Mercredi 31 Janvier 2024

# Cours CM #2 : Arithmétique

## Rappels principaux

### 1) Congruence

Exo CC1 : 14/02/2021

1) calculer 7234 mod 7
2) calculer 2020 mod 6
3) calculer 7234**2020 mod 7

1) $7234 \equiv 3 [7]$
2) $2020 \equiv 4 [6]$

3) D'après la compatibilité des congruences avec la multiplication

Donc $7234^{2020} \equiv 3^{2020} [7]$

Or $3^2 = 9 \equiv 2 [7]$

$3^3 = 27 \equiv 6 [7] \Leftrightarrow \boxed{-1 [7]}$ Bingo!

$\vdots$

$(3^3)^2 = (27)^2 \equiv 6^2 [7] \Leftrightarrow (-1)^2 [7]$

$\Rightarrow \boxed{1 [7]}$ YES!

Donc on exprime 2020 en fonction de 6 : $2020 = 6k + 4$ ← Question 2! hehehe...

Ainsi $3^{2020} = 3^{6k+4}$ et $3^{6k} \equiv 0 [7]$

donc $7234^{2020} \equiv 3^4 [7]$

$\Rightarrow 3^3 \times 3 [7] \Rightarrow (-1) \times 3 \Rightarrow -3 [7] \Rightarrow \boxed{4 [7]}$

Donc $7234^{2020} \equiv 4 [7]$

## 2) Trouver des relations de Bezout

Rappel du Théorème : $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$,
$d = PGCD(a, b)$ alors $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2$
Tel que $d = ua + vb$

Ex : $a = 368$, $b = 161$

1) Trouvons le PGCD

$PGCD(368, 161)$
$368 = 2 \times 161 + 46$
$161 = 3 \times 46 + 23$
$46 = 2 \times \boxed{23} + 0$

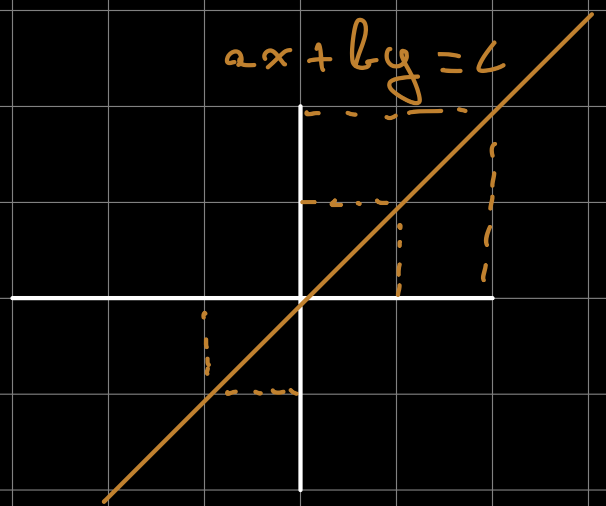
2) On exprime 23 en fonction de a et b

$23 = 161 - 3 \times 46$
$23 = b - 3 \times (368 - 2 \times b)$
$23 = b - 3 \times (a - 2b)$
$23 = b - 3a + 6b$

$23 = -3 \times 368 + 7 \times 161$ (QED)

## 3) Résoudre des équations Diophantienne

Ce sont des équations de la forme
$ax + by = c$ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ & $x, y \in \mathbb{Z}$




Ici, on va chercher toutes les $(x, y)$ qui vérifient :
$23 = 368x + 161y$

J'ai une solution particulière :

$u_0 = -3$ et $v_0 = 7$

analyse (raisonnement par condition nécessaire)

Soit $(u, v) \in \mathbb{Z}$ un couple solution.
On a : $\begin{cases} 368u + 161v = 23 \\ 368u_0 + 161v_0 = 23 \end{cases}$

$\Rightarrow 368(u - u_0) + 161(v - v_0) = 23$

Rem : $23 = 368u + 161v \iff 1 = 16u + 7v$

↳ ⇑ Simplification par division de a, b, c par PGCD

L'equation est la même que :

$$\begin{cases} 16(u-u_0) + 7(v-v_0) = 0 \\ 16(u-u_0) = 7(v_0-v) \end{cases}$$

Or, le Theorème de Gauss dit dans notre cas :

$7 \nmid 16$ car $7 \wedge 16$, Or $7 \mid 16(u-u_0)$,

donc $7 \mid (u-u_0) \Rightarrow \boxed{u = u_0 + 7K}$

En revenant à l'equation de base qui est

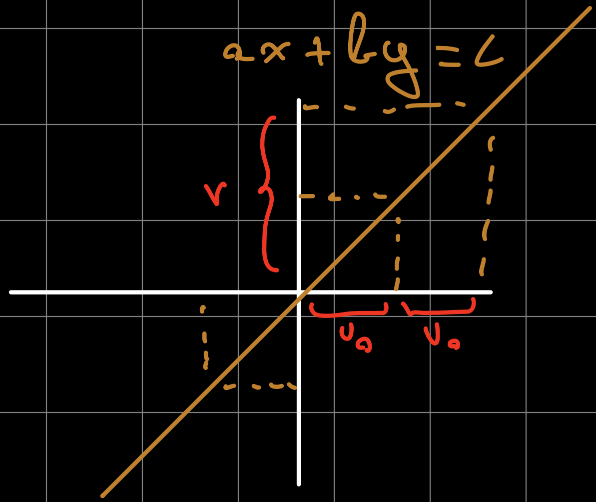
$16(u-u_0) = 7(v_0-v)$,

Or $(u-u_0) = 7K$, donc

$16 \times \cancel{7}K = \cancel{7}(v_0-v)$,

$\Rightarrow 16K = v_0 - v \Rightarrow \boxed{v = v_0 - 16K}$

$\Leftarrow$ Il est donc facile de voir que ce sont des conditions suffisantes




Si $\exists K \in \mathbb{Z} \mid u = u_0 + 7K$ et $v = v_0 - 16K$ alors

$16u + 7v = 16(u_0 + 7k) + 7(v_0 - v) = 16u_0 + 7v_0 = 1$

$368u + 161v = 23$ $\quad S_{23} = \{(-3+7k);(7-16k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

On peut peut-être s'interesse à $368u + 161v = c$ :

Étape 1) Si $c$ ne me donne par le PGCD, par de solution

Étape 2) Solution Particulière (Th. de Bézout)

Ex : $368u + 161v = 115$ $\quad (115 = 23 \times \underline{\underline{5}})$

$115 = 5 \times \underbrace{PGCD(a,b)}_{23}$, donc $\begin{cases} x_0 = 5 \times -3 = -15 \\ y_0 = 5 \times 7 = 35 \end{cases}$

Étape 3) Toutes les Solutions

$S_{115} = \{(-15+7k\,;\,35-16k),\ k \in \mathbb{Z}\}$

$-2944$