TD NOMBRES COMPLEXES

Note

La difficulté de chaque exercice est indiquée par un nombre plus ou moins élevé d'astérisques, et va de * pour des exercices d'application directe du cours à *** ou plus pour des exercices plus abstraits ou mélangeant différentes notions.

FORMES ALGÉBRIQUE, TRIGONOMÉTRIQUE, EXPONENTIELLE

Exercice 1 *

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $(2+5i)+(i+3)$
2. $(3-2i)-(-1-i)$
3. $-2(1+3i)+5-2i-(-i+2)$
4. $(1-4i)(1+2i)+2i+8$
5. $-3(4-i)+(3+2i)(1-i)$
6. $2+3i-(2-2i)(i-3)$
7. $(2+i)^2$
8. $(3-2i)^2+(2-i)(2+i)$
9. $-3(2+3i)^2+(i-1)(i+1)$

Exercice 2 *

Dans chaque cas calculer $z_1+\overline{z_2}$, $\overline{z_1}z_2$, $\overline{z_1\overline{z_2}}$, $|z_1|$, $|z_2|$:

1. $z_1 = 2+3i$ et $z_2 = 1-i$
2. $z_1 = -1+2i$ et $z_2 = 3+i$
3. $z_1 = -i+2$ et $z_2 = 2+i$

Exercice 3 *

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $\dfrac{2}{1-2i}$
2. $\dfrac{1}{1-2i}+\dfrac{1}{1+2i}$
3. $\dfrac{2+i}{3-2i}$
4. $\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2$
5. $\dfrac{2+5i}{1-i}+\dfrac{2-5i}{1+i}$
6. $\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2+\dfrac{3+6i}{3-4i}$

Exercice 4 *

Écrire sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $-3\sqrt{2}$
2. $-\frac{4}{3}i$
3. πi
4. $3+3i$
5. $\sqrt{3}-i$
6. $\sqrt{2}+\sqrt{6}i$
7. $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$
8. $(1-i)^8$
9. $(\sqrt{5}-i)(\sqrt{5}+i)$
10. $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{2\pi}{3}}$
11. e^{3+4i}
12. $x+x^2i, x\in\mathbb{R}$

Exercice 5 **

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ un nombre complexe non nul écrit sous forme trigonométrique.
Écrire $\bar{z}, -z, \dfrac{1}{z}$ sous forme trigonométrique.

Exercice 6 **

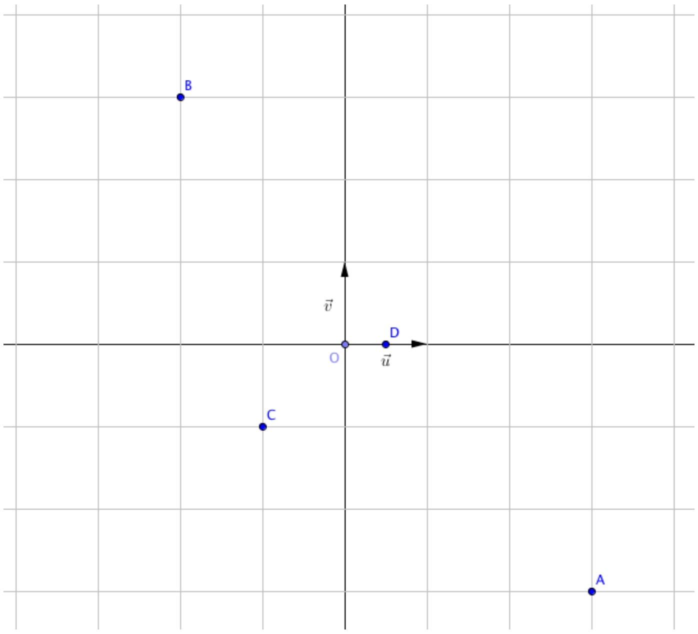
1. Montrer que pour tout $\alpha\in\mathbb{R}\quad e^{i\alpha}+e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha$.
2. Soit $\theta\in[-\pi,\pi]$, déterminez la forme exponentielle de $e^{i\theta}+e^{2i\theta}$ (on pourra écrire $\theta = \frac{3\theta}{2}-\frac{\theta}{2}$ et $2\theta = \frac{3\theta}{2}+\frac{\theta}{2}$).
3. Même question pour $\theta\in[\pi,3\pi]$.

AFFIXE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Exercice 7 *

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. Donner les affixes des points A, B, C et D.
2. Placer les points E d'affixe $z_E = 3 + 2i$, F d'affixe $z_F = -1 + 3i$, G d'affixe $z_G = -\frac{1}{2} - i$ et H d'affixe $z_H = 2 + \frac{3}{4}i$
3. Quels points se trouvent sur un même cercle de centre O ?



Exercice 8 *

Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixes

$$z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},\ z_B = 4 + 2i,\ z_C = -5 - i.$$

Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et montrer que A, B et C sont alignés.

Exercice 9 **

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe différent de -2 et $Z = \dfrac{z+3i}{z+2}$.

1. Exprimer Z sous forme algébrique.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant Z est imaginaire pur.

Exercice 10 **

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal centré en 0 on considère les points A, B et M d'affixes respectives $1 + i$, $1 - i$ et $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/3}$.

1. Placer les points A, B et M dans le plan complexe.
2. Ces points sont-ils alignés ?
3. Calculer le module et l'argument de $1 - i$.
4. Ces points sont-ils sur un même cercle de centre 0 ? Si oui, quel est le rayon de ce cercle ?

Exercice 11 **

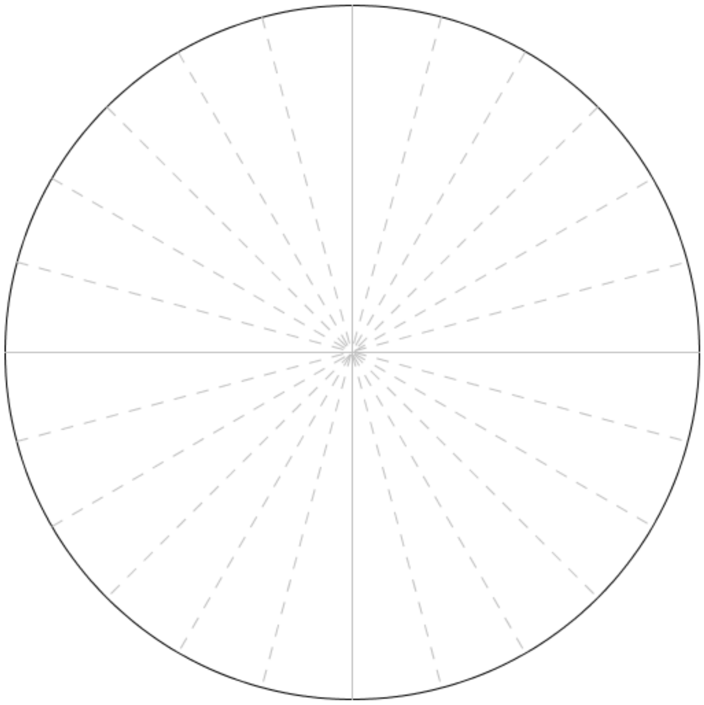
Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal centré en 0 on considère les points A, B, O et M d'affixes respectives i, $2 - i$, 0 et z.

1. Supposons que $z = 1$. Placer les points A, B et M dans le plan complexe. Les points A, B et M sont-ils alignés ?
2. Supposons que $z = 1 + i$. Placer les points A, B et M dans le plan complexe. Quel est le module de z ? Quel est l'argument de z ? Le triangle est-il rectangle en M ?

Exercice 12 *

Pour chacun des nombres complexes donnés ci-dessous sous forme exponentielle, placer le point d'affixe ce complexe sur le cercle trigonométrique, et l'écrire sous forme algébrique :

1. $e^{i\frac{\pi}{6}}$
2. $e^{-i\frac{\pi}{3}}$
3. $e^{i\frac{3\pi}{4}}$
4. $e^{-i\frac{5\pi}{6}}$
5. $e^{i\frac{\pi}{2}}$
6. $e^{-i\pi}$
7. $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$
8. $e^{i\frac{7\pi}{6}}$
9. $e^{i\frac{8\pi}{3}}$



FORMULE DU BINÔME DE NEWTON

Exercice 13 **

Résultat:

La formule du binôme $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ est encore valable pour $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Faire les 5 premières lignes du triangle de Pascal.
2. Développer $(1+2i)^4$ et $(2-i)^3$.

Exercice 14 **

Calculer :

1. $(1+i)^2 + (1-i)^2$
2. $(1+i)^3 + (1-i)^3$
3. $(1+i)^4 + (1-i)^4$
4. $(1+i)^5 + (1-i)^5$

5. Le tableau suivant donne les coefficients binomiaux pour $n = 10$:

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
1	10	45	120	210	252
$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$	
210	120	45	10	1	

Calculer $(1+i)^{10} + (1-i)^{10}$.

Exercice 15 **

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer :

1. $(1+i)^n + (1-i)^n$,
2. $(1+i)^n - (1-i)^n$,
3. $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{2n}$.

APPLICATIONS À LA TRIGONOMÉTRIE

Exercice 16 *

Soient $z_1 = 3\sqrt{2}(1+i)$, $z_2 = \sqrt{3}+i$.

1. Déterminer les formes exponentielles et trigonométriques de z_1 et z_2.
2. Déterminer la forme cartésienne de $z = \frac{z_1}{z_2^2}$.
3. Déterminer les formes exponentielle et trigonométrique de z.
4. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 17 *

1. Exprimer $\cos(2\alpha)$ et $\sin(2\alpha)$ en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.
2. Exprimer $\cos\frac{\alpha}{2}$ et $\sin\frac{\alpha}{2}$ en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.
3. Sachant que $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$, donner les valeurs de $\cos\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{\pi}{10}$.

Exercice 18 **

Soit α un réel non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π et $t = \tan\alpha$. On pose $z = \dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \dfrac{1+it}{1-it}$.

1. Montrer que $z = \dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha}$. En déduire la forme exponentielle de z.
2. Mettre z sous forme algébrique (en fonction de t) et en déduire que $\cos(2\alpha) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(2\alpha) = \dfrac{2t}{1+t^2}$.
3. Exprimer en fonction de t les quantités suivantes : $\cos(4\alpha)$, $\sin(4\alpha)$, $\tan(2\alpha)$, $\tan(3\alpha)$, $\tan(4\alpha)$, $\tan(5\alpha)$.

Exercice 19 **

Méthode :

Pour calculer des expressions comme $\cos(nx)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on peut utiliser la **formule de Moivre**

$$\cos(nx) = \mathrm{Re}\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)^n.$$

Exprimer en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ les formules trigonométriques suivantes :

1. $\cos(3\alpha)$
2. $\sin(3\alpha)$
3. $\cos(4\alpha)$
4. $\sin(5\alpha)$

Exercice 20 **

Méthode:

Pour linéariser des formules du type $\cos^n(x)$ avec $n \in \mathbb{N}$, on peut utiliser les **formules d'Euler** et du binôme pour développer $\cos^n(x) = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$.

Soit α un nombre réel. Linéariser les formules trigonométriques suivantes :

1. $\cos^4\alpha$
2. $\sin^4\alpha$
3. $\sin\alpha\cos^3\alpha$

Exercice 21 **

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k\alpha)$.

RACINES CARRÉES D'UN NOMBRE COMPLEXE

Exercice 22 *

Donner les racines carrées complexes des nombres suivants sous forme algébrique :

1. 1
2. -1
3. $4i$
4. $-5i$
5. $3+4i$
6. $i-2$

Exercice 23 *

Donner les racines carrées complexes des nombres suivants sous forme exponentielle :

1. 4
2. $2e^{i\frac{2\pi}{5}}$
3. $-25i$
4. $-1+i\sqrt{3}$

Exercice 24 *

1. Calculer les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme algébrique et exponentielle.
2. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
3. En utilisant la même méthode, calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 25 *

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2+z+1=0$
2. $z^2+2iz-1=0$
3. $z^2-iz+2=0$
4. $(3-i)z^2+(4i-2)z-8i+4=0$
5. $z^2=\overline{z}$ (on pourra déterminer d'abord les solutions réelles)

Exercice 26 *

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^2-2\cos(\theta)z+1=0$ puis $z^4-2\cos(2\theta)z^2+1=0$.

Exercice 27 **

Note:

Quand rien n'est précisé, dans un produit de facteurs linéaires, exprimer les nombres complexes sous leur forme algébrique.

Exprimer comme produit de facteurs linéaires les polynômes suivants :

1. iz^2-1
2. z^2-3z+2
3. $2z^2+iz-3$
4. $z^2-2z+4i$

Exercice 28 **

Exprimer comme produit de facteurs linéaires le polynôme $z^4-3iz^3-(1+3i)z^2$ en trouvant des racines "évidentes".

Exercice 29 ***

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3-3z^2+4z-2=0$
2. $z^3+z^2+z+1=0$
3. $iz^3+(1-2i)z^2+2(i-1)z+2=0$

RACINES N-IÈMES ET ÉQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

Exercice 30 *

1. Déterminer les formes cartésiennes, trigonométriques et exponentielles des racines 8-èmes de l'unité.
2. Dessiner les racines 8-èmes de l'unité dans le plan cartésien, et décrire la figure obtenue en joignant les racines avec arguments consécutifs.
3. Lesquelles sont des racines 8-èmes primitives ?

Exercice 31 **

1. Quelles sont les racines quatrièmes de l'unité ? En déduire une expression de $z^4 - 1$ comme produit de facteurs linéaires.
2. Placer ces racines sur le cercle unité dans le plan complexe, quelle figure obtient-on en reliant les points ainsi obtenus ?
3. Exprimer comme produit de facteurs linéaires les polynômes $z^2 + i$ et $z^2 - i$
   — en utilisant la forme exponentielle des racines carrées de i et de $-i$,
   — puis en utilisant leurs formes algébriques.
4. En déduire une expression de $iz^2 - 1$ et de $z^4 + 1$ comme produit de facteurs linéaires.
5. Retrouver l'expression de $z^4 + 1$ comme produit de facteurs linéaires en utilisant directement des racines quatrièmes.

Exercice 32 **

On note $z_1, z_2, \ldots, z_6$ les racines sixièmes de l'unité et $M_1, M_2, \ldots, M_6$ les points du plan complexe correspondants.

1. Déterminer les solutions complexes de l'équation $z^6 = 1$ (sous forme exponentielle). Placer approximativement les points $M_1, M_2, \ldots, M_6$ sur le cercle unité du plan complexe.
2. Montrer géométriquement que
$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 = 0$$
3. Quel est le coefficient du terme de degré 5 du produit $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5)(z - z_6)$? En déduire algébriquement que $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 = 0$.
(Ce résultat se généralise : pour tout entier $n \geq 2$, la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle)
4. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$z^6 - 1 = (z - 1)(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$
5. En déduire l'expression de $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ comme produit de facteurs linéaires (en utilisant les formes exponentielles puis algébriques des racines).

Exercice 33 **

1. Donner une racine 6-ème primitive de l'unité sous forme cartésienne et exponentielle.
2. Vérifier que $2 + i$ est une racine 6-ème de $w = -117 + 44i$.
3. Déterminer les formes exponentielles et cartésiennes de toutes les racines 6-èmes de w.
4. Dessiner les racines 6-èmes de w dans le plan cartésien, et décrire la figure obtenue en joignant les racines avec arguments consécutifs.

Exercice 34 **

1. Déterminer les formes cartésiennes, trigonométriques et exponentielles des racines 4-èmes de $1 + i\sqrt{3}$.
2. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 35 **

1. Soit $\mu = (\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}})/4$. Montrer que $\mu = e^{i2\pi/5}$.
2. Écrire sous forme cartésienne $z = e^{i\pi/3}$.
3. Écrire μ/z sous forme trigonométrique, exponentielle et cartésienne.
4. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{15}$ et $\sin\frac{\pi}{15}$.

Exercice 36 ***

Le but de cet exercice est d'écrire sous forme "explicite" (au moyen de racines carrées de nombres réels) les nombres $\cos\frac{\pi}{5}, \sin\frac{\pi}{5}, \cos\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{\pi}{10}$.

(a) Écrire les formes trigonométriques et exponentielles des racines 5-èmes de l'unité, et les dessiner de façon approximative dans le plan cartésien.

(b) Soit $z = x + iy$ une racine 5-ème de l'unité. Montrer que le quotient y/x peut prendre au plus cinq valeurs possibles, qu'on déterminera.
Indication : utiliser l'égalité $z^5/x^5 = (1 + i\,y/x)^5$ pour calculer y/x.

(c) Trouver la valeur de $\tan\frac{2\pi}{5}$ puis de $\tan\frac{\pi}{10}$.

(d) Trouver la valeur de $\tan\frac{4\pi}{5}$ puis de $\tan\frac{\pi}{5}$.

(e) En utilisant le fait que $\cos^2 + \sin^2 = 1$, en déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{5}, \sin\frac{\pi}{5}, \cos\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{\pi}{10}$.

Exercice 37 **

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^4 + 1 = 0$,
2. $z^5 + 1 = 0$,
3. $z^6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$,
4. $\overline{z}^2 - 2i\overline{z} + i = 0$,
5. $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$,
6. $z^6 - 2iz^3 - 1 = 0$.

Exercice 38 ***

Déterminer les nombres complexes z tels que :

1. $|\overline{z} - i| = 1$,
2. $i\,\mathrm{Re}(z^2) - \mathrm{Im}(z^2) = z$,
3. $z^2 + \overline{z} - 1$ est réel,
4. $z^2 + 2\overline{z} - 2$ est imaginaire pur,
5. $\arg(z + 2\overline{z}) = \frac{\pi}{3} \mod 2\pi$.