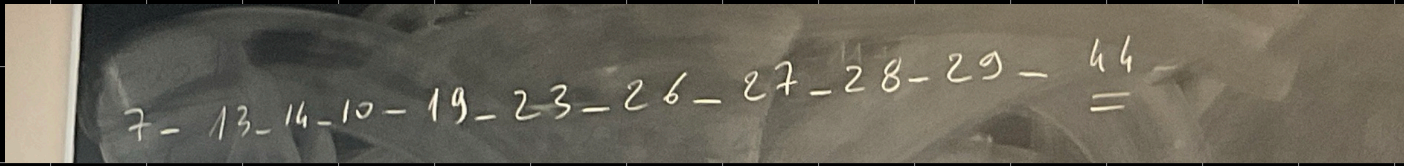


Exo importante

Exam Arithmétique
Semaine du 29 au 2

Question 19 :

Trouvé n, m Tels que $m + n = 76$ &
$m = 9n + r$

Donc $\begin{cases} m + n = 76 \\ m = 9n + r & 0 \leq r < 9 \end{cases}$

Ainsi $(9n + r) + n = 76$, avec $0 \leq r < 9$

$10n + r = 76$, avec $0 \leq r < 9 < 10$

$10n + r = 7 \times 10 + 6$

$n = 7$, $r = 6$ avec $0 \leq r < 9 < 10$

Or $m = 9n + 6 \Rightarrow m = 63 + 6 = 69$

Donc $m = 69$, $n = 7$

Question 20 :

Soit $a^2 + b^2 = c^2$

On a : $(5, 4, 3)$, $(10, 6, 8)$

$a^2 = b^2 + c^2$,

car $a \equiv 1[3]$ et $b \equiv 1[3]$

$c^2 = \quad \ldots\ldots$??

Question 21 :

- $4^{3n} - 4^{n} \equiv 0 [5]$

$4^{n} \times 4^{2n} - 4^{n} \equiv 0 [5]$

$4^{n}(4^{2n} - 1) \equiv 0 [5]$

$4^{n}(4^{n} \times 4^{n} - 1) \equiv 0 [5)$

Or si nous calculons la congruence des chiffres mod 5 :

$4(4 \times 4 - 1) \equiv \dots [5]$

$4(16 - 1) \equiv \dots [5]$

$4(15) \equiv \dots [5]$

$60 \equiv 0 [5]$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^{3n} - 4^{n} \equiv 0 [5]$

- $3^{2n} - 2^{n}$

$3^{2^{n}} - 2^{n}$

$= 9^{n} - 2^{n} \equiv \dots [7]$

Or si nous calculons la congruence des chiffres mod 7 :

$$9-2 \equiv .. [7]$$
$$7 \equiv 0 [7]$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $7 \mid 3^{2n} - 2^{n}$

- $4^{n} + 15n - 1$

$4^{n} + 15n - 1$

Pareille, calculons les chiffres et leur congruence modulo 9 :

$$4 + 15 - 1 \equiv .. [9]$$
$$18 \equiv 0 [9]$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $9 \mid 4^{n} + 15n - 1$

- $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$

$3 \times 5^{2n} \times 5 + 2^{3n} \times 2$

$$3 \times 5^{2^n} \times 5 + 2^{3^n} \times 2$$
$$3 \times 25^n \times 5 + 8^n \times 2$$

Calculons donc la somme des chiffres modulo 17 :

$3 \times 25 = 75 \times 5 = 375 + 16 = 391$

$391 \equiv 0 \; [17]$ car $391 = 23 \times 17$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ 17 \mid 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$

Question 22 :

$2391 = 23 \times 100 + 91$

d'après le lemme d'Euclide qui dit que " $\forall a, b \in \mathbb{Z}^2$
$PGCD(a, b) = PGCD(b, r)$ avec $a = bq + r$ ".

Or, on a $a = 2391$, $b = 23$, et $r = 91$.
Or d'après le lemme ci-dessus, $PGCD(23, 2391) =$
$PGCD(91, 23)$. CQFD

Question 23 :

a) PGCD(1064, 700)

$= \{\ 1064 = 1 \times 700 +$

, PGCD(700, 364)

$= \{\ 700 = 1 \times 364 + 336)$

, PGCD(364, 336)

$= \{\ 364 = 1 \times 336 + 28$

, PGCD(336, 28)

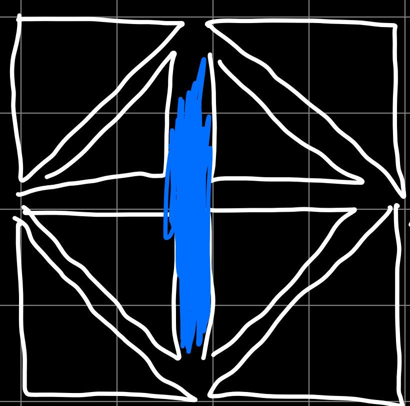
$336 = 12 \times \boxed{28} + 0$ ✓

Donc PGCD(1064,700) = 28

Trouve (x, y) tel que PGCD(1064,700) = 1064x + 700y

Donc 28 = 1064x + 700y

On sait que :



$28 = 364 - 336$

$28 = 364 - (700 - 364)$

$28 = 1034 - 700 - (700 - (1034 - 700))$

$28 = a - b - (b - (a - b))$

$28 = a - b - (b - a + b)$

$28 = a - b - (2b - a)$

$28 = a - b - 2b + a$

$28 = 2a - 3b$

avec $a = 1034$ et $b = 700$

Donc $28 = 2 \times 1034 - 700 \times 3$

b) PGCD(4567, 91837)

$91837 = 4567 \times 20 + 497$

$4567 = 467 \times 9 + 94$

$467 = 94 \times 5 + 27$

$94 = 3 \times 27 + 13$

$27 = 2 \times 13 + 1$

$13 = 1 \times 13 + 0$

$1 = 1 \times \boxed{1}$

Donc Ils sont premier entre eux

Soit $a = 91387$, $b = 4567$

$1 = 27 - 2 \times 13$

$1 = (467 - 5 \times 94) - 2 \times (94 - 3 \times 27)$

$1 = (467 - 5 \times 94) - 2 \times (94 - 3 \times (467 - 5 \times 94))$

$1 = (467 - 5 \times (4567 - 9 \times 467)) - 2 \times$
$((4567 - 9 \times 467) - 3 \times (467 - 5 \times$
$(4567 - 9 \times 467)))$

$467 = a - 20b = c$

$1 = c - 5(b - 9c) - 2(b - 9c - 3(c - 5(b - 9c)))$

$1 = c - 5(b - 9c) - 2(b - 9c - 3(c - 5b + 45c))$

$1 = c - 5b + 45c - 2(b - 9c - 3c + 15b - 135c)$

$1 = c - 5b + 45c - 2b + 18c + 6c - 30b + 270c$

$1 = -37b + 340c$

$1 = -37b + 340(a - 20b)$

$1 = -37b + 340a - 6800b$

$1 = 340a - 6837b$

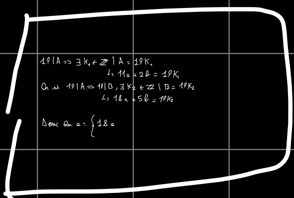
Faux ...

Question 38 : **** (1 of 3 4-* exos!)

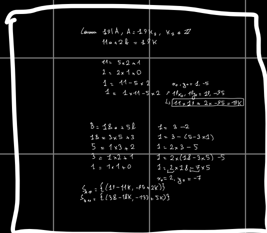
$A = 11a + 2b$

$B = 18a + 5b$

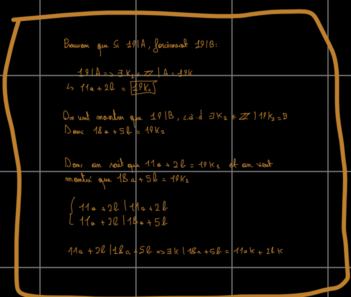
a) Si $19 \mid A \Rightarrow 19 \mid B \wedge$ Si $19 \mid B \Rightarrow 19 \mid A$



Raisonnement 1..



Raisonnement 2..



Raisonnement 3..

me right now....

$A = 11a + 2b$, $19 \mid A$ et $19 \nmid B$

On sait $19 \mid A \Rightarrow 19 \mid B$

Question 26:

$$\begin{cases} PGCD(n, 527) = 17 \\ PPCM(n, 527) = 13702 \end{cases}$$

Lien PPCM & PGCD : $PGCD(a,b) \times PPCM(a,b) = a \times b$

Donc $17 \times 13702 = 527n$

$$\frac{17 \times 13702}{527} = n$$

$$\frac{17 \times 13702}{17 \times 31} = n \Leftarrow \text{ car } 17 = PGCD, \text{ donc } 17 | 527$$

$$\frac{13702}{31} = \boxed{n = 442}$$

Question 27:

$$\begin{cases} a + b = 256 \\ PGCD(a,b) = 16 \end{cases} \Rightarrow \overbrace{K_1 16 + 16 K_2}^{a+b} = 16(K_1 + K_2) = 256$$

et $a = \overset{PGCD}{16} K_1$ et $b = \overset{PGCD}{16} K_2$, donc $K_1 \wedge K_2$

On $\begin{cases} K_1 + K_2 = 16 \\ K \wedge K_2 \end{cases}$

THX Zohi le goat dmavoir rappelé !

On a $S = \{(1,15);(5,11);(7,9);(9,7);(11,5);(15,1)\}$ et $(a,b) \in (16\tilde{a}, 16\tilde{b})$ $\forall (\tilde{a},\tilde{b}) \in S$

Question 28 :

$$\begin{cases} a \times b = 1734 \\ PGCD(a,b) = 17 \end{cases}$$

Soit $k_1, k_2 \in \mathbb{N} \mid 17k_1 \times 17k_2 = 1734$

$$17(k_1 k_2) = 17 \times 102$$

$$k_1 k_2 = 102$$

$$\begin{cases} k_1 k_2 = 102 \\ PGCD(k_1,k_2) = 1 \end{cases}$$

$1 \times 102 = 102$

$2 \times 51 = 102$

$3 \times 34 = 102$

$6 \times 17 = 102$

Donc $S = \{(1,102),(2,51),(3,34),(6\times 17),$
$(102,1),(51,2),(34,3),(17,6)\}$

Donc $(a,b) \in (17\tilde{a}, 17\tilde{b})$ $\forall (\tilde{a},\tilde{b}) \in S$

Question 29 :

$$\begin{cases} \tilde{n} \wedge \tilde{m} \\ \tilde{n} + \tilde{m} = 60 \end{cases}$$

$\boxed{31, 29}$

$\tilde{n} = 31 \Rightarrow n = 31 \times 47$ $\quad$ $\tilde{m} = 29 \Rightarrow m = 29 \times 47$

$n = 1363$

$m = 1457$

Question 30 :

$a, b \neq 0$ et $a^2 - b^2 = 2916$

$\hookrightarrow (a+b)(a-b) = 2916$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 2916 \\ PGCD(a, b) = 18 \end{cases}$$

avec $(\tilde{a}, \hat{b}) \in \mathbb{N}$

$a = 18\tilde{a}$. $b = 18\tilde{b}$

1. $\hookrightarrow (18\tilde{a} + 18\tilde{b})(18\tilde{a} - 18\hat{b}) = 2916$

*

$(18(\tilde{a} + \tilde{b}))(18(\hat{a} - \tilde{b})) = 2916$

$18 \times 18 (\tilde{a} + \hat{b})(\hat{a} - \hat{b}) = 2916$

Trop long ...

$(\tilde{a}+\tilde{l})(\tilde{a}-\tilde{l}) = 9$

2916

$\overset{150}{2700} + \overset{10}{180} + \overset{2}{36}$

$162 \times 18 = 2916$

$9 \times 18 \times 18 = 2916$

Or $9 = 1 \times 9$ ou $9 = 3 \times 3$ ou $9 = 1 \times 9$

Donc on a 3 systèmes tel que :

① $\begin{cases} \tilde{a}+\tilde{l} = 1 \\ \tilde{a}-\tilde{l} = 9 \end{cases}$ ou ② $\begin{cases} \tilde{a}+\tilde{l} = 3 \\ \tilde{a}-\tilde{l} = 3 \end{cases}$ ou ③ $\begin{cases} \tilde{a}+\tilde{l} = 9 \\ \tilde{a}-\tilde{l} = 1 \end{cases}$

Or le système ② implique $\tilde{l} = 0$, or si $\tilde{l} = 0$, $l = 0 \times 18$ et cela ne fonctionne pas pour l'exercice ??

Et le système ① implique que $\tilde{a} = 0$ ou $\tilde{l} = 0$, or cela revient à dire que $a = 18 \times 0$ ou $l = 18 \times 0$ et donc a ou l vaut 0 or cela ne fonctionne pas avec l'exercice. ????

Donc ③ $\Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{a} = 5 \\ \tilde{l} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5+4 = 9 \\ 5-4 = 1 \end{cases}$ ✓

Donc $a = 5 \times 18$ et $l = 4 \times 18$

$a = 90$ et $l = 72$

On vérifie que $a^2 - l^2 = 2916$

$a^2 = 90^2$ $\qquad$ $b^2 = 72^2$

$a^2 = 8100$ $\qquad$ $b^2 = 5040 + 144 = 5184$

$a^2 - b^2 = 8100 - 5184 = 2916$

Donc on a $a = 90$ et $b = 72$ avec $\begin{cases} a^2 - b^2 = 2916 \\ PGCD(a,b) = 18 \end{cases}$

CQFD.

Tips de correction du goat zobi :

* Explicité le début de la disjonction de cas
* prouvé mathématiquement >>>> prouvé grammaticalement
* Parfois, détaillé complique au lieu de simplifier

** Si j'avais introduit $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ dans $\mathbb{N}^{2*}$, j'aurais pas eu besoin de prouvé pourquoi c'est absurde que $\tilde{a}$ ou $\tilde{b}$ valent 0.

** le "Ls" est une impliquation, donc une vérité qu'il faut prouvé, chose que j'ai fait à la fin dans le "vérifions que", mais je peut m'éviter le besoin de vérifié en omettant le "Ls".

1) calculer 7234 mod 7
2) calculer 2020 mod 6
3) calculer 7234 ** 2020 mod 7

$7234 \equiv 3\ [7]$
$2020 \equiv 4\ [6]$

$7234^{2020} \equiv 3^{2020}\ [7]$

" " $\equiv 3^{6k+4}$

$3^4\ [7]$ $81\ [7] \equiv 4\ [7]$

Question 44 *

Déterminer si les équations suivantes ont des solutions dans $\mathbb{Z}$. Dans le cas affirmatif, les expliciter.

(a) $3x + 2y = 4$

(b) $5x + 13y = 6$

(c) $504x + 1188y = 144$

$$5x + 13y = 6$$

$$PGCD(5, 13) = 1$$

$$13 = 2 \times 5 + 3$$
$$5 = 1 \times 3 + 2$$
$$3 = 1 \times 2 + 1$$

$$1 = 3 - 2$$
$$1 = 3 - (5 \times 1 - 3)$$
$$1 = 3 - 5 + 3$$
$$1 = 2 \times 3 - 1 \times 5$$
$$1 = 2 \times (13 - 2 \times 5) - 1 \times 5$$
$$1 = 2 \times 13 - 4 \times 5 - 1 \times 5$$
$$1 = 2 \times 13 - 5 \times 5$$

$$a = 2,\ b = -5$$

$13 \times 2 + -5 \times 5 = 1$

$13 \times 12 - 30 \times 5 = 6$

$a = 13,\ b = -30$

Donc on a $x_0 = 12,\ y_0 = -30$

Donc $S = \{(13 - 12K, -30 + 5K),$
$K \in \mathbb{Z}\}$

$45 \equiv 5x\ [70]$

$9 \equiv x\ [14]$

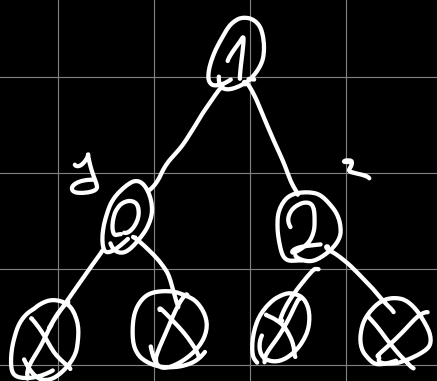
$9 \equiv 5\ [14]$

Ex 38 v2:

$$11(1+5k) - 2(5-11k) = 1$$

$$18 \times 2 - 5 \times 7 = 1$$

$$18(2+5k) - 5(7-18k) = 1$$



lit $T = (y, 1, 2)$