Rappels : Théorème + formule

1) $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$ et

$Arg(z_1 \times z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$

Soit $\begin{cases} z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_2)) & r_1, r_2 \in \mathbb{R} \\ z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) & \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

Dans ces conditions, on a :

$$z_1 \times z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 \times r_2 \times ((\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2 i + \sin\theta_1 \cos\theta_2 i - \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

$$= r_1 \times r_2 \times (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2 i + \sin\theta_1 \cos\theta_2 i)$$

$$= r_1 \times r_2 ((\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 + i(\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2))$$

$$= r_1 \times r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Donc $|z_1 z_2| = r_1 \times r_2 = |z_1||z_2|$

et $Arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 \, [2\pi] = Arg(z_1) + Arg(z_2) \, [2\pi]$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$ et
$Arg(z^n) \, [2\pi] = n \, Arg(z) \, [2\pi]$

Soit $P(n)$: " $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$ et $Arg(z^n) = n \, Arg(z) \, [2\pi]$ "

Initilisation : $(n = 0)$

$z = a + ib$, $|z^0| = |1| = \sqrt{1^2} = 1$
$|z|^0 = (\sqrt{a^2 + b^2})^0 = 1$
Donc $|z|^0 = |z^0|$

$Arg(z^0) \, [2\pi] = Arg(1) \, [2\pi] = 0 \, [2\pi]$
$0 \times Arg(z) \, [2\pi] = 0 \, [2\pi] \equiv 0 \, [2\pi]$

$P(0)$ est vrai, donc $P(n)$ est initialisé

Heredité : On suppose qu'il existe un naturel $k \geq 0$ tel que $P(k)$ est vraie, c'est à dire $|z^k| = |z|^k$ et $Arg(z^k) = k \times Arg(z) \, [2\pi]$. Et l'on veut montré que $P(k+1)$ est vraie, c'est à dire $|z^{k+1}| = |z|^{k+1}$ et $Arg(z^{k+1}) = (k+1) \times Arg(z) \, [2\pi]$.

On a : $|z|^{K}$

$= |z|^{K} \times |z|^{1}$

$= |z^{K} \times z^{1}|$ d'après 1)

$= |z^{K+1}|$

$= |z|^{K+1}$ d'après H.R.

et $\operatorname{Arg}(z^{K+1})$

$\operatorname{Arg}(z^{K}) + \operatorname{Arg}(z)$ d'après 1)

$K \times \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(z)$ d'après H.R.

$(K+1)\operatorname{Arg}(z)\ [2\pi]$

Donc $P(K+1)$ est vrai

$P(n)$ est héréditaire

<u>Conclusion :</u> $P(n)$ est héréditaire et initialisée, donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve de l'écriture exponentielle :

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

t.q. $f : \theta \longmapsto \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

Calculons $f(\theta_1) \times f(\theta_2)$:

$$f(\theta_1) \times f(\theta_2) = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= \cos\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 i + \sin\theta_1\cos\theta_2 i - \sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)$$

$$f(\theta_1) \times f(\theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

c'est à dire $f(\theta_1) \times f(\theta_2) = f(\theta_1 + \theta_2)$

Donc f appartient à la famille des fonctions exponentielles

C'est-à-dire $\forall \theta \in \mathbb{R} \mid f(\theta) = e^{K\theta}$

Cherchons donc K :

f étant une fonction de la famille des exponentielles, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $f'(\theta) = K e^{K\theta}$

$$(i\sin(\theta))' = i'\sin\theta + i(\sin\theta)'$$
$$= 0 \times \sin\theta + i\cos\theta$$
$$= i\cos\theta$$

Or $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$

Donc $f'(\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)'$

$$= -\sin\theta + i\cos\theta$$
$$= -1 \times \sin\theta + i\cos\theta$$
$$= i^2\sin\theta + i\cos\theta$$

$$f'(\theta) = i(\cos\theta + i\sin(\theta))$$

Et $f'(\theta) = i f(\theta)$

Or on a dit que $\begin{cases} f(\theta) = e^{K\theta} \\ f'(\theta) = K e^{K\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\theta) = e^{K\theta} \\ f'(\theta) = K f(\theta) \end{cases}$

Donc $K = i$, et $f(\theta) = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

et donc $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,f(\theta) = r\,e^{i\theta} = |z|\,e^{i\theta}$

CQFD