



**POLITECNICO**  
MILANO 1863

Filippo Sergenti

Mattia Scarel

Matteo Beltrami

# Esperimenti di Elettromagnetismo



*“The purpose of computing is insight, not numbers”*

*Richard W. Hamming - The art of doing science & engineering - 1986*

## Introduzione

I due attori in questo teatro saranno il campo elettrico e magnetico. Esploreremo quindi le loro interazioni in fenomeni statici sotto diverse condizioni. L'elettrostatica e magnetostatica sono famose per essere tra i fenomeni più difficili da trattare in laboratorio, nelle pagine seguenti mostreremo come abbiamo affrontato queste sfide sia sperimentalmente che dal lato computazionale.

Come ha mostrato John P.A. Ioanidis in (2005) *“Why most published research findings are false”*, viviamo in un'epoca dove la maggior parte degli studi scientifici pubblicati sono *irriproducibili* o addirittura *falsi*. Poiché la riproducibilità dei risultati sperimentali è una parte essenziale del metodo scientifico, l'incapacità di replicare gli studi di altri ha conseguenze potenzialmente gravi per molti campi del sapere, per non parlare di come rallenti gli sviluppi tecnologici in industria. Per quanto questa crisi odierna riguardi principalmente campi come la medicina e le scienze sociali, noi vogliamo fare la nostra parte per un mondo della ricerca *sano*.

Tutti i dati, le metodologie di analisi, i codici e risultati sono pubblici, liberi di essere esaminati al seguente [link](#).

## Indice

<b>Esperimento 1</b>	<b>3</b>
Cenni teorici	3
Apparato sperimentale	4
Procedimento	5
Modelli studiati	6
Risultati sperimentali	8
Analisi statistica	10
 <b>Esperimento 2</b>	
Cenni teorici	13
Apparato sperimentale	13
Procedimento	14
Risultati sperimentali	15
Analisi statistica	18
 <b>Conclusione e ringraziamenti</b>	<b>22</b>

## Esperimento 1

### Studio di ipotesi e modelli per il corretto calcolo della capacità di un condensatore variabile a piatti piani

#### Abstract

Nell'esperimento, si hanno due armature piane circolari di raggio  $R$  a distanza iniziale fissa di 1mm caricate con un generatore di tensione. Il condensatore è a capacità variabile poiché una delle armature è fissata, mentre l'altra è libera di muoversi lungo un tratto rettilineo munito di scala metrica. Lo scopo è misurare la capacità  $C$  e la differenza di potenziale  $\Delta V$  sotto diverse ipotesi e modelli.

#### Cenni Teorici

##### Capacità di un condensatore

Se si applica una differenza di potenziale alle armature di un condensatore, le cariche si separano e si genera un campo elettrico all'interno del dielettrico (in questo caso l'aria). L'armatura collegata al potenziale più alto si carica positivamente, mentre l'altra negativamente. Le cariche positive e negative disposte sulle due armature sono uguali in valore assoluto. Il rapporto della carica e del potenziale applicato si definisce *capacità*  $C$  ed è misurato in farad (F).

$$\text{globalmente:} \quad Q = \varepsilon_0 \oint \varepsilon_r E \cdot dA \quad \Delta V = \int_-^+ E \cdot dS \quad C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 \oint \varepsilon_r E \cdot dA}{\int_-^+ E \cdot dS}$$

##### Ipotesi 1: Il condensatore opera nel vuoto

Le caratteristiche *dielettriche* dell'aria per campi elettrici nettamente inferiori a  $3,94 \cdot 10^4 \text{ V/m}$  sono molto simili a quelle del vuoto. Calcolato il campo elettrico massimo raggiunto all'interno del nostro condensatore, ci si accorge che  $2 \cdot 10^3 \text{ V/m}$  verifica ampiamente questa ipotesi. Per i successivi calcoli, si trascurerà la *costante dielettrica relativa*.

$$\varepsilon_r = 1$$

##### Ipotesi 2: Il condensatore è piano

La capacità di un condensatore con armature piane e parallele è proporzionale solo a parametri di tipo *geometrico*. La geometria *locale* di un condensatore piano permette di fare importanti semplificazioni per tutti i punti distanti dal bordo. Si suppone di conseguenza che  $E$  sia costante in tutto il volume compreso tra i piatti.

Le seguenti formule avrebbero valenza globale nel caso studiassimo un condensatore a piatti *infiniti*.

$$\text{localmente:} \quad Q = \varepsilon_0 E A \quad \Delta V = E d \quad C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

## Apparato Sperimentale



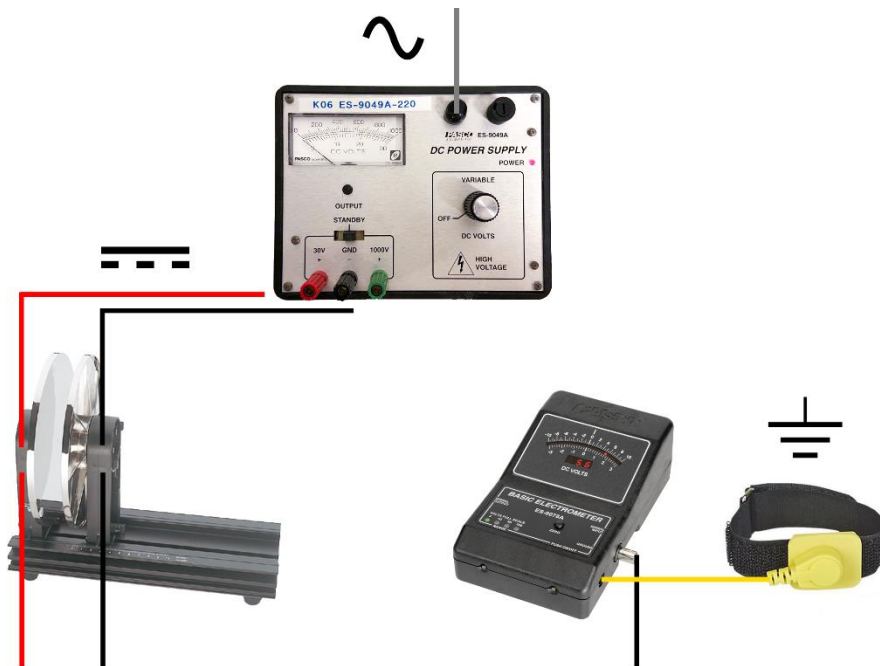
**Condensatore:** formato da due armature (dischi) di raggio 10cm. Uno dei due dischi è libero di muoversi lungo un tratto rettilineo munito di scala metrica con sensibilità 1mm.

**Generatore di tensione:** utilizzato per caricare le armature tramite un cavo con morsetto. Tensione regolabile.

**Voltmetro:** utilizzato per misurare la differenza di potenziale fra le armature. Impostabile su tre diversi fondi scala per effettuare misurazioni su diversi voltaggi. Dispositivo Analogico.

**Bracciale antistatico:** importante per la sicurezza degli sperimentatori.

In seguito, riportiamo come le tre apparecchiature sono collegate



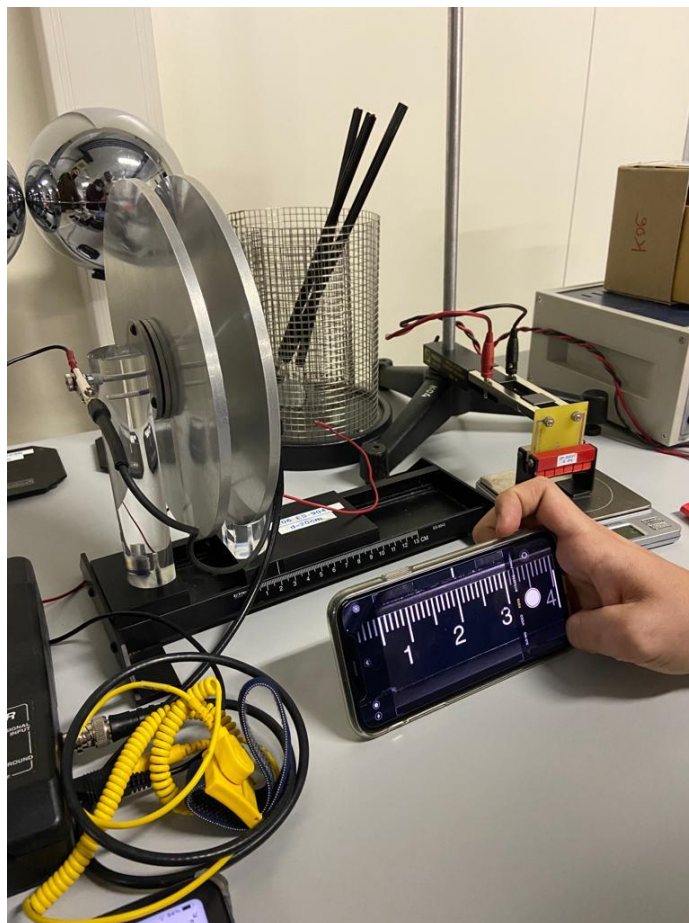
## Procedimento

Per iniziare, si sono allontanati tutti gli oggetti che non interessavano l'esperimento perché non si disperdesse la carica depositata sui piatti del condensatore.

Acceso il voltmetro, lo si è collegato tramite morsetti agli estremi delle due armature. Successivamente, si è regolato il generatore di tensione a 10 V (*corrente continua*) collegandolo in modo simile. Mentre i collegamenti tra voltmetro e condensatore sono rimasti invariati durante l'intera esperienza, non si può dire lo stesso del collegamento tra generatore e piastra mobile. Infatti, piastra e cavo si ponevano in contatto solo per depositare la carica necessaria per riportare sul voltmetro il valore desiderato (10, 15, 20 V). Durante la fase di misurazione il generatore è scollegato in modo da evitare il continuo deposito di nuova carica atta a mantenere il voltaggio costante. Questo garantisce che non sia il voltaggio, bensì la carica depositata sulle due armature a rimanere invariata durante l'esperienza.

Si sono quindi rilevate grazie al voltmetro (opportunamente azzerato tramite funzione dello strumento) le  *differenze di potenziale*  in corrispondenza delle varie distanze a cui si portano le due piastre tramite lo scorsoio. Si portano le piastre dalla distanza di 1mm (condizione iniziale nella quale si svolgono tutte le operazioni precedenti) fino a 40mm, avendo premura di effettuare tutte le misure nel minor tempo possibile. Così facendo si evita che la carica depositata nelle piastre venga dispersa per contatto con l'aria. Purtroppo, il giorno in cui si è condotta l'esperienza risultava particolarmente umido per via delle cattive condizioni meteo, fatto che favorisce la perdita di carica in quanto l'aria umida è un isolante peggiore rispetto a quella secca. Si è ripetuto il processo di rilevamento in corrispondenza dei voltaggi impostati al generatore di 15V e 20V.

Dalla foto si può vedere come è stato utilizzato un cellulare posto parallelo al piano per ingrandire la scala millimetrica ed evitare *errori di parallasse*.



## Modelli Studiati

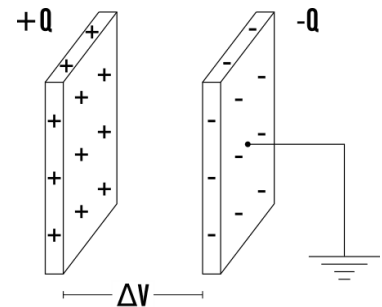
### Modello 1: Condensatore a piatti infiniti

La geometria *infinita* del condensatore permette di ampliare la validità dell'ipotesi due *globalmente*.  
Si assume che i piatti di questo condensatore siano così grandi e vicini l'uno all'altro da poter trascurare l'effetto di bordo del campo elettrico alle estremità.

$$E_{\infty} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \quad \forall \text{ punti } P \text{ interni}$$

$$V_{\infty} = E_{\infty} d = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} d_{min}$$

$$C_{\infty} = \frac{Q}{V_{\infty}} = \frac{\varepsilon_0 A}{d_{min}}$$

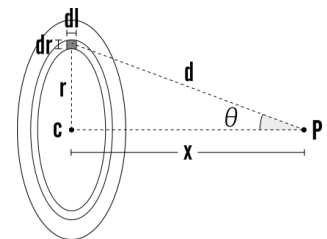


### Modello 2: Condensatore a piatti circolari finiti

In questo modello si considera la geometria *limitata* del nostro condensatore e si procede a calcolare il potenziale elettrico lungo l'asse di un *disco carico uniformemente*.

Il campo elettrico generato dalla carica  $dQ$  nel punto P è dato da:

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = \frac{\sigma dr dl}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$



Si osserva che ogni tratto infinitesimo di *corona circolare* genera un campo elettrico identico in modulo a quello generato dal tratto diametralmente opposto. Data la geometria le due componenti verticali si annullano mentre le due componenti orizzontali si sommano per ogni coppia di punti opposti. Studiamo quindi solo la *componente orizzontale*:

$$dE_x = \frac{\sigma dr dl}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \cos(\theta)$$

Si trova il campo elettrico generato lungo l'asse integrando per una distribuzione di *anelli concentrici*.

$$dE_r = \int_L dE_x = \frac{\sigma dr \cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \int_L dl = \frac{\sigma dr \cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 d^2} 2\pi r = \frac{\sigma r dr}{2\varepsilon_0 d^2} \cos(\theta)$$

Dalla definizione di *coseno* segue che:

$$\cos(\theta) = \frac{x}{d} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} \quad \text{poichè} \quad d = \sqrt{x^2 + r^2}$$

Ora è possibile scrivere la formula del campo elettrico generato dalla corona in P nel seguente modo:

$$dE_r = \frac{\sigma r dr}{2\varepsilon_0 d^2} \frac{x}{d} = \frac{\sigma r dr}{2\varepsilon_0} \frac{x}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

Integrando da 0 a R si ottiene il campo elettrico generato lungo l'asse di un disco, essendoci due dischi in un condensatore, moltiplichiamo per due:

$$E_{disco} = 2 \int_0^R dE_r = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \quad (x > 0)$$

Integrando di nuovo è possibile trovare la differenza di potenziale a cavallo delle due armature:

$$V_{disco} = - \int_0^{d_{min}} E_{disco} dx = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \left( d_{min} + R - \sqrt{d_{min}^2 + R^2} \right)$$

Da qui si ricava la capacità *teorica* del disco:

$$C_{disco} = \frac{Q}{V_{disco}} = \frac{\varepsilon_0 A}{\left( d_{min} + R - \sqrt{d_{min}^2 + R^2} \right)}$$

**Nota:**

con  $d$  si intende la distanza generica tra due punti su armature diverse, con  $d_{min}$  si indica invece la distanza minima, ovvero la perpendicolare che unisce le armature.

### Modello 3: Capacità parassita

Dai dati si nota che il voltaggio del disco non ricalca perfettamente ciò che si è ottenuto dai dati sperimentali. Per migliorare ulteriormente il modello ora si tiene anche conto della capacità parassita del voltmetro.

$$C_{disco} + C_{parassita} = C_{totale} \quad \text{dove} \quad C_{totale} = \frac{Q}{V_{sperimentale}}$$

Si procede quindi al calcolo della capacità parassita che permette di rendere il nostro *modello compatibile* con i dati sperimentali. Le capacità si sommano poiché in *parallelo*.

$$C_{parassita} = C_{totale} - C_{disco} = Q \left( \frac{1}{V_{sperimentale}} - \frac{1}{V_{disco}} \right)$$



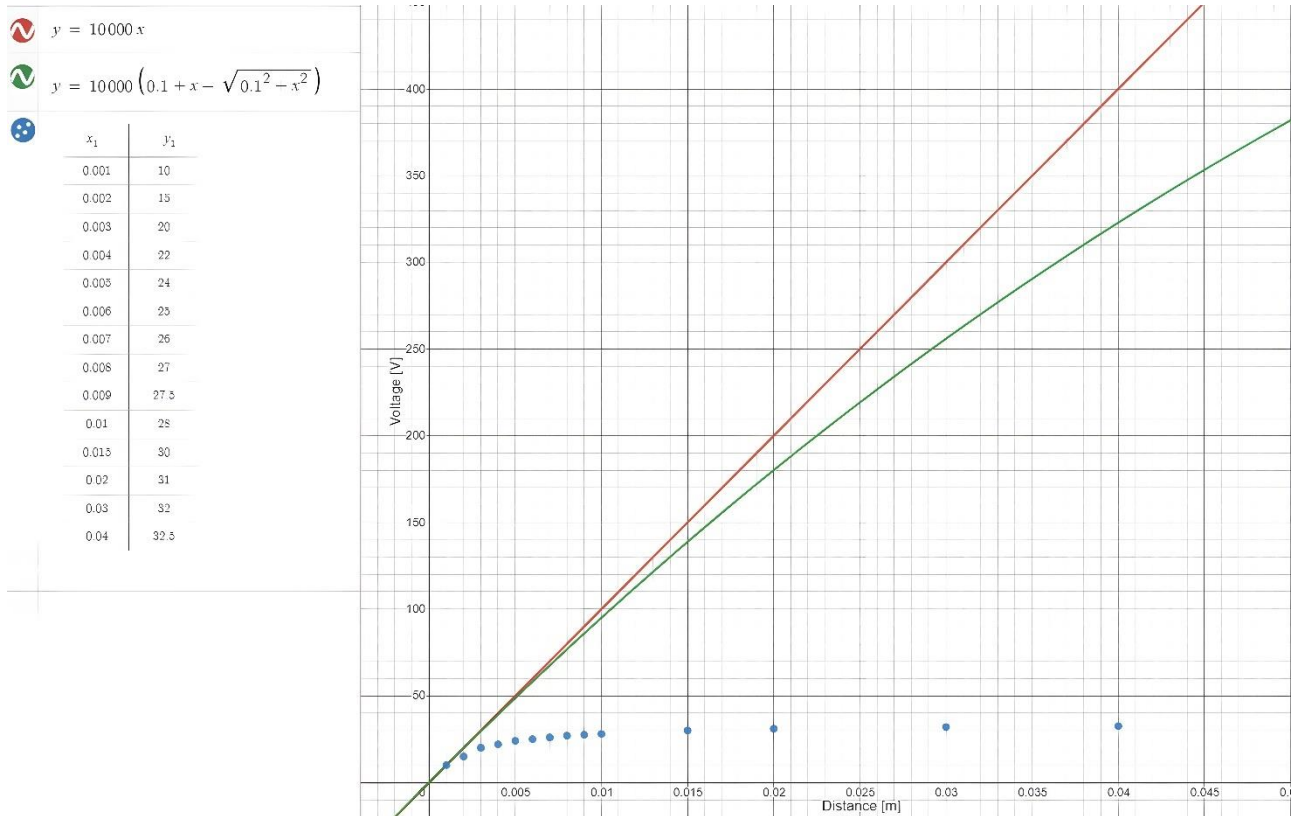
## Risultati Sperimentali

Dati e grafici interattivi sono disponibili cliccando sopra i seguenti link:

[10 volt](#)

[15 volt](#)

[20 volt](#)



È riportato solo il grafico relativo alle misure con  $\Delta V$  iniziale pari a 10 V poiché tutti i tre grafici si assomigliano. Come possiamo notare i primi due modelli risultano insoddisfacenti per distanze maggiori di 5mm, verso i 10mm si nota infatti che il potenziale elettrico tende a saturare, ovvero raggiungere un valore costante.

	distance [m]	voltage inf [V]	voltage disk [V]	voltage exp [V]	capacitance inf [F]	capacitance disk [F]	capacitance total [F]	capacitance par [F]	net charge [C]
0	0.001	10.0	9.950001	10.0	2.781625e-10	2.795603e-10	2.781625e-10	0.000000e+00	2.781625e-09
1	0.002	20.0	19.800020	15.0	1.390813e-10	1.404860e-10	1.854417e-10	4.495570e-11	2.781625e-09
2	0.003	30.0	29.550101	20.0	9.272084e-11	9.413251e-11	1.390813e-10	4.494875e-11	2.781625e-09
3	0.004	40.0	39.200320	22.0	6.954063e-11	7.095925e-11	1.264375e-10	5.547826e-11	2.781625e-09
4	0.005	50.0	48.750780	24.0	5.563250e-11	5.705806e-11	1.159010e-10	5.884298e-11	2.781625e-09
5	0.006	60.0	58.201617	25.0	4.636042e-11	4.779292e-11	1.112650e-10	6.347209e-11	2.781625e-09
6	0.007	70.0	67.552994	26.0	3.973750e-11	4.117693e-11	1.069856e-10	6.580865e-11	2.781625e-09
7	0.008	80.0	76.805104	27.0	3.477031e-11	3.621667e-11	1.030232e-10	6.680648e-11	2.781625e-09
8	0.009	90.0	85.958168	27.5	3.090695e-11	3.236022e-11	1.011500e-10	6.878979e-11	2.781625e-09
9	0.010	100.0	95.012438	28.0	2.781625e-11	2.927643e-11	9.934375e-11	7.006732e-11	2.781625e-09
10	0.015	150.0	138.812579	30.0	1.854417e-11	2.003871e-11	9.272084e-11	7.268213e-11	2.781625e-09
11	0.020	200.0	180.196097	31.0	1.390813e-11	1.543666e-11	8.972984e-11	7.429319e-11	2.781625e-09
12	0.030	300.0	255.969349	32.0	9.272084e-12	1.086702e-11	8.692579e-11	7.605876e-11	2.781625e-09
13	0.040	400.0	322.967039	32.5	6.954063e-12	8.612721e-12	8.558847e-11	7.697574e-11	2.781625e-09



Riteniamo che ogni ricercatore debba avere la massima trasparenza su come analizzi i propri dati; perciò, riportiamo il seguente codice in *Python* con il quale è stato calcolato il valore dei parametri d'interesse in funzione della distanza.

Come ci è stato consigliato dai professori, qualora nei calcoli si fosse incontrata una *capacità parassita* negativa (nel nostro caso ad 1mm) la si considera nulla. Una capacità negativa non ha significato fisico.

Facendo la media delle misurazioni della capacità parassita è possibile concludere che ha un valore di circa:

$$C_{parassita} = 5.994141716657975 \cdot 10^{-11} F$$

$$\sigma(C_{parassita}) = 1.9376964418567223 \cdot 10^{-11}$$

```
# Apparatus
r = 0.1
area = pi * r**2

def analysis(d, v_exp):

    # Charge homogeneously distributed on the capacitor's plates (constant)
    # Measured in coulomb [C]
    q = (epsilon_0 * area * v_exp[0]) / d[0]

    # Voltage under the hypothesis of an infinite parallel plane capacitor
    # Measured in volt [V]
    v_inf = q * d / (epsilon_0 * area)

    # Capacitance under the hypothesis of an infinite parallel plane capacitor
    # Measured in farad [F]
    c_inf = q / v_inf

    # Voltage along the axis of a flat disk
    # Measured in volt [V]
    v_disk = q * (d + r - np.sqrt(r**2 + np.square(d))) / (epsilon_0 * area)

    # Capacitance under the hypothesis of an finite circular parallel plate capacitor (disk)
    # Measured in farad [F]
    c_disk = q / v_disk

    # Total capacitance of our apparatus (includes parasitic)
    # Measured in farad [F]
    c_tot = q / v_exp

    # Parasitic capacitance from the voltmeter
    # Measured in farad [F]
    c_par = c_tot - c_disk

    # Parasitic capacitance must be positive
    c_par[c_par < 0] = 0

    # Display parasitic capacitance
    print(f"Parasitic capacitance has a mean value of {np.mean(c_par)} farad with a standard error of {np.std(c_par)}")

    # Create dataframe
    results = pd.DataFrame({
        "distance [m]": d,
        "voltage inf [V]": v_inf,
        "voltage disk [V]": v_disk,
        "voltage exp [V]": v_exp,
        "capacitance inf [F]": c_inf,
        "capacitance disk [F]": c_disk,
        "capacitance total [F]": c_tot,
        "capacitance par [F]": c_par,
        "net charge [C]": q,
    })

    display(results)
```

Più informazioni su come è stato scritto il codice sono disponibili cliccando [qui](#).

# Analisi Statistica

## Regressione Lineare

È riportato solo il caso relativo alle misure con  $\Delta V$  iniziale pari a 10 V poiché tutti i tre casi si assomigliano. Le analisi degli altri casi possono essere trovate al seguente [link](#).

I modelli teorici inizialmente proposti dovrebbero approssimare per eccesso il voltaggio sperimentale. Si studia la relazione lineare che si avvicina di più a questi modelli cercando di ottimizzare la significatività dei predittori.

Regressione lineare usando prima tutti i dati. Modello raffinato in seguito usando solo i primi otto.

```
Call:
lm(formula = v_exp ~ d)

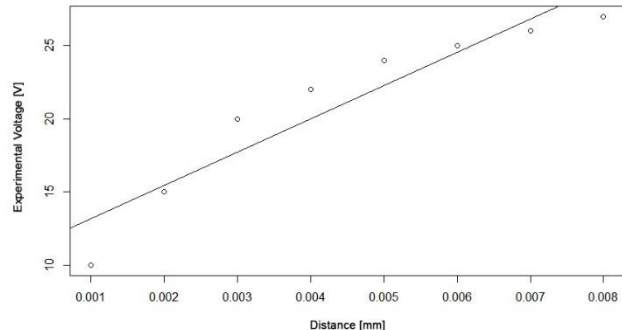
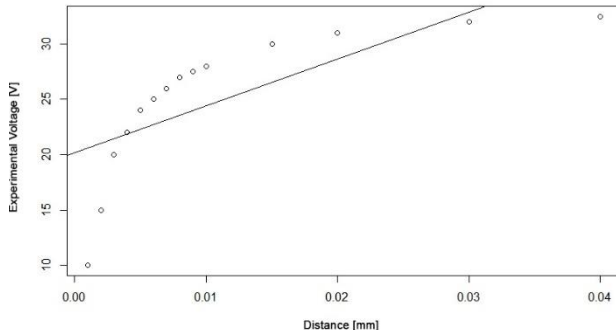
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-10.575  -1.288   2.016   3.311   3.606

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    20.15      1.74   11.579 7.19e-08 ***
d             424.34    109.91   3.861 0.00226 **
---
Residual standard error: 4.507 on 12 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.554, Adjusted R-squared:  0.5168 
F-statistic: 14.91 on 1 and 12 DF, p-value: 0.002265
```

```
Call:
lm(formula = v_exp[0:8] ~ d[0:8])

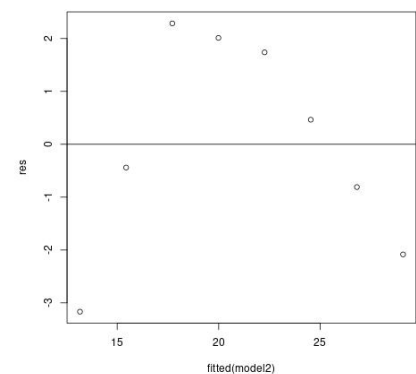
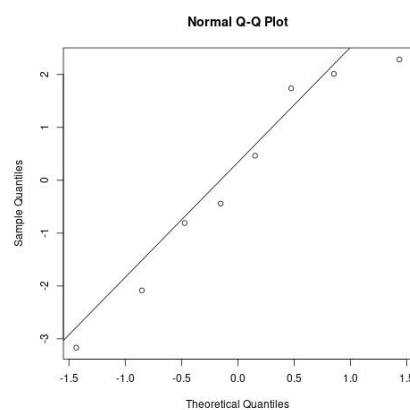
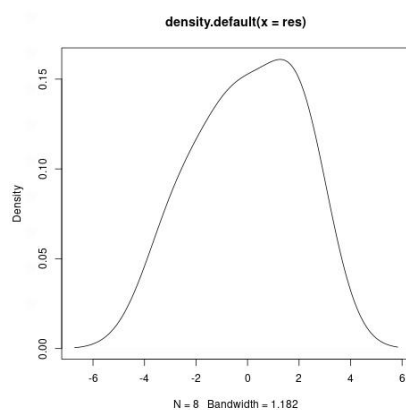
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.1667 -1.1280  0.0119  1.8065  2.2857

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   10.893      1.675   6.503 0.000630 ***
d[0:8]       2273.810    331.700  6.855 0.000474 ***
---
Residual standard error: 2.15 on 6 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8868, Adjusted R-squared:  0.8679 
F-statistic: 46.99 on 1 and 6 DF, p-value: 0.0004743
```



Densità e QQplot per i residui.  $p$ -value del test di SW: 0.5627 - gaussianità non rifiutabile.

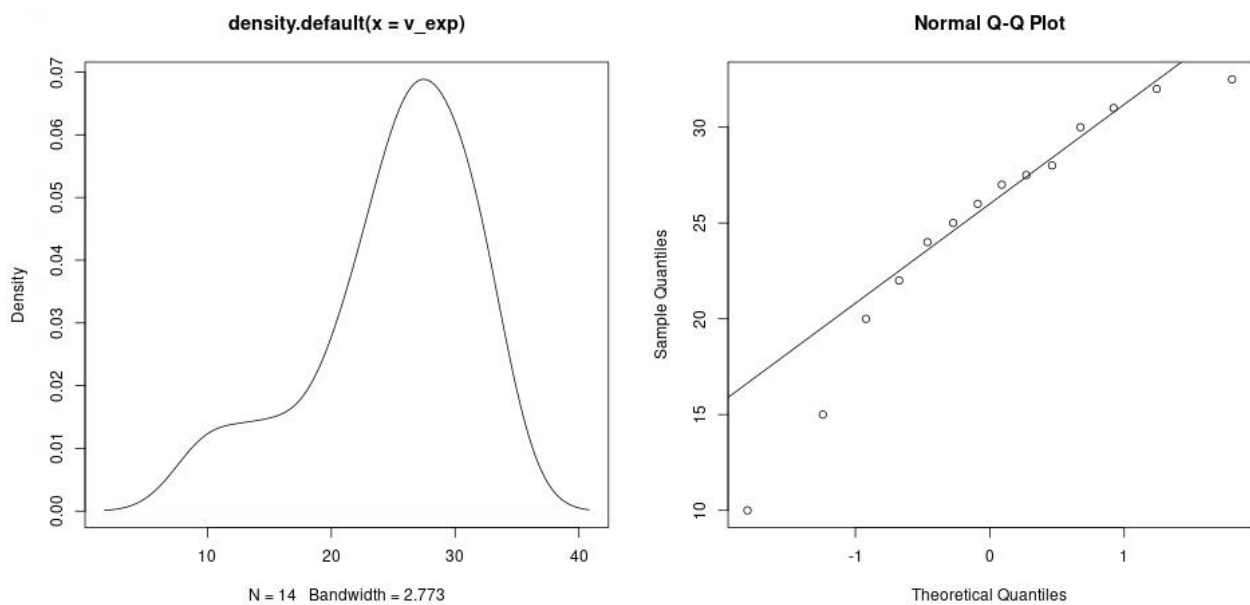
Dal terzo grafico notiamo che i residui sono *omoschedastici* e hanno *bias*.



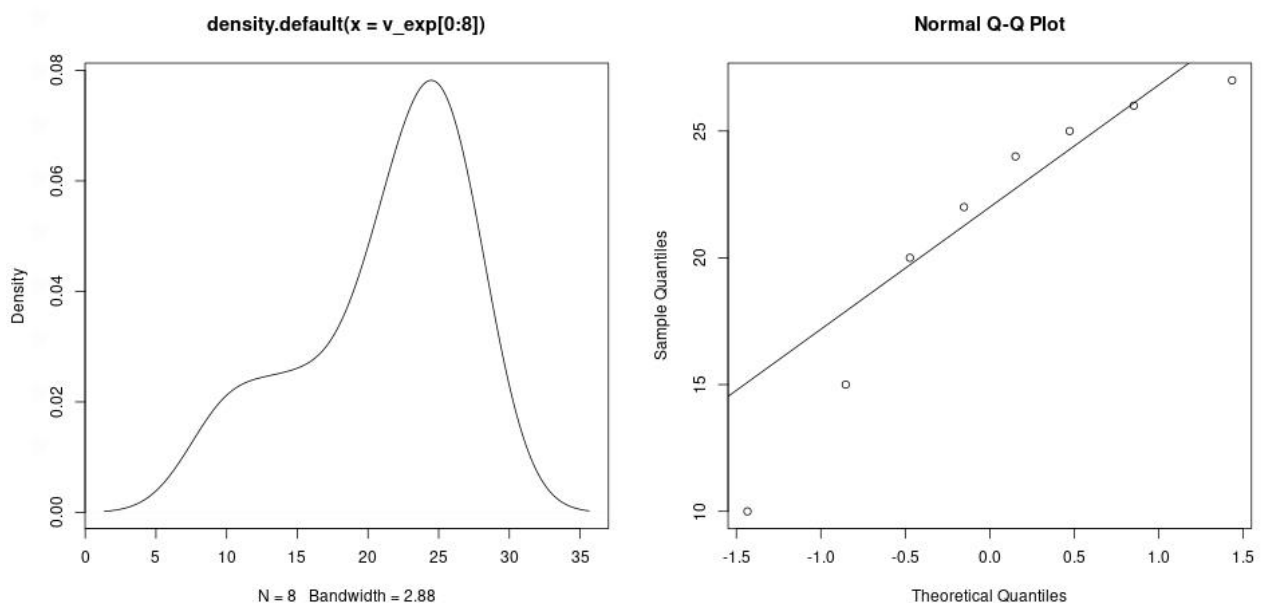
## Normalità dei campioni

Studiando i *QQ-plots* si nota che le misurazioni ottenute seguono un andamento normale; un seguente test di *Shapiro-Wilk* con un *p-value* di 0.159 porta ad accettare la gaussianità dei campioni. È importante ricordare che il test di *Shapiro-Wilk* pone la gaussianità nella *ipotesi nulla*  $H_0$ ; questo significa che non è possibile affermare con forza la gaussianità dei campioni. Tuttavia, non abbiamo nemmeno una forte evidenza per rifiutare questa ipotesi. Si ha dunque una conclusione che gli statistici chiamano “*debole*”. Non esistono test che concludono in modo forte la gaussianità di un *campione aleatorio*.

Densità e QQplot di tutti i dati sperimentali



Densità e QQplot per i primi otto dati sperimentali (utilizzati nella regressione)  
*p-value* del test di SW: 0.2287 - gaussianità non rifiutabile



Anche in questo caso riteniamo doveroso lasciare il [codice](#) R utilizzato per la nostra analisi.

```
# Data
d = c(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20, 30, 40) / 1000
v_exp = c(10, 15, 20, 22, 24, 25, 26, 27, 27.5, 28, 30, 31, 32, 32.5)

# Linear regression (all data)
model = lm(v_exp ~ d)
summary(model)

# Linear regression (only first 8)
model2 = lm(v_exp[0:8] ~ d[0:8])
summary(model2)

# Plots with regression line
plot(d, v_exp)
abline(model)
plot(d[0:8], v_exp[0:8])
abline(model2)

# The second model is better so we proceed studying its residuals
res = resid(model2)

# Residual VS Fitted plot
plot(fitted(model2), res)
abline(0,0)

# Shapiro-Wilk
shapiro.test(v_exp)
shapiro.test(v_exp[0:8])
shapiro.test(res)

# QQ-plot
qqnorm(v_exp)
qqline(v_exp)
qqnorm(v_exp[0:8])
qqline(v_exp[0:8])
qqnorm(res)
qqline(res)

# Density
plot(density(v_exp))
plot(density(v_exp[0:8]))
plot(density(res))
```

## Esperimento 2

### Verifica sperimentale della legge di Laplace

#### Abstract

L'obiettivo di questi esperimenti è verificare la legge di Laplace studiando la vicendevole dipendenza tra le variabili in gioco (corrente, lunghezza del circuito e angolo tra densità di corrente e campo magnetico). I modelli teorici risultano compatibili ai dati sperimentali, ciò ci permette di studiare l'intensità del campo generato dei magneti in margine con un errore pressoché minimo.

#### Cenni Teorici

##### Legge di Laplace:

Un filo rettilineo percorso da una corrente  $I$  ed immerso in un campo magnetico  $B$  è soggetto alla forza  $F$ . Verso e direzione della forza seguono direttamente dal fatto che vettore forza, campo magnetico e densità di corrente formano una *terna destrorsa* (si può applicare la *regola della mano destra*).

$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$$

$$|F| = I L B \sin(\vartheta)$$

#### Apparato Sperimentale



**Set di circuiti:** importante per la seconda parte dell'esperimento. Il set comprende circuiti di lunghezza variabile da 10 a 80 mm. Tutti i circuiti sono compatibili con il *supporto conduttore*.

**Magnete a ferro di cavallo:** comodo poiché genera un campo magnetico *uniforme* all'interno della sua cavità.

**Bilancia di precisione:** strumento digitale. Sensibilità in  $10^{-5}$  Kg (*centigrammo*). Funzionalità di tara inclusa.

**Generatore di Corrente:** utilizzato per far passare *corrente continua* all'interno del circuito. Regolabile.

**Bobina rettangolare:** montata su un supporto che permette una rotazione fino a  $180^\circ$ . Dieci avvolgimenti.

## Procedimento

### 1) Intensità variabile:

In questa fase dell'esperimento la lunghezza del circuito è fissa a 4 cm mentre l'intensità di corrente è variabile da 1 a 4 *ampere* (A).

Si posiziona il circuito all'interno della cavità del magnete perpendicolarmente al piano di lavoro grazie al *supporto conduttore*. È importante mantenere il circuito parallelo alle pareti del magnete per evitare che l'angolo influisca sulle misurazioni. Il campo si considera *uniforme* all'interno della cavità, quindi non è necessario porre il circuito perfettamente al centro, ma in ogni caso preferibile.

Il magnete si trova sul piatto della bilancia di precisione che permette di misurare *indirettamente* la forza verticale alla quale il magnete è sottoposto (come conseguenza del *principio di azione e reazione*) in corrispondenza dei diversi valori di corrente impostati al generatore.

Magnete e corrente sono orientati in modo tale da produrre una forza verso il basso, in quanto la bilancia risulta più precisa per variazioni positive della massa e non viceversa.

La forza totale agente lungo la direzione verticale è la somma vettoriale della forza peso e della reazione della forza di Laplace; fortunatamente la bilancia è in grado di misurare variazioni relative rispetto ad una massa indicata, questo permette di conoscere con semplicità la variazione di massa apparente dovuta all'azione della forza.

Si ottiene la forza di Laplace moltiplicando la variazione di massa in kilogrammi per l'accelerazione di gravità.

$$F_{Laplace} = \Delta m \cdot g = I L B$$

si assuma  $\sin(\vartheta) = 1 \quad \rightarrow \quad \vartheta = \pi/2$

### 2) Lunghezza variabile:

Questa fase dell'questo esperimento è simile a quella precedente. A differenza della prima fase la corrente impostata al generatore è fissa a 3 A, mentre varia la lunghezza del circuito inserito sul supporto conduttore.

Questa condizione è ottenuta collegando al supporto conduttore circuiti di lunghezza diversi, facenti parte del set sperimentale precedentemente descritto. Le lunghezze variano da 10 a 80 mm.

È fondamentale ricordare che prima di cambiare i circuiti è necessario spegnere il generatore di corrente per evitare incidenti. In ogni caso la corrente di 3 A è abbastanza alta da avere dei risultati visibili ma non sufficiente a creare situazioni di pericolo.

$$F_{Laplace} = \Delta m \cdot g = I L B \quad (\vartheta = \pi/2)$$

### 3) Angolo variabile:

Quest'ultima è caratterizzata dall'utilizzo di uno speciale strumento che ci permette variare l'angolo tra densità di corrente e campo magnetico in modo preciso senza modificare la struttura del sistema, che risulta simile ai casi precedenti. La lunghezza del circuito e l'intensità di corrente sono costanti e valgono rispettivamente 1cm e 3 A. La spira ha 11 avvolgimenti.

$$F_{Laplace} = \Delta m \cdot g = N I L B \sin(\vartheta)$$

## Risultati Sperimentali

Dati e Grafici Interattivi possono essere trovati cliccando sopra i seguenti link:

[prova1](#)

[prova2](#)

[prova3](#)

### 1) Intensità variabile:

	current [A]	length [m]	angle [deg]	angle [rad]	$\Delta$ mass [Kg]	force [N]	magnetic field [T]
<b>0</b>	1.0	0.04	90	1.570796	0.00038	0.003727	0.093163
<b>1</b>	1.5	0.04	90	1.570796	0.00057	0.005590	0.093163
<b>2</b>	2.0	0.04	90	1.570796	0.00079	0.007747	0.096841
<b>3</b>	2.5	0.04	90	1.570796	0.00098	0.009611	0.096105
<b>4</b>	3.0	0.04	90	1.570796	0.00118	0.011572	0.096432
<b>5</b>	3.5	0.04	90	1.570796	0.00137	0.013435	0.095965
<b>6</b>	4.0	0.04	90	1.570796	0.00153	0.015004	0.093776

$$B_1 = 0.09506363038690477 \text{ T}$$

$$\sigma(B_1) = 0.0015028110582847372$$

### 2) Lunghezza variabile:

	current [A]	length [m]	angle [deg]	angle [rad]	$\Delta$ mass [Kg]	force [N]	magnetic field [T]
<b>0</b>	3	0.01	90	1.570796	0.00031	0.003040	0.101335
<b>1</b>	3	0.02	90	1.570796	0.00059	0.005786	0.096432
<b>2</b>	3	0.03	90	1.570796	0.00087	0.008532	0.094798
<b>3</b>	3	0.04	90	1.570796	0.00116	0.011376	0.094798
<b>4</b>	3	0.06	90	1.570796	0.00169	0.016573	0.092074
<b>5</b>	3	0.08	90	1.570796	0.00220	0.021575	0.089894

$$B_1 = 0.09488841898148148 \text{ T}$$

$$\sigma(B_1) = 0.0035783486084375207$$



### 3) Angolo variabile:

	current [A]	length [m]	angle [deg]	angle [rad]	$\Delta$ mass [Kg]	force [N]	magnetic field [T]
0	3	0.11	-90	-1.570796	-0.00077	-0.007551	0.022882
1	3	0.11	-80	-1.396263	-0.00075	-0.007355	0.022632
2	3	0.11	-70	-1.221730	-0.00072	-0.007061	0.022769
3	3	0.11	-60	-1.047198	-0.00066	-0.006472	0.022647
4	3	0.11	-50	-0.872665	-0.00058	-0.005688	0.022500
5	3	0.11	-40	-0.698132	-0.00048	-0.004707	0.022191
6	3	0.11	-30	-0.523599	-0.00036	-0.003530	0.021396
7	3	0.11	-20	-0.349066	-0.00024	-0.002354	0.020853
8	3	0.11	-10	-0.174533	-0.00010	-0.000981	0.017113
9	3	0.11	0	0.000000	0.00000	0.000000	NaN
10	3	0.11	10	0.174533	0.00014	0.001373	0.023959
11	3	0.11	20	0.349066	0.00026	0.002550	0.022591
12	3	0.11	30	0.523599	0.00038	0.003727	0.022585
13	3	0.11	40	0.698132	0.00049	0.004805	0.022654
14	3	0.11	50	0.872665	0.00059	0.005786	0.022888
15	3	0.11	60	1.047198	0.00066	0.006472	0.022647
16	3	0.11	70	1.221730	0.00072	0.007061	0.022769
17	3	0.11	80	1.396263	0.00077	0.007551	0.023235
18	3	0.11	90	1.570796	0.00078	0.007649	0.023179

$$B_2 = 0.02230510145458343 \text{ T}$$

$$\sigma(B_2) = 0.0014147961692990447$$

Il magnete usato nei primi due esperimenti è diverso da quello usato nel terzo, per questo definiamo  $B_1$  e  $B_2$ . Considerati con i loro errori, i due valori di  $B_1$  sono compatibili e convergono su un valore di circa 0.095 T.

Il campo magnetico nella terza tabella alla riga 9 risulta *indefinito* (NaN) poiché siccome l'angolo è nullo, è nullo anche il suo seno. Non essendo possibile dividere per zero otteniamo dunque indefinito.

Per il corretto calcolo del campo magnetico è necessario convertire gli angoli in *radianti*.

I dati medi di campo magnetico si possono anche ritrovare come i *coefficienti di primo ordine* nelle regressioni lineari che poi tratteremo. L'intercetta ha *p-value* molto alto, per questo possiamo escluderla dal modello.

Come nei casi precedenti lasciamo il codice usato per l'analisi dei dati. Maggiori informazioni [qui](#).

```
def analysis(mass, current, length, angle):

    # Laplace force
    # Measured in newton [N]
    force = mass * g

    # Angle in radians
    angle_rad = angle * pi / 180

    # Magnetic field
    # Measured in tesla [T]
    field = force / ( current * length * np.sin(angle_rad) )

    # If the angle is zero, its sine is zero as well
    # Since it is not possible to divide by zero the script gives us back "NaN" (not a number)
    # We proceed to clean the data in order to make a meaningful analysis
    clean_field = [x for x in field if isnan(x) == False]

    # Display magnetic field
    print(f"Magnetic field has a mean value of {np.mean(clean_field)} tesla with a standard error of {np.std(clean_field)}")

    # Create dataframe
    results = pd.DataFrame({
        'current [A]': current,
        'length [m]': length,
        'angle [deg]': angle,
        'angle [rad]': angle_rad,
        'Δmass [Kg]': mass,
        'force [N]': force,
        'magnetic field [T]': field,
    })

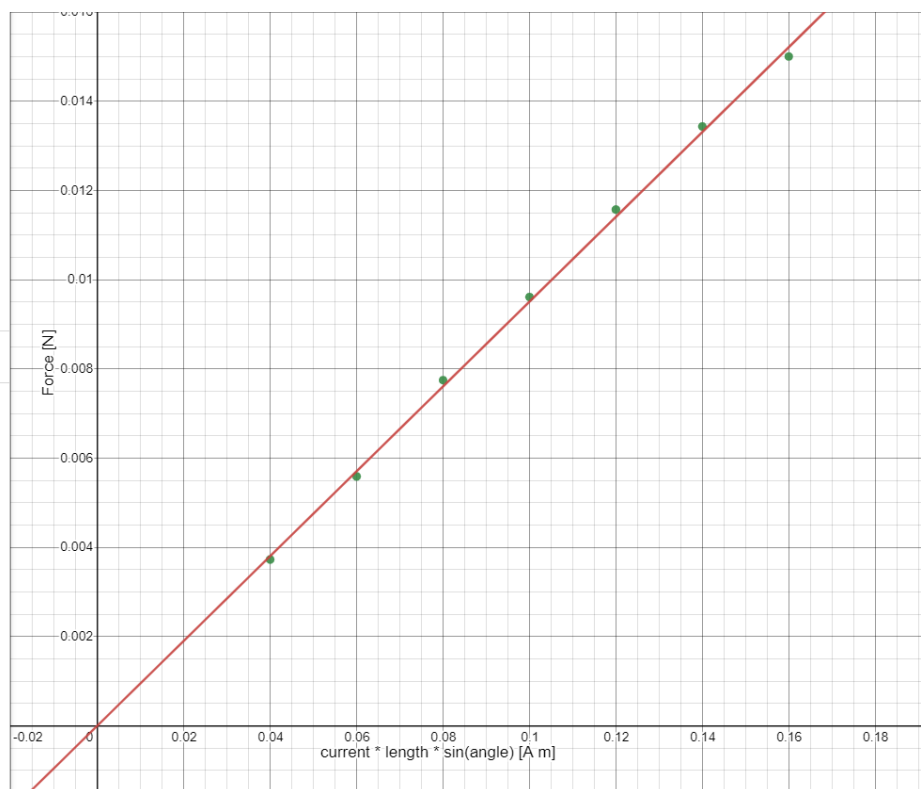
    display(results)
```



$x_1$	$y_1$
1 · 0.04	0.003727
1.5 · 0.04	0.005590
2 · 0.04	0.007747
2.5 · 0.04	0.009611
3 · 0.04	0.011572
3.5 · 0.04	0.013435
4 · 0.04	0.015004



$$y = 0.09506363038690477 \cdot x$$



# Analisi Statistica

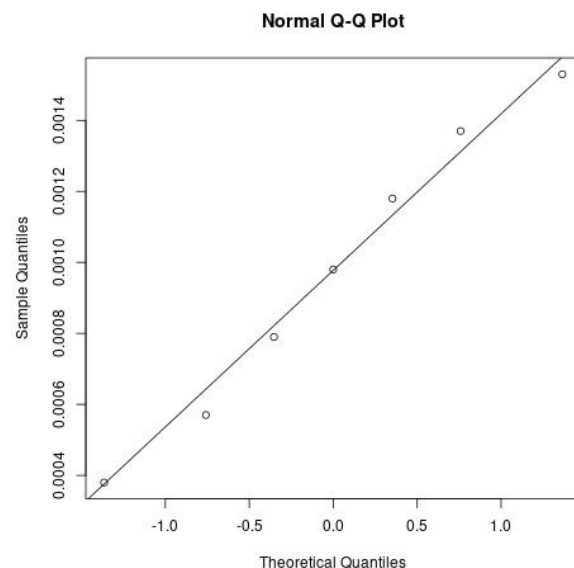
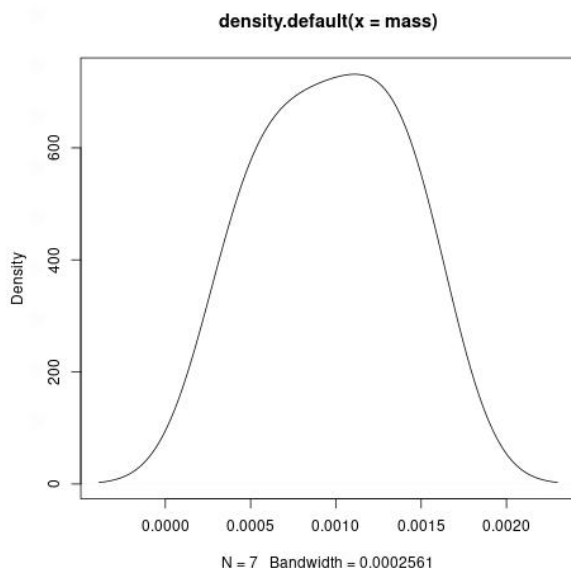
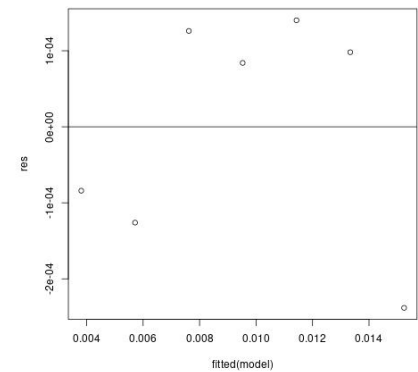
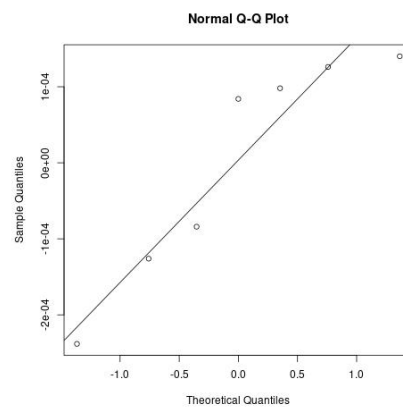
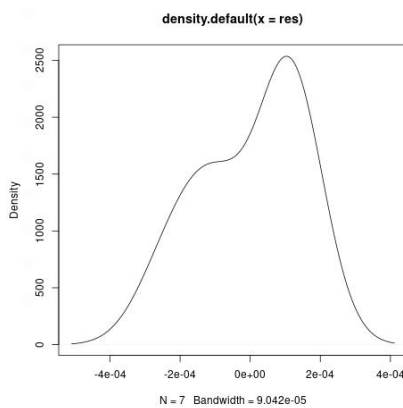
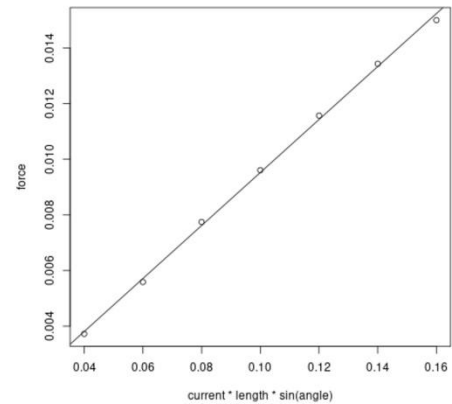
## 1) Intensità variabile:

```
Call:
lm(formula = force ~ I(current * length * sin(angle)))

Residuals:
    1      2      3      4      5      6      7 
-8.406e-05 -1.261e-04  1.261e-04  8.406e-05  1.401e-04  9.807e-05 -2.382e-04 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  -5.245e-18  1.653e-04    0.00    1
current * length * sin(angle)  9.526e-02  1.535e-03  62.08  2.05e-08 ***

Residual standard error: 0.0001624 on 5 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9987,    Adjusted R-squared:  0.9984 
F-statistic: 3853 on 1 and 5 DF,  p-value: 2.054e-08
```



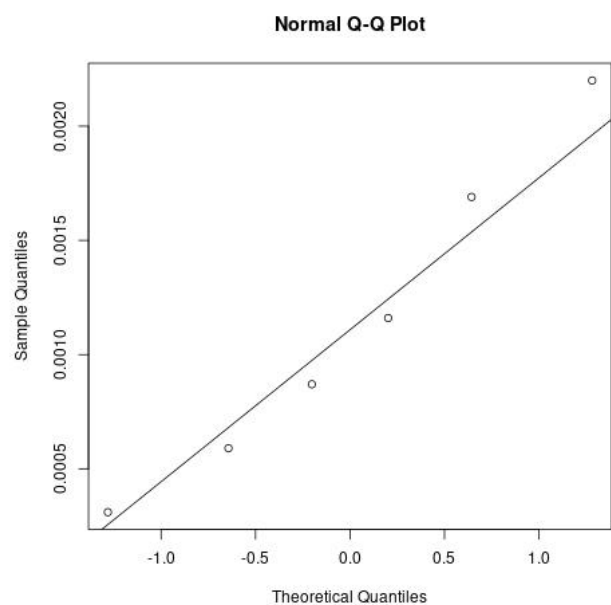
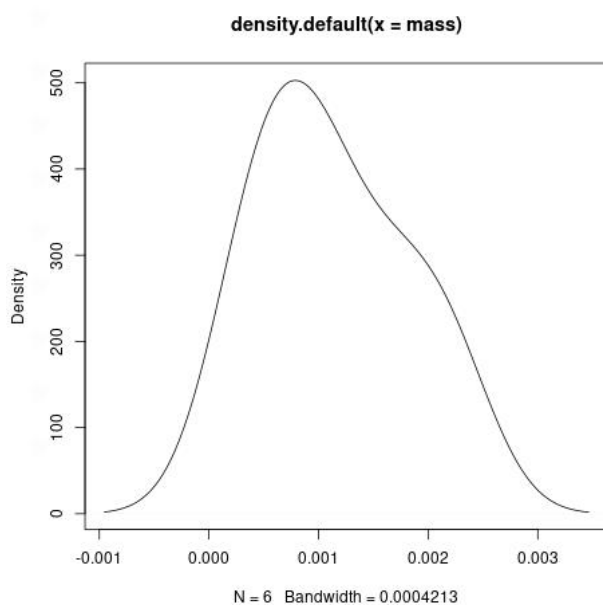
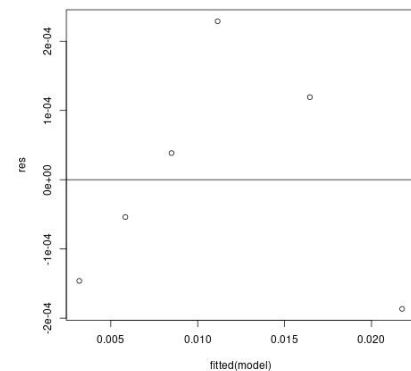
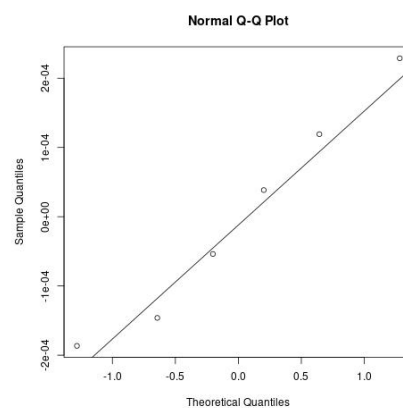
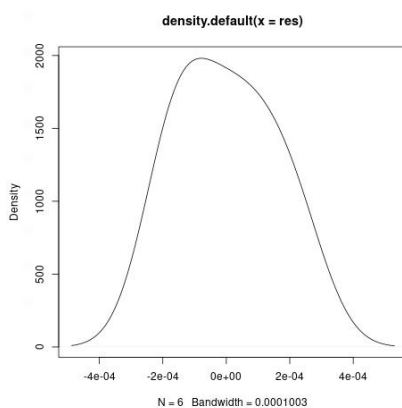
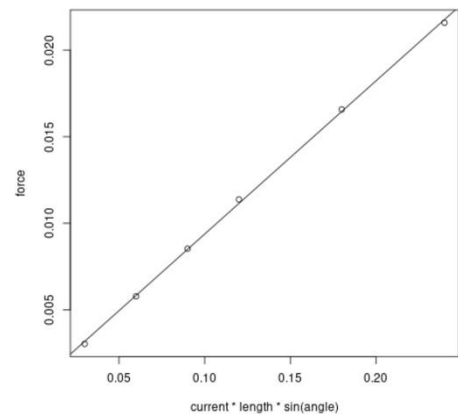
Gaussianità non rifiutabile sia per i campioni che per i residui; ulteriore conferma di ciò viene dal test di *Shapiro-Wilk*:  $0.9099 \gg 0.05$  per la massa,  $0.1685 > 0.05$  per i residui. Dal terzo plot sui residui (*res vs fitted*) si nota omoschedasticità: i residui hanno varianza finita e disposizione a nuvola. Regressione globalmente significativa (basso *p-value* dell'*F*-test). Essendo il *p-value* dell'intercetta massimo (1) questo consente di non considerarla nel modello.  $R^2$  e  $R^2_{adj}$  risultano soddisfacenti.

## 2) Lunghezza variabile:

```
Call:
lm(formula = force ~ I(current * length * sin(angle)))

Residuals:
    1      2      3      4      5      6 
-1.461e-04 -5.384e-05  3.846e-05  2.288e-04  1.192e-04 -1.865e-04 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.0005326   0.0001423   3.743  0.0201 *
current * length * sin(angle)  0.0884521   0.0010190  86.803 1.06e-07 ***
---
Residual standard error: 0.0001783 on 4 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9995,    Adjusted R-squared:  0.9993 
F-statistic: 7535 on 1 and 4 DF, p-value: 1.056e-07
```



Gaussianità non rifiutabile sia per i campioni che per i residui; ulteriore conferma di ciò viene dal test di *Shapiro-Wilk*:  $0.8505 \gg 0.05$  per la massa,  $0.8359 \gg 0.05$  per i residui. Dal terzo plot sui residui (*res vs fitted*) si nota una certa omoschedasticità con *bias non lineare* (forse parabolico). In ogni caso i residui si mantengono perfettamente dentro i margini  $\pm 2$  del grafico normalizzato ma non è possibile concludere altro per la mancanza di ulteriori dati. Regressione globalmente significativa (basso *p-value* dell'*F-test*). Intercetta meno significativa rispetto all'altro predittore ( $0.0201 \gg 10^{-7}$ ) questo consente di non considerarla nel modello.  $R^2$  e  $R^2_{adj}$  risultano soddisfacenti.

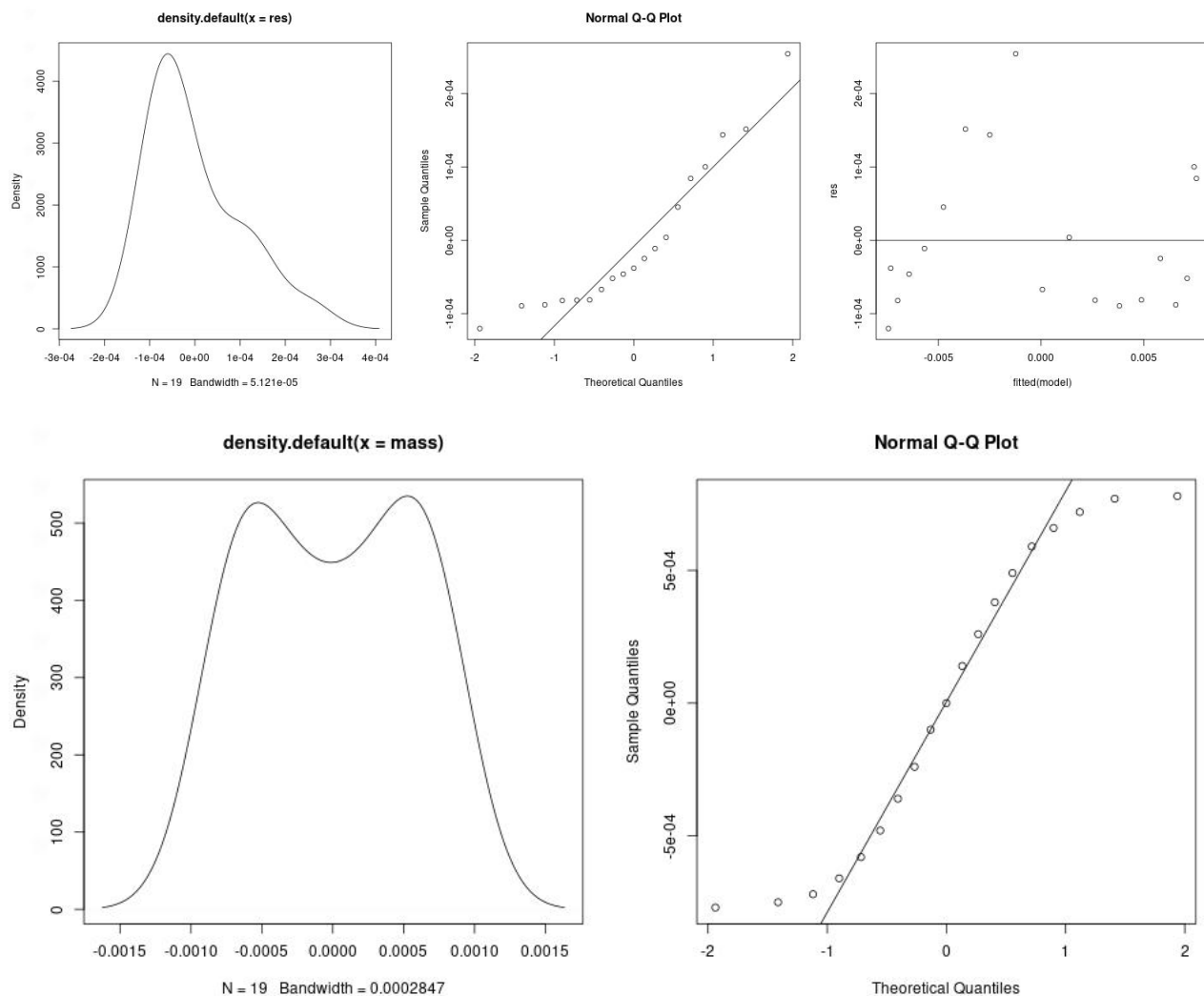
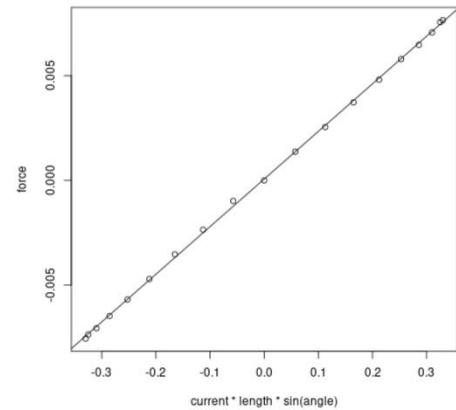
### 3) Angolo variabile:

```
Call:
lm(formula = force ~ I(current * length * sin(angle)))

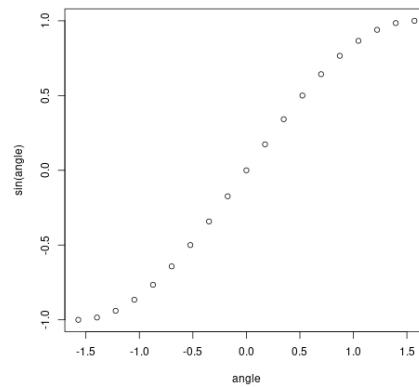
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.204e-04 -8.158e-05 -3.814e-05  6.474e-05  2.542e-04

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  6.710e-05  2.421e-05   2.772  0.0131 *
current * length * sin(angle)  2.272e-02  1.011e-04  224.725 <2e-16 ***

Residual standard error: 0.0001055 on 17 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9997,    Adjusted R-squared: 0.9996
F-statistic: 5.05e+04 on 1 and 17 DF,  p-value: < 2.2e-16
```



Gaussianità non rifiutabile solo per i campioni. Dal test di *Shapiro-Wilk* otteniamo  $0.05728 > 0.05$  per la massa,  $0.02078 < 0.05$  per i residui. Non vi è sicurezza invece sulla omoschedasticità dei residui, tutto quello che si può dire dal plot “*res vs fitted*” è che i residui non hanno un andamento lineare, hanno varianza finita ma il pattern da loro descritto non sembra avere un andamento casuale. Regressione globalmente significativa (basso *p-value* dell’F-test). Intercetta meno significativa rispetto all’altro predittore ( $0.0201 \gg 10^{-16}$ ) questo consente di non considerarla nel modello.  $R^2$  e  $R^2_{adj}$  risultano soddisfacenti.



Come da prassi lasciamo il codice usato per l'analisi dei dati. Maggiori informazioni [qui](#).

```
# Near Earth's surface the gravitational acceleration is approximately g
g = 9.80665

# Data
current = 3
length = 0.11
angle = c(-90, -80, -70, -60, -50, -40, -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90) * pi/180

# Laplace Force
mass = c(-77, -75, -72, -66, -58, -48, -36, -24, -10, 0, 14, 26, 38, 49, 59, 66, 72, 77, 78) / 100000
force = mass * g

# Linear regression
model = lm(force ~ I(current * length * sin(angle)))
summary(model)

# Plots with regression line
plot(current * length * sin(angle), force)
abline(model)

# Residuals
res = resid(model)

# Residual VS Fitted plot
plot(fitted(model), res)
abline(0,0)

# Shapiro-Wilk
shapiro.test(res)
shapiro.test(mass)

# QQ-plot
qqnorm(res)
qqline(res)
qqnorm(mass)
qqline(mass)

# Density
plot(density(res))
plot(density(mass))

# Sin plot
plot(angle, sin(angle))
```

## Conclusioni

In generale, questa esperienza si è rivelata molto istruttiva, non solo dal punto di vista nozionistico, ma soprattutto perché ci ha permesso di apprezzare le differenze tra modelli teorici e dati sperimentali spingendoci a trovare motivazioni a queste incongruenze. La fisica è affascinante anche quando non funziona!

## Ringraziamenti

### Software:

**R:** lingua di programmazione  
**Python:** lingua di programmazione  
**Numpy:** libreria per Python  
**Pandas:** libreria per Python  
**Seaborn:** libreria per Python  
**Scipy:** libreria per Python  
**Jupyter Notebook:** IDE per Python  
**Visual Studio Code:** IDE generico  
**Adobe Photoshop:** editing fotografico  
**Microsoft Excel:** raccolta dati

### Web Services:

**carbon.now:** condivisione semplice del codice sorgente tramite immagini  
**rdr.io:** ambiente di runtime online per codice R (alternativa a R studio)  
**imgonline.com.ua:** tool online per modificare velocemente immagini  
**github.com:** repository opensource. Tutto il materiale di questa ricerca si trova qua  
**desmos.com:** calcolatrice grafica online. Utile per condividere grafici interattivi

### Immagini:

**Pasco Scientific:** immagini della strumentazione scientifica

### Citazioni:

Ioannidis (2005), "Why Most Published Research Findings Are False"