# Informatica A

Ricorsione

# Sommario

- Definizioni basate sull'induzione
- L'iterazione e la ricorsione
- Che cosa significa "ricorsivo"
- Come si realizza una funzione ricorsiva
- Come si esegue una funzione ricorsiva
- Esempi

# Definizioni induttive

- Sono comuni in matematica

- Esempio: il fattoriale di un naturale N (N!)
  - Se N=0 il fattoriale N! è 1
  - Se N>0 il fattoriale N! è N * (N-1)!

- Esempio: numeri pari
  - 0 è un numero pari
  - Se n è un numero pari anche n+2 è un numero pari

# Dimostrazioni induttive

- Dimostriamo che $(2n)^2 = 4n^2$
  - Distributività del quadrato rispetto alla moltiplicazione

1. Se n=1 : vero (per verifica diretta)
2. *Suppongo* sia vero per n=k (ipotesi di induzione) e *dimostro* l'uguaglianza di cui sopra, per n=k+1:

   $(2n)^2 = (2(k+1))^2 = (2k+2)^2 = (2k)^2 + 8k + 4 =$
   (per ipotesi di induzione) $4k^2 + 8k + 4 =$
   $4(k^2 + 2k + 1) = 4(k+1)^2 = 4n^2$

- (1) è il caso base, (2) è il passo induttivo

# Iterazione e ricorsione

- Sono i due concetti informatici che nascono dal concetto di induzione

- L'iterazione si realizza mediante la tecnica del ciclo

- Per il calcolo del fattoriale:
  - $0! = 1$
  - $n! = n (n - 1)(n - 2)\dots 1$ (realizzo un ciclo)

# Fattoriale – versione iterativa

```
int fattoriale (int n) {
   int f = 1;
   while (n > 0) {
      f = f * n;
      n--;
   }
   return f;
}
```

# Lo "spirito" del metodo ricorsivo

- Esiste almeno un *caso base* che rappresenta un sotto-problema di facile soluzione
  - Esempio: se N=0, so N! in modo "immediato" (vale 1)
- Esiste almeno un *passo induttivo* che (prima o poi) riconduce il problema generale a un caso base
  - Consiste nell'esprimere la soluzione al problema (su dati di una dimensione generica *n*) in termini di operazioni semplici e della soluzione allo stesso problema su dati di dimensione *n-1* (che, per tali dati, si suppone risolto per ipotesi)
    - Esempio: per n generico esprimo n! in termini di n (è un dato direttamente accessibile) moltiplicato per (è una operazione semplice e nota) il valore di (n-1)! (che non conosco ma so calcolare per ipotesi induttiva)

# Fattoriale – versione ricorsiva

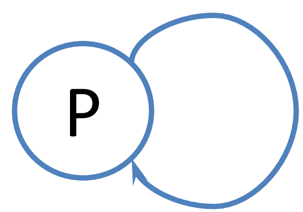
1. $n! = 1$ se $n = 0$
2. $n! = n * (n - 1)!$ se $n > 0$

- Riduce il calcolo a un calcolo più semplice
- Ha senso perché si basa sempre sul fattoriale del numero più piccolo, che io conosco
- Ha senso perché si arriva a un punto in cui non è più necessario riusare la definizione (2) e invece si usa la (1)
- (1) è il caso base, (2) è il passo induttivo

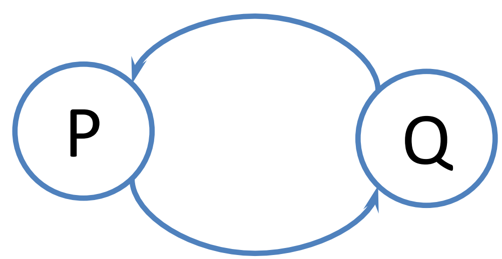
# Ricorsione nei sottoprogrammi

- Dal latino re-currere
  - Ricorrere, fare ripetutamente la stessa azione

- Un sottoprogramma P invoca se stesso
  - Direttamente
    - P invoca P




  - Indirettamente
    - P invoca Q che invoca P



# Formulazione ricorsiva in C

```
int FattRic(int  n) {
     if (n == 0)
          return 1;
     else
          return n * FattRic(n–1);
}
```

# Simulazione del calcolo
# Invocazione di: FattRic(3)

3 = 0? No

→ Calcola fattoriale di 2 e moltiplicalo per 3

2 = 0? No

→ Calcola fattoriale di 1 e moltiplicalo per 2

1 = 0? No

→ Calcola fattoriale di 0 e moltiplicalo per 1

0 = 0? Sì

→ Fattoriale di 0 è 1

→ Fattoriale di 1 è 1 per fattoriale di 0, cioè $1 \times 1 = 1$

→ Fattoriale di 2 è 2 per fattoriale di 1, cioè 2

→ Fattoriale di 3 è 3 per fattoriale di 2, cioè 6

# Ma…

- … se ogni volta la funzione richiama se stessa… perché la catena di invocazioni non continua all'infinito?

- Quando si può dire che una ricorsione è ben definita?

- Informalmente
  - Se per ogni applicazione del passo induttivo ci si avvicina alla situazione riconosciuta come caso base, allora la definizione non è circolare, e la catena di invocazioni termina

# Un altro esempio: la serie di Fibonacci

- Leonardo Pisano, figlio di Bonaccio
  Fi'Bonacci, 1202

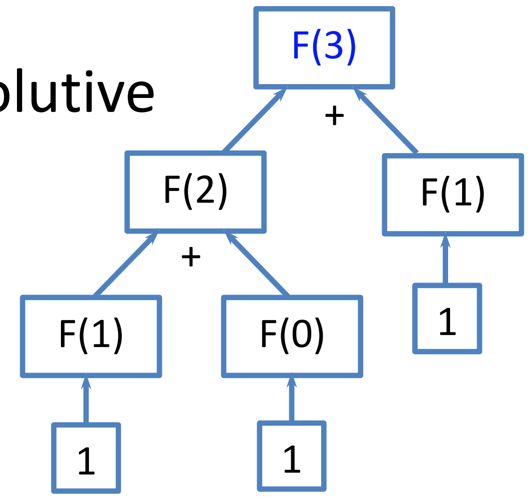
- Partì dallo studio sullo sviluppo di una colonia di conigli in circostanze ideali
  - Partiamo da una coppia di conigli appena nati
  - La coppia diventa fertile dopo 1 mese e genera una nuova coppia ogni mese dopo il primo
  - Le nuove coppie si comportano in modo analogo
  - I conigli non muoiono mai (!)
  - Quante coppie ci sono dopo n mesi?

# Un altro esempio: la serie di Fibonacci

- Dopo 1 mese una coppia di conigli sarà fertile
- Dopo 2 mesi ci saranno due coppie di cui una sola fertile
- Dopo 3 mesi ci saranno 2+1=3 coppie perché solo la coppia fertile avrà generato; di queste tre, due saranno le coppie fertili, quindi
- Nel mese seguente (quarto mese dal momento iniziale) ci saranno 3+2=5 coppie

# Definizione ricorsiva della serie

- I numeri di Fibonacci
  - Modello alla base di molte dinamiche evolutive delle popolazioni




- $F = \{ f_0, \ldots, f_n, \ldots \}$
  - $f_0 = 1$
  - $f_1 = 1$

  2 casi base
  - Per $n > 1$, $f_n = f_n - 1 + f_n - 2$

  1 passo induttivo

- Notazione "funzionale”
  - $f(i)$ invece di $f_i$

# Numeri di Fibonacci in C

```
int fibo(int  n) {
   if (n == 0 || n == 1)
      return 1;
   else
      return fibo(n-1) + fibo(n-2);
}
```

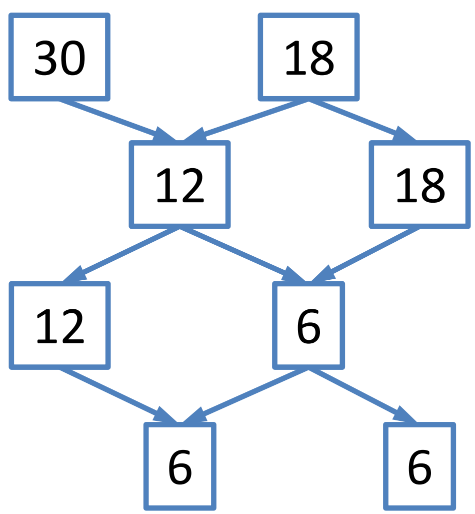
Ovviamente supponiamo n>=0

# Un altro esempio: MCD à-la-Euclide

- MCD tra M e N (M, N naturali positivi)
  - Se M=N allora MCD è N
  - Se M>N allora esso è il MCD tra N e M-N
  - Se N>M allora esso è il MCD tra M e N-M

1 caso base

2 passi induttivi



# MCD versione ricorsiva

```
int EuclideRic (int m, int n) {
    if (m == n)
        return m;
    if (m > n)
        return EuclideRic(m – n, n);
    else
        return EuclideRic(m, n – m);
}
```

# MCD versione iterativa

```
int EuclideIter (int m, int n) {
      while (m != n) {
            if (m > n) {
                  m = m – n;
            } else {
                  n = n – m;
            }
      return m;
}
```

# Funzione esponenziale (intera)

- Definizione iterativa
  1. $b^e = 1$ se $e = 0$
  2. $b^e = b * b * \dots b$ (e volte) se $e > 0$

Codice iterativo

```
int esp(int b, int e) {
    int i, r = 1;
    for (i = 1; i <= e; i++)
        r = r * b;
    return r;
}
```

- Definizione induttiva
  1. $b^e = 1$ se $e = 0$
  2. $b^e = b * b^{(e-1)}$ se $e > 0$

Codice ricorsivo

```
int esp(int b, int e) {
    if (e == 0)
        return 1;
    else
        return b * esp(b, e-1);
}
```

# Esecuzione di funzioni ricorsive

- In un certo istante possono essere in corso diverse attivazioni dello stesso sottoprogramma
  - Ovviamente sono tutte sospese tranne una, l'ultima invocata, all'interno della quale si sta svolgendo il flusso di esecuzione

- Ogni attivazione esegue lo stesso codice ma opera su copie distinte dei parametri e delle variabili locali

# Il modello a runtime: esempio

```
int FattRic(int);

int main() {
    int val, ris;
    printf("dammi un naturale   ");
    scanf("%d", &val);
    ris = FattRic(val)
    printf("\nfattoriale= %d", ris);
    return 0;
}

int FattRic (int  n) {
    int temp;
    if (n == 0)
        return 1;
    else {
        temp = n * FattRic(n-1);
        return temp;
    }
}
```

~~n = 0~~
~~temp = ?~~

~~n = 1~~
~~temp = 1*1~~

~~n = 2~~
~~temp = 2*1~~

~~n = 3~~
~~temp = 3*2~~

val = 3
ris = 6

*Assumiamo val = 3*

temp

- Cella temporanea per memorizzare il risultato della funzione chiamata

# Terminazione (ancora!)

- Attenzione al rischio di catene infinite di chiamate
- Occorre che le chiamate siano soggette a una condizione che assicura che prima o poi la catena termini
- Occorre anche che l'argomento sia "progressivamente ridotto" dal passo induttivo
  - In modo da tendere prima o poi al caso base

# Esempio: lunghezza stringhe

Soluzione iterativa

```
int  lunghezzaI(char s[]) {
   int i = 0;
   while ( s[ i ] != '\0' )
      i++;
   return i;
}
```

Soluzione ricorsiva

```
int lunghezzaR(char *s) {
   if (*s == '\0') return 0;
   else return 1 + lunghezzaR(s+1);
}
```

# Le parole palindrome

- Palindromo è una parola che si può leggere indifferentemente da destra a sinistra e viceversa

- Tutte le parole di un solo carattere sono considerate palindrome
  - "a" -> sì
  - "db" -> no
  - "Anna" -> no (Se l'analisi è case insensitive)
  - "anno" -> no
  - "anilina" -> sì
  - “restereste” -> no (Anche se composta di due metà “uguali”)
  - "onorarono" -> sì
  - "lagerregal" -> sì (Scaffale del magazzino, in tedesco)
  - "saippuakivikauppias" -> sì (Mercante di steatite, in finlandese)

# Esercizio

- Si scriva un programma che memorizza in un array di caratteri una parola letta da stdin e verifica se la parola è o non è palindroma

- `int palindromo(char parola[], ...)`
  - Restituisce 1 o 0
  - Si chiede, in particolare, di farne una versione iterativa e una versione ricorsiva

- Versione iterativa: confronto tra tutte le coppie di lettere simmetriche rispetto al "centro"
  - Attenzione, la parola può avere un numero pari o dispari di caratteri

- Versione ricorsiva: un palindromo è tale se …

# Palindromi in versione ricorsiva

- Un palindromo è tale se:
  - La parola è di lunghezza 0 o 1, oppure
  - Il primo e l'ultimo carattere della parola sono uguali e inoltre la sotto-parola che si ottiene ignorando i caratteri estremi è a sua volta un palindromo

*Caso base*

*Passo induttivo*

*Il passo induttivo riduce la dimensione del problema!*

# Palindromi in versione ricorsiva

```
int palindromoR(char par[], int da, int a) {
   if (da >= a)
      return 1;
   else
      return (par[da] == par[a] &&
                 palindromoR(par, da+1, a-1));
}
```

# Palindromi ricorsivi: variante

```
int palindromoR(char par[], int da, int a) {
   if (da >= a)
      return 1;
   else
      return (palindromoR(par, da+1, a-1)
                && par[da] == par[a]);
}
```

- Qual è la differenza?

# Attenzione

- Come si fa la prima chiamata?

- Si suppone che il chiamante conosca (o calcoli) la lunghezza della stringa.
  - Esempio: palindromoR("oro", 0, 2)
  - Oppure: palindromoR(str, 0, strlen(str)-1)
  - Oppure ancora...

Introduciamo un'altra funzione:

```
int palindromo(char *s) {
    return palindromoR(s, 0, strlen(s)-1);
}
```

# Palindromi in versione iterativa

```
int palindromoI( char par[] ) {
   // Assegna gli indici del primo e
   // ultimo carattere della parola
   int da = 0;
   int a  = strlen( par ) - 1;
   while (da < a) {
      // Scandisce la parola facendo muovere
      // gli indici verso il centro di par
      if (par[da] != par[a])
         // Dice FALSE alla prima differenza
         return 0;
      ++da;
      —a;
   }
   // Se arriva alla fine senza differenze, TRUE
   return 1;
}
```

# Parametri passati per indirizzo

```c
/* Incrementa il primo parametro
   del valore del secondo */
void incrementa(int *n, int  m) {
   if (m != 0) {
      (*n)++;
      incrementa(n, m-1);
   }
   return;
}
```

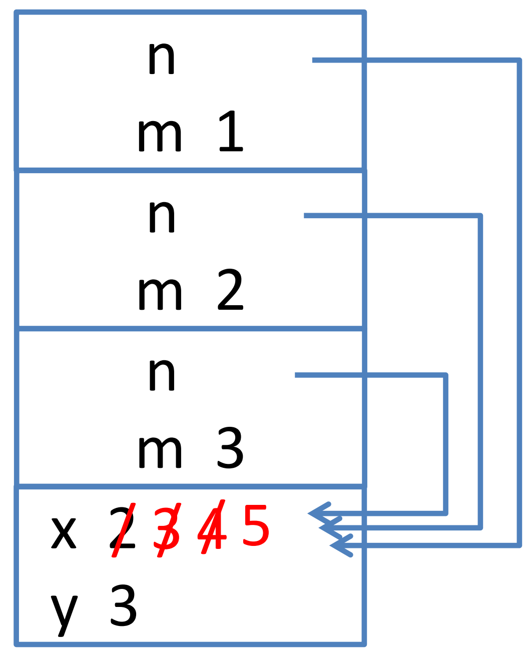
```c
int x, y;
...
x = 2;
y = 3;
incrementa(&x, y);

/* NB la chiamata iniziale
   ha forma diversa dalla
   chiamata ricorsiva */
```

# Modello a run-time

```
void incrementa(int *n, int  m) {
   if (m != 0) {
      (*n)++;
      incrementa(n, m-1);
   }
   return;
}


int x, y;
...
x = 2;
y = 3;
incrementa(&x, y);
```



# Ancora stringhe palindrome

- Stringa palindroma se:
  - Stringa vuota, oppure
  - Ha un solo carattere, oppure
  - Il suo cuore è una stringa palindroma, racchiusa tra caratteri uguali (primo e ultimo)

```
int Palindrome(char *PC, char *UC);
```

```c
#define LunghMaxStringa  100

int  Palindrome(char *PC, char *UC);

int main() {
    char  str[LunghMaxStringa+1];
    int  LunghStr;
    scanf("%s", str); /* NB assumiamo non ci siano spazi */
    LunghStr = strlen(str);
    if (LunghStr == 0)
        printf("La stringa è palindroma");
    else {
        printf("La stringa");
            if (! Palindrome(str, str + LunghStr – 1))
                printf(" NON");
        printf(" è palindroma\n");
    }
    return 0;
}
```

```c
int Palindrome(char *PC, char *UC) {
    if (PC >= UC) /* Stringa vuota o di 1 carattere */
        return 1;
    if (*PC != *UC) /* Primo e ultimo car. diversi */
        return 0;
    else
         /* Chiamata ricorsiva escludendo
            primo e ultimo carattere */
         return Palindrome(PC+1, UC–1);
}
```

```c
int f(char *p, char *u) {
       return p>u || *p==*u && f(p+1,u-1);
}
```

# Osservazioni sul programma

- Legge una stringa (termina con '\0')
- Ne calcola la lunghezza con strlen()
- Se stringa vuota o di un carattere → palindroma
- Se caratteri agli estremi diversi → *non* lo è
- Altrimenti applica la funzione Palindrome alla stringa privata degli estremi
  - Elegante uso di due puntatori …
    - Indirizzi del primo e ultimo carattere della parte non ancora esaminata
  - … spostati avanti e indietro a ogni chiamata ricorsiva

# Altri tipi di palindromi

- Palindromi a parola
  - "Fall leaves after leaves fall"
- Palindromi a frase (ignorando spazi e punteggiatura)
  - "I topi non avevano nipoti”
  - "Avida di vita, desiai ogni amore vero, ma ingoiai sedativi, da diva”
  - "Sun at noon, tan us!”
  - "Was it a (b|c|r)at I saw?”
  - "Was It a car or a cat I saw?”
- Esempi notevoli:
  - G. Perec, "9691" (> 5000 caratteri)
    - "Trace l'inégal palindrome. Neige [...] ne mord ni la plage ni l'écart."
  - G. Varaldo, "11 Luglio 1982" (> 4000 caratteri)
    - Ai lati, a esordir, dama [...] a Madrid, rosea Italia!
  - Batman, "Una storia italiana" (> 1000 caratteri)
    - O idolo, se vero, mal onori parole [...] rapirono l'amore, v'è sol odio.

# Altri tipi di palindromi

- Palindromi a riga
  - J. A. Lindon, "Doppelganger"

    "Entering the lonely house with my wife,
    I saw him for the first time
    peering furtively from behind a bush
    [...]
    Peering furtively from behind a bush,
    I saw him, for the first time
    entering the lonely house with my wife."

- Esercizio: implementare funzioni di verifica per palindromi a parola, a frase, a riga

# Esempio: inversione stringa

- Scrivere una funzione che costruisca la stringa inversa di una stringa data nello stesso vettore

- Il chiamante deve invocare la funzione con parametri:
la stringa da invertire, str[], e la lunghezza, n, della stessa

- Il ragionamento induttivo che applichiamo è:
  – Se abbiamo il risultato dell'inversione della sottostringa ottenuta da quella di partenza senza il primo e l'ultimo carattere (che sarà lunga n-2 caratteri) …
  – … possiamo completare l'inversione della stringa di partenza, scambiando il primo e l'ultimo carattere

# Esempio: inversione stringa

```
void inversione(char str[], int n) {
   if (n <= 1) return;          // Caso base
   inversione(&str[1], n-2);   // Passo induttivo
   char temp = str[n-1];
   str[n-1] = str[0];
   str[0] = temp;
}
```

*Esercizio*: riscrivere la funzione, con prototipo

```
void inversione(char str[], int inizio, int fine);
```

# Esempio: inversione stringa

Metodo alternativo di inversione

- Il chiamante passa anche il puntatore alla stringa che conterrà l'inversa, cioè il prototipo che vogliamo è:

```
char * inversione(char *s, char *t);
```

- Si restituisce la stringa costruita (puntatore)

- Ci serviamo di

```
char * strcpy(char *dest, char *src)
```

  – Copia la stringa src nella stringa dest e restituisce il ptr dest

```
char * strncat(char *dest, char *src, int n)
```

  – Aggiunge i primi n caratteri di src in coda a dest e restituisce il ptr dest

# Esempio: inversione stringa

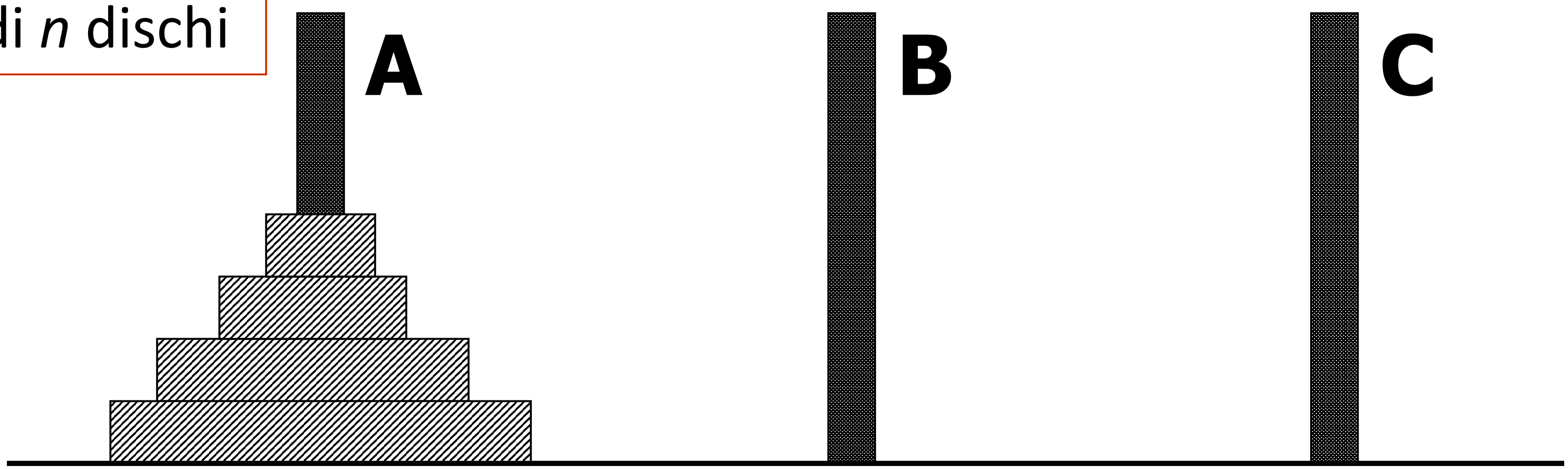
```
char * inversione(char *s, char *t) {
   if (strlen(s) <= 1)    // Caso base
        return strcpy(t, s);
   else                   // Passo induttivo
        return strncat(inversione(s+1,t), s, 1);
}
```

*Attenzione*: la memoria che contiene la stringa t è allocata a cura del programma che effettua la prima chiamata (`strncat(…)`e `inversione(…)` *non allocano* memoria)

# Le torri di Hanoi

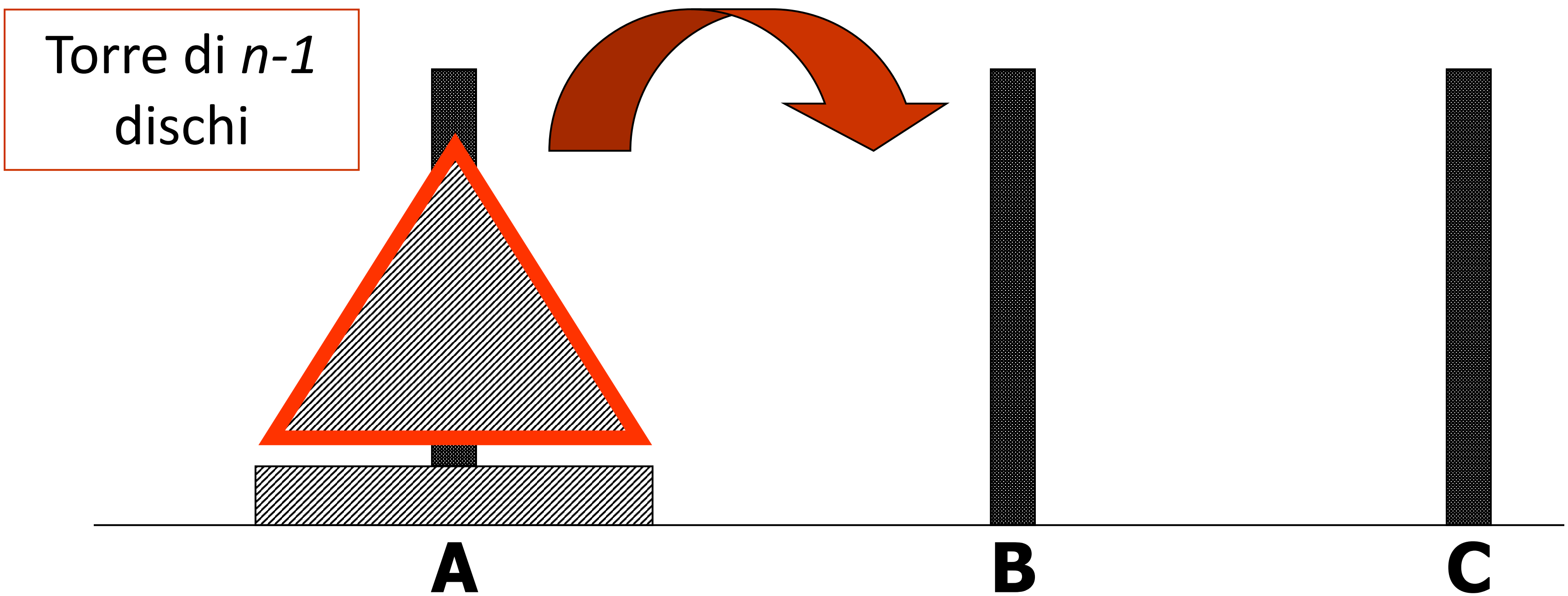
Spostare tutta la torre da A a C spostando un cerchio alla volta e senza mai mettere un cerchio più grosso su uno più piccolo

Torre di *n* dischi

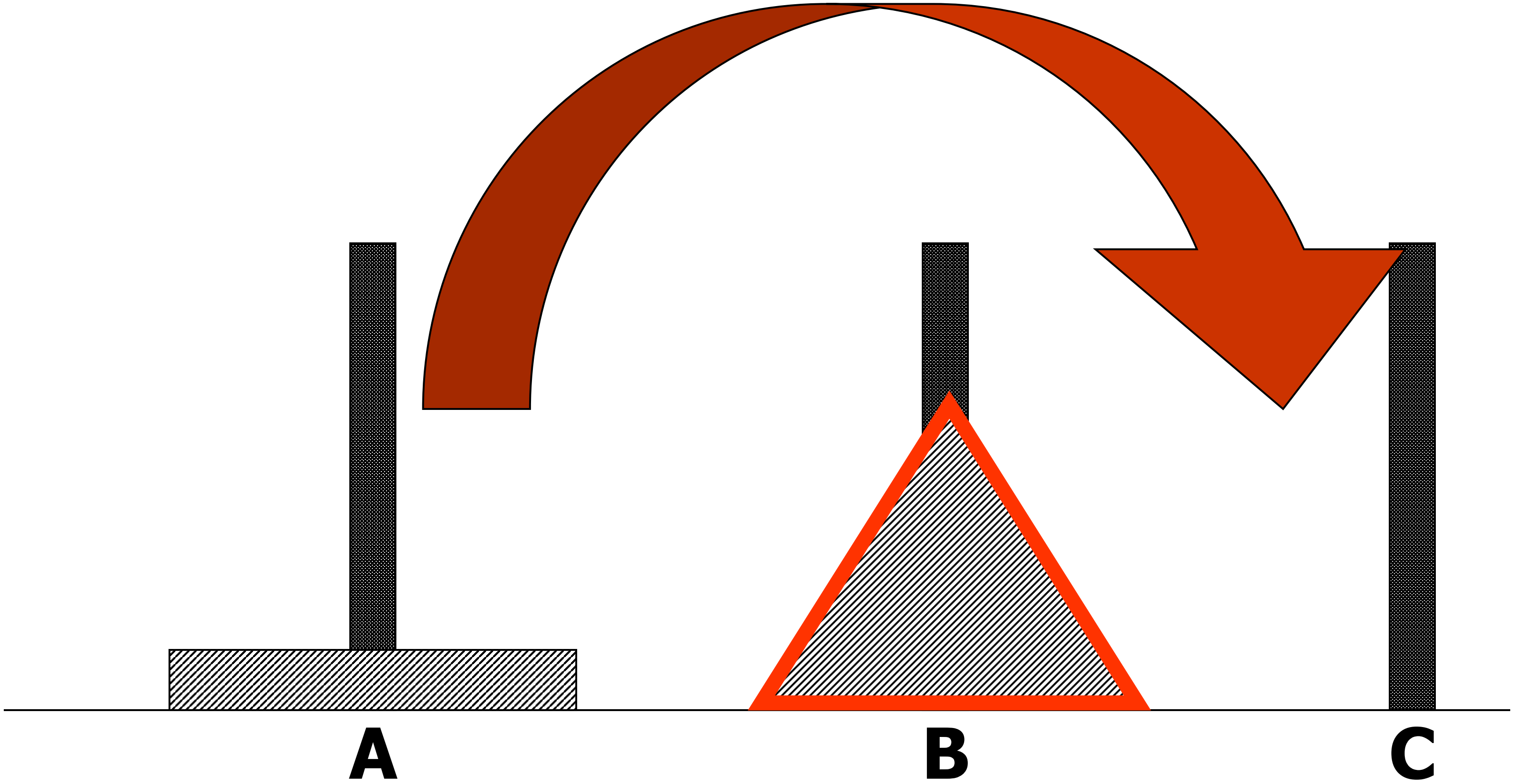



Formulazione ricorsiva?

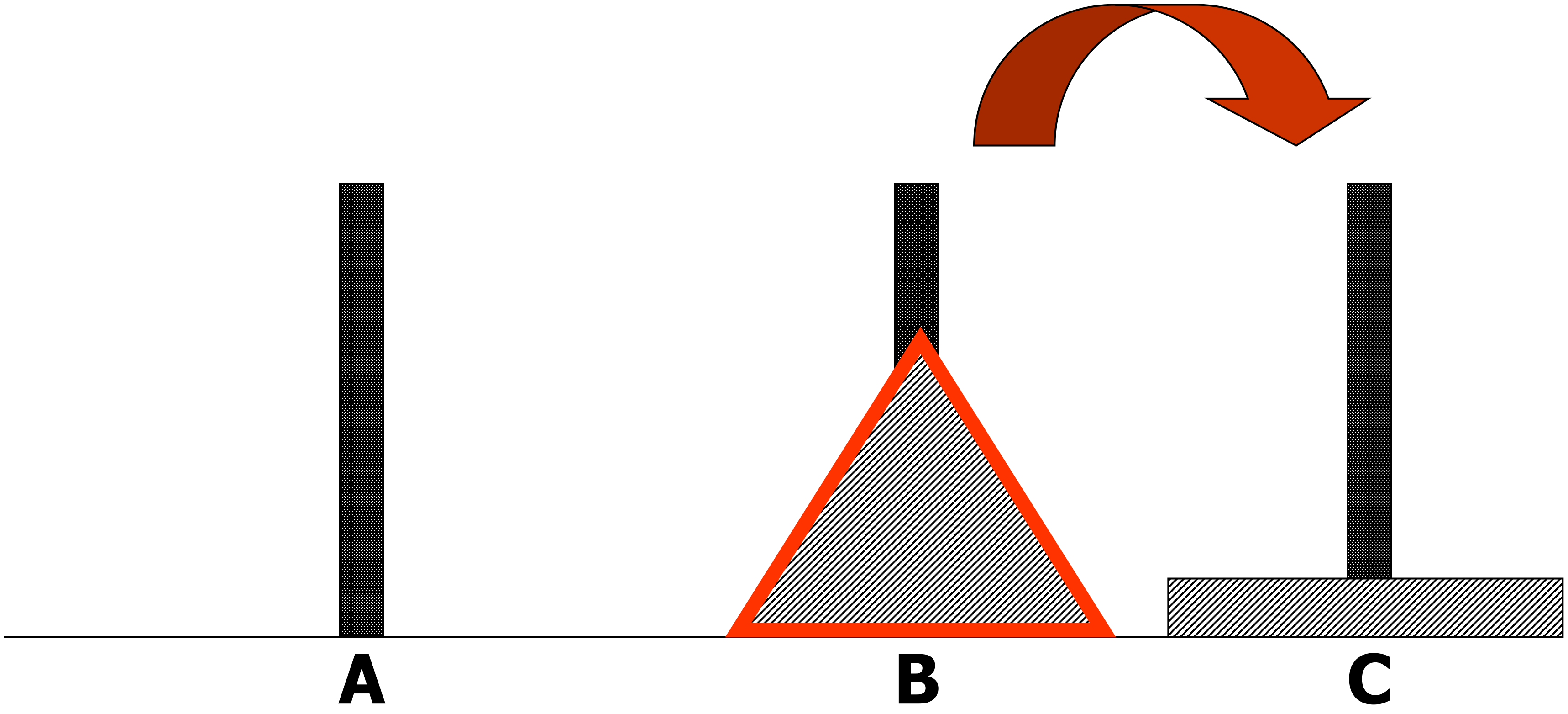
# Le torri di Hanoi



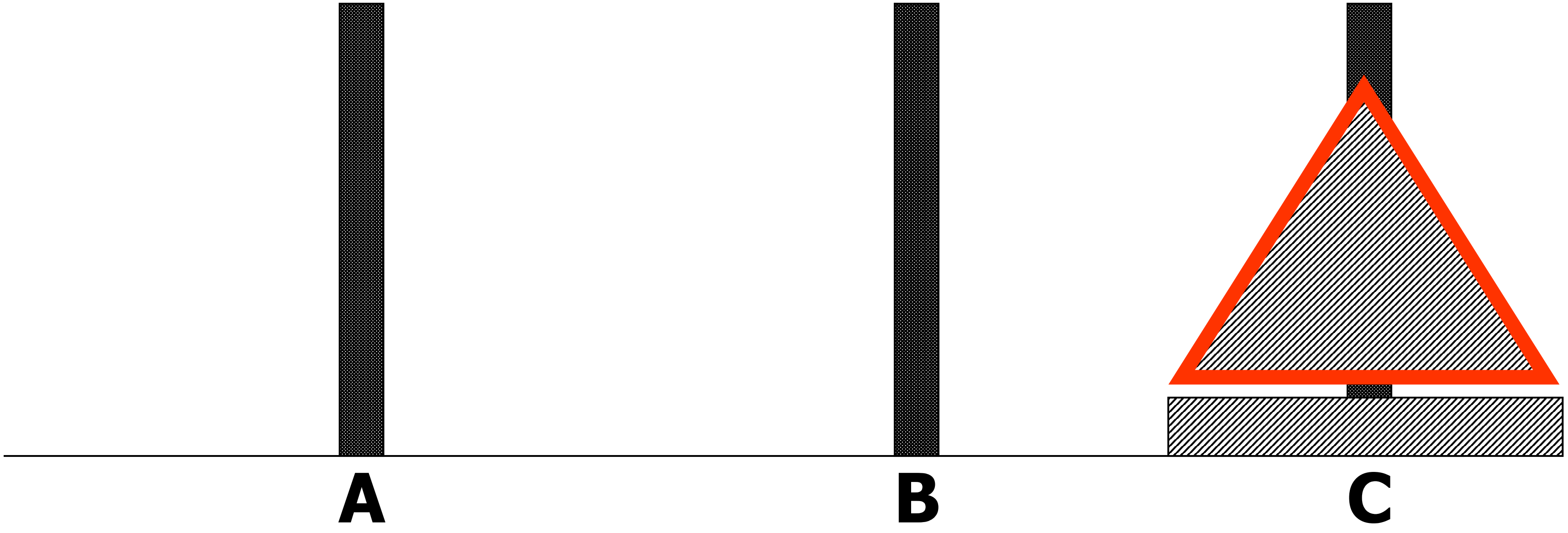
# Le torri di Hanoi



# Le torri di Hanoi



# Le torri di Hanoi



# Il metodo

- Il programma deve stampare una serie di comandi di spostamento
  - So spostare la torre di 0 elementi da A a C
    - Caso di base
  - Per spostare la torre di N elementi da A a C
    - Sposto la torre di N-1 cerchi da A a B
    - Sposto il cerchio restante in C
    - Sposto la torre di N-1 elementi da B a C

- Gli spostamenti da un piolo all'altro avvengono usando "il piolo residuo" come piolo di appoggio

Chiamata iniziale

```
hanoi(12, 'A', 'C', 'B')
/* significa che abbiamo una torre di 12 cerchi
   da trasferire da A a C "appoggiandoci" a B */
```

```
void hanoi (int n, char from, char to, char with) {
   if ( n != 0 ) {
      hanoi( n-1, from, with, to );
      printf("Sposta un cerchio da %c a %c\n", from, to);
      hanoi( n-1, with, to, from );
   }
}
```

# Una variante più "stringata"

```
hanoi (int n, int from, int to);
/*
Significa che abbiamo una torre di n cerchi da trasferire da
from a to; adottiamo una codifica dei nomi dei tre pioli che
permetta di ricavare in modo immediato il "nome" di ogni
piolo partendo dai "nomi" degli altri due: i pioli sono ora
indicati da interi 1, 2, 3, e non dei caratteri 'A', 'B', 'C'
*/


void hanoi (int n, int from, int to) {
   if (n != 0) {
      hanoi(n-1, from, 6 – from – to);
      printf("sposta cerchio da %d a %d", from, to);
      hanoi(n-1, 6 – from – to, to);
   }
}
```

# Hanoi: soluzione iterativa

- Non è così evidente …
- Stabiliamo un "senso orario" tra i pioli: 1, 2, 3 e poi ancora 1, ecc.
- Per muovere la torre nel prossimo piolo in senso orario bisogna ripetere questi due passi:
  - Sposta il disco più piccolo in senso orario
  - Fai l'unico altro spostamento possibile con un altro disco

# Ricorsione o iterazione?

- Spesso le soluzioni ricorsive sono eleganti
- Sono vicine alla definizione del problema
- Però a volte possono essere inefficienti
  - Chiamare un sottoprogramma significa allocare memoria a run-time
- N.B. è sempre possibile trovare un corrispondente iterativo di un programma ricorsivo

# Calcolo numeri di fibonacci

```
int fibonacci (int  n) {
      if (n == 0 || n == 1)
            return 1;
      else return (fibonacci(n–1) +
                   fibonacci(n–2));
}
```

*Inefficiente!*
*Calcola più volte l'i-esimo numero di fibonacci!*

# Numeri di Fibonacci

- La prima volta che si calcola un dato numero di Fibonacci lo si memorizza in un array
- Dalla seconda volta in poi, anziché ricalcolarlo, lo si legge direttamente dall'array
- Occorre un valore “innocuo” con cui inizializzare l'array per indicare che il numero di Fibonacci corrispondente non è stato ancora calcolato
  - Qui si può usare ad esempio 0

# Inizializzazione dell'array memo

```
#define MAX 100
long int memo[MAX];
main() {
   int i, n;
   for (i=2; i < MAX; i++) // inizializzazione
       memo[i]=0;
   memo[0] = memo[1] = 1;  // i due casi base
   printf("Un intero: ");
   scanf("%d",&n);
   printf("fib(%d) = %d", n, fib(n));
}
```

# Calcolo con memo

```
long fib(int n) {
  if (memo[n] != 0)
      return memo[n];
  memo[n] = fib(n-1) + fib(n-2);
  return memo[n];
}
```

Drastica riduzione della *complessità* (aumento di efficienza)
Questa soluzione richiede un tempo *lineare* in n
La soluzione precedente richiede un tempo *esponenziale* in n

# Calcolo con memo

E se per caso ci servisse un fib(k) con k >= MAX ??

```
long fib( int n ) {
  if (n >= MAX)
      return fib(n-1) + fib(n-2);
  if (memo[n] != 0)
      return memo[n];
  memo[n] = fib(n-1) + fib(n-2);
  return memo[n];
}
```

Con questo accorgimento non c'è limite a n e l' "effetto memo" è limitato ai soli valori <= MAX
(che sono comunque quelli che sarebbero ricalcolati con maggiore frequenza in assenza di memo)