Vendredi 2 Février 2024

Cours TD # 4 : Arithmétique

Question 21 :

$4^{3n} - 4^{n} \equiv 0 [5]$

$4^{2} \equiv 1 [5]$ car $4 \equiv -1 [5]$

$4^{2} \times 4 \equiv 1 \times 4 [5] \Rightarrow 4^{3} \equiv 4 [5]$

Or $(4^{3})^{n} \equiv 4^{n} [5] \Rightarrow 4^{3n} - 4^{n} \equiv 0 [5]$

Question 34 :

$185u + 401v = 1 \Rightarrow 185 \wedge 401.$

$401 = 2 \times 185 + 31$

$185 = 5 \times 31 + 30$

$31 = 1 \times 30 + 1$

$30 = 30 \times 1 + 0$

ainsi : $1 = 31 - 30$

$1 = 31 - (185 - 5 \times 31)$

$1 = 31 - 185 + 5 \times 31$

$1 = -1 \times 185 + 6 \times 31$

$1 = 1 \times 1 + 0$

$1 = -1 \times 185 + 6 \times (401 - 2 \times 185)$

$1 = -1 \times 185 + 6 \times 401 - 12 \times 185$

$1 = \underbrace{6}_{x_0} \times 401 \underbrace{- 13}_{y_0} \times 185$

<u>Bonus</u> : Trouvé Toutes les solutions :

↳ 1) Trouve une solution particulière, prennont $c = 5$ par exemple

On a : $185 \times -13 + 6 \times 401 = 1$

↳ $5(185 \times -13 + 6 \times 401) = 5 \times 1$

↳ $185 \times \underline{-65} + \underline{30} \times 401 = 5$

2) Toutes les sol :

Solutions de u, v dans $185u + 401v = 1$

$S_1 = \{(-13 + 185K, 6 - 401K), K \in \mathbb{Z}\}$

$S_5 = \{-65 + 185K, 30 - 401K), K \in \mathbb{Z}\}$

Question 37 :

3737 = abab

ab | abab donc 3737 non-premier

Question 39 :

$2n+1 \wedge 9n+4$

$(2n+1)(-9) + (9n+4)(-2) = 1$

Donc $2n+1 \wedge 9n+4$ CQFD

Question 40 :

$\dfrac{12n+1}{30n+2} \Rightarrow 12n+1 \wedge 30n+2$

On $(12n+1)(+5) + (30n+2)(-2) = 1$

$60n + 5 - 60n - 4 = 1$

$5 - 4 = 1$

$1 = 1$ CQFD

Question 20 :

Ex : Prouver que n et $n+1$ sont premiers entre eux

↳

$n \times (-1) + (n+1)(+1) = 1$

$n - n + 1 = 1$

$1 = 1$ CQFD

1) Supposons que b & c ne sont pas multiples de 3

Donc $\begin{cases} b \not\equiv 0 \, [3] \\ c \not\equiv 0 \, [3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \equiv 1 \vee b \equiv 2 \, [3] \\ c \equiv 1 \vee c \equiv 2 \, [3] \end{cases}$

b	c	$a^2 = b^2 + c^2$
1	2	$= 5$
2	1	$= 5$
1	1	$(..)^2 = 2$
2	2	$(..)^2 = 8$

$a \Rightarrow a^2 \equiv 2 \, [3]$

$\equiv 2 \, [3]$

⋮

Conclusion :

b	c	b^2	c^2	b^2+c^2
1	1	1	1	2
1	2	1	4	2
2	1	4	1	2
2	2	4	4	2

$[3]$

$\vdots$

Donc dans notre Hypothèse d'absurdité, on a

$b^2+c^2 \equiv 2[3] \Rightarrow a^2 \equiv 2[3]$

OR ! $a \equiv 0[3]$ ou $a \equiv 1[3]$ ou $a \equiv 2[3]$

$$\begin{cases} a \equiv 0[3] \Rightarrow a^2 \equiv 0[3] \\ a \equiv 1[3] \Rightarrow a^2 \equiv 1[3] \\ a \equiv 2[3] \Rightarrow a^2 \equiv 1[3] \end{cases}$$

Donc a jamais $\equiv 2[3]$, c'est absurde !

CQFD.

2)

a	b	c	a^2	b^2	c^2	$a^2 = b^2 + c^2$
0						
1						
2						
3						
4						