Mercredi 31 Janvier 2024

Cours CM #1 : Nombres Complexes

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$\mathbb{N}$: $\{0; 1; 2 \dots\}$

$\mathbb{Z}$: $a, b \in \mathbb{N}$

$a + x = b$

$b < a$

$\mathbb{Q}$: $a \in \mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{Z}$

$ax = b$

$\mathbb{R}$: $x^2 = \sqrt{2}$

$\mathbb{C}$: $x^2 = -1$

$i^2 = -1$

Les nombres ont différentes formes / écritures

$\mathbb{D}, \mathbb{Q}$:

- écriture fractionnaire : $\frac{a}{b}$, $b \in \mathbb{N}$: $1/3$
- écriture décimale : $0,3\bar{3}$

$\mathbb{C}$ → Écriture algébrique
$z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\mathbb{C}$ → Écriture Trigonométrique / polaire
$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

$\mathbb{C}$ → écriture exponentielle : $r e^{i\theta}$

Partie réelle et imaginaire

$Re[z] = a$
$Im[z] = b$

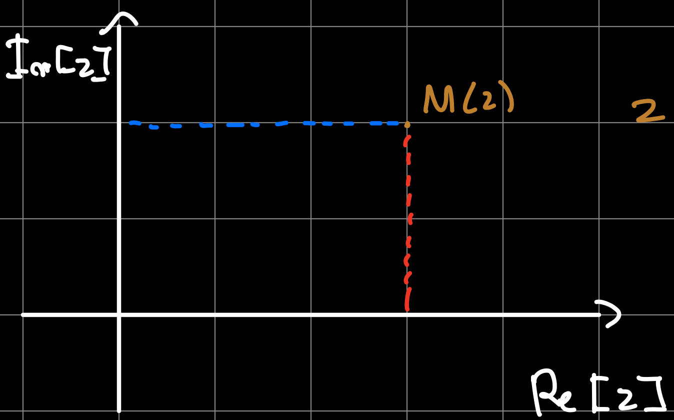
L'inverse : Si $z = a + ib$, on cherche $z' = a' + ib'$
Tel que $(a+ib)(a'+ib') = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} aa' - bb' = 1 & \times a \\ ab' + ba' = 0 & \times b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2a' - abb' = a \\ abb' + b^2a' = 0 \end{cases} \Rightarrow a' = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \& \quad b' = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

On z inversible $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 0$

Représentation géométrique :

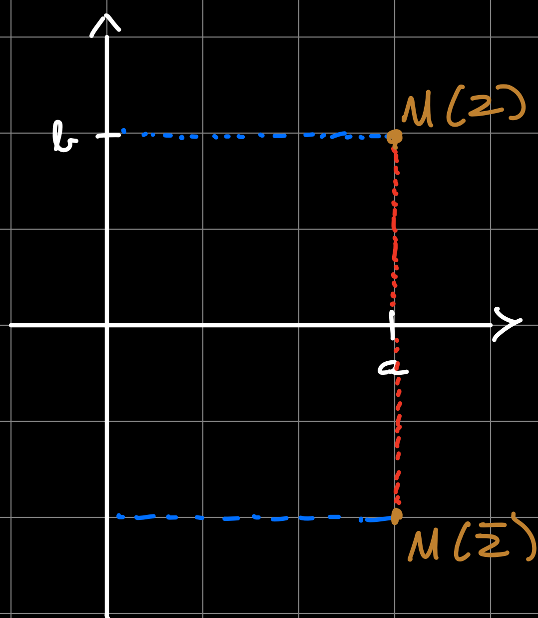


$z = a + ib$

On dit que z est l'affixe du point M

On identifie $\mathbb{C}$ au plan $\mathbb{R}^2$

Conjugué :



$z = a + ib$

$\bar{z} = a - ib$

$z + \bar{z} = 2a$

$z - \bar{z} = 2ib$

$\mathrm{Re}[z] = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

$\mathrm{Im}[z] = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

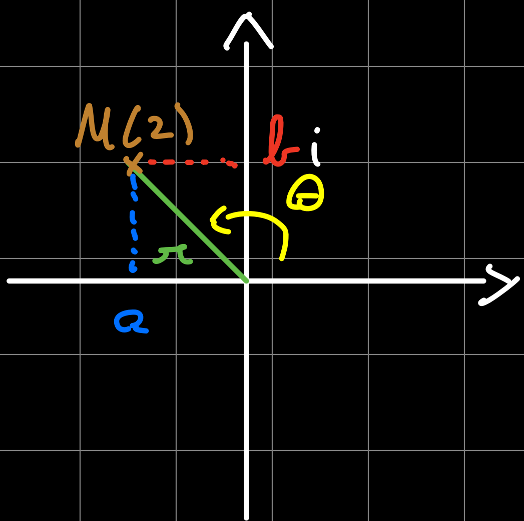
?

Module :

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, si $z \in \mathbb{R}$, $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$

Argument :

une mesure de l'angle $(\overrightarrow{O_x}, \overrightarrow{O_y})\,[2\pi]$



Forme Trigonométrique :

$z = a + ib$

$r = |z|$ (← module de z)

$a = r\cos(\theta)$, $b = r\sin(\theta)$

$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

Exemple :

$z = 1 + i$ ← passé à la forme Trigonométrique

1) Calculer le module r

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Or : $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = a + ib$
$= r\cos(\theta) + ri\sin(\theta) = a + ib$
$= \cos(\theta) + i\sin(\theta) = \frac{a}{r} + \frac{b}{r}i$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{r} \\ i\sin(\theta) = \frac{b}{r}i \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{r} \end{cases}$$

Ainsi, dans notre cas :

$z = 1 + i$, $r = \sqrt{2}$ donc :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Or d'après les mesures principales du cercle trigonométrique, $\theta = \frac{\pi}{4}$ et donc
$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.