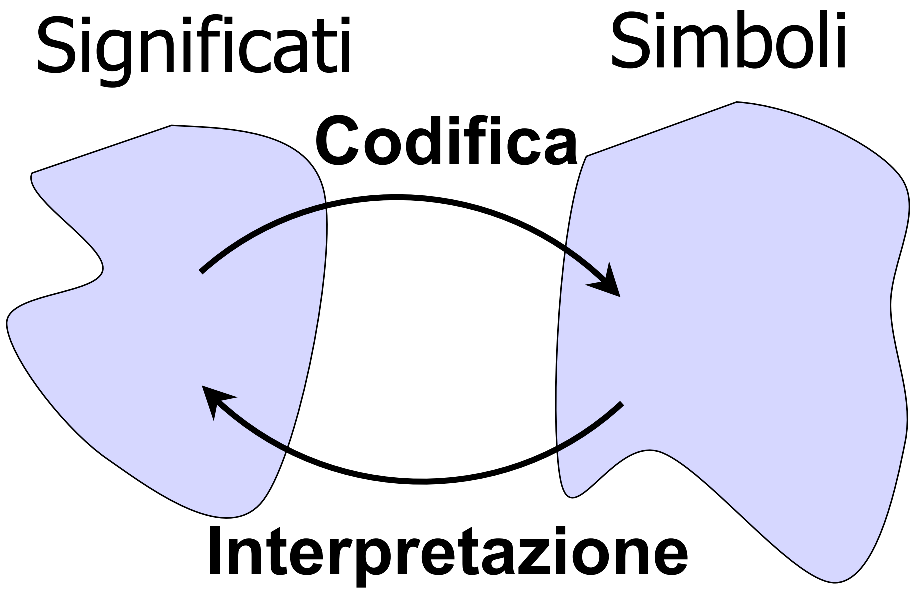
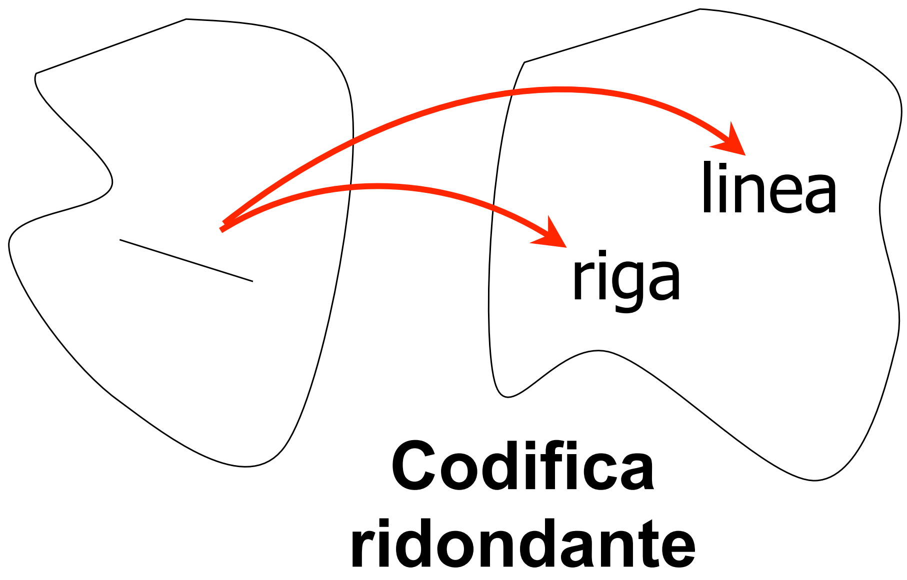
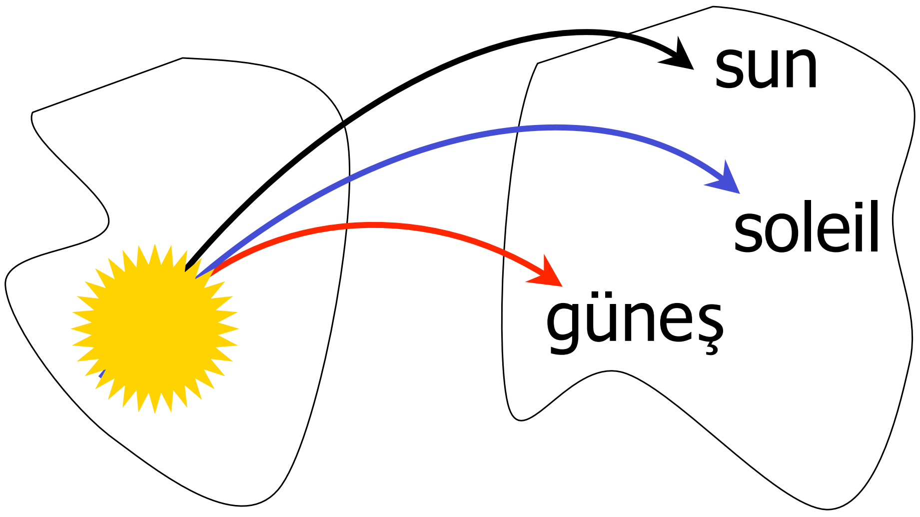
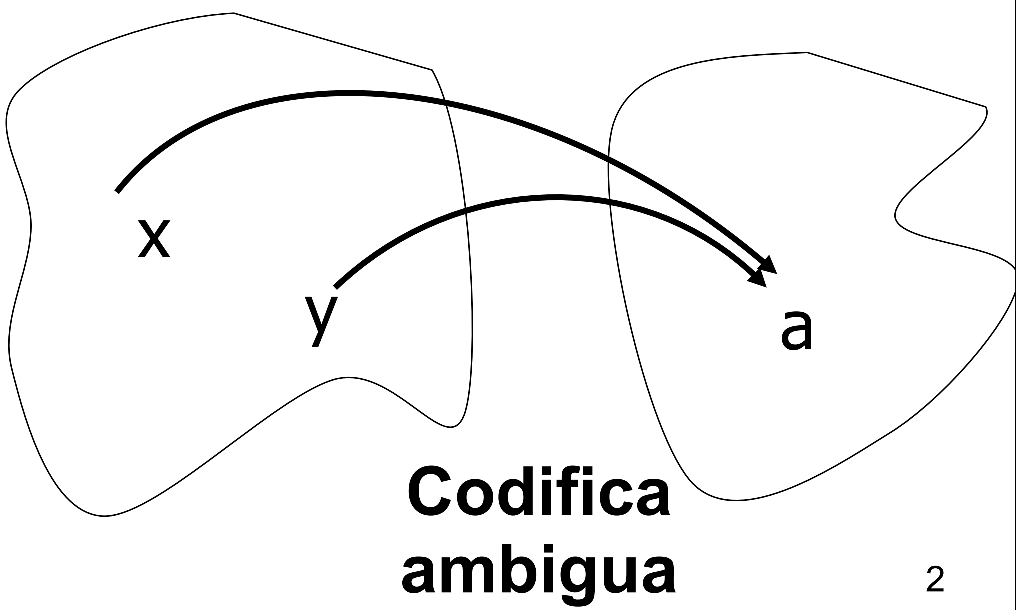
Codifica binaria dell’Informazione
Aritmetica del Calcolatore

Significati e simboli









Codifica dell'informazione

- Rappresentare (codificare) le informazioni
  - con un insieme limitato di simboli (detto *alfabeto* $\mathcal{A}$)
  - in modo non ambiguo (algoritmi di traduzione tra codifiche)
- Esempio: numeri interi
  - Codifica decimale (**dec**, in base dieci)
  - $\mathcal{A} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$, $|\mathcal{A}|$ = dieci
    - "sette" : 7_{dec}
    - "ventitre" : 23_{dec}
    - "centotrentotto" : 138_{dec}
  - Notazione *posizionale*
    - dalla cifra più significativa a quella meno significativa
    - ogni cifra corrisponde a una diversa potenza di dieci

Numeri naturali

- *Notazione posizionale*: permette di rappresentare un qualsiasi numero naturale (intero non negativo) nel modo seguente:

  la sequenza di **cifre** $\mathbf{c_i}$:

  $$c_n \; c_{n-1} \; \ldots \; c_1$$

  rappresenta in **base B** ≥ 2 il valore:

  $$c_n \times B^{n-1} + c_{n-1} \times B^{n-2} + \ldots + c_1 \times B^0$$

  avendosi: $c_i \in \{0, 1, 2, \ldots, B-1\}$ per ogni $1 \leq i \leq n$
- La notazione decimale tradizionale è di tipo posizionale (ovviamente con $B =$ dieci)
- Esistono notazioni non posizionali
  - Ad esempio i numeri romani: II IV VI XV XX VV

Numeri naturali in varie basi

- Base generica: B
  - $\mathcal{A}$ = { ... }, con $|\mathcal{A}|$ = B, sequenze di n simboli (cifre)
  - $c_n\, c_{n-1} \dots c_2\, c_1 = c_n \times B^{n-1} + \dots + c_2 \times B^1 + c_1 \times B^0$
  - Con n cifre rappresentiamo B^n numeri: da 0 a B^n-1
- "ventinove" in varie basi
  - B = otto $\mathcal{A}$ = {0,1,2,3,4,5,6,7} $29_{10} = 35_8$
  - B = cinque $\mathcal{A}$ = {0,1,2,3,4} $29_{10} = 104_5$
  - B = tre $\mathcal{A}$ = {0,1,2} $29_{10} = 1002_3$
  - B = sedici $\mathcal{A}$ = {0,1,...,8,9,A,B,C,D,E,F} $29_{10} = 1D_{16}$
- Codifiche notevoli
  - Esadecimale (sedici), ottale (otto), binaria (due)

Codifica **binaria**

- Usata dal calcolatore per **tutte** le informazioni
  - B = due, $\mathcal{A}$ **= { 0, 1 }**
  - **BIT** (crasi di “BInary digIT”):
    - unità **elementare** di informazione
  - Dispositivi che assumono **due** stati
    - Ad esempio due valori di tensione V_A e V_B
- *Numeri binari naturali:*

  la sequenza di **bit** $\mathbf{b_i}$ (cifre binarie):

  $$b_n \; b_{n-1} \; \ldots \; b_1 \qquad \text{con } b_i \in \{0, 1\}$$

  rappresenta in base 2 il valore:

  $$b_n \times 2^{n-1} + b_{n-1} \times 2^{n-2} + \ldots + b_1 \times 2^0$$

Numeri binari naturali (bin)

- Con n bit codifichiamo 2^n numeri: da 0 a 2^n-1
- Con 1 Byte (cioè una sequenza di 8 bit):
  - $00000000_{bin} = 0_{dec}$
  - $00001000_{bin} = 1 \times 2^3 = 8_{dec}$
  - $00101011_{bin} = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 43_{dec}$
  - $11111111_{bin} = \Sigma_{n = 1,2,3,4,5,6,7,8}\ 1 \times 2^{n-1} = 255_{dec}$
- Conversione bin $\rightarrow$ dec e dec $\rightarrow$ bin
  - bin$\rightarrow$dec: $11101_{bin} = \Sigma_i\, b_i 2^i = 2^4+2^3+2^2+2^0 = 29_{dec}$
  - dec$\rightarrow$bin: ***metodo dei resti***

Conversione dec $\to$ bin

Si calcolano i resti delle divisioni per due

In pratica basta:

1. Decidere se il numero è pari (resto 0) oppure dispari (resto 1), e annotare il resto
2. Dimezzare il numero (trascurando il resto)
3. Ripartire dal punto 1. fino a ottenere 1 oppure 0 come risultato della divisione

$$19 : 2 \to 1$$
$$9 : 2 \to 1$$
$$4 : 2 \to 0$$
$$2 : 2 \to 0$$
$$1 : 2 \to 1$$

si ottiene 1: fine

$$\mathbf{19_{dec}=10011_{bin}}$$

Ecco un esempio, per quanto modesto, di **algoritmo**

Metodo dei resti

29 : 2 = 14 (1)
14 : 2 = 7 (0)
7 : 2 = 3 (1)
3 : 2 = 1 (1)
1 : 2 = **0** (1)

$29_{dec} = 11101_{bin}$

76 : 2 = 38 (0)
38 : 2 = 19 (0)
19 : 2 = 9 (1)
9 : 2 = 4 (1)
4 : 2 = 2 (0)
2 : 2 = 1 (0)
1 : 2 = **0** (1)

$76_{dec} = 1001100_{bin}$

Del resto 76 = 19x4 = **1001100**

Per raddoppiare, in base due, si aggiunge uno zero in coda, così come si fa in base dieci per decuplicare

N.B. Il metodo funziona con tutte le basi!

$29_{10}=45_6=32_9=27_{11}=21_{14}=10_{29}$

Conversioni rapide bin $\rightarrow$ dec

- In binario si definisce una *notazione abbreviata*, sulla falsariga del sistema metrico-decimale:

  K $= 2^{10} = 1.024 \approx 10^3$ (Kilo)

  M $= 2^{20} = 1.048.576 \approx 10^6$ (Mega)

  G $= 2^{30} = 1.073.741.824 \approx 10^9$ (Giga)

  T $= 2^{40} = 1.099.511.627.776 \approx 10^{12}$ (Tera)

- È curioso (benché *non* sia casuale) come K, M, G e T in base 2 abbiano valori molto prossimi ai corrispondenti simboli del sistema metrico decimale, tipico delle scienze fisiche e dell'ingegneria

Ma allora…

- Diventa molto facile e quindi *rapido* calcolare il valore *decimale approssimato* delle *potenze di 2*, anche se hanno esponente grande
- Infatti basta:
  - *Tenere a mente* l'elenco dei valori esatti delle prime dieci potenze di 2 **[1,2,4,8,16,32,64,128,256,512]**
  - *Scomporre* in modo *additivo* l'esponente in contributi di valore 10, 20, 30 o 40, "leggendoli" come successioni di simboli K, M, G oppure T

Primo esempio

- Tieni ben presente che:

  $2^0=1$, $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$,

  $2^6=64$, $2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$

- E ora dimmi in un secondo (e non metterci di più) quanto vale, approssimativamente, 2^{17}

  risposta: "**128 mila**"

  infatti $2^{17} = 2^{7+10} = 2^7 \times 2^{10} = 128$ K

  in realtà, 2^{17} vale un po' di più (ma poco)

  reale = 131.072, errore = $1-128.000/131.072 \approx 2{,}3$ %

Altri esempi

- $2^{24} = 2^{4+20} = 16$ M, leggi "16 milioni"
- $2^{35} = 2^{5+30} = 32$ G, leggi "32 miliardi"
- $2^{48} = 2^{8+40} = 256$ T, leggi "256 bilioni", o anche $=$
  $2^{8+10+30} = 256$ K G, leggi "256 mila miliardi"
- $2^{52} = 4$ K T, leggi "4 mila bilioni", o anche
  $= 4$ M G, leggi "4 milioni di miliardi"
- N.B.: l'approssimazione è sempre per difetto
  - ma "regge" (err$<10\%$) anche su valori molto grandi

Al contrario… (dec $\rightarrow$ bin)

- Si osservi come $10^3 = 1000 \approx 1024 = 2^{10}$, con errore $= 1 - 1000/1024 = 2{,}3\ \%$
- Pertanto, preso un intero n, si ha:

  $10^n = (10^3)^{n/3} \approx (2^{10})^{n/3} = 2^{10 \times n/3}$
- Dimmi subito quanto vale (circa) in base 2:

  10^9 risposta: circa $2^{10 \times 9/3} = 2^{30}$

  con errore: $1 - 2^{30}/10^9 \approx -7{,}3\ \%$ (approx. eccesso)

  10^{10} risposta: circa $2^{10 \times 10/3} \approx 2^{33}$

  con errore: $1 - 2^{33}/10^{10} \approx 14{,}1\ \%$ (approx. difetto)
- L’approssimazione è per eccesso o per difetto

Aumento e riduzione dei bit in bin

- ***Aumento*** dei bit
  - premettendo in modo progressivo un bit 0 a sinistra, il valore del numero non muta

$4_{dec} = 100_{bin} = 0100_{bin} = 00100_{bin} = \ldots\ 000000000100_{bin}$

$5_{dec} = 101_{bin} = 0101_{bin} = 00101_{bin} = \ldots\ 000000000101_{bin}$

- ***Riduzione*** dei bit
  - cancellando in modo progressivo un bit 0 a sinistra, il valore del numero non muta, *ma bisogna arrestarsi quando si trova un bit* 1!

$7_{dec} = 00111_{bin} = 0111_{bin} = 111_{bin}$ STOP !

$2_{dec} = 00010_{bin} = 0010_{bin} = 010_{bin} = 10_{bin}$ STOP !

Numeri interi in modulo e segno (m&s)

- *Numeri binari interi* (positivi e negativi) *in modulo e segno* (**m&s**)
  - il primo bit a sinistra rappresenta il segno del numero (*bit di segno*), i bit rimanenti rappresentano il valore
    - 0 per il segno positivo
    - 1 per il segno negativo
- Esempi con n = 9 (8 bit + un bit per il segno)
  - $000000000_{m\&s} = +\ 0 =$
  - $000001000_{m\&s} = +\ 1 \times 2^3 = 8_{dec}$
  - $100001000_{m\&s} = -\ 1 \times 2^3 = -8_{dec}$
  - … e così via …

Osservazioni sul m&s

- Il bit di segno è *applicato* al numero rappresentato, ma non fa propriamente *parte* del numero in quanto tale
  - il bit di segno non ha significato numerico
- *Distaccando* il bit di segno, i bit rimanenti rappresentano il **valore assoluto** del numero
  - che è intrinsecamente positivo

Il complemento a 2 (C_2)

- *Numeri interi in complemento a* 2: il C_2 è *un* sistema binario, ma il primo bit (quello a sinistra, il più significativo) ha *peso negativo*, mentre tutti gli altri bit hanno peso positivo
- La sequenza di bit:

$$b_n \, b_{n-1} \ldots b_1$$

rappresenta in C_2 il valore:

$$-b_n \times 2^{n-1} + b_{n-1} \times 2^{n-2} + \ldots + b_1 \times 2^0$$

Il bit più a sinistra è ancora chiamato *bit di segno*

Numeri a tre bit in C_2

- $000_{C2} = -0\times2^2 + 0\times2^1 + 0\times2^0 = 0_{dec}$
- $001_{C2} = -0\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0 = 1_{dec}$
- $010_{C2} = -0\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0 = 2_{dec}$
- $011_{C2} = -0\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 = 2+1 = 3_{dec}$
- $100_{C2} = -1\times2^2 + 0\times2^1 + 0\times2^0 = -4_{dec}$
- $101_{C2} = -1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0 = -4+1 = -3_{dec}$
- $110_{C2} = -1\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0 = -4+2 = -2_{dec}$
- $111_{C2} = -1\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 = -4+2+1 = -1_{dec}$

N.B.: in base al bit di segno lo zero è considerato positivo

Interi relativi in m&s e in C_2

Se usiamo 1 Byte: da –128 a 127

dec.	m&s	C_2
127	**0**1111111	**0**1111111
126	**0**1111110	**0**1111110
...	...	...
2	**0**0000010	**0**0000010
1	**0**0000001	**0**0000001
+0	**0**0000000	**0**0000000
-0	**1**0000000	**-**
-1	**1**0000001	**1**1111111
-2	**1**0000010	**1**1111110
...	...	...
-126	**1**1111110	**1**0000010
-127	**1**1111111	**1**0000001
-128	**-**	**1**0000000

Invertire un numero in C_2

- L'*inverso additivo* (o *opposto*) –N di un numero N rappresentato in C_2 si ottiene:
  - Invertendo (negando) ogni bit del numero
  - Sommando 1 alla posizione meno significativa
- Esempio:
  - $01011_{C2} = 1\times2^3+1\times2^1+1\times2^0 = 8+2+1 = 11_{dec}$
  - $10100 + 1 = 10101_{C2} = -1\times2^4+1\times2^2+1\times2^0 = -16+4+1 = -11_{dec}$
- Si provi a invertire $11011_{C2} = -5_{dec}$
- Si verifichi che con due applicazioni dell'algoritmo si riottiene il numero iniziale [–(–N) = N] e che lo zero in C2 è (correttamente) opposto di se stesso [–0 = 0]

Conversione dec $\rightarrow C_2$

- Se $D_{dec} \geq 0$:
  - Converti D_{dec} in binario naturale.
  - Premetti il bit 0 alla sequenza di bit ottenuta.
  - Esempio: $154_{dec} \Rightarrow 10011010_{bin} \Rightarrow 010011010_{C2}$
- Se $D_{dec} < 0$:
  - Trascura il segno e converti D_{dec} in binario naturale
  - Premetti il bit 0 alla sequenza di bit ottenuta
  - Calcola l'opposto del numero così ottenuto, secondo la procedura di inversione in C_2
  - Esempio: $-154_{dec} \Rightarrow 154_{dec} \Rightarrow 10011010_{bin} \Rightarrow$
    $\Rightarrow 010011010_{bin} \Rightarrow 101100101 + 1 \Rightarrow 101100110_{C2}$

Aumento e riduzione dei bit in C_2

- ***Estensione*** del segno:
  - *replicando* in modo progressivo il bit di segno a sinistra, il valore del numero non muta

    4 = 0100 = 00100 = 00000100 = … (indefinitamente)

    –5 = 1011 = 11011 = 11111011 = … (indefinitamente)
- ***Contrazione*** del segno:
  - *cancellando* in modo progressivo il bit di segno a sinistra, il valore del numero non muta
  - *purché il bit di segno non abbia a invertirsi* !

    7 = 000111 = 00111 = 0111 **STOP**! (111 è $<$ 0)

    –3 = 111101 = 11101 = 1101 = 101 **STOP**! (01 è $>$ 0)

Osservazioni sul C_2

- Il segno è *incorporato* nel numero rappresentato in C_2, non è semplicemente *applicato* (come in m&s)
- Il bit più significativo *rivela* il segno: 0 per numero positivo, 1 per numero negativo (il numero zero è considerato positivo), ma…
- **NON** si può *distaccare* il bit più significativo e dire che i bit rimanenti rappresentano il valore assoluto del numero
  - questo è ancora vero, però, se il numero è positivo

Intervalli di rappresentazione

- Binario naturale a $n \geq 1$ bit: $\mathbf{[}0, 2^n\mathbf{)}$
- Modulo e segno a $n \geq 2$ bit: $\mathbf{(}-2^{n-1}, 2^{n-1}\mathbf{)}$
- C_2 a $n \geq 2$ bit: $\mathbf{[}-2^{n-1}, 2^{n-1}\mathbf{)}$
  - In modulo e segno, il numero zero ha due rappresentazioni *equivalenti* (00..0, 10..0)
  - L'intervallo del C_2 è *asimmetrico* (-2^{n-1} è compreso, 2^{n-1} è escluso); poco male …

Operazioni – **Numeri binari naturali**

Algoritmo di “addizione a propagazione dei riporti”

È l’algoritmo decimale elementare, adattato alla base 2

Pesi	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*		
Riporto			1	1	1					
Addendo 1	0	1	0	0	1	1	0	1	+	77_{dec}
Addendo 2	1	0	0	1	1	1	0	0	=	156_{dec}
Somma	1	1	1	0	1	0	0	1		233_{dec}

addizione naturale (a 8 bit)

Operazioni – **Numeri binari naturali**

overflow **(o *trabocco*)**

Pesi		*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*		
Riporto	1	1	1	1	1	1					
Addendo 1		0	1	1	1	1	1	0	1	+	125_{dec}
Addendo 2		1	0	0	1	1	1	0	0	=	156_{dec}
Somma		0	0	0	1	1	0	0	1		25_{dec} !

Riporto “perduto”

overflow

risultato errato!

addizione **naturale** con overflow

Riporto e overflow (addizione naturale)

- Si ha ***overflow*** quando il risultato corretto dell'addizione eccede il potere di rappresentazione dei bit a disposizione
  - 8 bit nell'esempio precedente
- Nell'addizione tra numeri binari naturali si ha overflow **ogni volta** che si genera un riporto addizionando i bit della colonna più significativa (riporto "perduto")

Operazioni – **Numeri in C_2**

Pesi	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*		
Riporto			1	1	1					
Addendo 1	0	1	0	0	1	1	0	1	+	77_{dec}
Addendo 2	1	0	0	1	1	1	0	0	=	-100_{dec}
Somma	1	1	1	0	1	0	0	1		-23_{dec}

addizione ***algebrica*** (a 8 bit)

L'algoritmo è ***identico*** a quello naturale

(come se il primo bit non avesse peso negativo)

Operazioni – **Numeri in C_2**

ancora overflow

Pesi	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*		
Riporto	1		1	1	1					
Addendo 1	0	1	0	0	1	1	0	1	+	77_{dec}
Addendo 2	0	1	0	1	1	1	0	0	=	92_{dec}
Somma	1	0	1	0	1	0	0	1		-87_{dec} !

nessun riporto “perduto”

Overflow:
risultato negativo!

risultato errato!

addizione **algebrica** con overflow

Riporto e overflow in C_2 (addizione algebrica)

- Si ha ***overflow*** quando il risultato corretto dell'addizione <u>eccede il potere di rappresentazione</u> dei bit a disposizione
  - La definizione di overflow non cambia
- Si può avere overflow senza "riporto perduto"
  - Capita quando da due addendi positivi otteniamo un risultato negativo, come nell'esempio precedente
- Si può avere un "riporto perduto" senza overflow
  - Può essere un innocuo effetto collaterale
  - Capita quando due addendi discordi generano un risultato positivo (**si provi a sommare +12 e -7**)

Rilevare l'overflow in C_2

- Se gli addendi sono tra loro ***discordi*** (di segno diverso) non si verifica mai
- Se gli addendi sono tra loro ***concordi***, si verifica se e solo se il risultato è discorde
  - addendi positivi ma risultato negativo
  - addendi negativi ma risultato positivo
- Criterio di controllo facile da applicare!

Rappresentazione ottale ed esadecimale

- *Ottale* o in base otto (oct):
  - Si usano solo le cifre 0-7

$$534_{oct} = 5_{oct} \times 8_{dec}^{2} + 3_{oct} \times 8_{dec}^{1} + 4_{oct} \times 8_{dec}^{0} = 348_{dec}$$

- *Esadecimale* o in base sedici (hex):
  - Si usano le cifre 0-9 e le lettere A-F per i valori 10-15

$$\begin{aligned} B7F_{hex} &= B_{hex} \times 16_{dec}^{2} + 7_{hex} \times 16_{dec}^{1} + F_{hex} \times 16_{dec}^{0} = \\ &= 11_{dec} \times 16_{dec}^{2} + 7_{dec} \times 16_{dec}^{1} + 15_{dec} \times 16_{dec}^{0} = 2943_{dec} \end{aligned}$$

- Entrambe queste basi sono facili da convertire in binario, e viceversa

Conversioni hex $\rightarrow$ bin e oct $\rightarrow$ bin

- Converti: $10011110101011011_{bin} =$

$$0001_{bin}\ 0011_{bin}\ 1101_{bin}\ 0101_{bin}\ 1011_{bin} =$$
$$= 1_{dec}\quad 3_{dec}\quad 13_{dec}\quad 5_{dec}\quad 11_{dec} =$$
$$= 1_{hex}\quad 3_{hex}\quad D_{hex}\quad 5_{hex}\quad B_{hex} =$$
$$= 13D5B_{hex}$$

- Converti: $A7B40C_{hex}$

$$A_{hex}\quad 7_{hex}\quad B_{hex}\quad 4_{hex}\quad 0_{hex}\quad C_{hex} =$$
$$= 10_{dec}\quad 7_{dec}\quad 11_{dec}\quad 4_{dec}\quad 0_{dec}\quad 12_{dec} =$$
$$= 1010_{bin}\quad 0111_{bin}\ 1011_{bin}\ 0100_{bin}\ 0000_{bin}\ 1100_{bin} =$$
$$= 101001111011010000001100_{bin}$$

- Si provi a convertire anche
  - oct → bin, dec → hex, dec → oct

Numeri frazionari in virgola fissa

- $0{,}1011_{bin}$ (in binario)

  $0{,}1011_{bin} = 1\times2^{-1} + 0\times2^{-2} + 1\times2^{-3} + 1\times2^{-4} = 1/2 + 1/8 + 1/16 =$

  $= 0{,}5 + 0{,}125 + 0{,}0625 = 0{,}6875_{dec}$

- Si può rappresentare un numero frazionario in *virgola fissa* (o *fixed point*) nel modo seguente:

  $19{,}6875_{dec} = 10011{,}1011_{\text{virgola fissa}}$

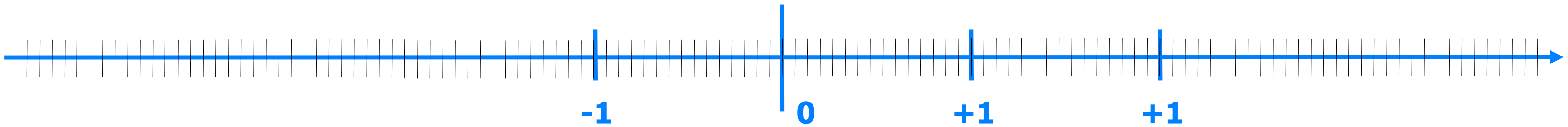
  poiché si ha:

  $19_{dec} = 10011_{bin}$ e $0{,}6875_{dec} = 0{,}1011_{bin}$

proporzione fissa:

5 bit per la parte intera, 4 bit per quella frazionaria

- Avremo 2^9 diversi valori codificati, e avremo 2^4 valori tra 0 e 1, 2^4 valori tra 1 e 2, … e così via, con tutti i valori distribuiti su un asse a distanze regolari



Numeri frazionari in virgola fissa

- La sequenza di bit rappresentante un **numero frazionario** consta di due parti di lunghezza prefissata
  - Il numero di bit a sinistra e a destra della virgola è stabilito a priori, anche se alcuni bit restassero nulli
- È un sistema di rappresentazione semplice, ma poco flessibile, e può condurre a sprechi di bit
  - Per rappresentare in virgola fissa numeri molto grandi (o molto precisi) occorrono molti bit
  - La precisione nell'intorno dell'origine e lontano dall'origine è la stessa
    - Anche se su numeri molto grandi in valore assoluto la parte frazionaria può non essere particolarmente significativa

Numeri frazionari in virgola mobile

- La rappresentazione in *virgola mobile* (o *floating point*) è usata spesso in base 10 (si chiama allora *notazione scientifica*):

$0{,}137 \times 10^8$ notazione scientifica per intendere $13.700.000_{dec}$

- La rappresentazione si basa sulla relazione

$$\mathbf{R_{virgola\ mobile}} = \mathbf{M} \times \mathbf{B^E}$$ [attenzione: ***non*** $(MxB)^E$]

- In binario, si utilizzano **m** $\geq$ 1 bit per la ***mantissa M*** e **n** $\geq$ 1 bit per **l'*esponente E***
  - mantissa: un numero frazionario (tra -1 e +1)
  - la base B non è rappresentata (è implicita)
  - in totale si usano m + n bit

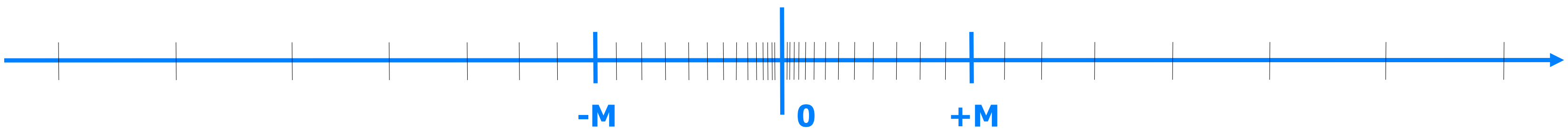
Numeri frazionari in virgola mobile

- Esempio
  - Supponiamo B=2, m=3 bit, n=3 bit, M ed E in binario naturale

$$M = 011_2 \text{ ed } E = 010_2$$

$$R_{\text{virgola mobile}} = 0{,}011 \times 2^{010} = (1/4 + 1/8) \times 2^2 = 3/8 \times 4 = 3/2 = 1{,}5_{\text{dec}}$$

- **Vantaggi della virgola mobile**
  - si possono rappresentare con pochi bit numeri molto grandi **oppure** molto precisi (cioè con molti decimali)
  - Sull'asse dei valori i numeri rappresentabili si affollano nell'intorno dello zero, e sono sempre più sparsi al crescere del valore assoluto



ATTENZIONE!
(i "pericoli" della virgola mobile)

- **Approssimazione**
  - $0,375 \times 10^7 + 0,241 \times 10^3 = 0,3750241 \times 10^7 \approx 0,375 \times 10^7$
- Ma, in virgola mobile, *se disponiamo di poche cifre per la mantissa:*
  - $0,375 \times 10^7 + 0,241 \times 10^3 = 0,375 \times 10^7$
  - del resto sarebbe <u>sbagliato</u> approssimare a $0,374 \times 10^7$ o $0,376 \times 10^7$
- Definiamo un ciclo che ripete la somma un milione di volte...
  - Inizia con $\mathbf{X = 0,375 \times 10^7}$
  - Ripeti 1.000.000 di volte $\mathbf{X = X + 0,241 \times 10^3}$ (*incremento non intero*)
  - Alla fine **dovrebbe essere** $X = 0,375 \times 10^7 + (0,241 \times 10^3 \times 10^6) \approx 0,245 \times 10^9$
- **Ma**, in virgola mobile...
  - Il contributo delle singole somme (una alla volta) si perde del tutto!
  - Il risultato **resta** $\mathbf{0,375 \times 10^7}$, <u>sbagliato di due ordini di grandezza</u>
  - Scrivendo programmi che trattano valori rappresentati in virgola mobile è **necessario** essere consapevoli dei limiti di rappresentazione
  - Lo stesso è vero con gli interi (rischio di overflow)

Aritmetica standard

- Quasi tutti i calcolatori oggi adottano lo *standard aritmetico* **IEEE 754**, che definisce:
  - I *formati di rappresentazione* binario naturale, C_2 e virgola mobile
  - Gli *algoritmi* di somma, sottrazione, prodotto, ecc, per tutti i formati previsti
  - I metodi di *arrotondamento* per numeri frazionari
  - Come trattare gli *errori* (overflow, divisione per 0, radice quadrata di numeri negativi, ...)
- Grazie a IEEE 754, i programmi sono *trasportabili* tra calcolatori diversi senza che cambino né i *risultati* né la *precisione* dei calcoli svolti dal programma stesso

Standard IEEE 754-1985

S	E	M

- Bit destinati alla rappresentazione divisi in
  - un bit per il segno della mantissa – parte S (0 = +, 1 = -)
  - alcuni bit per l'esponente – parte E
  - altri bit per la mantissa (il suo valore assoluto) – parte M
- Problema: il segno dell'esponente notazione "eccesso K"
  - si memorizza il valore dell'esponente aumentato di K
  - se k bit dedicati all'esponente, K = ~~2k-1 – 1~~ $2^{(k-1)} - 1$
  - es: k=8 si memorizza esponente aumentato di K=27–1=127
- ⇒ valore memorizzato 0: esponente = -127;

  255: esponente = 128;

  132: esponente = 5
- Inoltre, Mantissa viene normalizzata:
  - scegliendo esponente opportuno, posta a un valore (binario) tra 1.00000... e 1.11111…
  - il valore 1 sempre presente può essere sottinteso ⇒ guadagno di un bit di precisione

Campo	Precisione singola	Precisione doppia	Precisione quadrupla
ampiezza totale in bit di cui	32	64	128
Segno	1	1	1
Esponente	8	11	15
Mantissa	23	52	111
massimo E	255	2047	32767
minimo E	0	0	0
K	127	1023	16383

Esempio

- Esempio di rappresentazione in precisione singola
- $X = 42.6875_{10} = 101010.1011\text{-}_{2} = 1.010101011\text{-} \times 2^{5}$
- Si ha
  - $S = 0$ (1 bit)
  - $E = 5 + K = 5_{10} + 127_{10} = 132 = 10000100_{2}$ (8 bit)
  - $M = 01010101100000000000000$ (23 bit)

Proprietà fondamentale

- I circa 4 miliardi di configurazioni dei 32 bit usati consentono di coprire un campo di valori molto ampio grazie alla distribuzione non uniforme.
- Per numeri piccoli in valore assoluto valori rappresentati sono «fitti»,
- Per numeri grandi in valore assoluto valori rappresentati sono «diradati»

- Approssimativamente gli intervalli tra **valori contigui** sono
  - per valori di 10000 l’intervallo è di un millesimo
  - per valori di 10 milioni l’intervallo è di un’unità
  - per valori di 10 miliardi l’intervallo è di mille

Non solo numeri!
codifica dei caratteri

- Nei calcolatori i caratteri vengono *codificati* mediante *sequenze* di $n \geq 1$ bit, ognuna rappresentante un carattere distinto
  - Corrispondenza biunivoca tra numeri e caratteri
- Codice ASCII (*American Standard Computer Interchange Interface*): utilizza $n=7$ bit per 128 caratteri
- Il codice ASCII a 7 bit è pensato per la lingua inglese. Si può estendere a 8 bit per rappresentare il doppio dei caratteri
  - Si aggiungono così, ad esempio, le lettere con i vari gradi di accento (come À, Á, Â, Ã, Ä, Å, ecc), necessarie in molte lingue europee, e altri simboli speciali ancora

Alcuni simboli del codice ASCII

# (in base 10)	Codifica (7 bit)	Carattere (o simbolo)
0	0000000	<terminator>
9	0001001	<tabulation>
10	0001010	<carriage return>
12	0001100	<sound bell>
13	0001101	<end of file>
32	0100000	blank space
33	0100001	!
49	0110001	1
50	0110010	2
64	1000000	@
65	1000001	A
66	1000010	B
97	1100000	a
98	1100001	b
126	1111110	~
127	1111111	

Rilevare gli errori

- Spesso, quando il codice ASCII a 7 bit è usato in un calcolatore avente parole di memoria da un Byte (o suoi multipli), l'ottavo bit del Byte memorizzante il carattere funziona come *bit di parità*
- Il bit di parità serve per *rilevare* eventuali *errori* che potrebbero avere alterato la sequenza di bit, purché siano errori di tipo abbastanza semplice

Bit di parità

- Si aggiunge un bit extra, in modo che il numero di bit uguali a 1 sia sempre *pari*:

1100101 (quattro bit 1)	$\Rightarrow$	11001010	(quattro bit 1)
0110111 (cinque bit 1)	$\Rightarrow$	01101111	(sei bit 1)

- Se per errore un (solo) bit si *inverte*, il conteggio dei bit uguali a 1 dà valore *dispari*!
- Così si può rilevare l'*esistenza* di un errore da un bit (ma non localizzarne la posizione)
- Aggiungendo più bit extra (secondo schemi opportuni) si può anche *localizzare* l'errore.
- Il bit di parità *non rileva* gli errori da due bit; ma sono meno frequenti di quelli da un bit

Altre codifiche alfanumeriche

- Codifica **ASCII** esteso a 8 bit (256 parole di codice). È la più usata.
- Codifica **FIELDATA** (6 bit, 64 parole codificate) Semplice ma compatta, storica
- Codifica **EBDC** (8 bit, 256 parole codifiate) Usata per esempio nei nastri magnetici
- Codifiche **ISO-X** (rappresentano i sistemi di scrittura internazionali). P. es.: ISO-LATIN

Codifica di testi, immagini, suoni, ...

- Caratteri: sequenze di bit
  - Codice ASCII: utilizza 7(8) bit: 128(256) caratteri
  - 1 Byte (l'8° bit può essere usato per la *parità*)
- Testi: sequenze di caratteri (cioè di bit)
- Immagini: sequenze di bit
  - bitmap: sequenze di pixel (n bit, 2^n colori)
  - jpeg, gif, pcx, tiff, …
- Suoni (musica): sequenze di bit
  - wav, mid, mp3, ra, …
- Filmati: immagini + suoni
  - sequenze di …?

… "rivoluzione" digitale

Dentro al calcolatore... Informazione e memoria

- Una *parola di memoria* è in grado di contenere una *sequenza* di $n \geq 1$ bit
- Di solito si ha: $n = 8$, 16, 32 o 64 bit
- Una parola di memoria può dunque contenere gli *elementi d'informazione* seguenti:
  - Un carattere (o anche più di uno)
  - Un numero intero in binario naturale o in C_2
  - Un numero frazionario in virgola mobile
  - Alcuni bit della parola possono essere non usati
- Lo stesso può dirsi dei registri della CPU

Per esempio …

indirizzi	parole da 32 bit			
0	Z	*bit non usati*		
1	A	b	@	1
2	1234 (in bin. nat.)			
3	- 4321 (in C_2)			
4	19,758 (in virg. mob.)			
5	...			

un carattere ASCII, probabilmente è un dato

la cella resta parzialmente inutilizzata

quattro caratteri ASCII "impacchettati" nella stessa cella

potrebbe essere un dato oppure l'indirizzo di un'altra cella (gli indirizzi sono intrinsecamente positivi)

numeri di molti bit possono estendersi su più celle consecutive

probabilmente è un dato

probabilmente è un dato

un'istruzione? (perché no?)