TD ARITHMÉTIQUE ÉLÉMENTAIRE

N.B.

La difficulté de chaque exercice est indiquée par le nombre d'astérisques : il va d'un * pour les exercices d'application directe du cours, à quatre **** pour les exercices plus abstraits ou mélangeant différentes notions.

LA DIVISIBILITÉ ENTRE ENTIERS

Vocabulaire :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a **divise** b, ou que a est un **diviseur** de b, ou encore que b est un **multiple** de a, si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a\,q$.

Question 1 *

Trouver le plus petit entier naturel divisible par tous les nombres entre 1 et 10.

Question 2 **

Soient a et b deux entiers. Montrer que l'un des entiers

$$a,\ b,\ a+b,\ a-b$$

est nécessairement un multiple de 3.

Question 3 *

Soit n un nombre entier à $k+1$ chiffres. Le nombre n s'écrit en base dix sous la forme

$$r_k\, r_{k-1}\, r_{k-2}\, \cdots\, r_2\, r_1\, r_0, \tag{1}$$

où l'on a juxtaposé les $k+1$ chiffres de n les uns après les autres. L'écriture (1) est appelée l'écriture décimale de n, et elle sous-entend que

$$n = r_k \cdot 10^k + r_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots r_2 \cdot 100 + r_1 \cdot 10 + r_0.$$

Par exemple, l'écriture décimale du numéro de l'année actuellement en cours est 2022.

Justifier les affirmations suivantes :

(a) Un nombre n est divisible par 2 si, et seulement si son dernier chiffre r_0 est divisible par 2.

(b) Un nombre n est divisible par 5 si, et seulement si son dernier chiffre r_0 est 0 ou 5.

(c) Un nombre n est divisible par 10 si, et seulement si son dernier chiffre r_0 est 0.

(d) Un nombre n est divisible par 4 si, et seulement si le nombre $r_1 r_0$ formé par des deux derniers chiffres est divisible par 4.

(e) Un nombre n est divisible par 25 si, et seulement si le nombre $r_1 r_0$ formé par des deux derniers chiffres est divisible par 25.

Question 4 *

Résoudre les exercices suivants en développant le critère de divisibilité approprié :

(a) Déterminer la plus grande puissance de 2 qui divise chacun des nombres suivants :

$$201984, \quad 1987776, \quad 89375744.$$

(b) Déterminer la plus grande puissance de 5 qui divise chacun des nombres suivants :

$$951675, \quad 1987705, \quad 8937500.$$

(c) Tester les nombres suivants pour la divisibilité par 3 et 9 :

$$3019071, \quad 5501100222, \quad 971022001.$$

(d) Tester les nombres suivants pour la divisibilité par 11 :

$$1127371, \quad 2790906437, \quad 1001001.$$

(e) Tester les nombres suivants pour la divisibilité par 7 et par 13 :

$$1912911, \quad 371293, \quad 491220639.$$

Propriétés élémentaires :

Soient a, b et c des entiers. Montrer les propriétés suivantes, à titre d'exercice :

1. Si a divise b et b divise c alors a divise c.
2. Si a divise b et b divise a alors $a = \pm b$.
3. Si a divise b et c alors a divise $b + c$.
4. Si a divise b alors a divise bc.
5. Si a divise b alors ac divise bc.

Question 5 *

On considère trois nombres dont l'écriture en base dix est abc, abb, acc. Montrer que la somme de ces trois nombres est un nombre divisible par 3

Question 6 *

On considère deux nombres dont l'écriture en base dix est cba et bba. Proposer un troisième nombre de trois chiffres uniquement formé avec les chiffres a, b, c pour que la somme des trois nombres soit divisible par 3.

Question 7 **

Trouver un nombre entier n à trois chiffres, tel que n soit un multiple de 5 et de 14, et que la somme des chiffres de n soit égale à 14.

LA DIVISION EUCLIDIENNE

Question 8 *

Une girouette indique le Nord quand un coup de vent la fait tourner dans le sens horaire de 14060 degrés. Quelle direction indique-t-elle maintenant ?

Question 9 **

On dispose d'un rectangle dont les dimensions, exprimées en centimètres, sont $L = 126$ et $l = 90$. On désire paver ce rectangle avec des carrés de la façon suivante :

- tous les carrés doivent être identiques ;
- on souhaite utiliser le moins de carrés possibles.

Quelles sont les dimensions des carrés que l'on doit choisir pour faire ce pavage ?

Combien va-t-on utiliser de carrés ?

Question 10 **

On range 461 pots de yaourts dans des caisses. La règle est qu'on ne commence une nouvelle caisse que quand la précédente est pleine. A la fin, on a rangé les pots dans 14 caisses.
Combien de pots contiennent les caisses pleines ?

Combien de pots contient la dernière caisse ?

Théorème de la division Euclidienne.

Pour tous entiers naturels a et b, avec $b \neq 0$, il existe deux uniques entiers naturels (q, r) qui vérifient

$$\begin{cases} a = qb + r \\ 0 \leq r < b. \end{cases}$$

On appelle

$a \to$ le dividende $\qquad q \to$ le quotient

$b \to$ le diviseur $\qquad r \to$ le reste.

Question 11 *

Dire laquelle de ces écritures est une application du Théorème de la division Euclidienne, pour $a = 30$ et $b = 7$:

$$30 = 1 \times 7 + 23, \qquad 30 = 2 \times 7 + 16,$$
$$30 = 4 \times 7 + 2, \qquad 30 = 3 \times 7 + 9.$$

Question 12 *

Trouver le quotient et le reste pour les couples d'entiers suivants. Calculatrices non autorisées !

(a) $a = 778$ *et* $b = 10$.

(b) $a = 1058$ *et* $b = 7$.

(c) $a = 3442$ *et* $b = 31$.

(d) $a = 20038$ *et* $b = 106$.

Question 13 ***

On effectue la division euclidienne d'un entier naturel a par 38. On trouve un quotient q et un reste égal à $4q^2 - 4$. Donner les valeurs possibles pour a et expliciter les divisions euclidiennes correspondantes.

Question 14 ***

On divise un entier a par 15, le reste est 3. Quel est le reste de la division de a par 5 ?

Même question si le reste est 13.

On divise un entier a par 5, le reste est 3. Quel peut être le reste de la division par 15 ?

LES CONGRUENCES

Question 15 *

Remplir les espaces blancs par le modulo :

$$\begin{aligned} 55 &= \dots \pmod 7 \\ 2048 &= \dots \pmod 3 \\ 406 &= \dots \pmod{1056} \end{aligned}$$

Question 16 **

Soient a, b, c, d, n, m des entiers. Démontrer les propriétés suivantes :

(a) *Si* $a = b \pmod n$, *alors* $b = a \pmod n$.

(b) *Si* $a = b \pmod n$ *et* $b = c \pmod n$, *alors*

$$a = c \pmod n.$$

(c) *Si* $a = c \pmod n$ *et* $b = d \pmod n$, *alors*

$$a + b = c + d \pmod n.$$

(d) *Si* $a = c \pmod n$ *et* $b = d \pmod n$, *alors*

$$a \cdot b = c \cdot d \pmod n.$$

(e) *Si* $a = b \pmod n$, *alors*

$$m \cdot a = m \cdot b \pmod{m \cdot n}.$$

Question 17 **

Important :

Les deux propriétés suivantes sont-elles équivalentes ? Justifier.

- m divise $a - b$.
- a et b ont le même reste dans la division par m.

Question 18 **

Utilisez les propriétés de congruence de l'exercice précédent dans les questions suivantes.

(a) *On suppose que* $X = 6 \pmod 7$ *and* $Y = 16 \pmod 7$. *Calculer les congruences suivantes :*

$$\begin{aligned} X + Y &= \dots \pmod 7 \\ X - Y &= \dots \pmod 7 \\ Y - X &= \dots \pmod 7 \\ X \times Y &= \dots \pmod 7 \end{aligned}$$

(b) *Calculer le reste de la division de* 46×23 *par* 7

(c) Calculer $13^8 \pmod{7}$

(d) Calculer $2^{123} \pmod{29}$

Question 19 **

Trouver les couples d'entiers n et m tels que la somme $n+m$ est égale à 76 et le quotient de la division euclidienne de m par n est égal à 9 (pas d'informations sur le reste).

Question 20 ****

Trois entiers naturels a, b et c vérifient la relation de Pythagore

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Donner deux exemples de tels triplets.

Montrer que :

- l'un au moins des nombres b et c est multiple de 3
- l'un au moins des nombres a, b, c est multiple de 5
- l'un au moins des nombres b et c est multiple de 2

Question 21 ***

Montrer que quel que soit l'entier n

- $4^{3n} - 4^n$ est multiple de 5
- $3^{2n} - 2^n$ est multiple de 7
- $4^n + 15n - 1$ est multiple de 9
- $3 * (5^{2n+1}) + 2^{3n+1}$ est multiple de 17

PLUS GRAND DIVISEUR COMMUN (PGCD)

Question 22 *

Puisque $2391 = 23 \cdot 100 + 91$, décider si

$$\mathrm{PGCD}(2391, 23) = \mathrm{PGCD}(91, 23).$$

Aucun calcul n'est requis !

Question 23 **

Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer les suivants :

(a) $\mathrm{PGCD}(1064, 700)$

(b) $\mathrm{PGCD}(4567, 91837)$

(c) $\mathrm{PGCD}(1583890, 3927)$.

Ensuite, pour les couples (a, b) précédents trouver des entiers x et y tels que $\mathrm{PGCD}(a, b) = xa + yb$.

Question 24 *

Deux entiers a, b sont dits **premiers entre eux**, si leur PGCD est égal à 1. Dire, en justifiant votre réponse, si les entiers suivants sont premiers entre eux :

(a) 8 *et* 14 *:* ....

(b) 27 *et* 200 *:* ....

(c) 2048 *et* 2187 *:* ....

Question 25 ***

Montrer, en utilisant uniquement la définition du PGCD les propriétés suivantes :

(a) Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, *on a* $\mathrm{PGCD}(0, a) = |a|$.

(b) Pour tout $a \in \mathbb{Z}$ *on a* $\mathrm{PGCD}(1, a) = 1$.

(c) Pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$ *on a* $\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(|a|, |b|)$.

Question 26 *

Trouver l'entier positif n tel que $\mathrm{PGCD}(n, 527) = 17$ et $\mathrm{ppcm}(n, 527) = 13702$.

Question 27 **

Trouver tous les nombres entiers a et b dont la somme est 256 et dont le PGCD est 16.

Question 28 **

Trouver tous les nombres entiers a et b dont le produit est 1734 et dont le PGCD est 17.

Question 29 *

Trouver deux entiers positifs n et m différents de 47 et 2820 tels que $\mathrm{PGCD}(n,m) = 47$ et $\mathrm{ppcm}(n,m) = 2820$

Question 30 ***

Soient a et b entiers non nuls. On suppose que $a^2 - b^2 = 2916$ et $\mathrm{PGCD}(a,b) = 18$. Déterminer a et b.

Question 31 ***

En divisant le nombre a par 122 et par 125 on trouve le même quotient, et des restes respectifs de 52 et 40. Calculer a.

En divisant 6732 et 564 par un même nombre b on trouve les restes respectifs de 24 et 18. Quel peut être le nombre b ?

Question 32 ****

Si a et b sont premiers relatifs, non tous les deux nuls, trouver le $\mathrm{PGCD}(a^2 + b^2, a + b)$, en démontrant votre réponse.

CRITÈRES DE DIVISIBILITÉ

Question 33 *

Soit n un nombre entier à $k+1$ chiffres, écrit en base dix sous la forme

$$r_k\, r_{k-1}\, r_{k-2}\, \cdots\, r_2\, r_1\, r_0$$

Développer un critère de divisibilité par 3 :

Développer un critère de divisibilité par 4 :

Développer un critère de divisibilité par 6 :

Développer un critère de divisibilité par 7 :

Développer un critère de divisibilité par 9 :

Développer un critère de divisibilité par 11 :

NOMBRES PREMIERS, FACTEURS PREMIERS, PREMIERS ENTRE EUX

Question 34 *

En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver u et v tels que $185u + 401v = 1$.

Que peut-on dire de 185 et 401 ?

Question 35 *

Décomposer en produits de nombres premiers les entiers $119, 121, 123, 125, 127$

Faire de même avec $43, 143, 243, 343, 443$.

Question 36 *

Décomposer en produits de facteurs premiers 1197 et 210. Retrouver ainsi leur PGCD et leur ppcm.

Faire de même avec 12740 et 168.

Question 37 *

Le nombre 3737 est-il premier ? Un nombre de la forme $abab$ peut-il être premier ? Justifier.

Question 38 ****

On considère deux sommes $A = 11a + 2b$ et $B = 18a + 5b$.

(a) Montrer que si 19 divise l'une des sommes, alors il divise l'autre aussi.

(b) On suppose que $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$, montrer que A et B ne peuvent avoir d'autres diviseurs communs que 1 et 19.

Question 39 **

Montrer que pour tout entier n les nombres $2n + 1$ et $9n + 4$ sont premiers entre eux.

Question 40 ***

Montrer que pour tout entier n la fraction est irréductible :

$$\frac{12n + 1}{30n + 2}$$

Question 41 ***

A quelle condition le PGCD de $2n + 3$ et de $n + 7$ est-il égal à 1 ?

Question 42 ***

Trouver le PGCD de $9n + 4$ et $2n - 1$ en fonction de n.

Question 43 **

Montrer que, pour tout entier p premier et $1 \leq k \leq p - 1$, le nombre p divise le coefficient binomial C_p^k.

Coefficient Binomial

Les coefficients binomiaux, définis pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, avec $k \leq n$, donnent le nombre de parties de k éléments dans un ensemble à n éléments. On les note $\binom{n}{k}$ («k *parmi* n») ou C_n^k («*combinaison de* k *parmi* n»).

Ils s'expriment ainsi à l'aide de la fonction factorielle :

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

EQUATIONS DIOPHANTIENNES

L'équation Diophantienne $ax + by = c$

Soient a et b premiers entre eux, et $c = 1$. Le théorème de Bachet-Bézout affirme que :

Dans ce cas, une solution particulière (x_0, y_0) étant connue, l'ensemble de toutes les solutions est :

Si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors :

Dans le cas général, si $\mathrm{PGCD}(a, b) \mid c$, alors :

autrement : ....

Question 44 *

Déterminer si les équations suivantes ont des solutions dans $\mathbb{Z}$. Dans le cas affirmatif, les expliciter.

(a) $3x + 2y = 4$

(b) $5x + 13y = 6$

(c) $504x + 1188y = 144$