Systems Engineering and Electronics

Vol. 35　No. 5
May 2013

文章编号:1001-506X(2013)05-1013-05

网址:www.sys-ele.com

考虑合成灰数灰度性质的改进区间灰数预测模型

王大鹏[1]，汪秉文[1]，李睿凡[2]

(1. 华中科技大学控制科学与工程系，湖北 武汉 430074;
2. 北京邮电大学计算机学院，北京 100876)

摘　要: 基于核和灰度的区间灰数预测模型，初步解决了区间灰数序列预测问题，但模型中灰度预测值的确定方法存在不足，且模型不支持误差分析。提出了合成灰数灰度的定义及其性质，据此分析了模型存在的问题，并建立灰度序列的预测模型实现灰度预测，以代替原有模型中灰度预测值的确定方法，从而改进和完善了原有区间灰数预测模型。改进模型从核和灰度两个方面同时发掘区间灰数序列的内蕴信息与发展趋势，克服了原有模型存在的不足，且支持误差分析和精度检验。算例表明了改进模型的有效性和可用性。

关键词: 区间灰数; 预测模型; 合成灰数; 灰度

中图分类号: N 491.5　　　**文献标志码:** A　　　**DOI:** 10.3969/j.issn.1001-506X.2013.05.19

Improved prediction model of interval grey number based on the characteristics of grey degree of compound grey number

WANG Da-peng[1], WANG Bing-wen[1], LI Rui-fan[2]

(1. *Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China*;
2. *School of Computer Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China*)

Abstract: A prediction model of interval grey number based on kernel and grey degree preliminaryly solves the problem of prediction for interval grey number, while still has some model deficiencies which need to be improved in error analysis and the method of determining the predicted value of grey degree of interval grey number. These model deficiencies are analyzed based on the definition and characteristics of compound grey number which are proposed. Furthermore, a prediction model for grey degree is built instead of the original deficient method, thus the original prediction model of interval grey number is improved and perfected. The improved model can excavate both potential information and developing trend of interval grey number list from the aspects of both kernel and grey degree, thus the original model deficiencies are overcome, and error analysis and precision test are supported. Example analysis demonstrates the applicability of the improved model.

Keywords: interval grey number; prediction model; compound grey number; grey degree

0　引　言

灰数是已知大概范围而不知其确切的数，是灰色系统的基本单元[1-2]。在系统研究中，由于人的认知能力有限，对反映系统运行行为的信息难以完全认知[3]，使用“灰数”代替“实数”来表征系统信息，更有助于把握系统运行特征和系统发展趋势。因此，近年来面向区间灰数序列预测模型的研究逐步受到学者的关注。这些研究主要从灰数序列的表征[4-6]、几何特性[7-10]、白化权函数[11]以及发展趋势、认知程度[12]等方面挖掘灰数序列内蕴的系统信息，进而建立预测模型，取得了一定的进展。

文献[13－14]提出了基于论域的灰度和灰数的核的定义，并基于此建立了区间灰数的运算法则和灰代数系统[14-15]。文献[16]建立了一种基于核和灰度的区间灰数预测模型。该模型建模的基本思路是:(1) 建立基于区间灰数核序列的 GM(1,1)模型，实现区间灰数“核”的预测;(2) 基于文献[14]中的“灰度不减公理”，取区间灰数序列中灰度较大的灰元的灰度作为预测结果的灰度;(3) 基于核和

收稿日期:2012－02－06;　**修回日期:**2012－08－06;　**网络出版日期:**2013－04－03。

网络出版地址:http://www.cnki.net/KCMS/detail/detail.aspx? QueryID=78&CurRec=1&recid=&filename=XTYD20130403002&dbname=CAPJ2013&dbcode=CJFQ&pr=&urlid=&yx=

基金项目:国家自然科学基金(60773190,60802002)资助课题

灰度的定义及计算公式，反推区间灰数上界和下界的预测表达式，进而建立区间灰数预测模型。该模型建模过程简单，且不破坏区间灰数的独立性和完整性，具有一定的优势。但由于该模型简单地取区间灰数序列中灰度最大的灰元的灰度作为预测结果的灰度，灰度预测值的确定方法存在问题，将导致模型存在不可避免的系统误差，且无法进行误差分析和精度检验，有待改进和完善。

本文在前人研究的基础上，提出合成灰数灰度的定义及性质，据此分析基于核和灰度的区间灰数预测模型存在的问题，并建立区间灰数灰度序列的 GM(1,1)模型实现灰度预测，以代替原有模型中灰度预测值的确定方法，从而实现对原有区间灰数预测模型的改进和完善。改进模型通过同时建立核序列和灰度序列的 GM(1,1)模型，对区间灰数的“核”和“灰度”进行预测，然后通过“核”和“灰度”还原计算得到整个区间灰数序列的上界和下界，最终实现区间灰数序列的预测和误差分析。

1 基于论域的合成灰数灰度及性质

定义 1[14] 设连续灰数$\otimes\in[\underline{a},\overline{a}]$，$\underline{a}<\overline{a}$，$\underline{a}$ 和$\overline{a}$分别为$\otimes$的下界和上界，在缺乏$\otimes$取值分布信息的情况下，称$\tilde{\otimes}=\dfrac{\underline{a}+\overline{a}}{2}$为灰数$\otimes$的核。

定义 2[13] 设灰数$\otimes$产生的背景或论域为 Ω，$\mu(\otimes)$为灰数$\otimes$的取数域的测度，称 $g^{o}(\otimes)=\dfrac{\mu(\otimes)}{\mu(\Omega)}$为灰数$\otimes$的灰度。

设 Ω 为灰数$\otimes$产生的背景或论域，$\mu(\otimes)$为灰数$\otimes$的取数域的测度，则灰数$\otimes$的灰度 $g^{o}(\otimes)$满足灰度 4 公理[13]。

公理 1 $0\leqslant g^{o}(\otimes)\leqslant 1$。

公理 2 $\otimes\in[\underline{a},\overline{a}]$，$\underline{a}\leqslant\overline{a}$，当 $\underline{a}=\overline{a}$时，$g^{o}(\otimes)=0$。

公理 3 $g^{o}(\Omega)=1$。

公理 4 $g^{o}(\otimes)$与 $\mu(\otimes)$成正比，与 $\mu(\Omega)$成反比。

定义 3[16] 在 $X(\otimes)=(\otimes_1,\otimes_2,\cdots,\otimes_n)$中，根据定义 1 和定义 2，由每个灰元的“核”和“灰度”所构成的序列，分别称为 $\boldsymbol{X}(\otimes)$的核序列 $\boldsymbol{X}(\tilde{\otimes})$和灰度序列 $\boldsymbol{G}^{o}(\otimes)$，记作

$$X(\tilde{\otimes})=(\tilde{\otimes}_1,\tilde{\otimes}_2,\cdots,\tilde{\otimes}_n)$$

$$G^{o}(\otimes)=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$$

定义 4[17] 如果一个灰数能且只能用一个信息背景下的灰数线性表示时，称此灰数为简单灰数。

定义 5[17] 如果一个灰数可以用两个或两个以上相同或不同背景的灰数的和、差、积、商线性组合表示时，则称此灰数为合成灰数。

合成灰数是简单灰数进行和、差、积、商等运算后的结果。由定义 2 可知，一个灰数灰度大小与该灰数的论域有着不可分割的联系，因此，在讨论合成灰数灰度时，也应关注该合成灰数的论域。简单灰数进行和、差、积、商运算生成合成灰数时，简单灰数的论域也应进行相应的和、差、积、商运算，从而生成该合成灰数的论域。

定义 6 设合成灰数$\otimes=\otimes_i o\otimes_j$，其中，$\otimes_i$、$\otimes_j$ 分别为论域 Ω_i、Ω_j 下的简单区间灰数，o 为运算关系，$o\in\{+,-,\times,\div\}$，则称 $\Omega=\Omega_1 o\Omega_2$ 为合成灰数$\otimes$的论域。

定义 7 设合成灰数$\otimes=\otimes_i o\otimes_j$，论域为 $\Omega=\Omega_1 o\Omega_2$，其中，$\otimes_i$、$\otimes_j$ 分别为论域 Ω_i、Ω_j 下的简单区间灰数，o 为运算关系，$o\in\{+,-,\times,\div\}$，则合成灰数$\otimes$的灰度为

$$g^{\circ}(\otimes)=\frac{\mu(\otimes)}{\mu(\Omega)}=\frac{\mu(\otimes_1 o\otimes_2)}{\mu(\Omega_1 o\Omega_2)}\tag{1}$$

定理 1 由式(1)给出的合成灰数灰度满足灰度定义的 4 个公理。

证明 (1) 由$\otimes_i\subset\Omega_i$、$\otimes_j\subset\Omega_j$ 及测度的性质可知：$\otimes_i o\otimes_j\subset\Omega_i o\Omega_j$，则有

$$0\leqslant\mu(\otimes)=\mu(\otimes_i o\otimes_j)\leqslant\mu(\Omega_i o\Omega_j)=\mu(\Omega)$$

故 $0\leqslant g^{\circ}(\otimes)\leqslant 1$。

(2) 设合成灰数$\otimes\in[\underline{a},\overline{a}]$，当 $\underline{a}=\overline{a}$时，$\mu(\otimes)=0$，从而 $g^{\circ}(\otimes)=0$。

公理 3 和公理 4 显然成立。 证毕

定理 2 设有$\otimes_i$、$\otimes_j$，灰度分别为 $g(\otimes_i)$、$g(\otimes_j)$，若有 $g(\otimes_i)\leqslant g(\otimes_j)$，合成灰数$\otimes=\otimes_i+\otimes_j$ 的灰度为$g(\otimes)$，则有 $g(\otimes_i)\leqslant g(\otimes)\leqslant g(\otimes_j)$。

证明 设有区间灰数$\otimes_i\subset\Omega_i$，$\otimes_j\subset\Omega_j$，$\otimes_i=[a,b]$，$\Omega=[A,B]$，$\otimes_j=[c,d]$，$\Omega_j=[C,D]$。

由测度的性质可知：

$$\mu(\otimes_i+\otimes_j)=(b+d)-(a+c)=$$
$$(b-a)+(d-c)=\mu(\otimes_i)+\mu(\otimes_j)$$
$$\mu(\Omega_i+\Omega_j)=(B+D)-(A+C)=$$
$$(B-A)+(D-C)=\mu(\Omega_i)+\mu(\Omega_j)$$

从而有

$$g(\otimes)=\frac{\mu(\otimes_i+\otimes_j)}{\mu(\Omega_i+\Omega_j)}=\frac{\mu(\otimes_i)+\mu(\otimes_j)}{\mu(\Omega_i)+\mu(\Omega_j)}=$$
$$\frac{g(\otimes_i)\cdot\mu(\Omega_i)+g(\otimes_j)\cdot\mu(\Omega_j)}{\mu(\Omega_i)+\mu(\Omega_j)}$$

因 $g(\otimes_i)\leqslant g(\otimes_j)$，则有

$$g(\otimes_i)=\frac{g(\otimes_i)\cdot\mu(\Omega_i)+g(\otimes_i)\cdot\mu(\Omega_j)}{\mu(\Omega_i)+\mu(\Omega_j)}\leqslant$$
$$g(\otimes)\leqslant\frac{g(\otimes_j)\cdot\mu(\Omega_i)+g(\otimes_j)\cdot\mu(\Omega_j)}{\mu(\Omega_i)+\mu(\Omega_j)}=g(\otimes_j)$$

证毕

定理 3 设有$\otimes_i$、$\otimes_j$，灰度分别为 $g(\otimes_i)$、$g(\otimes_j)$，若有 $g(\otimes_i)\leqslant g(\otimes_j)$，合成灰数$\otimes=\otimes_i-\otimes_j$ 的灰度为 $g(\otimes)$，则有 $g(\otimes_i)\leqslant g(\otimes)\leqslant g(\otimes_j)$。

定理 4 设有灰度为 $g(\otimes_i)$的灰数$\otimes_i$ 和实数 k，合成灰数$\otimes=k\cdot\otimes_i$ 的灰度为 $g(\otimes)$，则有 $g(\otimes)=g(\otimes_i)$。

定理 3 和定理 4 的证明同定理 2，不再赘述。

定义 8 设有论域分别为 Ω_1、Ω_2、$\cdots$、Ω_n 的简单区间灰数$\otimes_1$、$\otimes_2$、$\cdots$、$\otimes_n$ 和 a_1、a_2、$\cdots$、$a_n\in\mathbf{R}$，则称$\otimes=a_1\cdot\otimes_1+a_2\cdot\otimes_2+\cdots+a_n\cdot\otimes_n$ 为线性合成灰数。

推论 1 (线性收敛性)线性合成灰数的灰度大于灰度最小的灰数的灰度，小于灰度最大的灰数的灰度。

2　基于核和灰度的区间灰数预测模型存在的问题及改进

由推论 1 可知，在线性运算这种特例下，文献[14]提出的“灰度不减公理”，即“两个灰度不同的区间灰数进行和、差、积、商运算时，运算结果的灰度不小于灰度较大的区间灰数的灰度”是不成立的。因此，“灰度不减公理”整体上是不完备、有缺陷的。而原有基于核和灰度的区间灰数预测模型正是基于本身存在缺陷的“灰度不减公理”，将建模序列中灰度较大的灰元的灰度确定为预测结果的灰度[16]，显然是缺乏理论依据的。其次，这种灰度预测值的确认方式，没有考虑到灰度（即人们对于灰数所表征的系统的不确认程度）在未来的发展变化趋势，将使灰度的预测值与实际值存在较大偏差，进而产生不可避免的系统误差。最后，该模型仅确定了预测值的灰度，而没有给出整个灰度序列的拟合方法，无法还原出建模灰数序列的模拟值，也就无从进行误差分析和精度检验。

考虑到区间灰数序列 $X(\otimes)$ 中各灰元的灰度序列 $G^{o}(\otimes)$ 亦有自身的发展趋势和变化规律，可建立灰度序列的 GM(1,1) 模型，实现对区间灰数“灰度”的预测，以代替原有模型中灰度预测值的确定方法，最后通过“核”和“灰度”的预测值还原计算得到整个区间灰数序列的上界和下界，并进行误差检验，最终实现对基于核和灰度的区间灰数预测模型的改进和完善。

2.1　计算区间灰数序列的核序列和灰度序列

对于区间灰数序列 $\boldsymbol{X}(\otimes)=(\otimes_1,\otimes_2,\cdots,\otimes_n)$，其中 $\otimes_k=[\underline{A}_k,\overline{A}_k](k=1,2,\cdots,n)$，计算相应的核序列 $X(\tilde{\otimes})=(\tilde{\otimes}_1,\tilde{\otimes}_2,\cdots,\tilde{\otimes}_n)$ 和灰度序列 $G^{o}(\otimes)=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$，式中

$$\begin{cases}\tilde{\otimes}_k=\dfrac{\underline{A}_k+\overline{A}_k}{2}\\[2ex] g_k=\dfrac{\overline{A}_k+\underline{A}_k}{\mu(\Omega)}\end{cases}\tag{2}$$

2.2　建立核序列和灰度序列的 GM(1,1) 模型

对核序列 $X(\tilde{\otimes})=(\tilde{\otimes}^{(0)}(1),\tilde{\otimes}_2,\cdots,\tilde{\otimes}_n)$ 和灰度序列 $G^{o}(\otimes)=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$ 分别建立 GM(1,1) 模型为

$$\begin{cases}\tilde{\otimes}_k+a_{\otimes}z_{\otimes}^{(1)}(k)=b_{\otimes}\\ g_k+a_g z_g^{(1)}(k)=b_g\end{cases}\tag{3}$$

式中

$$z_{\otimes}^{(1)}(k)=0.5(\tilde{\otimes}_k^{(1)}+\tilde{\otimes}_{k-1}^{(1)}),\ \tilde{\otimes}_k^{(1)}=\sum_{i=1}^{k}\tilde{\otimes}_i$$

$$z_g^{(1)}(k)=0.5(g_k^{(1)}+g_{k-1}^{(1)}),g_k^{(1)}=\sum_{i=1}^{k}g_i$$

$$k=2,3,\cdots,n$$

由最小二乘法求得模型的参数及解为

$$\boldsymbol{\alpha}_{\otimes}=\begin{bmatrix}a_{\otimes}\\ b_{\otimes}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{B}_{\otimes}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{\otimes})^{-1}\boldsymbol{B}_{\otimes}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{\otimes}\tag{4}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_g=\begin{bmatrix}a_g\\ b_g\end{bmatrix}=(\boldsymbol{B}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_g)^{-1}\boldsymbol{B}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_g\tag{5}$$

$$\hat{\tilde{\otimes}}_k^{(0)}=\left(\frac{1-0.5a_{\otimes}}{1+0.5a_{\otimes}}\right)^{k-2}\left(\frac{b_{\otimes}-a_{\otimes}\tilde{\otimes}_1}{1+0.5a_{\otimes}}\right)\tag{6}$$

$$\hat{g}_k^{(0)}=\left(\frac{1-0.5a_g}{1+0.5a_g}\right)^{k-2}\left(\frac{b_{\otimes}-a_{\otimes}\ g_1}{1+0.5a_g}\right)\tag{7}$$

式中

$$\boldsymbol{Y}_{\otimes}=\begin{bmatrix}\tilde{\otimes}_2\\ \tilde{\otimes}_3\\ \vdots\\ \tilde{\otimes}_n\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_{\otimes}=\begin{bmatrix}-z_{\otimes}^{(1)}(2) & 1\\ -z_{\otimes}^{(1)}(3) & 1\\ \vdots & \vdots\\ -z_{\otimes}^{(1)}(n) & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}_g=\begin{bmatrix}g_2\\ g_3\\ \vdots\\ g_n\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_g=\begin{bmatrix}-z_g^{(1)}(2) & 1\\ -z_g^{(1)}(3) & 1\\ \vdots & \vdots\\ -z_g^{(1)}(n) & 1\end{bmatrix}$$

式(6)和式(7)分别为区间灰数序列核序列和灰度序列的预测模型。

2.3　改进的区间灰数预测模型

由式(2)、式(6)和式(7)可还原得到区间灰数序列的上界和下界为

$$\begin{cases}\hat{\tilde{\otimes}}_k^{(0)}=\dfrac{\hat{\underline{A}}_k+\hat{\overline{A}}_k}{2}\\[2ex] \hat{g}_k^{(0)}=\dfrac{\hat{\overline{A}}_k-\hat{\underline{A}}_k}{\mu(\Omega)}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\hat{\overline{A}}_k=\hat{\tilde{\otimes}}_k^{(0)}+0.5\cdot\hat{g}_k^{(0)}\cdot\mu(\Omega)\\ \hat{\underline{A}}_k=\hat{\tilde{\otimes}}_k^{(0)}-0.5\cdot\hat{g}_k^{(0)}\cdot\mu(\Omega)\end{cases}\tag{8}$$

式(8)即为改进的区间灰数预测模型。

2.4　误差检验

首先，计算区间灰数序列各灰元上下界的相对误差绝对值为

$$\begin{cases}\overline{\sigma_k}=\dfrac{\left|\hat{\overline{A}}_k-\overline{A}_k\right|}{\overline{A}_k}\%\\[2ex] \underline{\sigma_k}=\dfrac{\left|\hat{\underline{A}}_k-\underline{A}_k\right|}{\underline{A}_k}\%\end{cases}\tag{9}$$

然后，计算模型平均相对误差为

$$\overline{\sigma(\otimes)}=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(\overline{\sigma_k}+\underline{\sigma_k})\tag{10}$$

3　算例分析

针对文献[16]中的算例数据（见表 1），使用本文改进

的区间灰数预测模型进行预测并进行误差分析。

表 1 文献[16]中的区间灰数序列 $X(\otimes)$ ($\Omega\in[20,80]$)

$\otimes_1$	$\otimes_2$	$\otimes_3$	$\otimes_4$	$\otimes_5$
[24,40]	[30,48]	[36,56]	[44,66]	[52,72]

步骤 1 按照式(5)计算区间灰数序列的核序列和灰度序列,结果如表 2 所示。

表 2 $X(\otimes)$的核序列和灰度序列

k	1	2	3	4	5
$\tilde{\otimes}_k$	32	39	46	55	62
g_k	0.266 7	0.3	0.333 3	0.366 7	0.333 3

步骤 2 按照式(3)建立区间灰数序列的核序列和灰度序列 GM(1,1)模型为

$$\tilde{\otimes}_k + a_{\otimes} z_{\otimes}^{(1)}(k) = b_{\otimes}$$

$$g_k + a_g z_g^{(1)}(k) = b_g$$

按照式(4)和式(5)求解模型参数,得到

$$\begin{cases} a_{\otimes} = -0.153\,7 \\ b_{\otimes} = 31.558\,4 \end{cases}, \begin{cases} a_g = -0.038\,4 \\ b_g = 0.298\,1 \end{cases}$$

进而按照式(6)和式(7)求得核序列和灰度序列的模拟值和预测值,如表 3 所示。

表 3 $X(\otimes)$的核序列和灰度序列的模拟值及预测值

k	1	2	3	4	5	6
$\hat{\tilde{\otimes}}_k$	32	39.428 5	46.978 5	53.616 5	62.523 5	72.910 0
$\hat{g}_k$	0.266 7	0.314 4	0.326 7	0.339 5	0.352 8	0.366 5

步骤 3 按照式(8),通过核序列和灰度序列的模拟值还原计算得到区间灰数序列的上界和下界的模拟值,并按照式(9)计算其相对误差绝对值,如表 4 所示。

表 4 $X(\otimes)$的模拟值及相对误差

	实际值	模拟值	下界相对误差 $\underline{\sigma_k}$/%	上界相对误差 $\overline{\sigma_k}$/%
$\otimes_1$	[24,40]	[24,40]	0	0
$\otimes_2$	[30,48]	[29.996 5,48.860 5]	0.01	1.79
$\otimes_3$	[36,56]	[37.177 5,55.779 5]	0.49	0.39
$\otimes_4$	[44,66]	[43.431 5,63.801 5]	1.29	3.33
$\otimes_5$	[52,72]	[51.939 5,73.107 5]	0.12	1.54

最后按照式(10)计算平均模拟相对误差为

$$\sigma(\otimes) = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{5}(\overline{\sigma_k} + \underline{\sigma_k}) = 0.896\%$$

模型的平均模拟相对误差小于 0.01,精度为 1 级。

由于文献[16]提出的区间灰数预测模型本身不能对区间灰数序列实现拟合,无法进行误差分析,因此也就无法与本文提出的改进区间灰数预测模型的预测效果进行比较。但从上述算例可知,本文改进模型的灰度预测值通过建立灰度序列的 GM(1,1)模型预测得到,体现了区间灰数序列灰度的发展趋势和变化规律,较原有模型更为合理。同时,改进模型实现了对整个区间灰数序列的拟合,从而实现了模型误差分析和精度检验,较原有模型更为完善。

4 结 论

本文基于论域,提出了合成灰数灰度的定义及性质,据此分析了基于核和灰度的区间灰数预测模型中灰度预测值的确认方法存在的不足,并通过分别建立核序列和灰度序列的 GM(1,1)模型,从“核”和“灰度”两个方面同时发掘区间灰数序列的内蕴信息和发展趋势,实现了对原有区间灰数预测模型的改进和完善,较好地克服了原有模型存在的不足,同时实现了模型的误差分析和精度检验。算例表明了该改进模型的有效性。核序列和灰度序列是区间灰数序列的两个重要特征序列,研究表明,灰数的灰度与核是相互关联的[1-2]。考虑这种关联性,建立核序列和灰度序列的关联预测模型,进而实现区间灰数序列预测,提高预测精度,可以作为下一阶段研究的重点。

参考文献:

[1] Liu S F, Forrest J, Yang Y J. A brief introduction to grey systems theory[J]. *Grey Systems: Theory and Application*, 2012, 2(2): 1-9.

[2] Deng J L. *The foundation of grey system*[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press,2002: 1-46.(邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社,2002: 1-46.)

[3] Liu S F, Dang Y G, Fang Z G, et al. *Grey system theories and its applications*[M]. 4th ed. Beijing: Science Press, 2010: 1-23. (刘思峰, 谢乃明, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 4 版. 北京:科学出版社, 2010: 1-23.)

[4] Fang Z G, Liu S F, Lu F, et al. Study on improvement of token and arithmetic of interval grey numbers and its GM(1,1) model[J]. *Engineering Science*, 2005, 7(2): 57-61. (方志耕, 刘思峰, 陆芳, 等. 区间灰数表征与算法改进及 GM(1,1)模型应用研究[J]. 中国工程科学, 2005, 7(2) : 57-61.)

[5] Fang Z G, Liu S F. Study on GM(1,1) model based on interval grey number(GMBIGN(1,1))[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2005, 10(2): 130-134. (方志耕,刘思峰. 基于区间灰数列的 GM(1,1)模型(GMBIGN(1,1))研究[J]. 中国管理科学, 2005, 10(2): 130-134.)

[6] Meng W, Liu S F, Zeng B. Standardization of interval grey number and research on its prediction modeling and application[J]. *Control and Decision*, 2012, 27(5): 773-776. (孟伟, 刘思峰, 曾波. 区间灰数的标准化及其预测模型的构建与应用研究[J]. 控制与决策, 2012, 27(5): 773-776.)

[7] Zeng B, Liu S F, Xie N M, et al. Prediction model for interval grey number based on grey band and grey layer[J]. *Control and Decision*, 2010, 25(10): 1585-1588. (曾波, 刘思峰, 谢乃明, 等. 基于灰数带及灰数层的区间灰数预测模型[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1585-1588.)

[8] Zeng B, Liu S F, Xie N M. Prediction model of interval grey number based on DGM(1,1)[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2010, 21(4): 598-603.

[9] Zeng B, Liu S F. Prediction model of interval grey number based on its geometrical characteristics[J]. *Journal of Systems Engi-*

neering，2011，26(2)：122－126.（曾波，刘思峰. 一种基于区间灰数几何特征的灰数预测模型[J]. 系统工程学报，2011，26(2)：122－126.）

[10] Zeng B，Liu S F，Meng W. Prediction model of discrete grey number based on kernels and areas[J]. *Control and Decision*，2011，26(9)：1421－1424.（曾波，刘思峰，孟伟. 基于核和面积的离散灰数预测模型[J].控制与决策，2011，26(9)：1421－1424.）

[11] Zeng B，Liu S F，Cui J. Prediction model for interval grey number with known whitenization weight function[J]. *Control and Decision*，2010，25(12)：1815－1820.（曾波，刘思峰，崔杰. 白化权函数已知的区间灰数预测模型[J]. 控制与决策，2010，25(12)：1815－1820.）

[12] Yuan C Q，Liu S F，Zhang K. Prediction model for interval grey number based on trend and cognition[J]. *Control and Decision*，2011，26(2)：313－319.（袁潮清，刘思峰，张可. 基于发展趋势和认知程度的区间灰数预测[J]. 控制与决策，2011，26(2)：313－319.）

[13] Liu S F，Lin Y. An axiomatic definition of degree of greyness of grey numbers[C]// *Proc. of the IEEE International Conference on Systems，Man and Cybernetics*，2004：2420－2424.

[14] Liu S F，Fang Z G，Xie N M. Algorithm rules of interval grey numbers based on the Kernel and the degree of grayness of grey numbers[J]. *Systems Engineering and Electronics*，2010，32(2)：313－316.（刘思峰，方志耕，谢乃明.基于核和灰度的区间灰数运算法则[J].系统工程与电子技术，2010，32(2)：313－316.）

[15] Liu S F，Fang Z G，Forrest J. On algorithm rules of interval grey numbers based on the "Kernel" and the degree of greyness of grey numbers[C]// *Proc. of the IEEE International Conference on Systems，Man and Cybernetics*，2010：756－760.

[16] Zeng B. Prediction model of interval grey number based on kernel and degree of greyness[J]. *Systems Engineering and Electronics*，2011，33(4)：821－824.（曾波. 基于核和灰度的区间灰数预测模型[J]. 系统工程与电子技术，2011，33(4)：821－824.）

[17] Xie N M. Researches on grey system modeling technology[D]. Nanjing：Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，2008：18－30.（谢乃明. 灰色系统建模技术研究[D]. 南京：南京航空航天大学，2008：18－30.）

作者简介：

王大鹏(1977－)，男，高级工程师，博士研究生，主要研究方向为灰色系统理论、负荷预测等。
E-mail：dpwang77@126.com

汪秉文(1946－)，男，教授，博士研究生导师，主要研究方向为控制理论与应用、生产过程自动化等。
E-mail：wangbw4179@163.com

李睿凡(1975－)，男，讲师，博士，主要研究方向为智能信息处理、多模态信息处理。
E-mail：rfli@bupt.edu.cn