TD : Arithméthique élémentaire

$$\begin{array}{r|l} \text{Dividende} & \text{diviseur} \\ a & b \\ \hline -\,bq_0 & q \\ \hline r & \text{quotient} \end{array}$$

$0 \leq r < b$ reste

$a = bq + r$

$b \mid a \rightarrow b$ divise

$(b \mid a) \Rightarrow \exists K \in \mathbb{Z} \mid a = Kb$

$(a \text{ est premier}) \Rightarrow \begin{cases} a > 1 \\ div(a) = \{1, a\} \end{cases}$

Definition : PPCM de $a_1, a_2, \ldots, a_p$

$PPCM(2, 6, 8) = 24$

Definition : PGCD de a et b est le plus grand diviseur commun à a et b.

$PGCD(18, 48) = 6$

Conjécture de Goldbach : "Tout nombre pair est la somme de 2 nombres premiers"

Exercices :

Question 1 :

Trouvé x Tel que $1|x, 2|x, \dots, 10|x$, et qu'il soit donc $PPCM(\{1, 2, \dots, 10\})$

Reponse Non-optimizé : $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$

Reponse Optimizé : $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ premier

↳ Méthode :

$10 = 2 \times 5$	$5 = 1 \times 5$
$9 = 3^2$	$4 = 2^2$
$8 = 2^3$	$3 = 1 \times 3$
$7 = 1 \times 7$	$2 = 1 \times 2$
$6 = 2 \times 3$	

On prend les plus grandes puissances : $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$

Question 2 :

Soit $a = 3q + r$, $r \in \{0, 1, 2\}$

Soit 2 entier a et b :

$\hookrightarrow a = 3q + r$ & $b = 3q' + r'$

Nous allons faire une disjonction de cas sur r et r' :

r	r'	a	b	$a+b$	$a-b$
0		X			
	0		X		
1	1				X
1	2			X	
2	2				X

X : "est multiple de 3"

Question 3 :

a) "Si $r_0 \equiv 0 [2]$ alors $2 | n$"

Si $n \equiv 0 [2]$, alors $n+1 \equiv 1 [2]$, $n+2 \equiv 0$..
$r_0 \equiv 0 [2] \Rightarrow r_0 + 1 \equiv 1 [2]$...

Donc si r_0 pair, n pair aussi.

b) "Si $r_0 = 0$ ou $r_0 = 5$, alors $5 | n$"

Tout les multiples de 5 se finissent soit par 5 soit par 0, donc si $r_0 = 5$ ou 0, alors $n \equiv 0 [5]$

c) "Si $r_0 = 0$, alors $10 | n$"

Dans une base n, multiplier par cette base là se résout à ajouter un 0 à droite. Donc en base 10, Réciproquement, si un nombre se termine par 0, alors il est divisible par sa base d)

⚠ Propriétés élémentaires :

* si $a \mid b$ et $b \mid c$ alors $a \mid c$
* si $a \mid b$ et $b \mid a$ alors $a = \pm b$ $\quad (a, b \in \mathbb{Z})$
* si $a \mid b$ et $a \mid c$ alors $a \mid b + c$

↳ donc $a \mid \alpha b + \beta c$

* Si $a \mid b$ alors $a \mid bc$
* Si $a \mid b$ alors $ac \mid bc$

Question 5 :

Soit 3 nombres : abc, acc, abb

" $3 \mid abc + abb + acc$ "

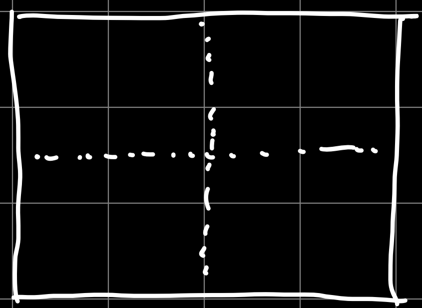
$$\left.\begin{aligned} abc &= 100a + 10b + c \\ abb &= 100a + 10b + b \\ acc &= 100a + 10c + c \end{aligned}\right\} + \to 300a + 21b + 12c \Rightarrow 3(100a + 7b + 4c)$$

Or $3(100a + 7b + 4c) \equiv 0\,[3]$

Donc $(abc + abb + acc) \equiv 0\,[3]$ CQFD

Question 9 :

$L = 126$, $l = 90$

90 

126

Soit n carré de longueur x tel que $x = PGCD(90, 126)$

$$PGCD(126, 90) = PGCD(36, 90)$$
$$= PGCD(36, 18)$$
$$= 18.$$

Donc $90 \times 126 = 18^2 \times n$

$$n = \frac{90 \times 126}{18^2}$$

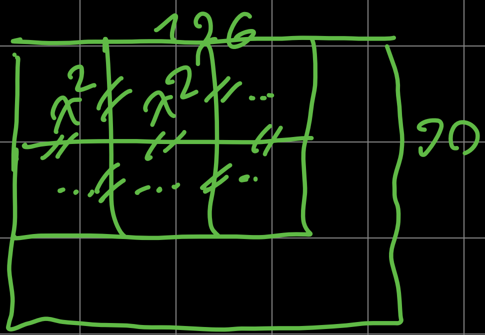
$$n = \frac{90}{18} \times \frac{126}{18}$$

$$n = 5 \times 7$$

$$n = 35$$

Donc on a 35 carré de longueur qui vaut 18.

Correction



$$S = 126 \times 90 = 9 \times x^2$$
$$= 2 \times 7 \times 3^2 \times 3^2 \times 2 \times 5$$
$$= 5 \times 7 \times 2^2 \times 9^2$$
$$= \underbrace{35}_{9} \times \underbrace{18^2}_{x^2}$$

Question 11 :

$a = 30, \ b = 7$

1) $30 = 1 \times 7 + 23$ ← Non
2) $30 = 4 \times 7 + 2$ ← Oui
3) $30 = 2 \times 7 + 16$ ← Non
4) $30 = 3 \times 7 + 9 =$ ← Non

Question 12 :

a) $778 = 77 \times 10 + 8$
b) $1058 = 151 \times 7 + 1$
c) $3442 = 111 \times 31 + 1$

d) $20038 = 189 \times 106 + 4$

Question 13 :

$a \,//\, 38 \Rightarrow a = 38q + \boxed{4q^2 - 4}$

$0 \leq 4q^2 - 4 < 38 \Rightarrow 4 \leq 4q^2 < 42$

$\Rightarrow q = 1 : \checkmark \quad 4 \leq 4 < 42$

$q = 2 : \checkmark \quad 4 \leq 16 < 42$

$q = 3 : \checkmark \quad 4 \leq 36 < 42$

$q = 4 : \times \quad 4 \leq 64 \,! < 42$

Donc on $q \in \{1, 2, 3\}$, donc

Or $a = 38q + 4q^2 - 4$, alors :

$$\begin{cases} q = 1, & 38 + 4 \times 1 - 4 = 38 \Rightarrow a = 38 \text{ ou} \\ q = 2, & 76 + 4 \times 4 - 4 = 88 \Rightarrow a = 88 \text{ ou} \\ q = 3, & 104 + 4 \times 9 - 4 = 136 \Rightarrow a = 146 \end{cases}$$

Donc $a \in \{38, 88, 136\}$

Question 14 :

Si $a = 15q + 3$, $a // 5 = 5(3q) + 3$

$a = 5q + 3$

$a = 15q + 3$ $\qquad 0 \leq r < 15$

$a = 5q + 3 \quad \leftarrow \quad q = 3Q + r$

$\quad\; r_3$

$a = 5(3Q + r) + 3$

$a = 15Q + 5r + 3$

$$\begin{cases} r = 0 : a = 15Q + 5r + 3 = 3 \\ r = 1 : a = 15Q + 5r + 3 = 8 \\ r = 2 : a = 15Q + 5r + 3 = 13 \end{cases}$$

On a $R = (5r + 3)$, et $\forall$ les cas, $0 \leq R < 15$

Question 4 :

a) 201984 =