TD SUITES ET SERIES NUMERIQUES

N.B.

La difficulté de chaque exercice est indiquée par le nombre d'astérisques : il va d'un * pour les exercices d'application directe du cours, à quatre **** pour les exercices plus abstraits ou mélangeant différentes notions.

SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

Vocabulaire :

Soit a et r deux nombres réels. On dit que une suite $(x_n)_n$ est une *suite arithmétique de premier terme a et de raison r*, si elle est donnée par

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n + r \end{cases}$$

Question 3**

Soit a et r deux nombres réels et soit $(x_n)_n$ une suite arithmétique de premier terme a et de raison r.

a. Donner une formule explicite pour x_n.

b. Calculer la limite $\lim_{n\to\infty} x_n$ en fonction de a et de r.

Question 4**

a. Prouver par récurrence la formule

$$\sum_{n=0}^{k} n = 0 + 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

b. Soit $(x_n)_n$ une suite arithmétique de premier terme a et de raison r. Calculer explicitement $\sum_{n=0}^{k} x_n$.

Vocabulaire :

Soit a et r deux nombres réels. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ est une *suite géométrique de premier terme a et de raison r*, si elle est donnée par

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n \cdot r \end{cases}$$

Question 9**

Soit $q \in \mathbb{R}$ et soit $(x_n)_n$ une suite géométrique de premier terme 1 et de raison q.

a. Donner une formule explicite pour x_n.

b. On suppose de plus $q \neq 1$. Prouver par récurrence la formule

$$\sum_{n=0}^{k} x_n = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}.$$

Que vaut la somme si $q = 1$?

Question 11**

Calculer les sommes suivantes.

a. $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \cdots + 4096.$

b. $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \cdots 59049.$

c. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 999.$

Question 12*

Déterminer le nombre a tel que les 3 nombres suivants : 7, a et 8 soient les termes consécutifs d'une suite géométrique.

SUITES RÉCURRENTES

Question 14***

On considère la suite $(x_n)_n$ de réels strictement positifs, définie par

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ \ln(x_{n+1}) = 1 + \ln(x_n) \end{cases}$$

a. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n et préciser la nature de la suite $(x_n)_n$.

b. Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_n$.

c. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{k} x_n$ en fonction de k.

d. Exprimer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{k} \ln(x_n)$ en fonction de k. En déduire le calcul de $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_k$ en fonction de k.

Question 15**

On donne la suite $(x_n)_n$ suivante

$$\begin{cases} x_0 = 7 \\ x_{n+1} = 2x_n - 3 \end{cases}$$

Montrer que $x_n = 2^{n+2} + 3$ pour tout n.

Question 16**

On considère la suite $(x_n)_n$ de réels strictement positifs suivante

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1} \end{cases}$$

a. Démontrer que $0 < x_n < 2$ pour tout n.

b. Démontrer que $x_n \leq x_{n+1}$ pour tout n.

Question 17**

On considère la suite $(x_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} x_0 = 10 \\ x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 1 \end{cases}$$

a. Conjecturer le sens de variation de $(x_n)_n$.

b. Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{2} + 1$.

c. Démontrer la conjecture.

Question 18**

Déterminer le terme général de la suite $(x_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_1 = 2 \\ x_{n+2} = 2x_{n+1} - 2x_n \end{cases}$$

Question 19**

Déterminer le terme général de la suite $(x_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \end{cases}$$

Reconnaissez-vous cette suite ?

Question 20**

Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x > 0$. On considère la suite de réels strictement positifs définie par la relation de récurrence

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{x}{u_n}\right)$$

a. Montrer que $u_n \geq \sqrt{x}$ pour tout $n \geq 1$.

b. Montrer que (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

Question 21**

Soient $0 < a < b$. Montrer préliminairement les inégalités suivantes $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$. On considère maintenant les suites de réels strictement positifs définies par la relation de récurrence

$$\begin{cases} x_1 = a \text{ et } y_1 = b \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \text{ et } y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que $x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n$ pour tout $n \geq 1$.

Question 22*

On considère la suite définie pour tout $n \geq 0$ par

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2^n} \text{ et } x_0 = 1.$$

1) Calculer x_1, x_2, x_3, x_4 en laissant les résultats sous forme fractionnaire.
2) Conjecturer la forme générale de x_n et prouver ce résultat.
Autre méthode : montrer que la suite (y_n) définie par $\forall n$ $y_n = 2^n x_n$ est arithmétique.

Question 23**

Etudier les suites définies de la façon suivante (comportement, convergence, expression éventuelle explicite en fonction de n) :

a. $2U_{n+1} = U_n - 1 \quad U_0 = 1$ (trouver α tel que (V_n) définie par $V_n = U_n - \alpha$ soit géométrique)

b. $R_{n+1} = \dfrac{1}{3}R_n + n - 1 \quad R_0 = 1$ (on montrera que la suite définie par $V_n = 4U_n - 6n + 15$ est géométrique)

c. $S_{n+1} = 3S_n - 2n + 3 \quad S_0 = 0$

d. $V_{n+2} = \dfrac{3}{35}V_{n+1} + \dfrac{2}{35}V_n \quad V_0 = 3 \quad V_1 = -\dfrac{4}{35}$

Question 24***

1) Etudier la suite définie par $U_0 = 1, U_1 = k \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 0$, $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$.
2) Que retrouve t-on lorsqu'on prend $k = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$?
3) La calculatrice ne peut pas calculer le $n$ième terme de la suite en utilisant $k = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Elle utilise un $k' = k + \epsilon$. Que vaut l'expression en fonction de n des termes de la suite si on prend $U_1 = k' = k + \epsilon$?
4) Optionnel : quelles sont les limites de la suite quand $U_1 = k$ et quand $U_1 = k'$? Quel résultat donne la calculatrice ?

DÉFINITION DE LIMITE D'UNE SUITE ET CONVERGENCE

Question 39*

(cf programmes du lycée)
1) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{(inégalité de Bernoulli).}$$

2) En déduire que si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.
3) En déduire la limite de q^n lorsque $-1 < q < 1$ (utiliser des théorèmes d'opération sur les limites).

Question 40*

On considère la suite (U_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

a. Justifier que (U_n) est croissante.
b. En utilisant et démontrant la majoration $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$, montrer que (U_n) est majorée par une suite convergente.
c. Conclure.

Question 41*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ et $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{E(kx)}{n^2}$.

En encadrant U_n par deux suites convergentes vers $\dfrac{x}{2}$, montrer que la suite de terme général U_n converge vers $\dfrac{x}{2}$.

Question 42**

Soit $(x_n)_n$ une suite telle que $x_n > 0$ pour tout n. On suppose qu'il existe $\ell \in [0, +\infty]$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell.$$

a. On suppose $\ell > 1$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.
b. On suppose $\ell < 1$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
c. Montrer par des exemples que si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

SUITES ET MATRICES

Question 66* Etudier en fonction de leurs premiers termes les deux suites numériques définies pour tout $n \geq 0$ par $U_{n+1} = \dfrac{1}{4}(U_n + 3V_n)$ et $V_{n+1} = \dfrac{1}{4}(V_n + 3U_n)$.

Question 67*

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution du nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2021.
En 2021, les opérateurs A et B ont chacun 300 milliers d'abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la n-ième année après 2021, et b_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur B la n-ième année après 2021.
Ainsi, $a_0 = 300$ et $b_0 = 300$.
Des observations réalisées les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante : pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{cases}$$

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, on note $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

a. I Déterminer U_1

II Écrire la relation matricielle qui permet d'exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.

b. I Calculer $(I_2 - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

II En déduire que la matrice $(I_2 - M)$ est inversible et préciser son inverse.

III Déterminer la matrice U telle que $U = M \times U + P$.

c. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - U$.

I Justifier que, pour tout entier naturel n,

$V_{n+1} = M \times V_n$.

II En déduire que, pour tout entier naturel n,

$V_n = M^n \times V_0$.

d. On admet que, pour tout entier naturel n,

$$V_n = \begin{pmatrix} \frac{-100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n \\ \frac{-50}{3} \times 0,8^n + \frac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$$

I Pour tout entier naturel n, exprimer U_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (a_n).

II Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.

INTRODUCTION AUX SÉRIES NUMÉRIQUES

Question 1 *

Soit $(x_n)_n$ une suite de nombres réels et soir $s \in \mathbb{R}$. Donner la définition *précise* de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = s.$$

Question 2 **

Soit $q \in \mathbb{R}$.

a. En utilisant la question **??**, montrer que, si $|q| < 1$ alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

b. Montrer que, si $q \geq 1$ alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^i = +\infty.$$

c. Que peut-on dire si $q \leq -1$?

Question 3 **

Soit $(x_n)_n$ la suite donnée par $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$ pour $n \geq 1$.

a. On pose $S_k = \sum_{n=1}^{k} x_n$. Calculer explicitement S_k pour $k = 1, 2, 3, 4$.

b. Vérifier que $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

c. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Question 4 **

Soit $(x_n)_n$ une suite telle que $x_n > 0$ pour tout n. On suppose qu'il existe $\ell \in [0, +\infty]$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell.$$

a. On suppose que $\ell < 1$. Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = +\infty$.

b. On suppose que $\ell > 1$. Démontrer que $\sum_{n\geq 0} x_n$ est convergente.

c. Montrer par des exemples que si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Question 5 **

Soit $(x_n)_n$ une suite telle que $x_n > 0$ pour tout n. On suppose qu'il existe $\ell \in [0, +\infty]$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell.$$

a. On suppose que $\ell < 1$. Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = +\infty$.

b. On suppose que $\ell > 1$. Démontrer que $\sum_{n\geq 0} x_n$ est convergente.

c. Montrer par des exemples que si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.